

SINCRONIZANDO CON EL CAOS

Dr. G. Marcelo Ramírez Ávila

Instituto de Investigaciones Físicas

Universidad Mayor de San Andrés

Email: mravila@fiumsa.edu.bo

Website: <http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/>

RESUMEN

Se hace una revisión de los conceptos de sincronización y caos desde un enfoque de la dinámica no lineal; se muestra la interrelación entre estos aspectos lo que da lugar al fenómeno de la sincronización caótica. Se explica la importancia de su estudio en diferentes tipos de sistemas.

Palabras claves: sincronización; caos; osciladores acoplados; complejidad; sistemas dinámicos; dinámica no lineal.

ABSTRACT

The concepts of synchronization and chaos are reviewed from a nonlinear dynamics point of view. The interrelation among these aspects gives rise to the phenomenon of chaotic synchronization. The importance of the study of the chaotic synchronization and its applications is shown in different types of systems.

Keywords: *synchronization, chaos, coupled oscillators, complexity, dynamical systems, nonlinear dynamics.*

1. INTRODUCCIÓN

Un recuerdo de niñez que resta imborrable en mi memoria fue el de escuchar, en consignas tales como “contra el *caos* y la *anarquía*...” proferidas en sus acciones abusivas por políticos de derecha y militares que detentaban el poder en ese tiempo, dos palabras que de alguna manera marcaron mi vida académica y forma de pensar. Son justamente esos dos términos: caos y anarquía que se constituyeron en el futuro en mis atractores confiables en un mundo en el que ambos términos se utilizan abusivamente y de manera espuria y distorsionada. En este artículo, dedicaré buena parte del mismo al término caos; se sobreentiende que mi otro atractor es “harina de otro costal”.

Ya en mis años de estudiante universitario y de forma autodidacta, aparecen en mi camino de manera aún poco clara, términos típicos de la dinámica no lineal en un viejo, pero no por ello no buen libro de biofísica [1]; entre ellos, el concepto de atractor y autocatálisis. Mi visión de la dinámica no lineal se aclara en gran manera gracias al curso de “introducción a los fenómenos no lineales” dictado por el profesor Grégoire Nicolis [2], seguido como parte de mi maestría en física teórica. Además, el trabajo que realicé sobre el modelo de Rössler [3], uno de los modelos

paradigmáticos para estudiar caos, bajo la supervisión del mencionado profesor, me motivó a continuar con la investigación en este campo y así poder conocer al profesor Jean-Louis Deneubourg con quien abordé el problema de sincronización inspirados en el comportamiento que exhiben algunas especies de luciérnagas y que dio lugar a diversos estudios que van desde la construcción de los osciladores fotocontrolados (LCOs)¹ hasta la descripción del comportamiento de grupos de estos osciladores local [4], y globalmente acoplados [5], pasando por el análisis de los efectos de diferentes tipos de ruido sobre estos osciladores [6, 7]. En la actualidad continúo estudiando la sincronización en osciladores de relajación y también comencé en colaboración con el Grupo de Física Computacional de la Universidade Federal do Río Grande do Sul (UFRGS) el estudio de la sincronización en láseres de diodo semiconductor.

El presente artículo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 se define lo que es sincronización y se ilustra este concepto utilizando osciladores de integración y disparo (IFOs)² y LCOs. En la Sección 3 se da la noción de caos y se mencionan algunos ejemplos de sistemas caóticos. En la Sección 4 se consideran sistemas caóticos que sincronizan y se mencionan los posibles tipos de sincronización que pueden presentarse. Finalmente, en la Sección 5 se dan las conclusiones y perspectivas de la investigación realizada que justifica el título del artículo “sincronizando con el caos”.

2. SINCRONIZACIÓN

Corría el año 1673 cuando Huygens postrado en su lecho y quizás con el fin de combatir el aburrimiento observa el balanceo de los péndulos de dos relojes sostenidos por un mismo soporte. Para su sorpresa, se percató que estos péndulos siempre llegaban a una situación en la que el sentido de la oscilación de cada uno era opuesto al del otro³ [8]. Esta observación es la primera en describir la sincronización de un sistema. Considerando el origen etimológico de la palabra sincronización, esta significa compartir un mismo tiempo. Desde un punto de vista técnico, se define la sincronización como el ajuste de ritmos entre dos o más osciladores en interacción [9] de manera que la diferencia de fase de los mismos sea menor o igual a una constante, lo que se denomina también enganche de fases [10]. El fenómeno de sincronización es una manifestación de la complejidad de un sistema y está omnipresente en la naturaleza y en muchos sistemas artificiales. Ciertas especies de luciérnagas tienen la capacidad de alterar sus ritmos de emisión luminosa y así sincronizar estos con los de otros individuos gracias a una gran capacidad de coordinación visual [11], tales como *Pteroptyx malaccae* [12], *Pteroptyx cribellata* [13] -que habitan principalmente en el sudeste de Asia (Tailandia, Malasia, Indonesia y Papua Nueva Guinea)- *Photinus pyralis* [14] y *Photuris frontalis* [15] cuyo hábitat se encuentra en Estados Unidos; por otra parte, se pueden mencionar otros comportamientos síncronos en sistemas biológicos como ser: la actividad síncrona de captura de presas en ciertas especies de arañas, la respiración sincronizada en abejas, la búsqueda síncrona de alimentos en las hormigas plateadas del Sahara, las vibraciones síncronas en avispones, la migración de langostas en masa, la masticación síncrona de las termitas, la reproducción síncrona en gaviotas y los ciclos menstruales sincronizados en mujeres que conviven [16]. Por otro lado, se observa sincronización

¹ La abreviación LCO viene del inglés Light-Controlled Oscillator.

² IFO, abreviatura proveniente del inglés Integrate-and-Fire Oscillator.

³ Esta situación se conoce como anti-sincronización o sincronización en anti-fase.

en sistemas mecánicos, en sistemas eléctricos, en el sistema solar [17], en la denominada coherencia de fase cuántica que permitió a Cornell, Ketterle y Wieman producir los condensados de Bose-Einstein en 1995 y por lo cual recibieron el Premio Nóbel de Física en 2001 [18] y en diversos sistemas electrónicos, tales como los LCOs que ya fueron presentados en esta misma revista [19]. Justamente me valdré de los LCOs y de los IFOs, ambos osciladores de relajación⁴, para ilustrar el fenómeno de sincronización.

Uno de los modelos más simples y que se constituyó en el paradigma para estudiar la sincronización en diferentes sistemas es el IFO que fue introducido por Mirollo y Strogatz [21]. Su formulación es bastante sencilla y se la puede representar por la siguiente ecuación, en la que se consideran N IFOs globalmente acoplados según una aproximación de campo medio⁵:

$$\frac{dV_i}{dt} = I - \eta V_i, \quad 0 \leq V_i \leq 1; \quad \text{Si } V_i(t) = 1 \Rightarrow V_j(t^+) = \min\left(1, V_j(t) + \frac{\beta}{N}\right), \quad \forall j \neq i, \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

La dinámica de los IFOs puede describirse como sigue: cada IFO está caracterizado por una variable de estado V_i que está regida por la ecuación diferencial mostrada en (1) y además está constreñida a tomar valores en el intervalo $[0,1]$ ⁶. Cuando el oscilador i alcanza el umbral superior ($V_i=1$), el oscilador “dispara” y V_i vuelve instantáneamente a 0 (Figura 1(a)). Los IFOs por una forma simple de acoplamiento pulsátil: cuando un IFO dispara, todos los otros IFOs aumentan su variable de estado en una cantidad β/N , el cociente entre N se lo considera para tener un comportamiento razonable en el límite termodinámico ($N \rightarrow \infty$). Además, el IFO en el estado $V_i=0$ (justo después del disparo) no puede ser afectado por los otros IFOs; esta última propiedad asegura la posibilidad de una sincronización perfecta o como Strogatz la denomina “sincronización inevitable” [22]. Para ilustrar cómo funciona el modelo, se resuelve numéricamente (1) para dos IFOs mutuamente acoplados (Figura 1(a)) y para 500 IFOs globalmente acoplados según una aproximación de campo medio (Figura 1(b)). Como se puede observar en ambos casos, la sincronización es fácil de alcanzar y en corto tiempo. Sin embargo, se debe subrayar que las simplificaciones introducidas en éste modelo, lo hacen poco realista tanto desde un punto de vista físico como biológico, en particular por el hecho de tener una descarga instantánea y por la aproximación de campo medio en la que el valor de acoplamiento para todos los IFOs es el mismo⁷. A pesar de lo anterior, éste modelo es paradigmático y ha sido utilizado para describir diversidad de fenómenos tanto en Física, Biología y Neurociencia.

⁴ Un oscilador de relajación tiene una dinámica no lineal caracterizada por trayectorias en el espacio de fases que tienen dos escalas de tiempo: una rápida y otra lenta, lo que hace que la forma de la onda asociada a este tipo de oscilador sea similar a una onda diente de sierra [20] M. Beckerman, *Adaptive Cooperative Systems*. New York, NY, : John Wiley & Sons, 1997.

⁵ En este caso, se considera que todos los osciladores están acoplados de la misma manera y con una intensidad de acoplamiento común para todos [5] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Comportamiento sincrónico de osciladores de relajación idénticos globalmente acoplados por pulsos," *Revista Boliviana de Física*, vol. 13, pp. 1--10, 2007.

⁶ En realidad, se toma el intervalo $[0,1]$ por simplicidad; desde un punto de vista más formal deberíamos referirnos a un umbral inferior y a un umbral superior.

⁷ Un estudio de IFOs que no están acoplados según una aproximación de campo medio y que muestra que para acoplamientos dependientes de la distancia, ya no tiene sentido el concepto de “sincronización inevitable” se presenta en [5] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Comportamiento sincrónico de osciladores de relajación idénticos globalmente acoplados por pulsos," *Revista Boliviana de Física*, vol. 13, pp. 1--10, 2007.

