

## SINCRONIZACIÓN Y ESTABILIDAD EN UN SISTEMA COMPUESTO POR DOS OSCILADORES QUÍMICOS IDÉNTICOS

### SYNCHRONIZATION AND STABILITY IN A SYSTEM OF TWO IDENTICAL CHEMICAL OSCILLATORS

S. A. OPORTO ALMARAZ<sup>†</sup>

Carrera de Ciencias Químicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
Campus Universitario Cota Cota. Casilla 303  
La Paz - Bolivia

G. M. RAMÍREZ ÁVILA<sup>‡</sup>

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física  
Universidad Mayor de San Andrés  
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635  
La Paz - Bolivia  
(Recibido 24 de Septiembre de 2014; aceptado 17 de Octubre de 2014)

#### RESUMEN

Empleando el Oregonator como modelo de la reacción de Belousov-Zhabotinsky, se llevó a cabo el estudio del proceso de sincronización de dos osciladores idénticos con acoplamiento bidireccional diagonal; además, tomando como parámetro el coeficiente de acoplamiento, se analizó la estabilidad del régimen de sincronización en términos del máximo exponente transversal de Lyapunov. Se identificó la secuencia perturbación-regulación-ajuste tanto para la auto-organización del sistema compuesto sincronizado como para su mantenimiento luego de ser sometido a perturbación.

Código(s) PACS: 05.45.Xt — 82.40.Bj — 82.40.Qt

*Descriptores:* Sincronización; osciladores acoplados — Oscilaciones, caos y bifurcaciones — Sistemas químicos complejos

#### ABSTRACT

Using the Oregonator as a model for the Belousov-Zhabotinsky reaction, we studied the synchronization process of two identical oscillators with diagonal bidirectional coupling. We analyzed the stability of the synchronous regime in terms of the largest transversal Lyapunov exponent by considering the coupling strength as the main parameter. We identified the sequence perturbation-regulation-adjustment both for the system's self-organization and for its maintenance when it is perturbed.

*Subject headings:* Synchronization; coupled oscillators — Oscillations, chaos, and bifurcations — Complex chemical systems

#### 1. INTRODUCCIÓN

La emergencia de propiedades nuevas es una característica de los sistemas complejos; un caso clásico es la situación explicada en Goldbeter (1994), donde la agregación de una población crítica de *dictyostelium discoideum* para formar una estructura multicelular diferenciada es capaz de generar nuevas cepas; un otro ejemplo es el fenómeno de respuesta de una población de luciérnagas hembra al proceso de sincronización de una población de luciérnagas macho que se detalla en Ramírez

Ávila et al. (2011).

La sincronización constituye un aspecto de la interacción de dos o más osciladores auto-sostenidos en el que se lleva a cabo el ajuste de sus ritmos de oscilación, y puede ocurrir en poblaciones de insectos, células cardíacas o nerviosas como se menciona en Pikovsky et al. (2001); en circuitos electrónicos tales como los descritos en Ramírez Ávila et al. (2003) y Conde Saavedra (2007); o algunos que pueden ser importantes en telecomunicaciones como el referido en Pecora et al. (1997); además de osciladores químicos como los presentados en Toth et al. (2006).

El acoplamiento difusivo de dos osciladores en la

<sup>†</sup>sorgeoport@gmail.com

<sup>‡</sup>http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/

reacción de Belousov-Zhabotinsky (BZ) expuesto en Field et al. (1972) ha sido estudiado tanto desde el punto de vista teórico como experimental tal como lo muestran Crowley & Epstein (1989), Bar-Eli (1990) y Doumbouya et al. (1993). Los fenómenos observados se atribuyen a su dinámica en relación con el flujo de sustancia entre los reactores. Así, en un sistema de dos osciladores idénticos y con distintos volúmenes se tiene cuasiperiodicidad y caos tal como lo menciona Doumbouya et al. (1993); en otro caso, dos osciladores BZ paraméricamente distintos pueden sincronizar en fase o fuera de fase, como lo señala Crowley & Epstein (1989).

En el presente trabajo se emplea como modelo de la reacción BZ el Oregonator tal como se plantea en Field & Noyes (1974), es decir, un esquema de cinco etapas irreversibles y tres variables dinámicas asociadas a especies químicas, a partir del cual se estudia la sincronización y su estabilidad en un sistema de dos osciladores idénticos acoplados difusivamente. La dinámica del Oregonator está descrita por el sistema de ecuaciones diferenciales expuesto en Gray & Scott (1994):

