

ESPACIOS DE PARÁMETROS PARA EL ESTUDIO DE LA TURBULENCIA MEDIADA POR DEFECTOS Y OTROS FENÓMENOS NO LINEALES EN SISTEMAS ESPACIALMENTE DISTRIBUIDOS

PARAMETER SPACES FOR STUDYING DEFECT-MEDIATED TURBULENCE AND OTHER NONLINEAR PHENOMENA IN SPATIALLY DISTRIBUTED SYSTEMS

J. W. SIRPA POMA[†] & G. M. RAMÍREZ ÁVILA[‡]

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

(Recibido 15 de noviembre de 2015; aceptado 17 de diciembre de 2015)

RESUMEN

Se utiliza la ecuación compleja de Landau-Ginzburg (ECLG) como base para el estudio de sistemas espacialmente distribuidos. Se considera diferentes comportamientos de un fluido tales como la laminaridad, la aparición de fuentes y sumideros, el régimen intermitente, la turbulencia de fase y la turbulencia mediada por defectos, siendo esta la que en principio concitó nuestra atención. El análisis numérico de la ECLG nos permitió caracterizar espacio-temporalmente cada uno de estos comportamientos. Por medio de la construcción del espacio de parámetros con base en la amplitud promedio, se identifican cada uno de estos regímenes.

Código(s) PACS: 47.27.Cn, 02.70.-c, 05.45.-a

Descriptor: Transición a la turbulencia — Técnicas computacionales; simulaciones — Dinámica no lineal y caos.

ABSTRACT

The complex Landau-Ginzburg equation (CLGE) has been used as the basis of the study of spatially distributed systems. We considered a variety of behaviors on a fluid, such as laminarity, the apparition of sources and sinks, the intermittent regime, and the defect-mediated turbulence; being the last one that focused our attention. Numerical analysis of the CLGE allowed us the spatio-temporal characterization of each of these behaviors. By means of the parameters space, based on the mean amplitude, the phase diagram distinguishes clearly the occurrence of the above mentioned regimes.

Subject headings: Transition to turbulence — Computational techniques; simulations — Nonlinear dynamics and chaos.

1. INTRODUCCIÓN

La comprensión del orden espacio-temporal en sistemas abiertos alejados del equilibrio termodinámico y sus simetrías es un tema importante de investigación dentro de las estructuras de la materia continua. Es también conocido que las transiciones laminar/turbulento en fluidos son una consecuencia del orden espacio-temporal como lo señalan Walgraed & Ghoniem (1990).

Uno de los trabajos paradigmáticos en el estudio de organización espacio-temporal es el propuesto por Turing (1952) que analiza la morfogénesis a partir de una inestabilidad que hace alusión a la ruptura de simetría, donde la longitud característica es intrínseca al sistema (dependiendo solamente de los parámetros y no así de la geometría ni de las condi-

ciones de frontera).

La convección térmica es el origen de importantes y sorprendentes fenómenos naturales; entre ellos, la circulación de la atmósfera y océanos, el movimiento de placas continentales, etc. Este problema fue abordado mediante un sencillo experimento a escala en 1900 por Bénard, y que desembocó en una gran cantidad de propiedades interesantes; siendo la principal, la aparición de multiestabilidad cuando se supera el valor crítico de la temperatura.

Así, no es sorprendente encontrar inestabilidades y bifurcaciones en una gran variedad de sistemas conocidos, tales como el flujo de vórtices de Taylor, dinámica de solidificación, física de láseres y muchos otros que guardan similaridad con las observadas en el problema de Bénard y en sistemas de reacción-difusión tal como lo señala Nicolis (1995).

En la Sec. 2 se presenta el modelo que se utiliza para el estudio de sistemas espacialmente distribui-

[†]dneutron.js@gmail.com

[‡]http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/

dos que luego de un análisis de estabilidad lineal se llega a la forma normal en la vecindad de una inestabilidad, lo que se constituye en la ECLG, la cual es la base para los análisis ulteriores. En la Sec. 3 se dan los detalles del método utilizado para la resolución de la ECLG. En la Sec. 4 se muestran los resultados más importantes usando espacios de parámetros y finalmente se mencionan las conclusiones y perspectivas en la Sec. 5.