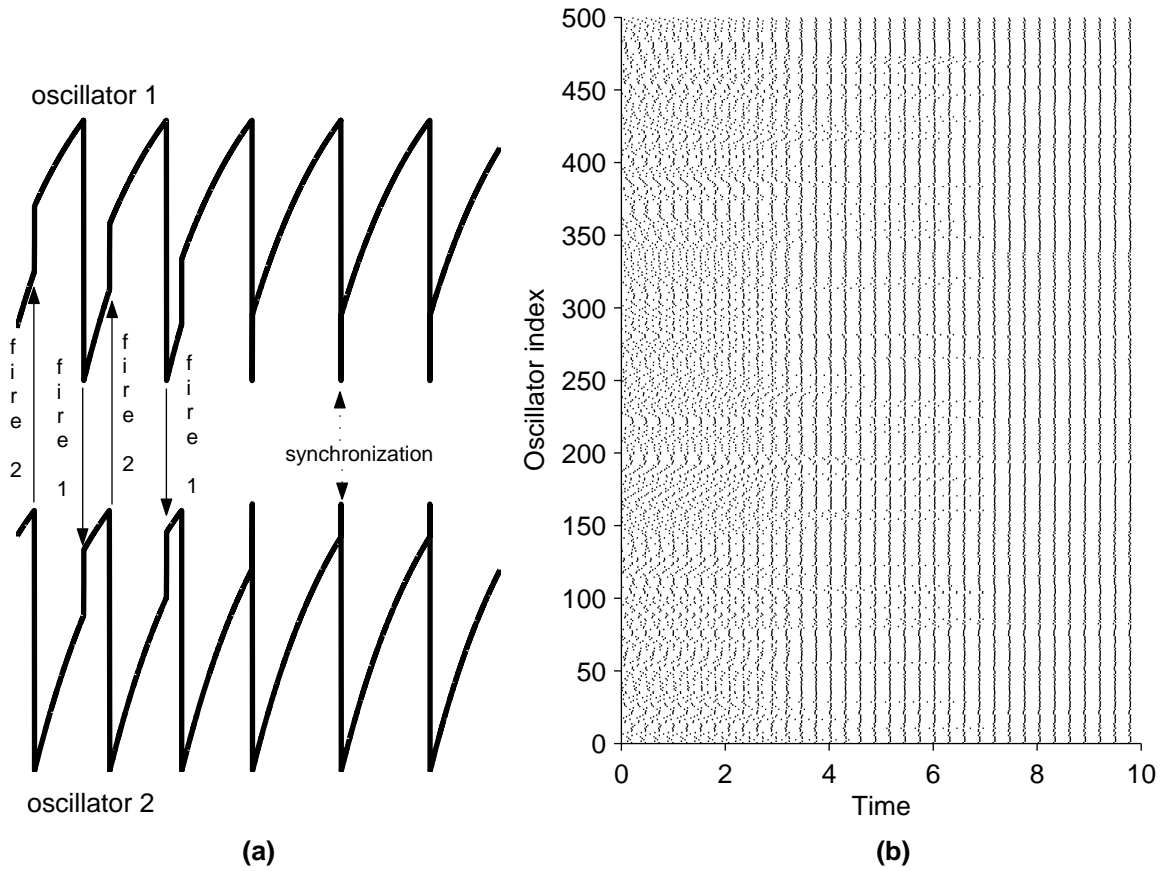


Figura 1. (a) Mecanismo de sincronización en dos IFOs mutuamente acoplados. (b) Puntos correspondientes a los tiempos de disparo de cada uno de los 500 IFOs acoplados globalmente según una aproximación de campo medio y con valores de parámetros $I=2.5$, $\eta=1$ y acoplamiento $\beta=2.5$. El eje de las abscisas representa el tiempo en tanto que el de las ordenadas corresponde al índice que identifica a cada uno de los 500 IFOs que conforman el sistema. (Figura tomada de [23]).

Los LCOs son osciladores electrónicos bio-inspirados, en el sentido de que intentan reproducir el mecanismo de sincronización que utilizan ciertas especies de luciérnagas, es así que se los denomina también “luciérnagas electrónicas”. Los detalles de la construcción de los LCOs se dan en [24-26]. En aras de ser conciso, se formula solamente el modelo general para N LCOs dado por:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda_i (V_{Mi} - V_i(t)) \varepsilon_i(t) - \gamma_i(t) (1 - \varepsilon_i(t)) + \sum_{j \neq i}^N \beta_{ij} \delta_{ij} (1 - \varepsilon_j(t)); \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

donde V_i y V_{Mi} representan respectivamente los voltajes propio y de la fuente del LCO $_i$; λ_i y γ_i son constantes ligadas con los circuitos RC asociados a la carga y descarga, estando por lo tanto relacionadas con los valores de las resistencias y capacitancias: $\lambda_i = [(R_{\lambda i} + R_{\gamma i}) C_i]^{-1}$ y $\gamma_i = (R_{\gamma i} C_i)^{-1}$, β_{ij} es la intensidad de acoplamiento, $\delta_{ij} = 1$ si los LCOs pueden interactuar y $\delta_{ij} = 0$ en otro caso; finalmente, $\varepsilon_i(t)$ es el estado del LCO $_i$ que toma el valor 1 (etapa de carga) ó 0 (etapa de descarga); $\varepsilon_i(t)$ cambia su valor cuando se alcanza el umbral superior $2V_{Mi}/3$ o el umbral inferior $V_{Mi}/3$. Se debe mencionar que el modelo ha sido validado experimentalmente [26]. Entre los numerosos resultados concernientes a la sincronización obtenidos para los LCOs, se puede

resaltar el hecho de que estos osciladores pueden sincronizar de diferentes maneras y que el tiempo en el que llegan a la sincronización total⁸ (si es que llegan), es muy sensible a las condiciones iniciales como se puede apreciar en la Figura 2, en la cual, para una configuración lineal de LCOs acoplados bidireccionalmente Figura 2(a) y dos conjuntos de condiciones iniciales, se tienen comportamientos totalmente diferentes a pesar de que los LCOs son los mismos en ambos casos. Al referirnos a sincronización, podemos hacerlo exigiendo que el período y las diferencias de fase se mantengan constantes (criterio del período) o lo mismo que lo anterior pero además exigiendo que las diferencias de fase sean próximas a cero (criterio de la diferencia de fases) [4, 27]. En la Figura 2(b) y (c), se observa que la sincronización, cumpliendo los criterios anteriores, ocurre muy rápido. En tanto que en la Figura 2(d) y (e), se ve claramente que no existe tendencia a la sincronización y mas bien, las series temporales correspondientes tanto al período como a la diferencia de fases exhibe un comportamiento caótico, cuyas características se darán en la Sección 3. Es interesante notar que de acuerdo con lo anterior, se podría decir que es posible construir diagramas de sincronización que se presentan como diagramas de bifurcación invertidos, en los cuales, en vez de ir de situaciones regulares a caóticas, la ruta es invertida; ejemplos de estos diagramas se dan en [28-30], donde el parámetro de control lo constituye la intensidad de acoplamiento. En nuestro caso, se podría hacer este análisis considerando las series temporales de los períodos y/o de las diferencias de fases.

Introduciendo para el análisis gráficos polares (en los cuales la componente radial representa el período y la componente angular la diferencia de fases con respecto a un oscilador de referencia, en nuestro caso, el LCO₂), se ve que para la configuración de LCOs idénticos de la Figura 3(a), se tiene que después de 250 eventos de disparo ya se tiene la formación de dos cúmulos⁹ de LCOs sincronizados (Figura 3(a2)) y estos dos cúmulos se mantienen en el transcurso del tiempo; el primer cúmulo es el formado por los LCOs 7, 9 y 10 y el otro cúmulo está constituido por el resto de los LCOs. Observando las posiciones de los LCOs, no resulta sorprendente que se forme el primer cúmulo aunque podría esperarse igualmente que el LCO 3 sea parte del mismo; pero sin duda, las condiciones iniciales hicieron que se llegue a la situación mostrada en la Figura 3(a4). En tanto, que para la configuración de LCOs diferentes de la Figura 3(b), se observa que luego de 250 eventos de disparo, de acuerdo con las características de las oscilaciones, se tienen 4 grupos de LCOs: (i) 1 y 8, (ii) 5 y 9, (iii) 10 y (iv) 2, 3, 4, 6 y 7 (Figura 3(b2)). Lo anterior es interesante puesto que refleja de alguna manera la posición de los LCOs en la “arena”. A medida que transcurre el tiempo, los grupos (i) y (ii) son “absorbidos” por (iv) (Figura 3(b3)), situación que persiste hasta los 1000 eventos de disparo (Figura 3(b4)), donde el LCO 10 sigue teniendo un ritmo diferente al del cúmulo formado por todos los otros LCOs a pesar de que tiene un período muy similar a los expuestos por los LCOs que forman el cúmulo. Nuevamente, la posición de los LCOs parece jugar un rol importante en esto.

⁸ Se entiende por sincronización el hecho de que toda la población de osciladores esté sincronizada en un solo grupo.

⁹ Es usual referirse a los cúmulos como clusters.