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{F}(\mathbf{r}; q, \epsilon, f) = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1}[qy - xy + x(1-x)] \\ 200\epsilon^{-1}(-qy - xy + fz) \\ x - z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  es un punto en el espacio de fases y  $\mathbf{F}(\mathbf{r}; \epsilon, f)$  es la velocidad de fase asociada; tiempo, variables y parámetros de control son adimensionales. Como antecedente, se realizó el estudio analítico y numérico del Oregonator en Oporto Almaraz & Ramírez Ávila (2013a) con un parámetro  $q = 0.0008$  que corresponde a  $\text{pH} = 0.097$ , mientras que

$$\epsilon = \frac{1}{8k_0} \frac{B}{A}, \quad (2)$$

con  $k_0 = 1 \text{ M}^{-1}\text{s}^{-1}$ ,  $A = [\text{BrO}_3^-]$  y  $B = [\text{Org}]$ , siendo  $[\text{Org}]$  la concentración total de especies orgánicas. Para nuestros fines, basta considerar a  $f$  como parámetro numérico. Bajo estas condiciones, los puntos fijos en el espacio de parámetros  $\epsilon - f$  se clasificaron en una región de estabilidad y otra de inestabilidad, separados por la curva de bifurcación de Hopf. Experimentalmente, en Oporto Almaraz & Ramírez Ávila (2013b) se estudió la reacción BZ a  $\text{pH}$  de 0.097 en reactor cerrado y se clasificó su dinámica en el espacio de concentraciones  $\epsilon_0 - f_0$ , equivalente al espacio de parámetros; además de definirse una región de bifurcación homóloga a la curva de bifurcación. Por tanto, dada su relativa simplicidad respecto a modelos de la reacción BZ de 80 etapas elementales como el que se expone en Györgyi et al. (1990), el Oregonator resulta un modelo significativo y permite abordar problemas de mayor complejidad como el de la sincronización.

El presente artículo se organiza de la siguiente manera. En §2 se lleva a cabo el estudio del proceso de sincronización completa de los osciladores y se efectúa el análisis de estabilidad de la variedad

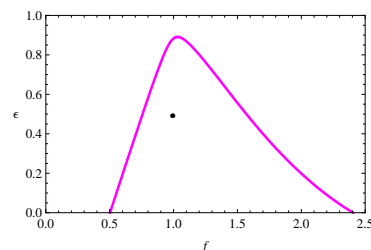


FIG. 1.— (Color online) Curva de bifurcación de Hopf en el espacio de parámetros  $\epsilon - f$  para el Oregonator cuando  $q = 0.0008$  y el punto  $(1, 0.5)$  perteneciente a la región de inestabilidad.

TABLA 1  
CONDICIONES INICIALES PARA LOS OSCILADORES O1 Y O2.

O1	O2
$x_{10} = 0.0008$	$x_{20} = 0.0774$
$y_{10} = 21.0804$	$y_{20} = 0.5145$
$z_{10} = 0.0348$	$z_{20} = 0.0404$

asociada al régimen de sincronización; la discusión de los resultados obtenidos enfatizando en los aspectos físicos se efectúa en §3. Finalmente, en §4 se dan las conclusiones y perspectivas del trabajo.

## 2. MODELO Y SU ANÁLISIS

### 2.1. Osciladores idénticos

Para  $q = 0.0008$ ,  $B = 1\text{M}$  y  $A = 0.25\text{M}$  se tiene  $\epsilon = 0.5$  y si se asume que  $f = 1$ , entonces, se tiene un punto en el espacio de parámetros  $\epsilon - f$  que se muestra en la Figura 1. Empleando las condiciones iniciales  $\mathbf{r}_{10}$  y  $\mathbf{r}_{20}$ , cuyos componentes se muestran en la Tabla 1, se definen dos *osciladores idénticos*,  $\mathbf{r}_1(\tau + T)$  y  $\mathbf{r}_2(\tau + \Delta\tau + T)$ , denominados O1 y O2 respectivamente, como se describe en Stefański (2009), con una diferencia de tiempo  $\Delta\tau = 9.895$  que es proporcional a la diferencia de fase.

En la Figura 2 se comparan los osciladores O1 y O2 por sus (a) trayectorias en el espacio de fases y (b) sus series temporales para  $x_1$  y  $x_2$ , verificándose que ambos osciladores comparten el mismo ciclo límite pero en puntos distintos a un tiempo dado. Los valores promedio de la amplitud para cada variable son  $\bar{r}_{1,max} \approx \bar{r}_{2,max} \approx (0.2190, 21.0807, 0.1918)$  mientras que la frecuencia del ciclo límite es  $\nu = 0.0637$  que corresponde a un período  $T = 15.6980$ .