2. MODELO

Para el estudio de cada uno de los sistemas mencionados, se tiene una variedad de modelos matemáticos dependiendo del tipo de inestabilidades que se vayan a presentar. Entre los más habituales están los expuestos por Cross & Hohenberg (1993), de los cuales, se pueden mencionar: la ecuación de Swift-Hohenberg (SH) y sus variantes para inestabilidades del tipo estacionario-periódico; la ecuación de Kuramoto-Sivashinky (KS) que representa un modelo microscópico; las ecuaciones de reacción-difusión para inestabilidades de tipo oscilatorio-uniforme para la descripción de reacciones químicas; y por último el modelo de Landau-Ginzburg, el cual es adecuado para sistemas espacialmente distribuidos.

La descripción de sistemas compuestos por muchas partículas está dada a través de muchas variables de estado que dependen continuamente de las coordenadas espaciales y que obedecen las leyes de la física clásica. De manera general, las leyes de evolución de estas variables de estado se las expresa en términos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la forma:

$$\frac{\partial W_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = F_i(\{\mathbf{W}_j(\mathbf{r}, t)\}, \{\nabla^k \mathbf{W}_j(\mathbf{r}, t)\}, \lambda). \quad (1)$$

Sistemas representados con la anterior ecuación son denominados sistemas espacialmente distribuidos y en principio a causa de inhomogeneidades espaciales, llegan a tener una infinidad de variables que pueden estar acopladas por fenómenos de transporte. Por otra parte, la presencia de derivadas espaciales posibilita la aparición de inestabilidades espontáneas de ruptura de simetría. En otros términos, esta aparición indica la existencia de una dependencia espacial de las perturbaciones.

Además, los sistemas con gran extensión espacial, a diferencia de los sistemas espacialmente pequeños, llegan a presentar nuevas características por el hecho de poseer un número mayor de grados de libertad.

Considerando un número finito de variables de manera que las restricciones actuando sobre el sistema no dependan del tiempo (sistemas autónomos), se tendrá que las leyes de evolución pueden ser escritas de manera más compacta:

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = F(\mathbf{W}, \lambda), \quad (2)$$

donde λ es el parámetro de control, el cual refleja la estructura interna del sistema o la manera en que se

comunica con el mundo externo. Los sistemas reales presentan un gran conjunto de parámetros, entre los más conocidos podemos mencionar los coeficientes de viscosidad, el coeficiente de difusión, etc.

Por otra parte, las soluciones están bien definidas en el espacio de fases Γ , excepto en algunos puntos $\mathbf{W}_s = \{\mathbf{W}_{js}\}$, puntos que son determinados a partir de un conjunto de ecuaciones algebraicas:

$$F_1(\{\mathbf{W}_{js}\}, \lambda) = \dots = F_n(\{\mathbf{W}_{js}\}, \lambda) = 0. \quad (3)$$

Dichos puntos reciben la denominación de puntos singulares. En sistemas autónomos estos puntos permanecen fijos en el espacio de fases permanentemente, definiendo un conjunto invariante y describiendo soluciones estacionarias.

En los sistemas reales se observa que no permanecen en un solo estado a lo largo del tiempo; se tiene así, un conjunto de variables que interactúan de manera compleja intercambiando masa, momento y energía de manera impredecible. Como resultado se tiene una desviación constante alrededor de las soluciones estables, nos referimos a estas como una perturbación.

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}_s + \mathbf{w}(t). \quad (4)$$

Dependiendo de la respuesta del sistema ante una perturbación se puede inferir si el sistema es estable, inestable o asintóticamente estable. Realizando una expansión de Taylor en términos de \mathbf{w} alrededor de \mathbf{W}_s , la ecuación adopta la siguiente forma:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathcal{L}(\lambda)\mathbf{w} + h(\mathbf{w}, \lambda), \quad (5)$$

donde se tiene una contribución de una parte lineal y otra no lineal, esta última en correspondencia con términos de orden superior en el desarrollo de Taylor.

Para la descripción generalizada, se incluye la derivada espacial conjuntamente con un análisis de bifurcación de Hopf en sistemas espacialmente uniformes, con lo que se llega a obtener la forma normal de la dinámica en sistemas espacialmente distribuidos, en la vecindad de una inestabilidad $(\lambda - \lambda_c)$. En la literatura se la denomina como la ecuación compleja de Landau-Ginzburg (ECLG):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (\lambda - \lambda_c)A + (1 + i\alpha)\nabla^2 A - (1 + i\beta)|A|^2 A, \quad (6)$$

donde los parámetros λ_c , α y β son parámetros asociados al punto de bifurcación (transiciones en la estabilidad), a la dispersión lineal y no lineal (o conservación de la no linealidad), respectivamente.