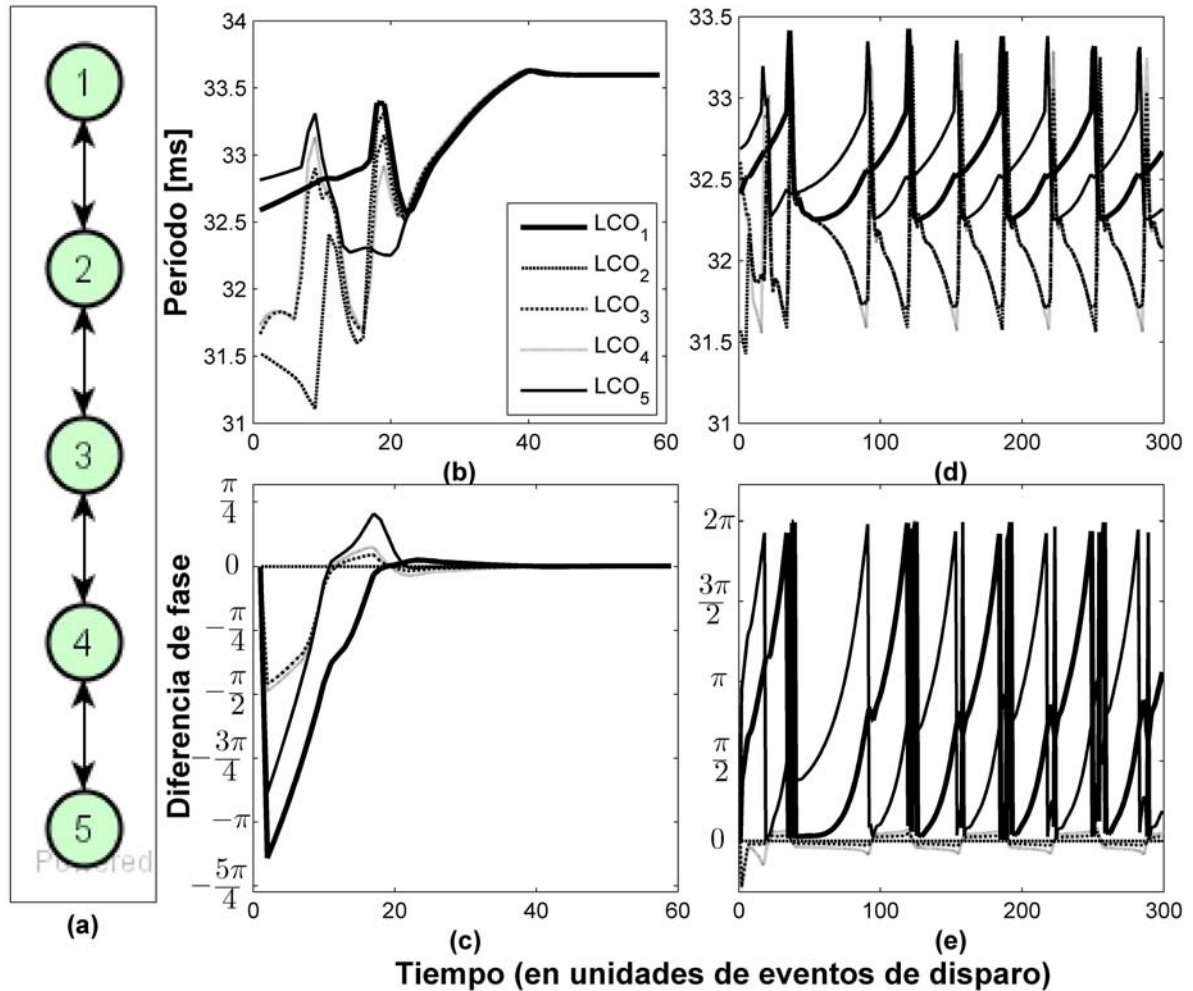


Figura 2. (a) Conjunto de 5 osciladores idénticos localmente acoplados en línea y con una intensidad de acoplamiento $\beta=166$; las flechas indican la direccionalidad del acoplamiento. Evolución (b) del periodo y (c) de la diferencia de fase de los LCOs cuando las condiciones iniciales son $V_{01}=5.4678$ V, $V_{02}=3.5027$ V, $V_{03}=4.3633$ V, $V_{04}=5.4678$ V y $V_{05}=5.1747$ V. (d) y (e), cuando las condiciones iniciales son: $V_{01}=4.3462$ V, $V_{02}=4.8130$ V, $V_{03}=5.3590$ V, $V_{04}=5.3693$ V y $V_{05}=3.4330$ V. Para todos los osciladores, se tiene $R_I=100$ k Ω , $R_Y=1.6$ k Ω y $C=0.47$ μ F.

Aunque se hizo y escribió bastante sobre LCOs [3-6, 19, 23, 24, 26, 27, 31-35], estos osciladores siguen siendo una fuente para la investigación tanto experimental como teórica y numérica. Actualmente, se está abordando el tema del comportamiento de poblaciones de LCOs diferentes acoplados ya sea bajo una aproximación de campo medio o de acoplamiento dependiente con la distancia. Quedan también pendientes estudios multidisciplinarios, interdisciplinarios y/o transdisciplinarios¹⁰ en sistemas tales como luciérnagas en interacción con sus conespecíficos o luciérnagas en interacción con LCOs.

¹⁰ Definiciones sencillas de estos términos son:

MULTIDISCIPLINARIO: especialistas en varias disciplinas trabajando en un mismo caso, con enfoques variados

INTERDISCIPLINARIO: los mismos individuos trabajando juntos en un caso, tratando de unificar criterios.

TRANSDISCIPLINARIOS: especialistas en varias disciplinas, pero con conocimiento de las otras, logrando un enfoque unificado e integrador.

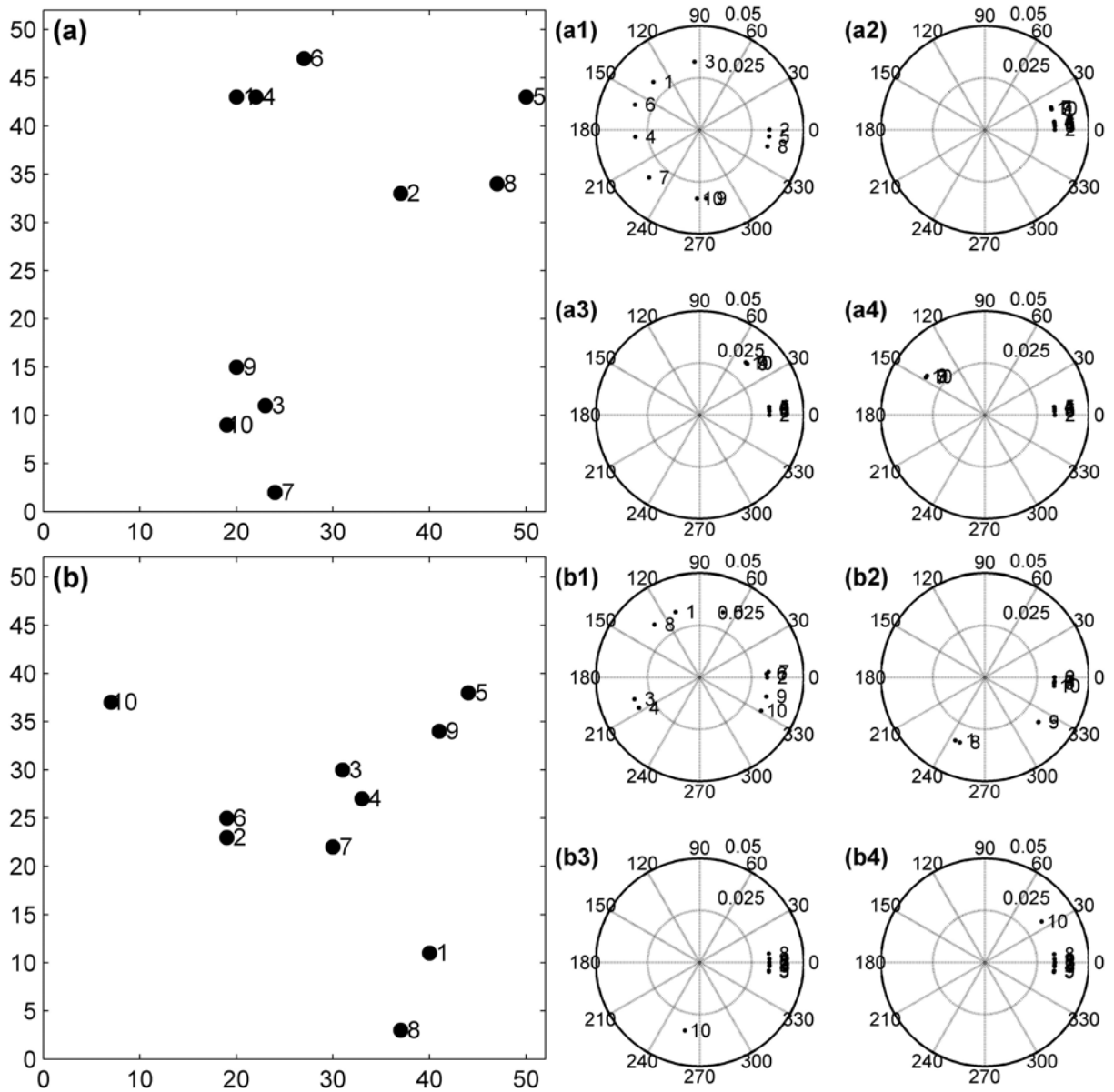


Figura 3. Conjuntos de LCOs (a) idénticos y (b) diferentes, en arenas de 50×50 celdas y que están globalmente acoplados con intensidades de acoplamiento dependientes de la distancia. Representación en gráficos polares en los cuales, el período es la coordenada radial y la diferencia de fases con respecto al LCO₂ corresponde a la coordenada angular. (a1)-(a4) para LCOs idénticos y (b1)-(b4) para LCOs diferentes, después de: 2 eventos de disparo (a1) y (b1), 250 eventos de disparo (a2) y (b2), 500 eventos de disparo (a3) y (b3), y después de 1000 eventos de disparo (a4) y (b4).

3. CAOS

Como mencioné en la Sección 1, el término caos tiene la particularidad de ser muy utilizado en la vida cotidiana como sinónimo de confusión y desorden; sin embargo, desde un punto de vista técnico, el caos es un tipo específico de movimiento irregular producido por un sistema *determinista* [36]. Se debe tener cuidado en no confundir caos determinista con comportamiento

estocástico [37] y las principales características del caos según Kaplan [38] son: **(i)** su carácter *aperiódico* en el sentido que un mismo estado no puede nunca repetirse dos veces. **(ii)** Tiene una *dinámica acotada*, lo que significa que en ningún momento puede tender a $\pm \infty$. **(iii)** Es *determinista* pues hay una regla definida, sin términos aleatorios, que gobierna la dinámica. **(iv)** Posee una *extrema sensibilidad a las condiciones iniciales*, lo que implica que dos puntos cercanos inicialmente, se distanciarán a medida que transcurre el tiempo.