### 2.2. Efecto del acoplamiento.

El sistema formado por los osciladores idénticos O1 y O2 acoplados difusivamente tiene dimensión 6 y está representado por las ecuaciones cinéticas del Oregonator para cada oscilador, según (1), y adicionalmente un término de acoplamiento bidireccional diagonal entre las variables del mismo tipo tal como se explica en Stefański (2009) y Boccaletti (2008):

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{r}_1/d\tau \\ d\mathbf{r}_2/d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{r}_1; q, \epsilon, f) \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}_2; q, \epsilon, f) \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \end{pmatrix}; \quad (3)$$

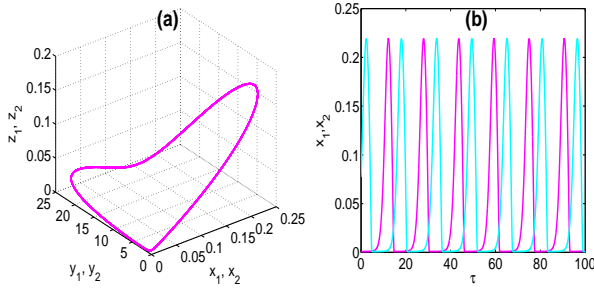


FIG. 2.— (Color online) Osciladores idénticos O1 (magenta) y O2 (cyan) sin acoplamiento definidos por los parámetros  $q = 0.0008$ ,  $f = 1$ ,  $\epsilon = 0.5$ . (a) Espacio de fases y (b) series temporales.

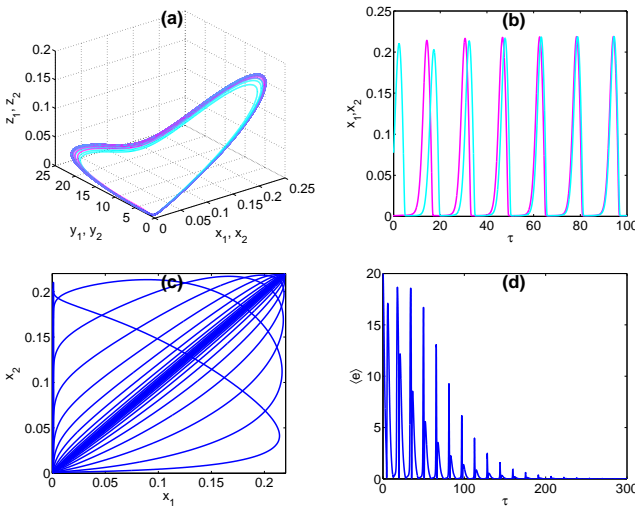


FIG. 3.— (Color online) Osciladores idénticos O1 (magenta) y O2 (cyan) acoplados difusivamente. (a) Trayectorias en el espacio de fases, (b) series temporales y (c) variedad de sincronización respecto a la variable  $x$  de cada oscilador y (d) error medio de sincronización.

dicha interacción es la misma para todas las variables, de acuerdo a la matriz por bloques de matrices identidad  $\mathcal{I}$ , y está cuantificada por el coeficiente de acoplamiento  $C = kT_0\rho$  introducido en Crowley & Epstein (1989), donde  $k$  es la constante asociada al flujo de sustancia entre uno y otro reactor,  $\rho$  es la intensidad de acoplamiento y  $T_0 = (k_0B)^{-1} = 1$  es la constante de reescalamiento del tiempo, tal que  $\tau = t/T_0$ , de modo que el tiempo físico,  $t$ , coincide con el tiempo adimensional,  $\tau$ .

Considerando que los osciladores O1 y O2 están acoplados según (3) con  $k = 0.01$  y un valor de  $\rho = 1.5$  de modo que  $C = 0.015$ . Entonces, la integración del sistema de ecuaciones a partir de las condiciones iniciales  $\mathbf{r}_{10}$  y  $\mathbf{r}_{20}$  de la Tabla 1 proporciona la información que se muestra en la Figura 3. En las Figuras 3(a) y 3(b) se superponen, respectivamente, las trayectorias en el espacio de fases y las series temporales de la variable  $x$  de los osciladores acoplados, observándose una perturbación de sus trayectorias y en consecuencia de las am-

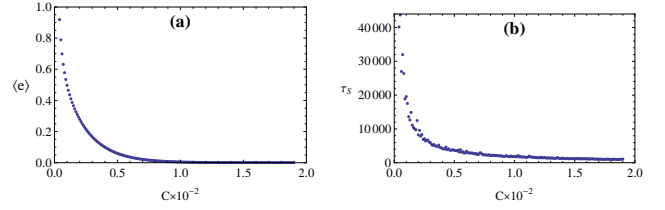


FIG. 4.— (Color online) Efecto del coeficiente de acoplamiento sobre la sincronización de los osciladores idénticos O1 y O2 acoplados difusivamente. Parámetros:  $q = 0.0008$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $f = 1$ . (a) Error medio de sincronización,  $\langle e \rangle$ , a un tiempo de referencia  $\tau = 250$  y (b) transiente,  $\tau_S$ .