Realizando un análisis de estabilidad lineal de la anterior ecuación se llega a obtener soluciones estacionarias de la forma:

$$A_s = (\lambda - \lambda_c)^{1/2} e^{-i\beta(\lambda - \lambda_c)t}. \quad (7)$$

Considerando soluciones generales o perturbadas:

$$A(r, t) = A_s + \delta A(r, t) e^{-i\beta(\lambda - \lambda_c)t}, \quad (8)$$

y reemplazando en la ECLG se llega a obtener la ecuación característica descrita por Nicolis (1995),

producto de esta se tiene el criterio de Benjamin-Feir-Newell, demostrando que la única inestabilidad puede surgir cuando se cumple la desigualdad $1 + \alpha\beta < 0$. Lo contrario garantiza soluciones en el régimen laminar; dicha inestabilidad se presenta en forma de turbulencia espacio-temporal caracterizada por la aparición espontánea de defectos como muestra Conway (2008).

Otros comportamientos encontrados son la turbulencia de fase caracterizada por tener amplitudes saturadas, el régimen de turbulencia mediada por defectos caracterizada por un carácter caótico que puede incluir amplitudes de valor cero; por último se tiene un régimen intermitente caracterizado por la coexistencia entre la turbulencia mediada por defectos y ondas planas estables (laminaridad), lo que típicamente se presenta como regiones laminares separadas por estructuras localizadas con una gran depresión de la amplitud. Además, estas estructuras localizadas pueden llegar a formar fuentes y sumideros bajo ciertos valores de los parámetros como lo mencionan Rabinovich et al. (2000). En este trabajo se caracterizan los diferentes regímenes de un fluido.

3. MÉTODOS PARA LA RESOLUCIÓN DE LA ECLG

En este trabajo, se resuelve la ECLG en una dimensión utilizando el método pseudoespectral para la discretización espacial y el método de diferenciación de tiempo exponencial (ETD por su sigla en inglés) para la discretización temporal, método que nos proporciona una alta resolución de los resultados en comparación al método de diferencias finitas.

3.1. Discretización Espacial

El método utilizado para resolver la parte espacial de la ECLG, es el denominado pseudoespectral de Fourier, esto con el fin de no perder resolución en las soluciones numéricas ya que el orden del error está en función del modo de oscilación k y del orden máximo de la derivada espacial $\mathcal{O}(k^{-2})$. Este método consiste en escribir las soluciones como una combinación lineal de funciones base, en este caso funciones base de Fourier e^{ikx} ; además, nos permite trabajar fácilmente con la derivada espacial.

Así, se analiza la ECLG en el espacio de Fourier, esto es, aplicando la transformada de Fourier $A(x, t) \rightarrow \hat{A}(k, t)$ (ver (9)) y calculando los coeficientes de Fourier a partir de la transformada discreta de Fourier (TDF) como indica Geldhof (2013).

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = [(\lambda - \lambda_c) - (1 + i\alpha)k^2]\hat{A} - \mathcal{F}[(1 + i\beta)|A|^2 A]. \quad (9)$$

Se trabajó en el intervalo de $[-100, 100]$ con condiciones de contorno periódicas, con una grilla de 0.4.

3.2. Discretización Temporal

Nuestro interés es ver la evolución de la ecuación no lineal (9). Así, reescribiendo la ecuación vemos que esta tiene la contribución de una parte lineal y otra no lineal de la forma:

$$\hat{A}_t = \mathcal{L}\hat{A} + \mathcal{N}(A, t). \quad (10)$$

Ecuaciones con esta forma pueden ser resueltas por el método ETD, consistente en multiplicar la ecuación por el factor de integración e^{-qt} , donde q representa la parte lineal \mathcal{L} de la ecuación (10), e integrando en el intervalo $[t_n, t_n + h]$:

$$\left(\hat{A}(t_{n+1})e^{-qh} - \hat{A}(t_n)\right)e^{-qt_n} = \int_{t_n}^{t_n+h} e^{-qt} \mathcal{N}(A, t) dt. \quad (11)$$