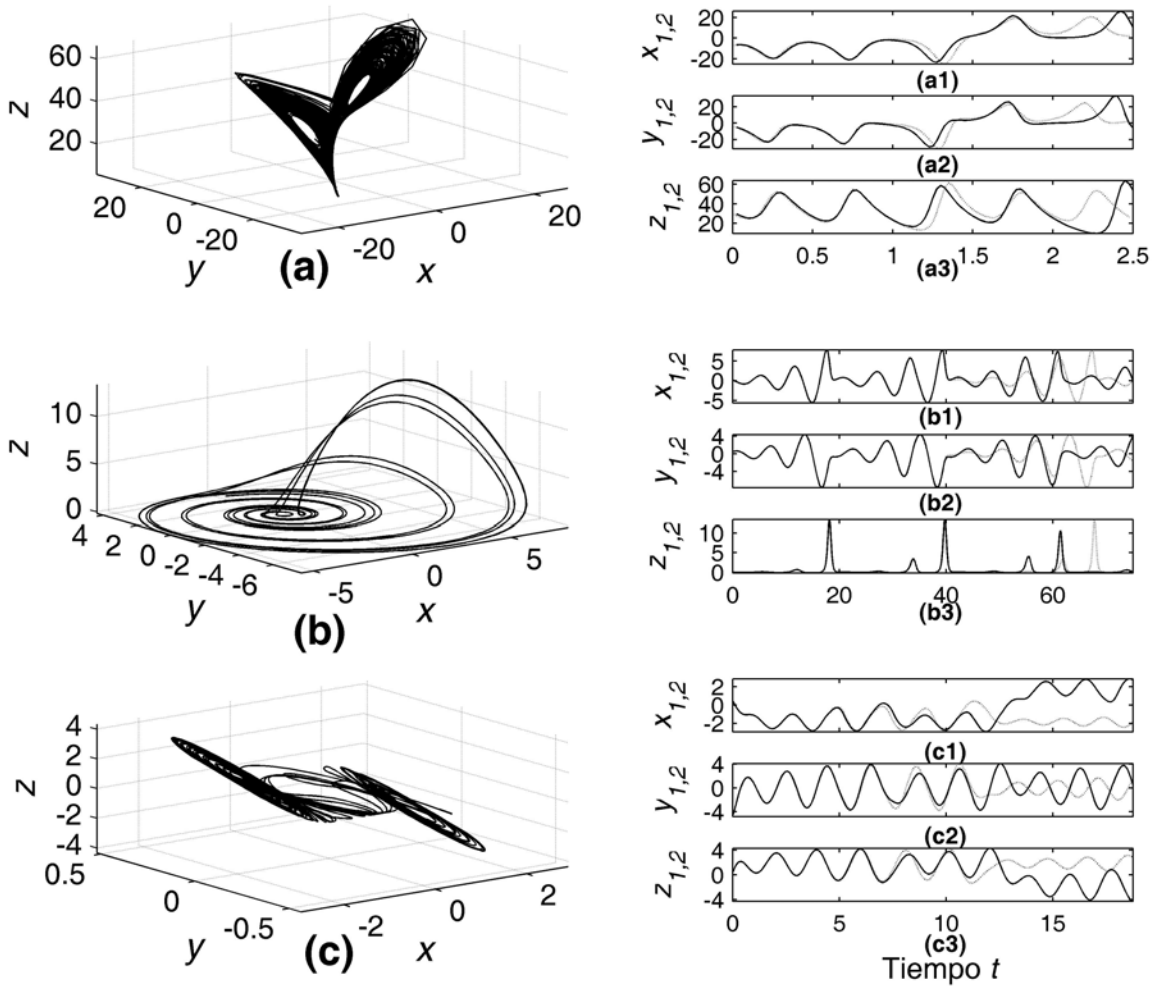


Figura 4. (a) Atractor extraño de Lorenz para los valores de parámetros $\sigma=16$, $r=40$ y $b=4$. Series temporales para las variables $x_{1,2}$ (a1), $y_{1,2}$ (a2) y $z_{1,2}$ (a3), en las cuales, las condiciones iniciales eran $x_{01}=-7.5$, $x_{02}=-7.51$, $y_{01}=y_{02}=-3.6$ y $z_{01}=z_{02}=30$. (b) Atractor extraño de Rössler para los valores de parámetros $a=0.38$, $b=0.30$ y $d=4.82$. Series temporales para las variables $x_{1,2}$ (b1), $y_{1,2}$ (b2) y $z_{1,2}$ (b3), en las cuales, las condiciones iniciales eran $x_{01}=0.20$, $x_{02}=0.201$, $y_{02}=y_{01}=-0.5$ y $z_{02}=z_{01}=0.04$. (c) Atractor extraño de Chua para los valores de parámetros $\alpha=10.0$, $\beta=17.0$, $\gamma=0.08$, $a=-1.22$ y $b=-0.728$. Series temporales para las variables $x_{1,2}$ (c1), $y_{1,2}$ (c2) y $z_{1,2}$ (c3), en las cuales, las condiciones iniciales eran $x_{01}=0.5$, $x_{02}=0.505$, $y_{02}=y_{01}=-0.6$ y $z_{02}=z_{01}=0.3$.

Aunque fue Poincaré, a fines del s. XIX, el primero en darse cuenta de la existencia de sistemas que hoy llamamos caóticos, el gran impulso que recibe la “teoría del caos” ocurre desde los años

60 hasta los 80 del s. XX, sobretodo con los trabajos de Lorenz¹¹, Smale y Ruelle que mostraron que a partir de leyes dinámicas simples, se pueden generar comportamientos muy complicados, lo que se considera, en opinión de algunos científicos e historiadores de la ciencia, como una revolución que tiene la virtud de conglomerar a varias disciplinas para formar la “ciencia del caos” [39]. Si bien el caos puede encontrarse en sistemas discretos sencillos tales como la aplicación logística, también se presenta en sistemas continuos, de los cuales consideraremos tres de los modelos más populares: Lorenz, Rössler y Chua.

- **Modelo de Lorenz.** Es uno de los modelos paradigmáticos que dan lugar a comportamiento caótico y por ende a atractores extraños. En su afán de modelar la dinámica atmosférica del planeta, Lorenz, a partir de un modelo trunco de ecuaciones de Navier-Stokes, formula su modelo simplificado que puede escribirse mediante el sistema de ecuaciones diferenciales [40]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz, \quad (3) \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned}$$

donde σ , r y b son parámetros de control y para los cuales escogemos los valores: $\sigma=16$, $r=40$ y $b=4$, con las condiciones iniciales: $x_{01}=-7.5$, $y_{01}=-3.6$ y $z_{01}=30$, se integra el sistema (3) y se obtiene el atractor extraño mostrado en la Figura 4(a); por otra parte, con el fin de ver la característica caótica del sistema, se integran las ecuaciones variando ligeramente una de las condiciones iniciales y manteniendo las otras invariables: $x_{02}=-7.51$, $y_{02}=y_{01}=-3.6$ y $z_{02}=z_{01}=30$, se puede observar luego de intervalos de tiempo cortos que las series temporales (Figura 4(a1)-(a3)) de los sistemas 1 (línea oscura) y 2 (línea clara) divergen en sus 3 componentes (x,y,z) ¹², lo que muestra la sensibilidad a las condiciones iniciales.

- **Modelo de Rössler.** El modelo de Rössler [41] también proviene de un truncamiento de las ecuaciones de Navier-Stokes [42] y puede expresarse por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay, \quad (4) \\ \frac{dz}{dt} &= (b + z)x - dz \end{aligned}$$

siendo a, b y d parámetros de control, para los cuales tomamos los valores: $a=0.38$, $b=0.30$ y $d=4.82$, además de las condiciones iniciales $x_{01}=0.20$, $y_{01}=-0.5$ y $z_{01}=0.04$, con lo que, luego de la integración del sistema (4), se obtiene el atractor extraño que se muestra en la Figura 4(b). De la misma manera que para el modelo de Lorenz, si se modifica ligeramente una de las condiciones iniciales: $x_{02}=0.201$, $y_{02}=y_{01}=-0.5$ y $z_{02}=z_{01}=0.04$, se observa la divergencia de las series temporales (Figura 4(b1)-(b3)) que denota el carácter caótico del sistema.

¹¹ Recientemente fallecido (16 de abril de 2008).

¹² Esta divergencia en las 3 componentes se presenta a pesar de que la única modificación en la condición inicial se la efectuó en la componente x .

- **Modelo de Chua.** Es otro de los modelos populares que exhiben caos y se lo introdujo a partir del análisis de un sistema electrónico, conocido como circuito de Chua [43], cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha(y - x - f(x)) \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y - \gamma z\end{aligned}, \quad (5)$$

siendo $f(x) = bx + \frac{1}{2}(a-b)(|x+1| - |x-1|)$ y los parámetros de control α, β, γ, a y b , para los cuales se consideran los valores $\alpha=10.0, \beta=17.0, \gamma=0.08, a=-1.22$ y $b=-0.728$, además de las condiciones iniciales: $x_{01}=0.5, y_{01}=-0.6$ y $z_{01}=0.3$, dan lugar al atractor extraño que se muestra en la Figura 4(c)¹³. La verificación de la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales se observa en la Figura 4(c1)-(c3), en las que se muestran las series temporales obtenidas para un sistemas de Chua, con las condiciones iniciales mencionadas anteriormente y con una ligera modificación en las mismas: $x_{02}=0.505, y_{02}=y_{01}=-0.6$ y $z_{02}=z_{01}=0.3$. Nuevamente, se nota la divergencia de las series temporales lo que confirma el carácter caótico del sistema.

4. SINCRONIZACIÓN CAÓTICA

La sincronización de sistemas caóticos implica el ajuste de cierta propiedad de su movimiento a un comportamiento común debido a un acoplamiento o a una fuerza actuando sobre los sistemas que puede ser periódica o ruidosa [45]. De acuerdo a las características de la sincronización en este tipo de sistemas, podemos clasificarlas en¹⁴:

- **Sincronización completa o idéntica (CS).** Fue la primera en ser descubierta y es la forma más simple de sincronización en sistemas caóticos idénticos, manifestándose en un enganche perfecto entre las trayectorias caóticas de los sistemas gracias a una señal de acoplamiento débil. En esta sincronización, tanto la amplitud como la fase de los sistemas están enganchadas.
- **Sincronización generalizada (GS).** En la cual, los sistemas pueden ser completamente diferentes y en la que se asocia la respuesta de un sistema con las respuestas de los otros sistemas.
- **Sincronización en fase (PS).** Es un régimen intermedio en el cual se produce el enganche de fases mas no el de amplitudes, las cuales mostrarán una débil correlación entre ellas. Generalmente, se presenta en sistemas oscilatorios o rotatorios no idénticos.
- **Sincronización con retardo (LS).** Es un paso entre la PS y la CS e implica que los sistemas enganchan sus fases y amplitudes pero con un retardo de tiempo.

¹³ Una galería de estos atractores obtenidos con un osciloscopio puede encontrarse en [44] G. Conde Saavedra & G. M. Ramirez Avila, "Estudio de dos circuitos caóticos," *Revista Boliviana de Fisica*, vol. 13, pp. 58-74, 2007.

¹⁴ Para las abreviaturas, se utilizarán las correspondientes en idioma inglés.

- **Sincronización con retardo intermitente (ILS).** En este caso, los sistemas verifican la LS en la mayor parte de tiempo pero existen “estallidos” intermitentes de asincronía local.
- **Casi sincronización (AS).** Se manifiesta en una limitación asintótica de la diferencia entre un subconjunto de las variables de un sistema con los subconjuntos de variables de los otros sistemas.