plitudes y períodos, seguido de la regulación de dicho efecto caracterizada por la disminución progresiva de la diferencia de fase, hasta que esta se anula una vez que ambos subsistemas ajustan sus ritmos de oscilación sobre el ciclo límite que caracteriza al régimen de sincronización. En la Figura 3(c) se muestra la proyección del espacio de fases  $x_1-x_2$  donde los puntos sobre la recta  $x_1 = x_2$  conforman la componente  $x$  de dicha variedad, a la cual se denomina *variedad de sincronización*, simbolizada por  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{r}_{\mathcal{A}} | \mathbf{r}_{\mathcal{A}}(\tau) = \mathbf{r}_1(\tau) = \mathbf{r}_2(\tau)\}, \quad (4)$$

tal como se especifica en Pecora et al. (1997) y Stefański (2009), sobre la que tiende la dinámica de los osciladores a medida que estos sincronizan; de modo que la dimensión del sistema acoplado disminuye a la mitad, de 6 a 3. En la Figura 3(d) se observa la disminución en el tiempo del *error medio de sincronización* introducido en Boccaletti (2008) y utilizado en Ramírez Ávila (2007). Se lo denota por  $\langle e(\tau) \rangle$  y está definido por la distancia entre las trayectorias correspondientes a O1 y O2 al tiempo  $\tau$ :

$$\langle e(\tau) \rangle \equiv l(\mathbf{r}_1(\tau), \mathbf{r}_2(\tau)) = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_{k1}(\tau) - x_{k2}(\tau))^2}. \quad (5)$$

Permite cuantificar el transiente  $\tau_S = 1212.32$  tal que  $\langle e(\tau) \rangle = 0, \forall \tau \geq \tau_S$ . En este caso la sincronización es completa dado que se verifica la condición asintótica  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle e(t) \rangle = 0$  mencionada en Mosekilde et al. (2002).

El ciclo límite que caracteriza a la variedad de sincronización,  $\mathbf{r}_{\mathcal{A}}(\tau) = \mathbf{r}_{\mathcal{A}}(T + \tau)$ ,  $\tau > \tau_S$ , tiene un período  $T = 15.6980$  y frecuencia aproximada  $\nu = 0.0637$ , mientras que las amplitudes promedio de las variables dinámicas en cada uno de los reactores son:  $\bar{\mathbf{r}}_{\mathcal{A}} = \bar{\mathbf{r}}_{1,max} \approx \bar{\mathbf{r}}_{2,max} \approx (0.2190, 21.0807, 0.1918)$ . Estas características del ciclo límite son prácticamente iguales a las obtenidas en el caso de los osciladores aislados y serán las mismas para cualquier valor de  $C$  mientras se mantengan fijos los parámetros de control.

A continuación se analiza el efecto del coeficiente de acoplamiento  $C$  sobre la sincronización de los osciladores O1 y O2 considerando el error medio de sincronización y el transiente. Si se mantienen fijos

los valores de  $T_0 = 1$  y  $k = 0.01$  entonces  $C = kT_0\rho$  juega el rol de parámetro a través de  $\rho$ . El intervalo de variación de  $C$  es  $[0.0004, 0.0200]$  en pasos de 0.0001. En la Figura 4(a) se obtienen los puntos  $(C, \langle e(\tau) \rangle)$  a un tiempo de referencia  $\tau = 250$ , para los cuales se tiene una tendencia exponencial  $\langle e(\tau) \rangle = Ae^{BC}$ , de cuyo ajuste resulta:

$$\langle e(\tau) \rangle \approx 0.8030e^{-515.5688C}, \quad (6)$$

con un coeficiente de correlación  $r^2 = 0.9998$ .

En la Figura 4(b) se muestran los puntos  $(C, \tau_S)$ ; en este caso, se tiene una ley de potencia  $\tau_S = MC^N$ , cuyo ajuste da:

$$\tau_S \approx 18.4147C^{-0.9971}, \quad (7)$$

con un coeficiente de correlación  $r^2 = 0.9939$ .

### 2.3. Estabilidad de la variedad de sincronización.

Una vez que los osciladores  $O1$  y  $O2$  acoplados y descritos por el sistema de ecuaciones (3) llegan a sincronizar completamente constituyen un sistema compuesto,  $O1O2$ , de dimensión 3, en el que la magnitud de las variables dinámicas son las mismas a cualquier tiempo en uno y otro reactor y pertenecen a la variedad de sincronización periódica cuya dinámica está descrita por las ecuaciones diferenciales del Oregonator evaluadas en  $\mathcal{A}$ :

$$\frac{d\mathbf{r}_A}{d\tau} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon}[qy_A - x_A y_A + x_A(1 - x_A)] \\ \frac{200}{\epsilon}(-qy_A - x_A y + fz_A) \\ x_A - z_A \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Se resalta el hecho de que si bien el término difusivo en (3) se anula una vez que se alcanza el régimen de sincronización, éste puede volver a manifestarse bajo una variación en el sistema  $O1O2$  que hará que los osciladores  $O1$  y  $O2$  se distingan.