Esta relación es exacta, y la esencia de este método es derivar aproximaciones de la integral (11). Este método cuenta con muchas variantes ya sea aproximaciones de primer orden (ETD1) o de segundo orden (ETD2) de la integral por diferencias, o la combinación con otros métodos (p.ej. Runge-Kutta). Sin embargo, teniendo en cuenta que los procesos son de variación lenta se opta por una aproximación de primer orden $\mathcal{O}(h)$ en la integral como lo señalan Cox & Matthew (2002) obteniendo así:

$$\hat{A}_{n+1} = \hat{A}_n e^{qh} + \mathcal{N}_n \frac{e^{qh} - 1}{q}. \quad (12)$$

En el presente trabajo se escogió como paso de tiempo $h = 0.05$, como compromiso de no extender demasiado el tiempo de cálculo y de no perder resolución en las soluciones.

4. RESULTADOS

Con base en las soluciones numéricas de (12), aplicando la transformada inversa de Fourier, y variando los valores de α y β se puede observar distintos patrones espacio-temporales, desde laminaridad hasta turbulencia mediada por defectos en la región de inestabilidad.

En concreto, se varió α y β en un intervalo de $[-2, 2]$ con pasos de 0.08. Se obtuvieron múltiples patrones espacio-temporales, incluyendo la región de turbulencia mediada por defectos. Con el fin de caracterizar la región en consideración fue imperativo el tener un criterio con el cual se puedan distinguir los diferentes regímenes del sistema. Es así que se optó por calcular el promedio de las amplitudes de cada uno de los patrones espacio-temporales resultantes, obteniendo así los valores para construir el espacio de parámetros (mapa de promedios en función de los parámetros α y β) como se ve en la Fig. 1(a). El código de colores en el espacio de parámetros indica los promedios de la amplitud de cada patrón espacio-temporal. Se puede observar una clara diferenciación entre los distintos regímenes del sistema, además de presentar una simetría respecto a la diagonal que va de (-2,-2) a (2,2), a pesar de que en algunos casos, los patrones espacio-temporales son diferentes aunque parezca que la región en el espacio de parámetros sea la misma (ver por ejemplo Fig. 1(b) y (c)). La región roja del mapa corresponde a regímenes laminares (Fig. 1(b)). Se distingue claramente que la región de inestabilidad está dividida en ocho partes: dos regiones de intermitencia donde predomina la laminaridad en una (Fig. 1(d)) y la turbulencia en la otra (Fig. 1(e)), zonas de color amarillo y verde respectivamente. Por otra parte, una región