Con el fin de visualizar la sincronización en sistemas caóticos, se estudiarán los sistemas vistos en la Sección 3 y considerando que se acoplarán sistemas idénticos de manera bidireccional¹⁵. De manera general, se puede escribir el acoplamiento entre dos sistemas caóticos mediante:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}_1}{dt} &= f(\vec{x}_1) + \widehat{\mathbf{C}} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^T \\ \frac{d\vec{x}_2}{dt} &= f(\vec{x}_2) + \widehat{\mathbf{C}} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^T \end{aligned}, \quad (6)$$

donde \vec{x}_1 y \vec{x}_2 representan los vectores de estado N -dimensionales de los sistemas caóticos 1 y 2, mientras que $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial y $\widehat{\mathbf{C}}$ es una matriz $n \times n$ cuyos coeficientes determinan el acoplamiento disipativo; mientras que T denota la transposición de una matriz [45]. Este esquema de acoplamiento es aplicado a los tres sistemas que se estudiaron en la Sección 3. A manera de ejemplo, se presentan las ecuaciones para dos sistemas de Rössler idénticos acoplados bidireccionalmente:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{1,2}}{dt} &= -y_{1,2} - z_{1,2} + c(x_{2,1} - x_{1,2}) \\ \frac{dy_{1,2}}{dt} &= x_{1,2} + ay_{1,2} + c(y_{2,1} - y_{1,2}) \\ \frac{dz_{1,2}}{dt} &= (b + z_{1,2})x_{1,2} - dz_{1,2} + c(z_{2,1} - z_{1,2}) \end{aligned} \quad . \quad (7)$$

Ecuaciones similares pueden escribirse para los modelos de Lorenz y Chua.. Con el fin de caracterizar la sincronización entre dos sistemas caóticos, se define el *error medio de sincronización* como la distancia promedio a la variedad de sincronización, es decir, al hiperplano identidad ($\vec{x} = \vec{y}$):

$$\langle \varepsilon \rangle = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (8)$$

En la Figura 5(a)-(c) se grafican tanto el error medio de sincronización $\langle \varepsilon \rangle$ (unidades en el eje izquierdo de las ordenadas) así como el valor máximo del mismo $\langle \varepsilon \rangle_{\max}$ en función de la intensidad de acoplamiento $2c/\lambda_L$ ¹⁶ lo que permite visualizar el efecto del acoplamiento para lograr la sincronización completa en los sistemas de Lorenz, Rössler y Chua respectivamente.

¹⁵ La bidireccionalidad que se considera aquí es simétrica y equivale a tener el mismo acoplamiento entre uno y otro sistema.

¹⁶ Aquí, λ_L representa el exponente de Lyapunov mayor cuando los sistemas están desacoplados. Cabe recordar que λ_L cuantifica la sensibilidad a las condiciones iniciales de un sistema. Si λ_L es positivo, significa que el sistema dinámico es caótico [46] J. C. Sprott, *Chaos and time-series analysis*: Oxford University Press, 2003..

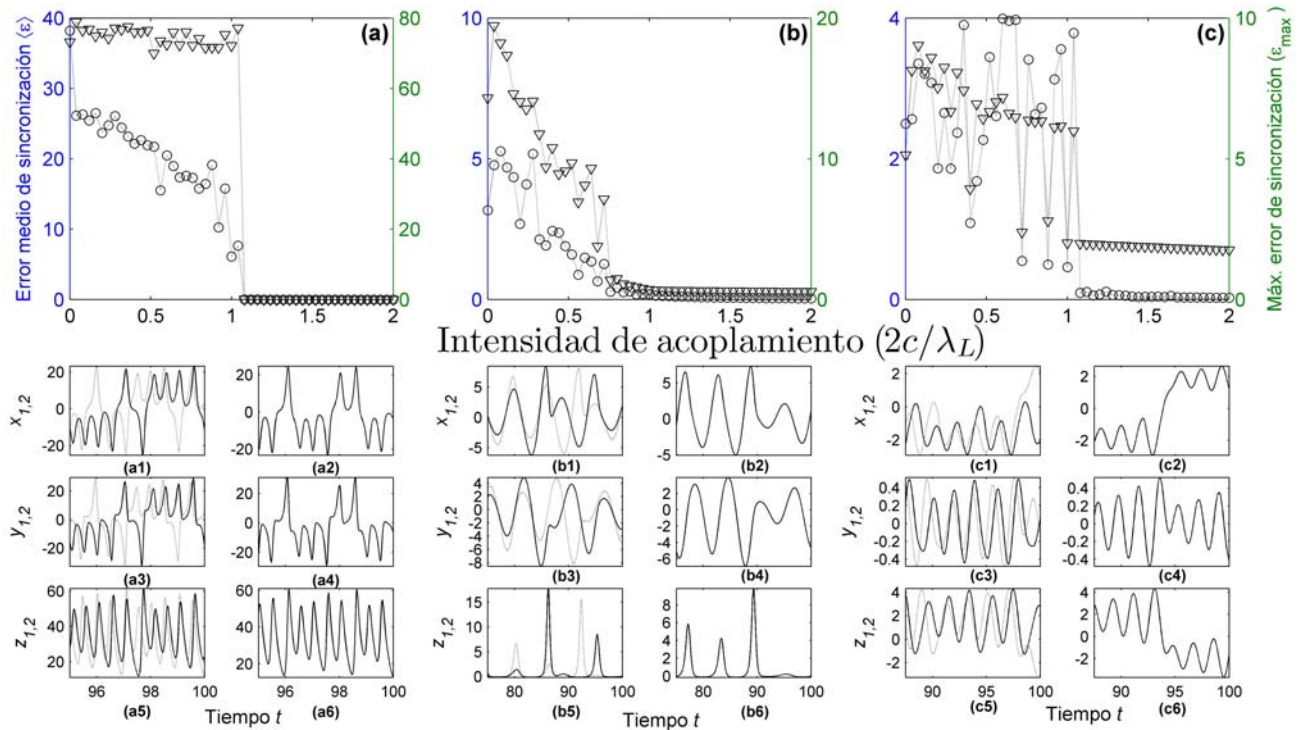


Figura 5. Caracterización de la sincronización en sistemas caóticos mutuamente acoplados utilizando el error medio de sincronización $\langle \epsilon \rangle$ (o) y el máximo de este valor $\langle \epsilon \rangle_{\max}$ (∇) en función de la intensidad de acoplamiento $2c/\lambda_L$ para los modelos de (a) Lorenz con valores de parámetros $\sigma=16$, $r=40$ y $b=4$, además de máximo exponente de Lyapunov para los sistemas desacoplados $\lambda_L=1.36492$. Series temporales para el modelo de Lorenz cuando la intensidad de acoplamiento es $2c/\lambda_L=0.05$ para las variables $x_{1,2}$ (a1), $y_{1,2}$ (a2) y $z_{1,2}$ (a3) y cuando la intensidad de acoplamiento es $2c/\lambda_L=1.20$ para las variables $x_{1,2}$ (a4), $y_{1,2}$ (a5), y $z_{1,2}$ (a6); en todos los casos, las condiciones iniciales fueron $(x_{01}, y_{01}, z_{01})=(-7.5, -3.6, 30)$, correspondientes a la línea oscura y $(x_{02}, y_{02}, z_{02})=(0, 0, 0)$, correspondiente a la línea clara. (b) Rössler con valores de parámetros $a=0.38$, $b=0.30$, $d=4.82$ y $\lambda_L=0.154495$. Series temporales para el modelo de Rössler cuando la intensidad de acoplamiento es $2c/\lambda_L=0.05$ para las variables $x_{1,2}$ (b1), $y_{1,2}$ (b2) y $z_{1,2}$ (b3) y cuando la intensidad de acoplamiento es $2c/\lambda_L=1.20$ para las variables $x_{1,2}$ (b4), $y_{1,2}$ (b5), y $z_{1,2}$ (b6); en todos los casos, las condiciones iniciales fueron $(x_{01}, y_{01}, z_{01})=(0.2, 0.5, 0.04)$, correspondientes a la línea oscura y $(x_{02}, y_{02}, z_{02})=(0, 0, 0)$, correspondiente a la línea clara. (c) Chua con valores de parámetros $\alpha=10.0$, $\beta=17.0$, $\gamma=0.08$, $a=-1.22$, $b=-0.728$ y $\lambda_L=0.384779$. Series temporales para el modelo de Chua cuando la intensidad de acoplamiento es $2c/\lambda_L=0.05$ para las variables $x_{1,2}$ (c1), $y_{1,2}$ (c2) y $z_{1,2}$ (c3) y cuando la intensidad de acoplamiento es $2c/\lambda_L=1.20$ para las variables $x_{1,2}$ (c4), $y_{1,2}$ (c5), y $z_{1,2}$ (c6); en todos los casos, las condiciones iniciales fueron $(x_{01}, y_{01}, z_{01})=(0.5, -0.6, 0.3)$, correspondientes a la línea oscura y $(x_{02}, y_{02}, z_{02})=(0, 0, 0)$, correspondiente a la línea clara.

Como producto de mi participación en el Third 'Rio de la Plata' Workshop on Noise, Chaos and Complexity in Lasers and Nonlinear Optics que se realizó en Punta del Este, Uruguay, del 3 al 7 Diciembre de 2007 empecé una colaboración científica con la UFRGS de Porto Alegre, Brasil, con el objetivo de estudiar la sincronización caótica en láseres. Basándonos en el modelo propuesto por Mirasso [47], en el cual, se plantea el estudio de la sincronización de un sistema de dos láseres semiconductores caóticos en una configuración maestro-esclavo. Para la sincronización de los láseres, una cantidad pequeña de la potencia de salida del láser maestro se inyecta en el láser esclavo. Así, en un proceso de comunicación óptica caótica realizada por los láseres, estos pueden sincronizarse, lo que significa que la evolución irregular en el tiempo del láser emisor (ya sea en su potencia óptica P o en su longitud de onda), puede ser perfectamente reproducida por el láser receptor (Figura 6). Así, se puede decir que la salida del láser maestro

puede ser utilizada como la mensajera caótica para codificar un mensaje digital, el cual puede ser recuperado por el receptor.

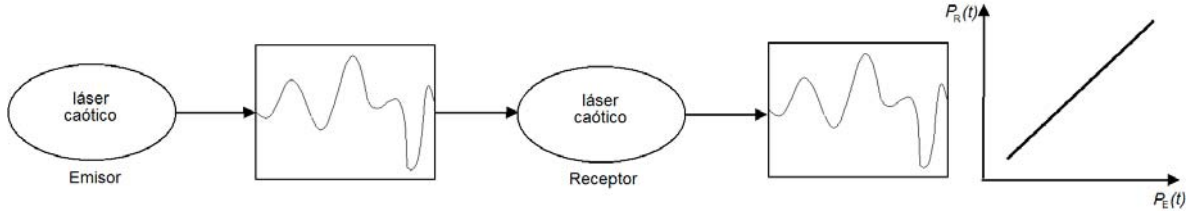


Figura 6. Representación esquemática de la sincronización en dos láseres semiconductores caóticos en una configuración maestro-esclavo. El proceso de codificación y decodificación lo realizan el emisor y el receptor respectivamente. En la parte derecha, se muestra el diagrama de sincronización que es la evolución de la señal de salida del receptor vs la señal de salida del emisor; si la recta tiene una inclinación de 45°, se tiene una sincronización perfecta.

Mirasso propone un modelo para el láser emisor o transmisor (t) (láser maestro) y para el láser receptor (r) (láser esclavo) usando ecuaciones diferenciales que dan la evolución de la amplitud compleja lentamente variable del campo eléctrico $E_{t,r}$ y el número de portadores $N_{t,r}$ dentro de la cavidad. Se incluye también en las ecuaciones de campo un término para la emisión espontánea de ruido. Las ecuaciones del modelo son:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{t,r}}{dt} &= (1 + j\alpha_{t,r}) \left(G_{t,r}(t) - \frac{1}{\tau_{t,r}} \right) \frac{E_{t,r}}{2} + \gamma E_{t,r}(t-\tau) e^{j\omega_{t,r}\tau} + \kappa_{\tau} E_{\text{ext}}(t) e^{-j\Delta\omega t} \\ &+ \sqrt{2\beta N_{t,r}(t)} \xi_{t,r}(t) \quad , \\ \frac{dN_{t,r}}{dt} &= \frac{I}{e} - \frac{1}{\tau_{n,t,r}} N_{t,r}(t) - G_{t,r}(t) |E_{t,r}(t)|^2 \quad , \\ G_{t,r}(t) &= \frac{g(N_{t,r} - N_{0,t,r})}{(1 + s |E_{t,r}(t)|^2)} \quad . \end{aligned} \quad (9)$$

Se consideran que ambos láseres son muy similares, por lo que, en principio se toman los mismos parámetros para ellos: $g=1.5 \times 10^{-8} \text{ ps}^{-1}$ es el parámetro de ganancia, $s=5 \times 10^{-7}$ es el coeficiente de saturación de ganancia, $\alpha=5$ es el factor de intensificación del ancho de línea, $\beta=1.1 \times 10^{-9} \text{ ps}^{-1}$ es la tasa de emisión espontánea, $e=1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ es la carga electrónica, $\tau_n=2 \text{ ns}$ es el tiempo de vida del portador, $\tau_{t,r}=2 \text{ ps}$ es el tiempo de vida del fotón, $N_0=1.5 \times 10^8$ es el número de portadores en la transparencia, $\gamma=30 \text{ ns}^{-1}$ es el coeficiente de retroalimentación, τ es el tiempo de ida y vuelta en la cavidad externa y $\Delta\omega$ es la diferencia entre las frecuencias ópticas entre los láseres cuando ellos están desacoplados. $I=44 \text{ mA}$ es la corriente de sesgo y $\omega_{t,r} \approx 1.2 \times 10^3 \text{ ps}^{-1}$ es la frecuencia angular de ambos láseres bajo operación de onda continua. En las ecuaciones de evolución del campo eléctrico, aparece explícitamente $E_{t,r}(t-\tau)$ que indica que estamos ante *ecuaciones diferenciales con retardo*. El proceso aleatorio de emisión espontánea es modelizado con un término de ruido blanco Gaussiano $\xi(t)$ de media cero. El término $\kappa_{\tau} E_{\text{ext}}$ tiene en cuenta la señal generada por el láser maestro y por lo tanto, sólo existe para el esclavo. El campo E_{ext} es la señal de entrada en el receptor y κ_{τ} es el parámetro de acoplamiento del campo inyectado en el láser esclavo. Como se puede ver de las ecuaciones (9), este sistema representa un sistema de 6 ecuaciones diferenciales con partes reales e imaginarias por la presencia de j : dos para las

componentes x e y del campo eléctrico correspondiente al transmisor (E_{tx} , E_{ty}), dos para las mismas componentes correspondientes al receptor (E_{rx} , E_{ry}) y dos para los números de ocupación de ambos láseres (N_t , N_r). Teniendo en cuenta que el campo complejo del láser está definido por $E = E_x + jE_y$, se tendrá que la potencia óptica de salida en ambos casos, será $P_E = E_{tx}^2 + E_{ty}^2$ y $P_R = E_{rx}^2 + E_{ry}^2$. Se resolvieron numéricamente las ecuaciones (9) y tomando como parámetros importantes para esta resolución $\tau = 0.3$ ns, $\Delta\omega = 0$ (fijos), $D^{1/2}$ un factor multiplicativo que acompaña al término de ruido y que juega el rol de la intensidad de ruido¹⁷ y κ_τ que es el factor de acoplamiento, se hace variar entre 0 y 100 ns^{-1} .

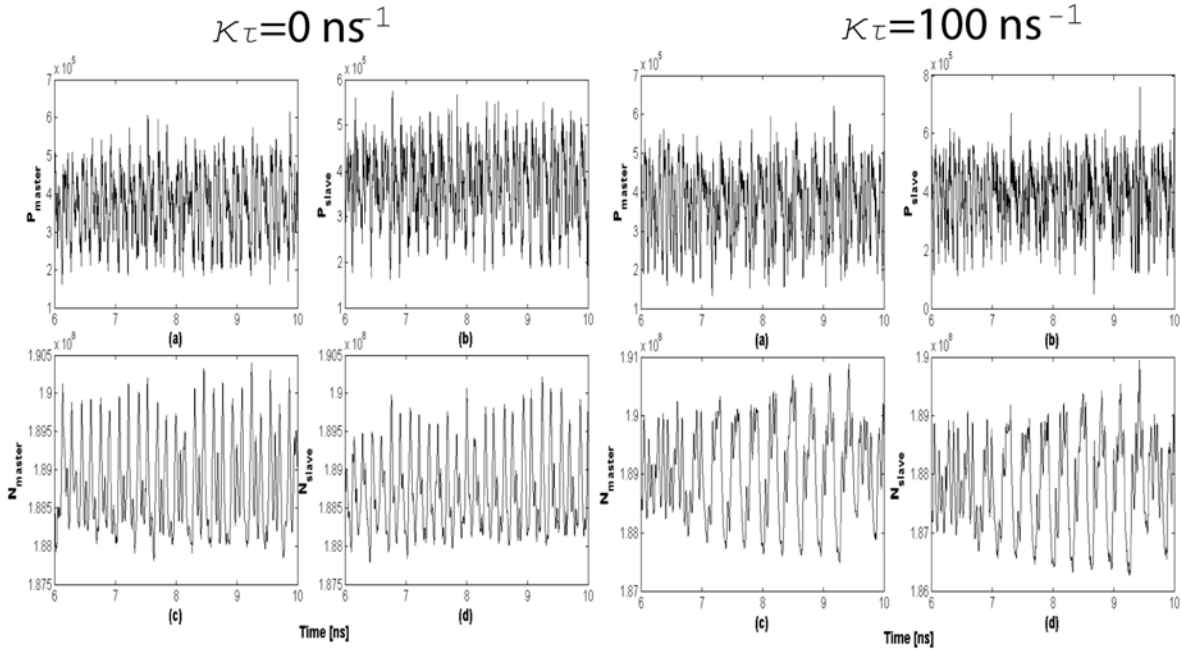


Figura 7. Series temporales para las potencias de salida y los números de ocupación para los láseres maestro (a) y (c) y esclavo (b) y (d) respectivamente, cuando $\kappa_\tau = 0$ (láseres desacoplados) (gráficas (a)-(d) de la izquierda) y cuando $\kappa_\tau = 100 \text{ ns}^{-1}$ (gráficas (a)-(d) de la derecha). Se debe hacer notar que en todos los casos se consideraron las series después de un transiente de 6 ns y el factor ligado a la intensidad de ruido $D^{1/2} = 1.0$.

En las series temporales mostradas en la Figura 7, es fácil darse cuenta del carácter caótico de las mismas que por supuesto es posible cuantificar este comportamiento caótico por medio del cálculo del máximo exponente de Lyapunov. Con el fin de observar la sincronización en ambos láseres, se utilizará en principio el diagrama propuesto en la Figura 6, donde se debería esperar que la pendiente de la recta sea igual a la unidad. Sin embargo, se puede intuir que debido a la presencia de ruido y además que el láser esclavo tiene una potencia extra que viene de la luz inyectada por el láser maestro; es así que habrá una ligera desviación debida a este hecho.

¹⁷ Para todo fin práctico, se podría asimilar este factor al parámetro β y hacer variar éste último.

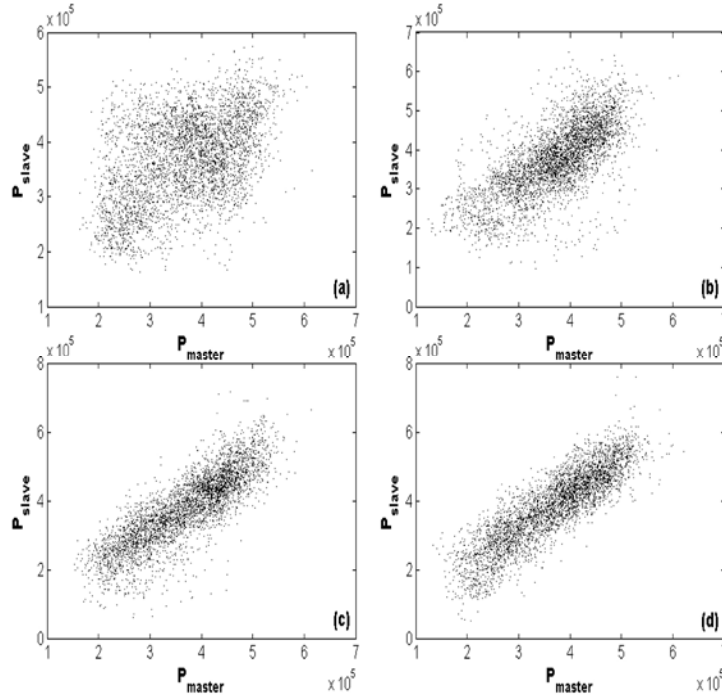


Figura 8. Diagramas de sincronización representando la potencia de salida del láser esclavo vs. la potencia de salida del láser maestro que nos muestra la “calidad de sincronización” en el sistema. Para valores del factor de acoplamiento: (a) $\kappa_\tau=0 \text{ ns}^{-1}$ (láseres desacoplados), (b) $\kappa_\tau=25 \text{ ns}^{-1}$, (c) $\kappa_\tau=50 \text{ ns}^{-1}$ y (d) $\kappa_\tau=100 \text{ ns}^{-1}$. El valor para el factor de la intensidad de ruido es $D^{1/2}=1.0$ y se consideran los datos después de un transiente de 6 ns.

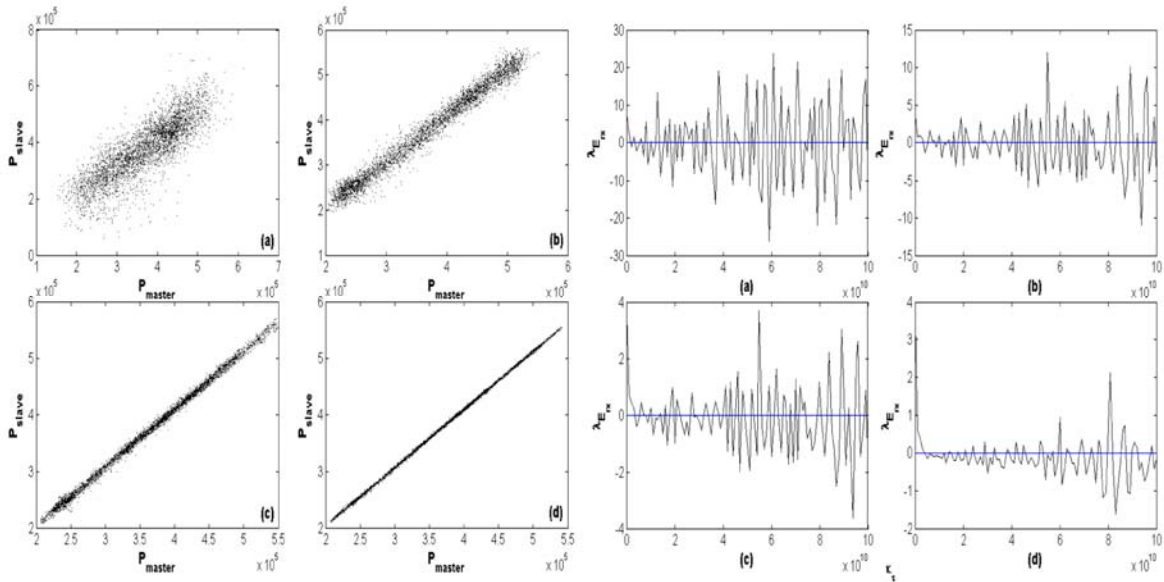


Figura 9. Diagramas de sincronización cuando el factor de acoplamiento es $\kappa_\tau=50 \text{ ns}^{-1}$ (izquierda) y exponentes de Lyapunov en función de κ_τ para la componente horizontal del campo eléctrico del láser esclavo (E_{rx}) (derecha), cuando el factor de intensidad de ruido es: (a) $D^{1/2}=1.0$, (b) $D^{1/2}=0.1$, (c) $D^{1/2}=0.01$, (d) $D^{1/2}=0.001$.

La Figura 8 muestra la tendencia hacia la sincronización que presenta el sistema de láseres, la que se refleja con el comportamiento que lleva a los puntos del diagrama de sincronización ($P_R(t)$ vs.

$P_E(t)$) a ubicarse sobre una recta; esta tendencia se muestra ya en la Figura 8(b) y se hace más evidente en (c) y (d). Si bien existe la tendencia señalada anteriormente, se nota también que los puntos en el diagrama de sincronización están muy dispersos, esto debido a la fuerte intensidad del ruido blanco. En la **Figura 9** (a la izquierda), se muestran los diagramas de sincronización cuando el factor de acoplamiento es $\kappa_\tau=50 \text{ ns}^{-1}$ y se varía el factor de intensidad de ruido desde $D^{I/2}=1.0$ (**Figura 9(a)**) hasta $D^{I/2}=10^{-3}$ (**Figura 9(d)**); es clara la tendencia a una “sincronización perfecta” a medida que disminuye el factor de intensidad de ruido, lo que se manifiesta con una línea recta bien definida en el diagrama de sincronización (**Figura 9(d)**). En tanto que los gráficos de la derecha de la **Figura 9**, muestran los exponentes de Lyapunov para la componente horizontal del campo eléctrico del láser esclavo y para valores decrecientes de la intensidad de ruido, notándose que a medida que la intensidad de ruido es menor, los exponentes de Lyapunov tienden a tomar valores negativos, lo que es un indicador también para una mejor sincronización del sistema. Ahora, si se considera el método utilizado anteriormente en los modelos de Lorenz, Rössler y Chua para caracterizar la sincronización en sistemas caóticos en base al máximo exponente de Lyapunov cuando los sistemas están desacoplados, se obtiene para empezar que éste toma el valor: $\lambda_L=1.399 \times 10^{13}$. Dado que en el sistema de ecuaciones (9), las variables adoptan valores muy diferentes, donde N_t y N_r son dominantes en valor absoluto. Con el fin de caracterizar la sincronización en la potencia de salida de los láseres, se procedió a calcular el cociente $P_R(t)/P_E(t)$ al que denominaremos *índice de sincronización* de las potencias de salida. Se sabe que antes de que dos sistemas sincronicen debe pasar un intervalo de tiempo al que denominamos transiente. Considerando como transientes “razonables” 1000 pasos de tiempo en el proceso de integración del sistema de ecuaciones (9), lo que en nuestro caso equivale a 1.0 ns. Calculando el valor medio del índice de sincronización $\epsilon_P=\langle P_R(t)/P_E(t) \rangle$ y el *error medio del índice de sincronización* $\Delta\epsilon_P$, definido como el cociente de la desviación estándar del índice de sincronización entre la raíz cuadrada del número de datos considerados; y representando estos valores, después de 1.0 ns, en función del acoplamiento $2\kappa_\tau/\lambda_L$, se obtienen las gráficas mostradas en la **Figura 10(a)-(e)**; donde, en cada una de estas gráficas se ve el establecimiento de la sincronización como una línea recta cuando se considera ϵ_P y una tendencia hacia cero cuando se considera $\Delta\epsilon_P$. Así, cuando la intensidad de ruido es pequeña (**Figura 10(a)-(d)**), la sincronización se manifiesta ya claramente para valores pequeños del acoplamiento; en tanto que cuando la varianza del ruido es uno, la sincronización se manifiesta estadísticamente recién para valores intermedios de acoplamiento según la **Figura 10(e)**. Finalmente, en la **Figura 10(f)**, se muestra la superficie generada por las variables acoplamiento, intensidad de ruido e índice de sincronización. Justamente, el comportamiento síncrono del sistema está caracterizado por una superficie plana, lo que se cumple para valores pequeños de intensidad de ruido, en cambio, como se mencionó anteriormente, si la intensidad de ruido es elevada, la superficie, si bien tiende a ser plana, existen pequeñas “rugosidades”, lo que nos lleva a afirmar que el sistema está sincronizado desde un punto de vista estadístico. Si bien para el análisis anterior, se consideró como transiente adecuado 1.0 ns, en base a los datos obtenidos de la integración, se podrían estimar los transientes para cada uno de los casos.

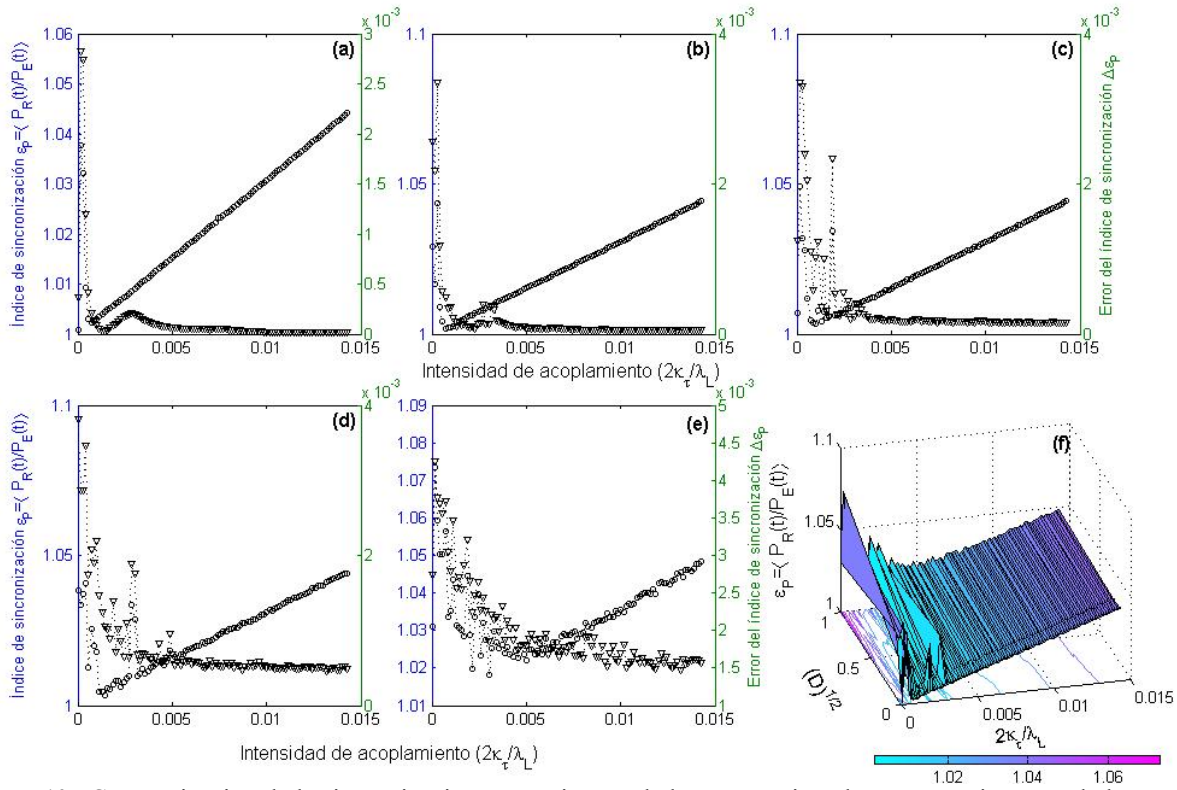


Figura 10. Caracterización de la sincronización en un sistema de láseres semiconductores caóticos acoplados según una configuración maestro-esclavo, utilizando el índice de sincronización $\epsilon_p = \langle P_R/P_E \rangle$ (o) (eje y de la izquierda) y el error del índice de sincronización $\Delta\epsilon_p = \sigma_p/N^{1/2}$ (∇) (eje y de la derecha) en función de la intensidad de acoplamiento $2c/\lambda_L$ para diferentes intensidades de ruido actuando sobre los láseres: (a) $D^{1/2}=0$, (b) $D^{1/2}=0.001$, (c) $D^{1/2}=0.01$, (d) $D^{1/2}=0.1$ y (e) $D^{1/2}=1$. (f) Superficie generada por los valores del acoplamiento $2c/\lambda_L$, la intensidad de ruido $D^{1/2}$ y el índice de sincronización ϵ_p .

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se mostraron los aspectos más relevantes concernientes a la sincronización tomando como ejemplos dos tipos de osciladores muy parecidos entre si (IFOs y LCOs) pero que presentan en muchos casos comportamientos muy diferentes. Se pudo constatar que el fenómeno de sincronización se presenta en muchos tipos de sistemas y que estos sistemas pueden presentar aspectos en común a pesar de lo muy diferentes que pueden ser. Se vio también que dos conceptos que en principio parecen ser antagónicos: la sincronización y el caos, se conjugan para mostrar la llamada sincronización caótica que es un fenómeno muy interesante que se lo ilustra con tres modelos. Para la caracterización de la sincronización caótica, se consideran aspectos tales como la intensidad de acoplamiento y el máximo exponente de Lyapunov cuando los sistemas están desacoplados. Asimismo, se hace una revisión de las situaciones en las que se presenta sincronización caótica. Antes de finalizar, se toma un estudio de caso para este fenómeno: la sincronización caótica de dos láseres semiconductores en una configuración maestro-esclavo según un modelo propuesto por Mirasso, el cual se lo estudia numéricamente con cierto detalle, llevándonos a concluir que la intensidad de ruido juega un rol perturbador en la sincronización y la calidad de la misma; con este mismo sistema se muestra las potenciales aplicaciones de la sincronización caótica, sobre todo en lo concerniente a comunicaciones seguras. El estudio exhaustivo en el espacio de parámetros puede aportar mucha información

acerca de los sistemas caóticos, tal como se muestra en [48, 49], por lo que este tipo de análisis en el sistema de láseres resulta muy importante y es la siguiente tarea a realizar en el futuro próximo. Las perspectivas que ofrecen el estudio de la sincronización y el caos son enormes ya que los sistemas complejos de diferente naturaleza a menudo muestran este tipo de comportamientos que pueden ser parte de una función importante en los mismos, sobre todo cuando se consideran sistemas biológicos. Otro aspecto muy importante es el de considerar la topología de los sistemas de osciladores acoplados (redes complejas) que puede llevar a encontrar comportamientos interesantes de acuerdo a las características de la red. El Grupo de Sistemas Complejos de la Carrera de Física, actualmente aborda diferentes sistemas y fenómenos que ocurren en estos, desde electrones cristalinos en una red hasta sistemas socio-económicos y justamente por esta diversidad, esperamos que científicos de otras ramas puedan colaborar en estos proyectos.

AGRADECIMIENTOS

Al Instituto de Investigaciones Físicas de la UMSA por permitirme desarrollar con la mayor libertad de pensamiento parte de las investigaciones en las que he estado involucrado y también las que realizo al presente que en este artículo se resumen y que han valido para que el 15 de noviembre de 2007 haya sido honrado con el premio a jóvenes científicos en el área de física otorgado por la TWAS/ANCB (Third World Academy of Sciences/Academia Nacional de Ciencias de Bolivia)¹⁸, instituciones a las que también agradezco por incentivar, con este tipo de reconocimientos, la investigación en Bolivia. A mis colegas y miembros del Grupo de Sistemas Complejos por las ideas y discusiones que surgen en nuestras reuniones semanales. A los profesores Jean-Louis Deneubourg (de la Universidad Libre de Bruselas) y Jason Gallas (de la Universidad Federal de Rio Grande do Sul) por permitirme colaborar con ellos. Finalmente, a SD pour faire que la vie soit toujours belle.

¹⁸ Una nota de prensa al respecto puede encontrarse en el sitio web:
http://www.la-razon.com/versiones/20071118%5F006094/nota_269_508165.htm

REFERENCIAS

- [1] M. V. Volkenshtein, *Biofísica*. Moscow: Mir, 1985.
- [2] G. Nicolis, *Introduction to Nonlinear Science*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [3] G. M. Ramirez Avila & R. Cabrera Lafuente, "Análisis de bifurcación de Hopf para el modelo de Rössler," *Revista Boliviana de Física*, vol. 7, pp. 115-128, 2001.
- [4] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Synchronization in chains of light-controlled oscillators," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 23, pp. 252--258, 2005.
- [5] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Comportamiento síncrono de osciladores de relajación idénticos globalmente acoplados por pulsos," *Revista Boliviana de Física*, vol. 13, pp. 1--10, 2007.
- [6] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Influencia del ruido en la sincronización de dos osciladores fotocontrolados," *Revista Boliviana de Física*, vol. 11, pp. 44-51, 2005.
- [7] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Influence of uniform noise on two light-controlled oscillators," *International Journal of Bifurcation and Chaos* vol. 17, pp. 4453 - 4462, 2007.
- [8] C. Huygens, *Horologium Oscillatorium*. Paris: Apud F. Muguet, 1673.
- [9] A. Pikovsky, M. Rosenblum, & J. Kurths, *Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences*, vol. 12. New York: Cambridge University Press, 2001.
- [10] C. Schäfer, M. G. Rosenblum, H.-H. Abel, & J. Kurths, "Synchronization in the human cardiorespiratory system," *Physical Review E*, vol. 60, pp. 857--870, 1999.
- [11] J. Buck, "Synchronous rhythmic flashing of fireflies. II," *The Quarterly Review of Biology*, vol. 63, pp. 265--289, 1988.
- [12] B. Ermentrout, "An adaptive model for synchrony in the firefly *Pteroptyx malaccae*," *Journal of Mathematical Biology*, vol. 29, pp. 571--585, 1991.
- [13] J. Buck, E. Buck, J. F. Case, & F. E. Hanson, "Control of flashing in fireflies. V. Pacemaker synchronization in *Pteroptyx cribellata*," *J. Comp. Physiol. A*, vol. 144, pp. 287--298, 1981.
- [14] J. F. Case, "Flight Studies on Photic Communication by the Firefly *Photinus pyralis*," *Integrative and Comparative Biology*, vol. 44, pp. 250-258, 2004.
- [15] J. Copeland & A. Moiseff, "Flash Precision at the Start of Synchrony in *Photuris frontalis*," *Integrative and Comparative Biology*, vol. 44, pp. 259-263, 2004.
- [16] S. Camazine, J.-L. Deneubourg, N. R. Franks, J. Sneyd, G. Theraulaz, & E. Bonabeau, *Self-Organization in Biological Systems*. Princeton: Princeton University Press, 2001.
- [17] I. I. Blekhman, *Synchronization in Science and Technology*. New York: ASME Press (American Society of Mechanical Engineers), 1988.
- [18] Nobel-Foundation, "The Nobel Prize in Physics 2001," http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2001/index.html, 2001.
- [19] G. M. Ramirez Avila, "Complejo y complicado: especialización e interdisciplinariedad," *Revista Boliviana de Educación Superior en Ciencia*, vol. 6, pp. 21-29, 2006.
- [20] M. Beckerman, *Adaptive Cooperative Systems*. New York, NY,: John Wiley & Sons, 1997.

- [21] R. E. Mirollo & S. H. Strogatz, "Synchronization of Pulse-Coupled Biological Oscillators," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 50, pp. 1645--1662, 1990.
- [22] S. H. Strogatz, *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. New York: Hyperion Press, 2003.
- [23] G. M. Ramirez Avila, "Synchronization phenomena in light-controlled oscillators," presented at the Department of Physics of the Université Libre de Bruxelles to obtain the PhD Degree. Brussels, 2004.
- [24] J. L. Guisset, G. M. Ramirez Avila, & J. L. Deneubourg, "Construcción de osciladores controlados por luz y medida de su comportamiento síncrono," *Revista Boliviana de Física*, vol. 7, pp. 102-114, 2001.
- [25] J.-L. Guisset, J.-L. Deneubourg, & G. M. Ramirez-Avila, "The Phase Information Associated to Synchronized Electronic Fireflies," *arXiv.nlin.AO/0206036*, 2002.
- [26] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Synchronization in light-controlled oscillators," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 182, pp. 254-273, 2003.
- [27] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Sincronización y transientes en configuraciones unidimensionales de osciladores fotocontrolados localmente acoplados," *Revista Boliviana de Física*, vol. 12, pp. 1--7, 2006.
- [28] G. V. Osipov, M. V. Ivanchenko, C. Zhou, & J. Kurths, "Routes to phase synchronization in coupled chaotic oscillators," presented at 11th International IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Scuol/Schuls, Switzerland, 2003.
- [29] Q.-Y. Wang, Q.-S. Lu, & H.-X. Wang, "Transition to complete synchronization via near-synchronization in two coupled chaotic neurons," *Chinese Physics*, vol. 14, pp. 2189-2195, 2005.
- [30] S. C. Manrubia, A. S. Mikhailov, & D. H. Zanette, *Emergence of dynamical order*, vol. 2. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004.
- [31] J. L. Guisset, G. M. Ramirez Avila, & J. L. Deneubourg, "Constructing coupled electronic fireflies and measuring their phase-locking behavior (in Spanish)," in *Revista Boliviana de Física*, 2001, pp. 102--114.
- [32] D. Sanders, "Synchronization time in coupled map lattices (personal communication)," G. M. R. Avila, Ed. Yalta, Ukraine, 2002.
- [33] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Synchronous behavior in small populations of light-controlled oscillators," presented at 11th International IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Scuol/Schuls, Switzerland, 2003.
- [34] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Estudio de la sincronización en un sistema de dos osciladores idénticos controlados por luz," *Revista Boliviana de Física*, vol. 10, pp. 1-7, 2004.
- [35] G. M. Ramirez Avila, "Complejidad e interdisciplinariedad. Estudio de caso: sincronización de osciladores electrónicos bioinspirados," in *Boletín FEDSIDUMSA*, 2007, pp. 39--44.
- [36] T. Kapitaniak & S. R. Bishop, *The Illustrated Dictionary of Nonlinear Dynamics and Chaos* Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [37] J. A. C. Gallas, "Apontamentos de caos," 2005.
- [38] D. Kaplan & L. Glass, *Understanding Nonlinear Dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1995.

- [39] D. Aubin & A. Dahan Dalmedico, "Writing the history of dynamical systems and chaos: longue durée and revolution, disciplines and cultures," *Historia Mathematica*, vol. 29, pp. 273--339, 2002.
- [40] E. N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, pp. 130--141, 1963.
- [41] O. E. Rössler, "Equation for continuous chaos," *Phys. Lett.*, vol. 57, pp. 397--398, 1976.
- [42] E. Rietman, *Creating artificial life: self-organization*. New York: Windcrest/McGraw-Hill, 1993.
- [43] L. O. Chua, Y. Yao, & Q. Yang, "Devil's staircase route to chaos in a nonlinear circuit," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 14, pp. 315--329, 1986.
- [44] G. Conde Saavedra & G. M. Ramirez Avila, "Estudio de dos circuitos caóticos," *Revista Boliviana de Física*, vol. 13, pp. 58-74, 2007.
- [45] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, & C. S. Zhou, "The synchronization of chaotic systems," *Physics Reports*, vol. 366, pp. 1--101, 2002.
- [46] J. C. Sprott, *Chaos and time-series analysis*: Oxford University Press, 2003.
- [47] C. R. Mirasso, "Applications of semiconductor lasers to secure communications," presented at Fundamental Issues of Nonlinear Laser Dynamics, 2000.
- [48] J. A. C. Gallas, "Structure of the parameter space of the Hénon map," *Physical Review Letters*, vol. 70, pp. 2714, 1993.
- [49] C. Bonatto, J. C. Garreau, & J. A. C. Gallas, "Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated CO₂ laser," *Physical Review Letters*, vol. 95, pp. 143905, 2005.