Considerando una perturbación en las concentraciones de las especies químicas de los osciladores y manteniendo constantes los parámetros de control, de modo que se generen trayectorias distintas en el espacio de fases correspondientes a los osciladores del sistema compuesto  $O1O2$ :  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_A + \delta\mathbf{r}_1$  para  $O1$  y  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_A + \delta\mathbf{r}_2$  para  $O2$ . En este caso, la dinámica del sistema se reescribe en términos de la componente transversal de la perturbación respecto a la variedad de sincronización,  $\delta\mathbf{r}_\perp = \delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2$  como se expone en Pecora et al. (1997) y Mosekilde et al. (2002); y una vez realizado el análisis de estabilidad lineal como se plantea en Pikovsky et al. (2001), Stefański (2009) y Boccaletti (2008), se tiene la forma:

$$\frac{d(\delta\mathbf{r}_\perp)}{d\tau} = (\mathcal{J} - 2CI) \cdot \delta\mathbf{r}_\perp. \quad (9)$$

donde  $\mathcal{J}$  es el jacobiano de  $\mathbf{F}$  evaluado en  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{J}(\mathbf{r}_A(\tau); q, \epsilon, f) = \begin{pmatrix} \frac{1-2x_A-y_A}{\epsilon} & \frac{q-x_A}{\epsilon} & 0 \\ \frac{-200y_A}{\epsilon} & \frac{-200(q+x_A)}{\epsilon} & \frac{200f}{\epsilon} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

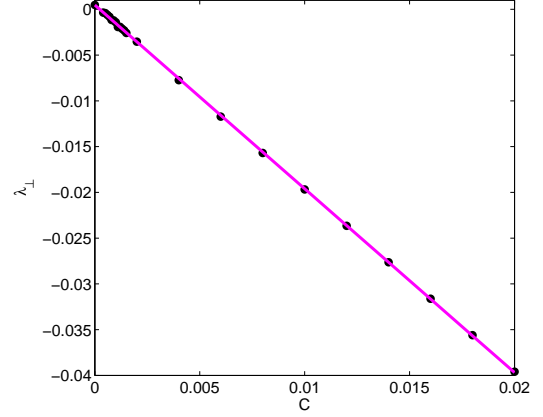


FIG. 5.— (Color online) Máximo exponente transversal de Lyapunov,  $\lambda_{\perp L}$ , respecto al coeficiente de acoplamiento,  $C$ , correspondiente a la estabilidad de la componente transversal de una perturbación sobre la variedad de sincronización asociada a los parámetros  $q = 0.0008$ ,  $f = 1$ ,  $\epsilon = 0.5$ ; en magenta su respectivo ajuste lineal.

Mediante un análisis similar se obtiene la dinámica de la componente longitudinal de la perturbación respecto a la variedad de sincronización,  $\delta\mathbf{r}_\parallel = \delta\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_2$ :

$$\frac{d(\delta\mathbf{r}_\parallel)}{d\tau} = \mathcal{J} \cdot \delta\mathbf{r}_\parallel. \quad (11)$$

La convergencia o divergencia de la trayectoria de la perturbación transversal determina la estabilidad de la variedad de sincronización, la cual es evaluada calculando el máximo exponente transversal de Lyapunov,  $\lambda_{\perp L}$ , asociado a (9); como se menciona en Stefański (2009), la relación entre este exponente y el coeficiente de acoplamiento es:

$$\lambda_{\perp L} = \lambda_{\parallel L} - 2C, \quad (12)$$

donde  $\lambda_{\parallel L}$  es el máximo exponente longitudinal de Lyapunov asociado a la ecuación (11) siendo además equivalente al exponente de Lyapunov de un oscilador en ausencia de acoplamiento.

Se estudió un intervalo de valores del coeficiente de acoplamiento  $C$  de  $[0.0004, 0.0200]$ , con pasos de 0.0001 para el subintervalo  $[0.0004, 0.0015]$  y 0.0020 en el subintervalo  $[0.0020, 0.0200]$ . La elección de las condiciones iniciales se hizo considerando que estas corresponden a un punto próximo a la variedad de sincronización, según dos casos: 1. se emplea una misma condición inicial para cada valor de  $C$  y 2. se emplea una condición inicial diferente para cada valor de  $C$ . En la Figura 5 se tienen los máximos exponentes transversales para el caso 2.

En la Tabla 2 se muestra el ajuste lineal de los datos para los casos 1 y 2.

### 2.4. Aspectos numéricos

La integración numérica de las ecuaciones diferenciales se llevó a cabo empleando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con paso de integración

TABLA 2  
 AJUSTE LINEAL DEL CONJUNTO DE PUNTOS  $(C, \lambda_{\perp L})$ .

Caso 1	$\lambda_{\perp L} = 0.0005 - 2.0000C$
Caso 2	$\lambda_{\perp L} = (0.0005 \pm 0.0001) - (2.0080 \pm 0.0070)C$

de 0.01 y tolerancias absoluta y relativa, ambas, de  $10^{-10}$ , a partir de la cuales se obtuvieron las trayectorias en el espacio de fases, las series temporales y, con base en estas, el error medio de sincronización.

Para el cálculo de los exponentes de Lyapunov se empleó el algoritmo propuesto por Wolf et al. (1985), el cual se basa en el conjunto ortonormal  $\{v_1^{(l)}, \dots, v_n^{(l)}\}$  que resulta de la ortonormalización por el método de Gram-Schmidt de los vectores propios obtenidos al paso de iteración  $\Theta$ ; de modo que el  $k$ -ésimo exponente de Lyapunov es según Stefański (2009) y Parker & Chua (1989):

$$\lambda_k \approx \frac{1}{L\Theta} \sum_{l=1}^L \ln |v_k^{(l)}|, \quad (13)$$

donde  $L$  es el número de particiones del tiempo total. Con base en este algoritmo, se empleó el programa implementado por Govorukhin (2004) con un paso de iteración  $\Theta = 0.01$ ,  $L = 600000$ , tolerancia absoluta de  $10^{-3}$  y tolerancia relativa de  $10^{-6}$ .

### 3. DISCUSIÓN

El acoplamiento de  $O1$  y  $O2$  implica la modificación de las ecuaciones diferenciales de cada oscilador a través de los términos de acoplamiento difusivo, lo que, de acuerdo a la Figura 3(a), hace que sus respectivas trayectorias se perturben simultáneamente en las magnitudes  $\delta r_1$  y  $\delta r_2$  al tiempo de referencia  $\tau_0$  respecto a los puntos  $r_{\Lambda 1}$  y  $r_{\Lambda 2}$  pertenecientes a los ciclos límite asociados:

$$r_1(\tau_0) = r_{\Lambda 1}(\tau_0 + T) + \delta r_1(\tau_0) \quad (14)$$

$$r_2(\tau_0) = r_{\Lambda 2}(\tau_0 + \Delta\tau_0 + T) + \delta r_2(\tau_0). \quad (15)$$

La diferencia entre estas últimas ecuaciones es equivalente al término difusivo, que para un tiempo  $\tau$ ,  $\tau_0 < \tau < \tau_S$ , donde  $\tau_S$  es el transiente, se escribe:

$$r_1(\tau) - r_2(\tau + \Delta\tau) = r_{\Lambda 1}(\tau + T) - r_{\Lambda 2}(\tau + \Delta\tau + T) + \delta r_1(\tau) - \delta r_2(\tau). \quad (16)$$

De acuerdo a la dinámica en la proyección del espacio de fases  $x_1-x_2$ , Figura 3(c), y a la variación temporal del error de sincronización, Figura 3(d), las trayectorias  $r_1$  y  $r_2$  se regulan a través de las variables dinámicas del mismo tipo en el término difusivo, lo que implica la disminución gradual de la diferencia de fase, según la Figura 3(b), hasta que, para  $\tau \geq \tau_S$ ,  $\Delta\tau = 0$ , de modo que los osciladores ajustan sus ritmos de oscilación sobre la variedad de sincronización,  $r_{\Lambda 1}(\tau + T) = r_{\Lambda 2}(\tau + T) = r_A(\tau + T)$ , caracterizada por un error de sincronización nulo y  $\delta r_1(\tau) = \delta r_2(\tau) = 0$  en (16).

Por tanto, el efecto del acoplamiento entre los osciladores idénticos  $O1$  y  $O2$  constituye el proceso de:

1. *perturbación* en los ciclos límite de cada oscilador, seguido de su
2. *regulación* a través de un transiente hasta su
3. *ajuste* sobre la variedad de sincronización.

En términos de la dimensión del sistema, el proceso que se acaba de explicar puede esquematizarse como:

$$(R^3)(R^3) \xrightarrow{1} R^6 \xrightarrow{2} R^3. \quad (17)$$

$(R^3)(R^3)$  representa las dimensiones de los osciladores  $O1$  y  $O2$  aislados; su acoplamiento da lugar a una perturbación (1) en cada oscilador y al sistema de dimensión  $R^6$ , cuya regulación (2) conduce al ajuste (3) de los osciladores sobre la variedad de sincronización que caracteriza la dinámica del sistema compuesto  $O1O2$  de dimensión  $R^3$ .

Según (8), el sistema compuesto sincronizado  $O1O2$  tiene la misma dinámica y restricciones paramétricas de los osciladores a partir de los cuales se configuró; pero a la vez tiene asimilado el término difusivo a través del cual sus partes se integran. Por tanto, el proceso perturbación-regulación-ajuste puede considerarse un fenómeno de auto-organización cuyo resultado es la emergencia del sistema compuesto completamente sincronizado  $O1O2$ . En este sentido el ciclo límite que caracteriza a dicho régimen adquiere el atributo de variedad de sincronización.

La dependencia del transiente respecto a la magnitud del coeficiente de acoplamiento según una ley de potencia (7) indica que el acoplamiento implica la sincronización de  $O1$  y  $O2$  a un tiempo dado en el intervalo de  $C$  estudiado; según (6), la tendencia de los osciladores acoplados a sincronizarse también se evidencia por la ley exponencial decreciente del error de sincronización a un tiempo de 250 respecto a  $C$ .

De acuerdo al análisis de estabilidad lineal de la variedad de sincronización correspondiente al sistema compuesto  $O1O2$ ,  $C$  pasa a ser un parámetro estructural a través del cual una perturbación genera una asimetría que restituye el término difusivo. Lo anterior se refleja en la dinámica de la perturbación transversal a dicha variedad (9), cuyo máximo exponente transversal de Lyapunov,  $\lambda_{\perp L}$ , está relacionado de forma lineal con  $C$ , tal como se muestra en la Tabla 2; salvo factores asociados al cálculo numérico, estos resultados pueden aproximarse a la relación  $\lambda_{\perp L} = \lambda_{\parallel L} - 2C$ , con  $\lambda_{\parallel L} = 0$ . En tanto que este valor del máximo exponente longitudinal de Lyapunov esté asociado al ciclo límite que caracteriza a la variedad de sincronización, se tendrá que  $\lambda_{\perp L} = -2C < 0$ , lo que indica que dicha variedad es estable siempre que  $C > 0$ .

Las restricciones al valor de  $C$  provienen de las escalas de tiempo en las que puede llevarse a cabo un proceso disipativo, es decir, estos valores deberán estar acordes a lo que pueda observarse experimentalmente; en este sentido, es de esperarse que para valores muy grandes o muy pequeños de  $C$  no se tenga sincronización.

La rapidez de convergencia de la perturbación transversal a la variedad de sincronización aumenta exponencialmente conforme aumenta el valor de  $C$ , de lo que se infiere que dicha variedad es estable dentro del intervalo de  $C$  estudiado.

La estabilidad de la variedad de sincronización que caracteriza al sistema  $O1O2$  está asociada al mantenimiento del mismo en términos del proceso perturbación-regulación-ajuste propuesto anteriormente. Considerando la dimensión del sistema, este proceso corresponde a la secuencia:

$$R^3 \xrightarrow{1} R^6 \xrightarrow{2} R^3. \quad (18)$$

Una perturbación (1) en el sistema compuesto sincronizado  $O1O2$  hace que ambos osciladores se diferencien de modo que la dimensión del sistema acoplado se duplica pasando de  $R^3$  a  $R^6$ ; el amortiguamiento de la perturbación en cada oscilador se da a través de un proceso de regulación (2) hasta el ajuste de los ritmos de oscilación sobre la variedad de sincronización (3), restituyendo así la dimensión del sistema compuesto  $O1O2$ .

La secuencia (18) no resulta el proceso inverso de (17). De hecho, respecto a (16), en el sistema compuesto  $O1O2$  perturbado, el término  $\delta r_1 - \delta r_2$  pasa a ser la perturbación transversal a la variedad de sincronización,  $\delta r_{\perp}$ , y en este sentido la secuencia de regulación-ajuste adquiere un significado nuevo pues implica el restablecimiento del régimen síncrono y en consecuencia el mantenimiento de  $O1O2$ . Lo anterior, es relevante en el sentido de que, respecto a sus partes, la complejidad del sistema compuesto sincronizado  $O1O2$  radica en la emergencia de propiedades nuevas.

El carácter invariante respecto a  $C$  tanto de la auto-organización como del mantenimiento del sistema sincronizado  $O1O2$  se debe ya sea a la naturaleza dinámica del Oregonator como al carácter diagonal del acoplamiento. Más allá de estas particularidades, pueden esperarse atributos adicionales debido a la riqueza dinámica de la reacción BZ, que puede incluir comportamiento caótico. También se pueden tener diferentes tipos de acoplamiento; así Por ejemplo, el sistema de dos osciladores de Rössler acoplados difusivamente en un solo sentido y de forma no diagonal a través de una variable presenta una relación no lineal entre  $\lambda_{\perp L}$  y  $C$  como se mues-

tra en Pecora et al. (1997); en este caso, el coeficiente de acoplamiento tiene un carácter crítico y en consecuencia la variedad de sincronización puede ser estable o inestable, lo que significa que el sistema compuesto puede ya sea mantenerse o disgregarse.

#### 4. CONCLUSIONES

Empleando como modelo el Oregonator, el acoplamiento difusivo de los osciladores idénticos y fuera de fase  $O1$  y  $O2$  conduce a la auto-organización, a través del proceso perturbación-regulación-ajuste, del sistema compuesto  $O1O2$ , el cual representa una estructura emergente caracterizada por una variedad de sincronización que mantiene la no linealidad del Oregonator y en la que se encuentra asimilado el término de acoplamiento difusivo. De acuerdo a una ley de potencia que relaciona el transiente con el coeficiente de acoplamiento, se deduce que la sincronización ocurre en el intervalo de  $C$  estudiado.

En el sistema compuesto el coeficiente de acoplamiento pasa a ser un parámetro estructural a través del cual una perturbación restablece el término difusivo y a la vez el proceso de regulación-ajuste, dando lugar al mantenimiento del sistema  $O1O2$ . Lo anterior significa, en términos de los exponentes de Lyapunov longitudinal y transversal a la variedad de sincronización, que ante una perturbación, el ciclo límite, con  $\lambda_{\parallel L} = 0$ , que caracteriza al régimen síncrono es estable; es decir,  $\lambda_{\perp L} < 0$ , para un valor de  $C$  distinto de cero.

La complejidad del sistema sincronizado  $O1O2$  deriva del carácter compuesto de su estructura en la que sus partes se encuentran integradas a través del acoplamiento, generando como un todo nuevas propiedades respecto a los osciladores aislados, tales como el mantenimiento del régimen síncrono.

Una de las perspectivas de este trabajo es el estudio experimental del fenómeno de sincronización de dos osciladores que siguen la reacción BZ con diferentes tipos de acoplamiento y, de forma análoga, llevar a cabo el estudio con base en modelos más completos para la reacción BZ.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Andrzej Stefański y Tomasz Kapitaniak por las sugerencias y, en este mismo sentido, S.A.O.A. agradece a Gabriela Conde Saavedra y Zui Oporto Almaraz.

#### REFERENCIAS

- Goldbeter A. (1994), *Biochemical oscillations and cellular rhythms* (Cambridge: Cambridge University Press).
- Ramírez Ávila G. M., Deneubourg J.-L., Guisset J.-L., Wessel N. & Kurths J. (2011) *Europhysics Letters*, **94**, 60007.
- Pikovsky A., Roseblum M. & Kurths J. (2001) *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*. (Cambridge: Cambridge University Press).
- Ramírez Ávila G. M., Guisset J.-L. & Deneubourg J.-L. (2003) *Physica D* **182**, 254.
- Conde Saavedra G. (2007) *Tesis de grado*, Física, UMSA.
- Pecora L., Carroll T., Johnson G., Mar D. & Heagy J. (1997) *Chaos* **7**, 4, 520.
- Toth R., Taylor A. F. & Tinsley M. R. (2006) *Journal of Physical Chemistry B* **110**, 20, 10170.
- Field R. J., Körös E. & Noyes R. M. (1972) *Journal of American Chemical Society*, **94**, 25, 8649.
- Crowley M. F. & Epstein I. R. (1989) *Journal of Physical Chemistry*, **93**, 6, 2496.
- Bar-Eli K. (1990) *Journal of Physical Chemistry*, **94**, 6, 2368.
- Doumbouya S. I., Münster A. F., Dooma C. J. & Schneider F. W. (1993) *Journal of Physical Chemistry*, **97**, 5, 1025.
- Field R. J. & Noyes R. M. (1974) *Journal of Chemical Physics*, **60**, 5, 1877.

- Gray P. & Scott K. (1994) *Chemical oscillations and instabilities*. (Oxford: Oxford university Press).
- Oporto Almaraz S. A. & Ramírez Ávila G. M. (2013) *Revista Boliviana de Física*, **23**, 16.
- Oporto Almaraz S. A. & Ramírez Ávila G. M. (2013) *Revista Boliviana de Química*, **30**, 2, 1.
- Györgyi L., Turányi T. & Field R. J. (1990) *Journal of Physical Chemistry*, **94**, 18, 7162.
- Stefański A. (2009) *Determining threshold of complete synchronization, and applications*. (Singapore: World Scientific).
- Boccaletti S. (2008) *The synchronization dynamics of complex systems*. (Elsevier).
- Ramírez Ávila G. M. (2007) *Revista Boliviana de Educación Superior en Ciencias*, **6**, 25-42.
- Mosekilde E., Maistrenko Y. & Postnov D. (2002) *Chaotic synchronization*. (Singapore: World Scientific).
- Wolf A., Swift J. B., Siwnney H. L. & Vastano J. A. (1985) *Physica*, **16D**, 285.
- Parker T. S. & Chua L. O. (1989) *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. (New York: Springer-Verlag).
- Govorukhin V. N. (2004) <http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvn/matds/>