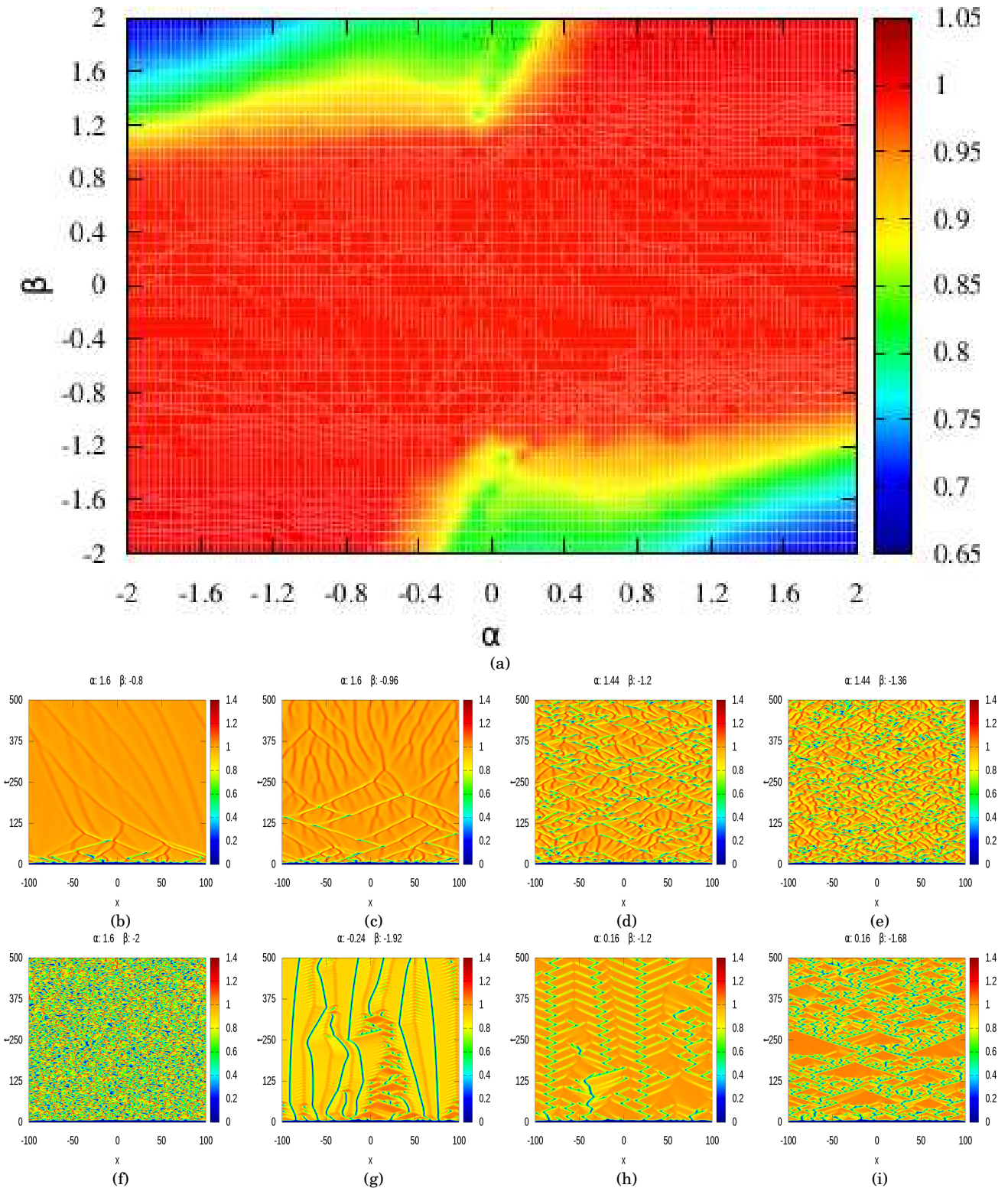


FIG. 1.— (Color online) (a) Espacio de parámetros β vs. α en el cual se pueden distinguir diferentes regiones correspondientes a distintos patrones espacio-temporales tales como (b) régimen laminar, (c) régimen de turbulencia de fase, (d) y (e) regímenes de intermitencia, (f) régimen de turbulencia mediada por defectos, (g) formación de fuentes y sumideros, (h) e (i) transiciones de fase entre las regiones de fuentes-sumideros e intermitencia.

dominada por la turbulencia mediada por defectos de color azul (Fig. 1(f)); y otra región dominada por una fuerte formación de fuentes y sumideros (Fig. 1(g)) en el extremo del régimen intermitente próximo al

valor cero del parámetro de dispersión lineal α . Finalmente, dos regiones de transición de fase entre las regiones de laminaridad, intermitencia y turbulencia, zonas de color rojo claro (definida como la tur-

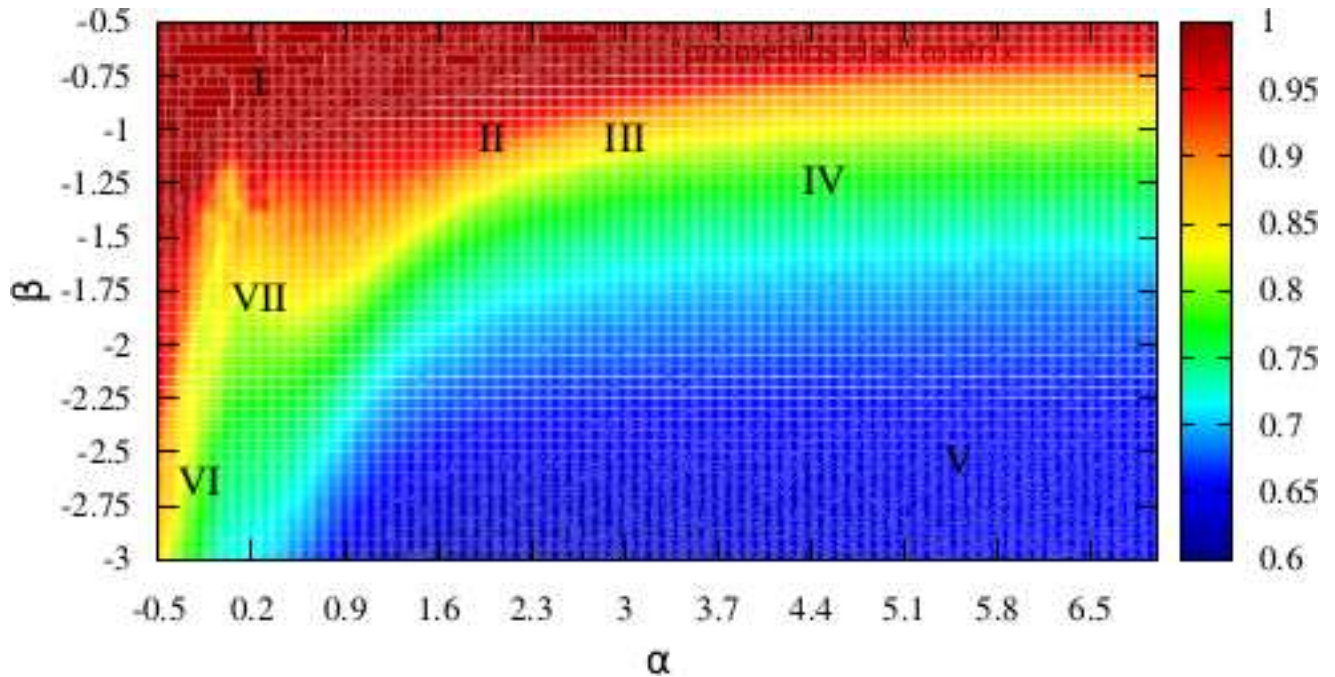


FIG. 2.— (Color online) Ubicación en el espacio de parámetros β vs. α de los diferentes regímenes del sistema. I: Régimen laminar. II: Turbulencia de fase. III y IV: Régimen intermitente. V: Turbulencia mediada por defectos. VI: Fuentes y sumideros. VII: Región de transición entre fuentes-sumideros y las regiones intermitentes.

bulencia de fase que aparece en la Fig. 1(c) y celeste, y dos regiones de transición de fase entre la zona de fuentes y sumideros, y las regiones de intermitencia (Fig. 1(h) e (i));

Finalmente, con el fin de tener un panorama más amplio de las distintas regiones mencionadas, se magnifica el espacio de parámetros, trabajando con el mismo paso de tiempo, para valores de α en el intervalo $[-0.5, 7]$ con pasos de 0.05 y β en el intervalo $[-3, -0.5]$ con pasos de 0.08 (Fig. 2), más allá de estos valores se presenta divergencia en las soluciones.

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Después de realizar un intenso trabajo numérico con el fin de poder distinguir entre los diferentes regímenes, se pudo construir el espacio de parámetros α vs. β que permite hacer una clara distinción de los comportamientos existentes, in-

cluyendo las regiones de transición de fase. Además, se pudo también observar una simetría respecto a la diagonal en términos de los promedios y que la región correspondiente al régimen de turbulencia mediada por defectos es pequeña comparada con la región de laminaridad.

Como perspectivas, se tiene previsto realizar un análisis más detallado del espacio de parámetros, en especial de la región de fuentes y sumideros; también se pretende tener una visión más amplia del régimen turbulento y su cuantificación mediante otras herramientas de la dinámica no lineal tales como el cálculo de exponentes de Lyapunov y/o periodicidades; por otra parte, se buscarán otras formas de modelar el problema, por ejemplo usando sistemas multiagentes; por último, se pretende observar el comportamiento del sistema frente a perturbaciones externas, así como estudiar situaciones que puedan ser aplicadas en el área de la física del estado sólido.

REFERENCIAS

- Conway J. M. (2008), *Complex Patterns in Oscillatory Systems*. (Tesis doctoral - Northwestern University).
- Cox S. M. & Matthew P. C. (2002), *Journal of Computational Physics* **176**, 430.
- Cross M. C. & Hohenberg P. C. (1993), *Review of Modern Physics* **65**, 851.
- Geldhof S. (2013), *Pseudospectral Methods for a class of Evolutionary Systems*. (Tesis doctoral - Colorado School of Mines).
- Nicolis G. (1995), *Introduction to nonlinear science*. (Cambridge University Press).
- Rabinovich M. I. Ezersky A. B. & Weidman P. D. (2000), *The dynamics of patterns*. (Singapur: World Scientific Publishing).
- Turing A. M. (1952), *The Chemical Basis of Morphogenesis*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences* **237**, 37.
- Walgraed D. & Ghoniem N. M. Ed. (1990), *Patterns, Defects and Materials Instabilities*. (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers).