

DINÁMICA DE CIRCUITOS DE CHUA CON BOBINAS NO IDEALES E HISTÉRESIS CHUA'S CIRCUITS DYNAMIC WITH NON-IDEAL COILS AND HYSTERESIS

AURELIO ALEJANDRO SUXO-CORO[†] [1], ABDIAS SERGIO CALLEJAS-ICUÑA[†] [2], C. NINA[†] [3], RENE ORLANDO MEDRANO-TORRICOS[‡] [4], & GONZALO MARCELO RAMÍREZ-ÁVILA^{*} [5]

[†]Carrera de Física, Universidad Mayor de San Andrés.
Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota. La Paz - Bolivia

[‡]Departamento de Física, Universidade Federal de São Paulo UNIFESP, 09913-030, Campus Diadema São Paulo, Brazil

Departamento de Física, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, UNESP, 13506-900, Campus Rio Claro, São Paulo, Brazil &

^{*}Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés.

Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota. La Paz - Bolivia

(Recibido 07 de octubre de 2022; aceptado 28 de octubre de 2022)

<https://doi.org/10.53287/wvkt7994ew79r>

RESUMEN

Se realizó el estudio dinámico completo (teórico, experimental y numérico) de un circuito caótico tipo Chua utilizando una bobina no ideal con valores no despreciables de su resistencia interna. Lo anterior ocasiona que este circuito no muestre comportamiento caótico, con lo que para encontrar caoticidad, se propone una modificación que introduce histéresis al diodo de Chua. Usando espacios de hasta tres parámetros de control, se muestra cómo esta modificación se adapta a un amplio intervalo de inductores no ideales, presentando regiones caóticas más extensas que el circuito de Chua clásico. Se contrastan estas simulaciones, construyendo el circuito físico y exponiendo cómo esta modificación resulta en un diseño experimental más sencillo del inductor. Lo anterior permite eliminar las dificultades causadas por este componente electrónico que es uno de los más difícil de tratar y que se traduce en la ausencia de atractores tipo Rössler y la asimetría de los atractores double-scroll.

Finalmente, se muestran características del tiempo de simulación que pueden pasar de manera desapercibida, como lo que ocurre en la crisis de intermitencia, donde se observa un carácter de doble caoticidad.

Descriptor: Simulaciones numéricas de sistemas caóticos — Circuitos electrónicos — Inductores y bobinas; embobinado.

Código(s) PACS: 05.45.Pq — 84.30.-r — 84.32.Hh

ABSTRACT

A complete dynamic study (theoretical, experimental and numerical) of a chaotic Chua-type circuit was carried out using a non-ideal coil with non-negligible values of its internal resistance. This set up means that the circuit does not show chaotic behavior. In order to observe chaoticity, a modification that introduces hysteresis to the Chua diode is proposed. Using spaces of up to three control parameters it is shown how this modification adapts to a wide range of non-ideal inductors presenting more extensive chaotic regions than the classical Chua circuit. These simulations are tested with a physical circuit and demonstrate how the modifications result in a simpler experimental design of the inductor. By simplifying the experimental design the difficulties caused by the electronic component is eliminated and results in the absence of Rössler type attractors and the asymmetry of the double-scroll attractors.

Finally, features of the simulation time are shown that may otherwise go unnoticed, such as, those in the intermittency crisis, where a double-scroll character is observed.

Subject headings: Numerical simulations of chaotic systems — Electronic circuits — Inductors and coils; wiring.

1. PRÓLOGO

A manera de prólogo, Chen & Ueta (2002) mencionan:

“Circuits, both linear and nonlinear, remain the core components of most electronic and mechatronic equipment and devices to date. As industrial electronics and mechatronics become mature, better functionality and reliability of these technologies require more intriguing use of nonlinear circuits. This calls for thorough investigation of dynamical characteristics and largest possible operating regimes of nonlinear circuits and systems. Of particular interest is the fundamental nonlinear circuit theory that is still in the evolving phase of its development today. In view of the exciting emergence of nano-technology and the attractive quantum-computing future, nonlinear circuits have become even more important and fundamental.”

Que se puede traducir como:

“Los circuitos, tanto lineales como no lineales, siguen siendo hasta la fecha los componentes centrales de la mayoría de los dispositivos electrónicos y mecatrónicos. A medida que la electrónica industrial y la mecatrónica maduran, una mejor funcionalidad y confiabilidad de estas tecnologías requiere un uso más intrigante de los circuitos no lineales. Esto requiere una investigación exhaustiva de las características dinámicas y los regímenes operativos más grandes posibles de los circuitos y sistemas no lineales. De particular interés es la teoría fundamental de circuitos no lineales que en la actualidad, todavía se encuentra en la fase de evolución de su desarrollo. En vista del interesante surgimiento de la nanotecnología y el atractivo futuro de la computación cuántica, los circuitos no lineales se han vuelto aún más importantes y fundamentales.”

2. INTRODUCCIÓN

En la teoría del caos, los sistemas caóticos son: no lineales, sensibles a las condiciones iniciales y su comportamiento no se puede prever hasta que suceda o se calcule (pese a ello, el sistema es determinista). En la naturaleza abundan sistemas que tienen estas características. Edward Lorenz caracteriza el caos como (Danforth (2013)):

“Cuando el presente determina el futuro, pero el presente aproximado no determina aproximadamente el futuro.”

Entre los sistemas caóticos más típicos y de fácil acceso figuran los circuitos electrónicos. Kennedy

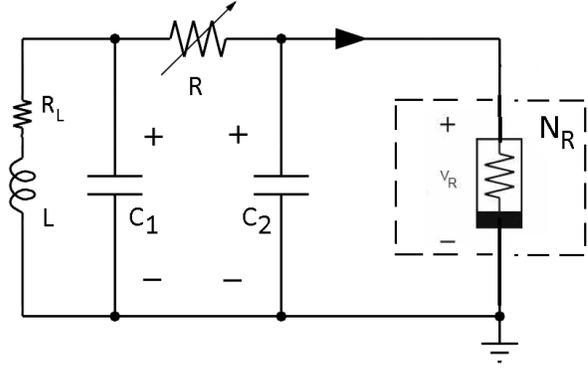


FIG. 1.— Circuito de Chua canónico.

(1993) menciona que deben satisfacerse tres criterios relacionados con los elementos que deben tener los circuitos:

- (i) Al menos un elemento no lineal.
- (ii) Al menos una resistencia localmente activa (resistencia negativa).
- (iii) Tres o más elementos de almacenamiento de energía.

El circuito de Chua (Fig. 1) cumple estos criterios y es uno de los más populares que exhibe caos, puesto que es un circuito autónomo simple capaz de mostrar comportamiento caótico; está compuesto, por una porción que presenta el comportamiento típico de un oscilador amortiguado (dos condensadores C_1 y C_2 , una resistencia variable R y una bobina L) y la otra parte que constituye el único elemento no lineal denominado diodo de Chua, N_R que básicamente es una resistencia no lineal negativa o lineal por partes (piecewise linear o PWL) como se muestra en la Fig. 2. Este elemento causante de la no linealidad actúa como la fuente de energía de todo el circuito, ya que es la responsable de la retroalimentación que lo mantiene oscilando.

Escribiendo las variables dinámicas V_{C_1} , V_{C_2} e I_L , junto con los voltajes de quiebre $-B_p$ y $+B_p$, como:

$$\begin{aligned} x &= V_{C_1}(B_p)^{-1}, \\ y &= V_{C_2}(B_p)^{-1}, \\ z &= RI_L(B_p)^{-1}, \\ \tau &= t(RC_2)^{-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

se obtiene las ecuaciones diferenciales adimensionales:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y - \gamma z, \end{aligned} \quad (2)$$

con los parámetros:

$$\begin{aligned} \alpha &= C_2 C_3^{-1}, \\ \beta &= R^2 C_2 L^{-1}, \\ \gamma &= R_L R C_2 L^{-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

donde R_L representa la resistencia interna del

[3] <https://orcid.org/0000-0001-8113-0189>

[4] <https://orcid.org/0000-0003-0866-2466>

[5] <https://orcid.org/000-0003-4522-9012>

[1] asuxoc@fcfn.edu.bo

[2] acallejasi@fcfn.edu.bo

[3] cnina1010@gmail.com

[4] rmedrano@if.usp.br

[5] mravila@fiumsa.edu.bo

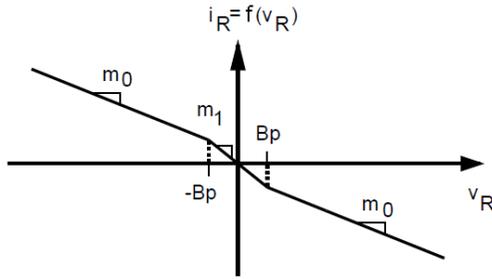


FIG. 2.— Característica de linealidad por partes de voltaje y corriente del diodo de Chua. $-B_p$ y $+B_p$ son los puntos de quiebre de la relación corriente-voltaje del diodo de Chua; en tanto que m_0 y m_1 son las pendientes de la región externa e interna, respectivamente (Kennedy (1992)).

inductor L en la Fig. 1. A esta configuración se la conoce como circuito de Chua canónico (\mathcal{C}^2), en el sentido de que puede exhibir todos los posibles comportamientos dinámicos asociados con cualquier campo vector continuo, lineal por partes (PWL) y simétrico de tres regiones. En el caso de no considerar la resistencia R_L , el valor de γ es nulo y el circuito de Chua (\mathcal{C}^1) se convierte en el caso simple/ideal.

La función PWL que describe el comportamiento del diodo de Chua, es:

$$f(x) = m_0 x + (1/2)(m_1 - m_0)(|x + B_p| - |x - B_p|), \quad (4)$$

las pendientes m_0 y m_1 se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} m_0 &= (-R_3^{-1} + R_4^{-1}), \\ m_1 &= (-R_3^{-1} - R_6^{-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

Después del advenimiento del \mathcal{C}^1 , se han reportado numerosos trabajos sobre diferentes esquemas de realización de este circuito descrito por Bilotta & Pantano (2008), Rocha & Medrano-T (2009), Fortuna et al. (2009) y Kiliç (2010) entre otros. Pues, es atractivo buscar un \mathcal{C}^1 actualizado con nuevos comportamientos dinámicos; pero que posea una estructura topológica de circuito mucho más simple y sea mucho más fácil de implementar experimentalmente. Todas estas construcciones se centran principalmente en dos propósitos: sin un inductor no ideal y que el diodo de Chua tenga componentes electrónicos más comerciales y accesibles. Generalmente, la razón detrás de la realización sin inductor radica en el hecho de que la presencia de un inductor de bobinado manual con resistencia parásita baja, dificulta la implementación del \mathcal{C}^1 además de que son difíciles de fabricar. He aquí donde la propuesta de este trabajo entra en acción.

Murali & Lakshmanan (1992) exploraron el circuito de Chua autosostenido con una excitación periódica externa que convierte al circuito en no autosostenido. Observaron una inmensa variedad de secuencias de bifurcaciones, histéresis y la coexistencia de múltiples atractores.

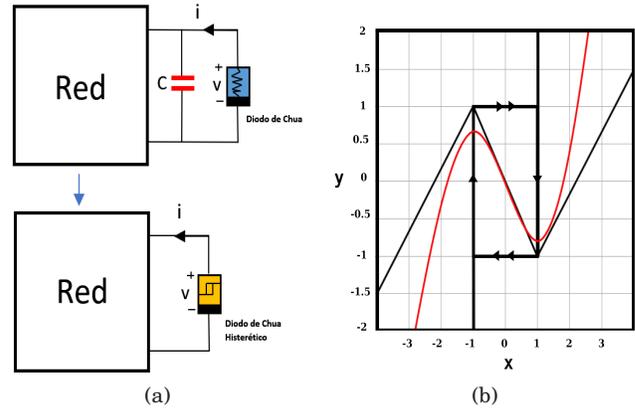


FIG. 3.— Modelo de oscilador canónico con el diodo de Chua como elemento no lineal (no mencionan una modificación interna al diodo). (a) Ejemplo de una red en combinación con un capacitor que produce histéresis y (b) tipos de histéresis. Gráficas adaptadas de Itoh & Chua (2005) para contextualizar el presente trabajo en la poca atención que ha recibido la histéresis en este circuito.

Pero, sin modificar el diodo de Chua. Lindberg (1994), basándose en el trabajo de Murali y Lakshmanan, se realizó una explicación sencilla del comportamiento físico del circuito y verificó mediante simulaciones algunas de las conclusiones de Murali y Lakshmanan.

El \mathcal{C}^1 , a pesar de su simplicidad, permite observar muchos comportamientos dinámicos utilizando variantes de la característica linealidad por partes del diodo de Chua. En varios trabajos se desarrollaron versiones aproximadas, como las utilizadas en Ramirez-Ávila & Gallas (2010) donde el diodo de Chua tiene ajustada una no linealidad cúbica.

Itoh & Chua (2005) también generaron “osciladores no lineales histéreticos” con diodos de Chua, i.e., emplearon distintas configuraciones del diodo de Chua (sin modificar su comportamiento PWL) en distintos circuitos junto con otros componentes electrónicos (capacitores, inductores, etc.) lo que da como resultado a la aparición de histéresis (Fig. 3). Dicho estudio surgió debido a que en circuitos caóticos similares usaron la histéresis como elemento no lineal, como el circuito de Saito (1985).

Gutierrez (2008) asevera:

“A diferencia del circuito de Chua, el de Saito no ha tenido la suficiente atención que requiere, pero no hay duda de que en los próximos años sea uno de los circuitos más estudiados, ya que este circuito presenta un comportamiento hipercaótico.”

La no linealidad de la histéresis es ampliamente mostrada en una variedad de materiales y sistemas que en nuestro caso será de utilidad. Aquí se propone una modificación del \mathcal{C}^2 que da lugar al fenómeno de histéresis asociado al comportamiento no lineal del diodo de Chua.

En la Sec. 3.1 utilizamos resistencias internas elevadas del inductor, se muestra una modificación del \mathcal{C}^2 que, de alguna manera, introduce histéresis

(probablemente acompañada de oscilaciones parásitas en la parte experimental) para que el circuito pueda funcionar con estos inductores. Además, esto resulta en una estructura topológica experimental más sencilla, ya que emplea inductores con resistencias internas no despreciables; pero con algunas ventajas y desventajas en cuanto a su riqueza dinámica.

En la Sec. 3.2, usando simulaciones, se realiza una comparación cualitativa de los comportamientos dinámicos obtenidos para el \mathcal{C}^2 con la modificación propuesta. También se muestra cómo afectan los transitorios y la manera en la que pueden pasar desapercibidos ciertos comportamientos dinámicos.

En la Sec. 3.3 se muestran los resultados empleando tres parámetros de control para así comparar de una manera más extensa la dinámica de ambos circuitos.

En la Sec. 4 se muestran los resultados de la implementación experimental del circuito propuesto, junto con las simulaciones.

Finalmente, en la Sec. 5 se señalan las conclusiones más relevantes y se indican algunas perspectivas de este trabajo.

3. METODOLOGÍA Y RESULTADOS

Para ver una nueva o identificar mejor la dinámica oculta del \mathcal{C}^1 , es importante diseñar un diodo de Chua lineal por partes con los segmentos deseados, por ejemplo: Wang et al. (2019) utilizaron un diodo lineal por partes de “ n ” segmentos para generar atractores “ n -scroll”. En este y muchos otros trabajos se puede ver que varios autores modifican dicho diodo de Chua de alguna manera y según las necesidades requeridas.

3.1. Diodo de Chua modificado

La propuesta del \mathcal{C}^2 modificado (que denotaremos como \mathcal{C}^3), se realizó debido a que se utilizó un inductor de elevada resistencia interna R_L (Fig. 4(a)) y esto ocasiona que el \mathcal{C}^2 no muestre comportamiento caótico. Para ilustrar las diferencias de inductores, la Fig. 4(b) muestra cualitativamente el comportamiento ideal y no ideal de un inductor en función de la frecuencia e impedancia. Una mejor aproximación de una bobina no ideal podría considerar su capacitancia interna C_0 , cuyo esquemático de la aproximación que se muestra en la Fig. 4(c), esta capacitancia C_0 es la que se generaría debido al embobinado (Fig. 4(d)).

Según Siderskiy (2022) si utilizamos una inductancia de alrededor de 18 mH, R_L debe ser inferior a 30 Ω . También Hidalgo (2008) muestra mediante simulaciones que R_L no puede ser mayor que 30 Ω si se quiere tener atractores double-scroll y Rössler, y no mayor a 20 Ω si se quiere tener atractores double-scroll (en inductores no integrados). Para solucionar el uso de inductores no ideales ($R_L \geq 30\Omega$), se alteró el funcionamiento interno del diodo de Chua en el diseño propuesto por Kennedy (1992), retirando los condensadores de derivación conectados a cada batería de 9 V cuyo

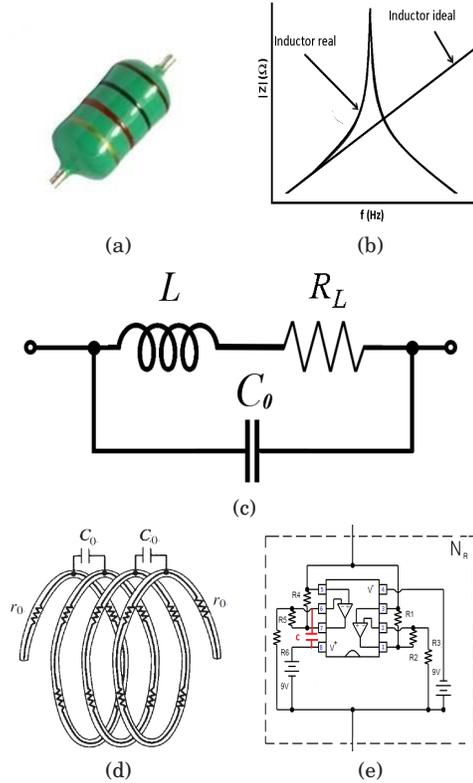


FIG. 4.— (Color online) (a) Inductor moldeado de mayor comercialización. (b) Impedancia y frecuencia para distinguir un inductor lineal (ideal) y no lineal (real). (c) Esquemático de una mejor aproximación a un inductor real. (d) Capacitancia y resistencia interna en inductores, C_0 y R_L respectivamente. (e) Esquemático del diodo de Chua modificado con un condensador cerámico en los terminales 6 y 8 (color rojo) del circuito integrado TL082.

propósito era mantener la alimentación del circuito integrado con una tensión continua y simétrica, pero la modificación es sobretodo, añadiendo un capacitor en las terminales 6 y 8 del circuito integrado (Fig. 4(e)). Realizando esta modificación a este diseño electrónico del diodo de Chua N_R , se obtiene un comportamiento donde este ya no es lineal en la parte central y se transforma en un “bucle de histéresis”. Dicho comportamiento se observó con el montaje del circuito mostrado en la Fig. 5, donde la resistencia R_S es usada para medir la corriente i_R que fluye hacia la resistencia negativa¹ N_R cuando un voltaje V_R es aplicado a través de sus terminales, esto causa un voltaje $V_{i_R} = -R_S i_R$. Además, aplicando un voltaje V_S se puede ver su comportamiento graficando $V_{i_R} (\propto -i_R)$ vs. V_R .

Los resultados experimentales del diodo modificado de \mathcal{C}^3 se muestran en la Fig. 6(a)-(b). En (a) se ve el comportamiento lineal por partes del diodo de Chua y en (b) el comportamiento del diodo de Chua modificado con una “histéresis” en la parte central. Estas son las imágenes de un osciloscopio digital marca EZ, modelo OS-5020 y con un ancho de banda de 20 MHz, un generador

¹ N_R también tiene esta denominación ya que en vez de disipar la energía realiza el efecto contrario que es dar energía.

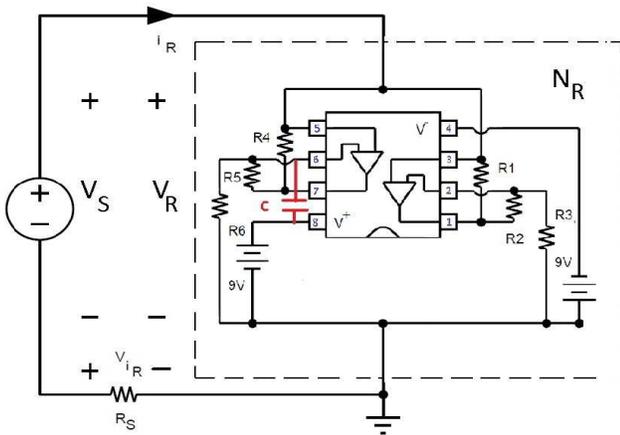


FIG. 5.— El comportamiento no lineal de N_R se puede obtener aplicando un voltaje con forma de onda triangular V_S (ver Kennedy (1992)).

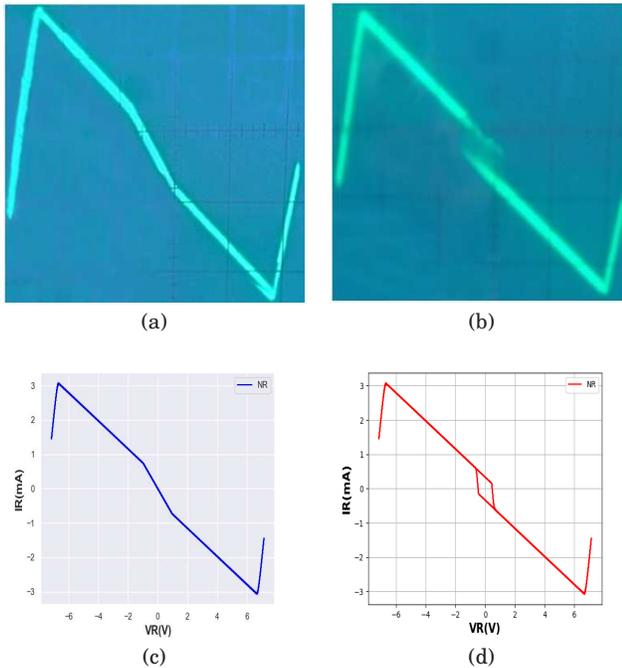


FIG. 6.— Comportamiento no lineal del diodo de Chua y su modificación: en un osciloscopio en modo $X - Y$ (conectando $-V_{iR}$ y V_R en la entrada Y (1 V/div) y X (100 mV/div), respectivamente). (a) PWL que pertenece al C^2 y (b) PWL con histéresis en la parte central que pertenece al C^3M . Y en simulaciones: (c) PWL (C^2) y (d) PWL con histéresis en la parte central (C^3M).

de funciones EZ FG-7020A con un ancho de banda de 20 MHz que genera un voltaje V_S con forma de onda triangular, amplitud de 7 V pico a pico y una frecuencia de 30 Hz, utilizando los valores de los componentes eléctricos correspondientes que se muestra en la Tabla 2. Las Figs. 6(c)-(d) son las simulaciones de N_R , donde también se puede ver el bucle de histéresis. Cabe aclarar que el voltaje triangular en LTSpice XVII (no tiene esta forma de voltaje en sus opciones) se construyó utilizando un voltaje en forma de pulso con los parámetros dados en la Tabla 1.

Este tipo de circuitos integrados con op-amps,

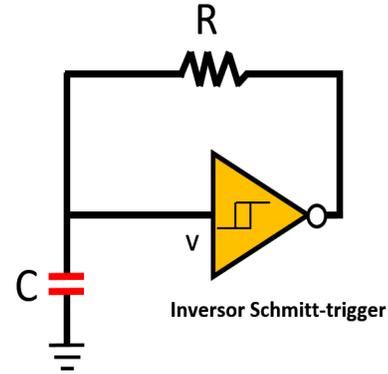


FIG. 7.— Oscilador de relajación utilizando un disparador inversor de Schmitt (Itoh & Chua (2005)).

TABLA 1
PARÁMETROS UTILIZADOS PARA CONSTRUIR UNA ONDA TRIANGULAR EN LTSPICE XVII.

V inicial	V on	T retardo	T subida	T caída	T on	T período	N ciclos
-7 V	7 V	0	1 ms	1 ms	0.01 ms	2 ms	-

que utilizamos en la construcción de N_R , tienden a ser diseñados de manera que eviten eficazmente la histéresis mientras se realiza una operación específica; pero probablemente esto se puede modificar. Existen diseños en los que la ausencia de histéresis se convierte en una desventaja y se tiene que forzarla, una manera de lograrlo es agregando una retroalimentación negativa a través de la salida y uno de los pines de entrada del op-amp (probablemente similar al diseño de Itoh & Chua (2005) que se muestra en la Fig. 7). Para verificar esta retroalimentación negativa se puede descomponer el diseño del diodo N_R en dos diodos en paralelo (Fig. 8) que también generan los comportamientos no lineales N_R de la Fig. 6, i.e., $N_R = N_{R1} + N_{R2}$.

La histéresis en circuitos electrónicos puede resultar beneficiosa o no, dependiendo de su aplicación. En nuestro caso, es beneficiosa, porque compensa la dificultad experimental de utilizar inductores no ideales con una resistencia interna elevada. Esta histéresis en el C^2 no es completamente inesperada; pero ha sido muy poco estudiada, algunos autores, como Kennedy (1993), dejan de lado estas consideraciones y las evitan, para no tener asimetría en los atractores double-scroll² y los pequeños efectos que esto tiene sobre la secuencia de bifurcación.

3.2. Dinámica con R_L

Comparamos el comportamiento dinámico de C^2 y C^3 mediante simulaciones y usando los parámetros usados por Kennedy (1991), es decir: 0.01 ms para el paso de tiempo máximo, tiempo de simulado de 100 ms y que se tenga una adquisición de datos

² Se puede traducir como “doble rollo”; pero debido a que es más conocido de esta manera se mantiene el nombre en inglés.

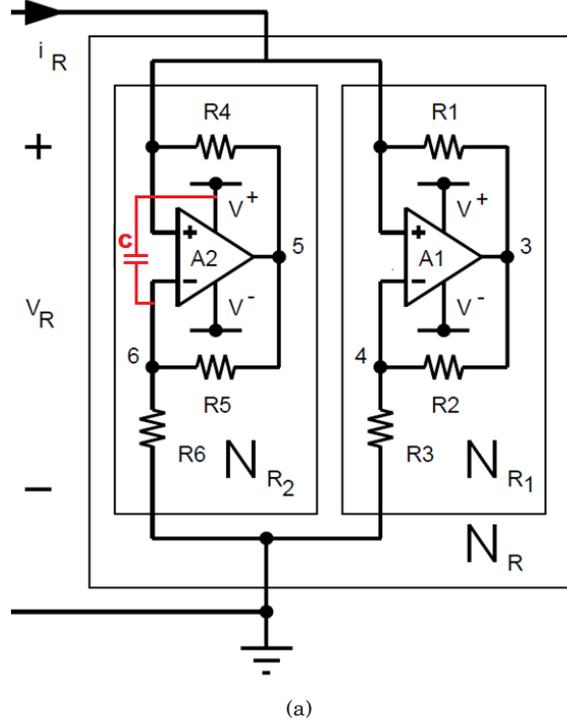


TABLA 2
LISTA DE COMPONENTES ELECTRÓNICOS.

Elemento	Descripción	Valor	Tolerancia
L	Inductor moldeado	18 mH	$\pm 10\%$
C_1	Cond. de poliéster E 103H	10 nF	$\pm 3\%$
C_2	Cond. cerámico 104	100 nF	$\pm 3\%$
C	Cond. cerámico 224	220 nF	$\pm 3\%$
A	Op amp (TL082)		
R_1	Resistencia	220 Ω	$\pm 5\%$
R_2	Resistencia	220 Ω	$\pm 5\%$
R_3	Resistencia	2.2 k Ω	$\pm 5\%$
R_4	Resistencia	22 k Ω	$\pm 5\%$
R_5	Resistencia	22 k Ω	$\pm 5\%$
R_6	Resistencia	3.3 k Ω	$\pm 5\%$
R	Potenciómetro	5 k Ω	$\pm 10\%$

la región asintóticamente estable. Empleando los valores de los componentes electrónicos de la Tabla 2 obtuvimos los distintos comportamientos dinámicos, Aquí sólo se muestra una pequeña variedad de la riqueza dinámica obtenida, presentándose aquellos que tuvieron un cambio cualitativo más significativo en el espacio de fases. Entonces, las Figs. 9-13 muestran esta evolución dinámica del \mathcal{C}^2 (en la primera columna) y del \mathcal{C}^3 (en la segunda columna) a medida que aumenta el parámetro de control R_L con el valor fijo de $R = 1419 \Omega$ y utilizando las condiciones iniciales dadas por el software $[-1.145718e-0, -8.068434e-4, -8.068434e-4]$ para V_{C_1} , V_{C_2} y I_{L_1} , respectivamente. Para ambos casos, primero se muestra el atractor en el espacio de fases usando solo dos variables dinámicas (V_{C_1} y V_{C_2}). Seguidos de sus respectivas series temporales en la parte inferior y sus transformadas rápidas de Fourier (FFT) que permite clasificar de manera cualitativa los comportamientos dinámicos del sistema; sin embargo, hacemos notar que una mejor determinación de dichos comportamientos podría hacerse determinando el máximo exponente de Lyapunov (LLE) a partir de las series temporales usando los algoritmos de Sano & Sawada (1985), implementado en TISEAN por Hegger et al. (1999) y utilizado ampliamente por Gerard et al. (2016) en el análisis de sonidos del instrumento musical andino denominado tarka. Sin embargo, este análisis sale de los objetivos del presente trabajo, donde simplemente se quieren distinguir espectros armónicos de los que no lo son. Los resultados obtenidos utilizando la región asintóticamente estable del tiempo de simulación (excepto para el caso de la Fig. 12(a), que se explican más adelante) son:

Figs. 9(a)-(b) en ambos casos se tiene un atractor periódico de periodo 1, tipo ciclo límite, las series temporales también muestran periodicidad, las FFT muestran el armónico fundamental y los armónicos, que son frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental del sistema y cuya amplitud va decreciendo conforme aumenta el múltiplo (esto es característico de un comportamiento periódico).

Fig. 10(a) atractor extraño caótico, tipo double-scroll, el comportamiento caótico es evidente

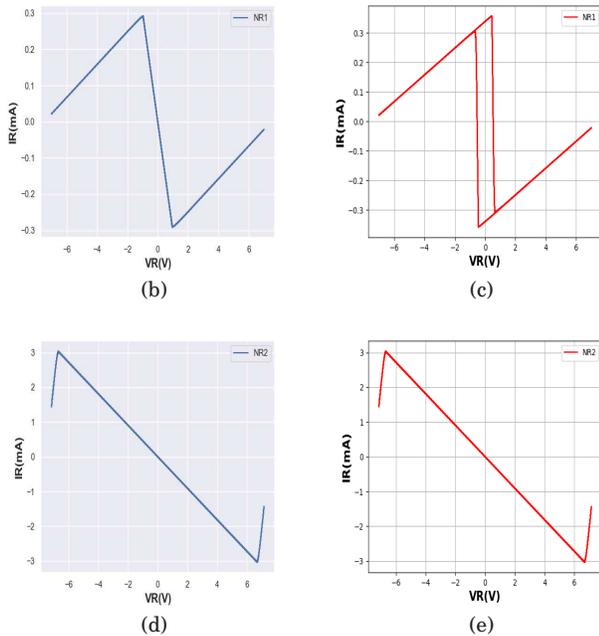


FIG. 8.— Comportamiento no lineal del diodo de Chua clásico y una modificación. (a) Uno de los diseños del diodo de Chua con dos op-amp en paralelo (gráfica sacada de Kennedy para detallar la modificación), (b) N_{R1} del diodo de Chua clásico (\mathcal{C}^2), (c) N_{R1} con la modificación que produce una histéresis en la parte central ($\mathcal{C}^3\mathcal{M}$), (d) N_{R2} del diodo de Chua clásico (\mathcal{C}^2) y (e) N_{R2} que no tiene modificación y se comporta igual ($\mathcal{C}^3\mathcal{M}$).

desde los 80 ms. Además de estas consideraciones, para tener mayor certeza de no almacenar datos del régimen transitorio se utiliza también la condición de que el simulador omita los datos correspondientes a la solución del “punto de funcionamiento inicial”. De esta manera nos enfocaremos mayormente en

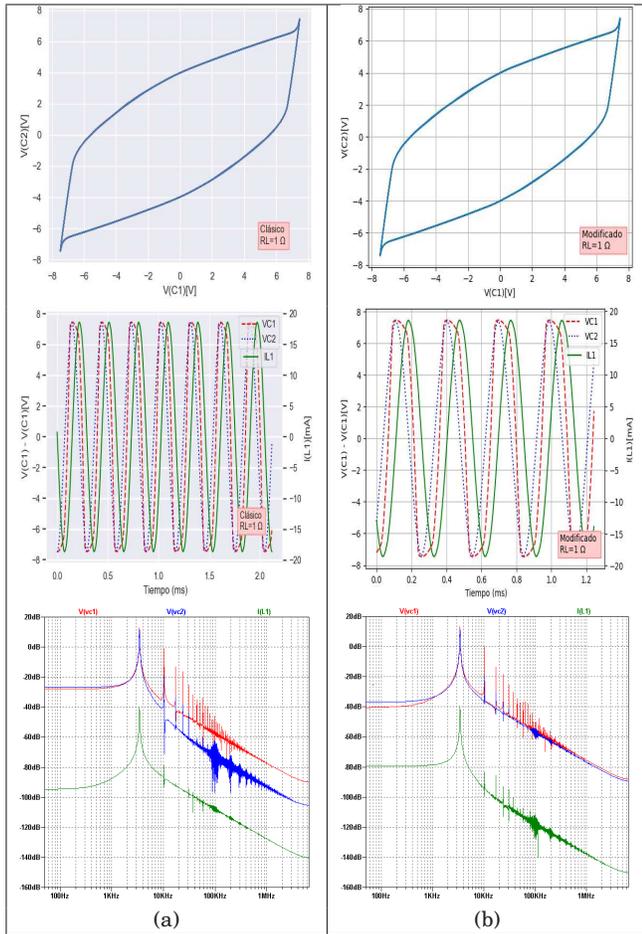


FIG. 9.— (Color online) Gráficas del espacio de fases (superior), series temporales (centro) y FFT (inferior). El valor del parámetro de control utilizado es $R_L = 1 \Omega$ para (a) \mathcal{C}^2 y (b) \mathcal{C}^3 (cada gráfica también esta etiquetada con R_L).

en las series temporales y en su FFT (ya no tiene el armónico fundamental). Es interesante notar que estas FFT nos dan la noción de que el comportamiento caótico está compuesto por “infinitas” órbitas periódicas³, estas órbitas periódicas son inestables y no convergen, i.e., la dinámica del sistema solo las sigue por un breve tiempo y diverge de una a otra orbita periódica. En Fig. 10(b) aún se tiene un comportamiento periódico.

Fig. 11(a) atractor periódico, de periodo 4, y en la Fig. 11(b) se continúa con un comportamiento periódico; pero en su FFT se ve un aumento notable de frecuencias mayores a 10 kHz en comparación al caso anterior Fig. 10(b).

Fig. 12(a) atractor extraño caótico, tipo Rössler (one-scroll), en realidad aquí se tiene una crisis de intermitencia que se detalla más adelante y en la Fig. 12(b) atractor extraño caótico, tipo double-scroll.

Fig. 13(a) atractor periódico, de periodo 1, y en la Fig. 13(b) el atractor extraño caótico se “regularizó” (en comparación con el caso anterior Fig. 12(b)).

Otra observación importante del \mathcal{C}^2 y el \mathcal{C}^3 ,

³ Para entender más este concepto se puede consultar los conceptos de herradura de Smale y el mapa Baker.

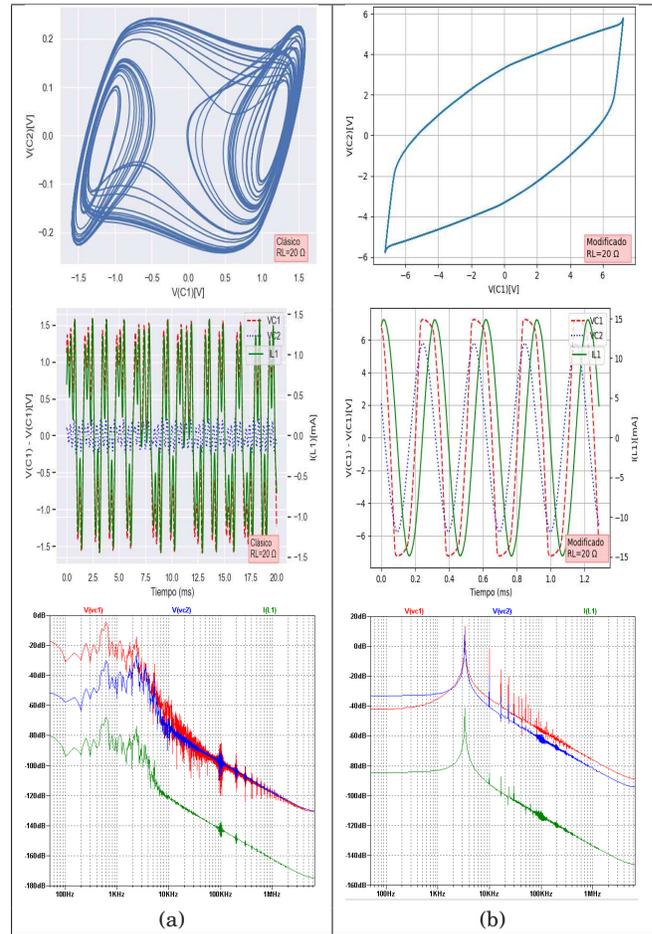


FIG. 10.— (Color online) Gráficas del espacio de fases (superior), series temporales (centro) y FFT (inferior). El valor del parámetro de control utilizado es $R_L = 20 \Omega$ para (a) \mathcal{C}^2 y (b) \mathcal{C}^3 .

en las Figs. 9-13, es que la amplitud de las variables dinámicas va disminuyendo a medida que el parámetro de control R_L aumenta y esto ocurre mientras se observa la manifestación de los distintos comportamientos dinámicos. Notemos esto mediante las Figs. 9(a)-(b), para $R_L = 1 \Omega$ ambos circuitos tienen las mismas amplitudes y en la Fig. 10(a) el \mathcal{C}^2 tiene un cambio abrupto de esta amplitud (mostrando caoticidad) y el \mathcal{C}^3 disminuye lentamente su amplitud (que continua en una periodicidad) como se ve en la Fig. 10(b). Y para los demás casos estas amplitudes también van disminuyendo al aumentar R_L , como es de esperarse ya que la resistencia R_L se incrementa. Entonces, estas manifestaciones dinámicas están relacionadas con estas amplitudes.

En la Fig. 14(a) se muestra un aparente double-scroll, pero en realidad son dos atractores Rössler “chocando”, el relleno de color naranja es la región transitoria (Región 1 de la Fig. 14(b)) y muestra cómo la dinámica del sistema va evolucionando dadas las condiciones iniciales hasta quedar atrapado en el atractor Rössler “izquierdo”⁴ (Región 2 de la Fig. 14(b)) y para un tiempo de

⁴ Esta denominación se la damos solo para distinguir ambos casos.

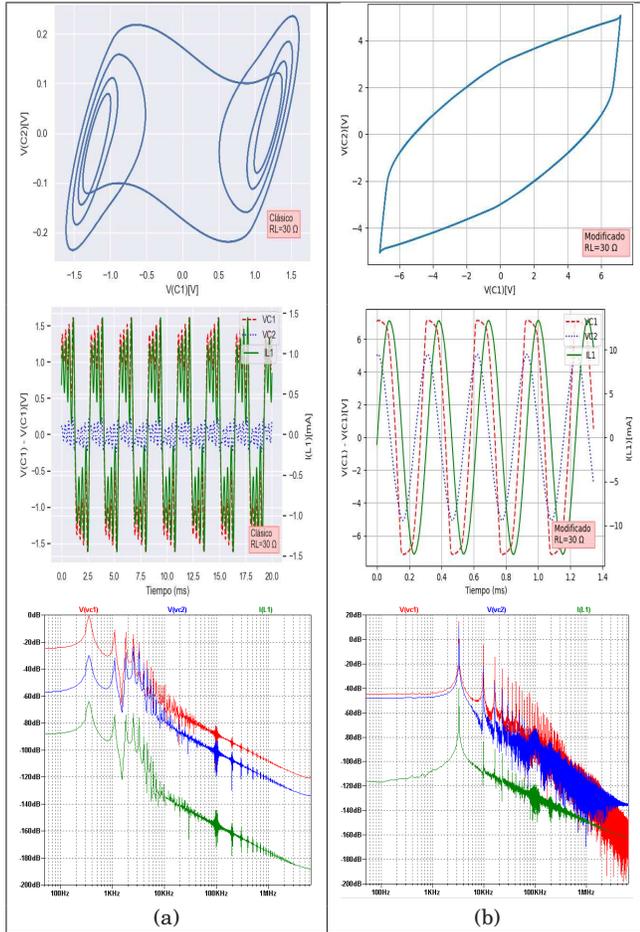


FIG. 11.— (Color online) Gráficas del espacio de fases (superior), series temporales (centro) y FFT (inferior). El valor del parámetro de control utilizado es $R_L = 30 \Omega$ para (a) e^2 y (b) e^3 .

simulación mayor queda atrapado en el atractor Rössler “derecho” (Región 3 de la Fig. 14(b)). La Fig. 14(a) tiene las mismas condiciones que la Fig. 12(a) solo que con 8 s en el tiempo de simulación, y de esta manera vemos cómo aparece varias veces la transición de la Región 2 a la 3; lo que constituye una crisis de intermitencia, i.e., el comportamiento dinámico va cambiando de una región a otra y no se queda en una sola región (como lo es la asintóticamente estable) ya que cada cierto tiempo pasa del atractor Rössler izquierdo al derecho. Por un lado, se observa esta transición en el sentido del atractor Rössler izquierdo y derecho, remarcando que estos atractores extraños son caóticos y, por otro lado, se tiene que los tiempos en los que se produce las transiciones en las series temporales de una región a otra, que también podría tratarse de otro carácter caótico, en el sentido de que la frecuencia con la que ocurren estas transiciones no siguen un determinado patrón de ocurrencia, por esto tendríamos un “doble carácter caótico” en este caso especial.

Aquí mostramos qué tan importante es tener una manera de controlar el tiempo de simulación, ya que esto puede involucrar ver un aparente atractor. En este caso se tiene dos atractores Rössler, ver uno u otro dependerá del tiempo usado. Estos dos

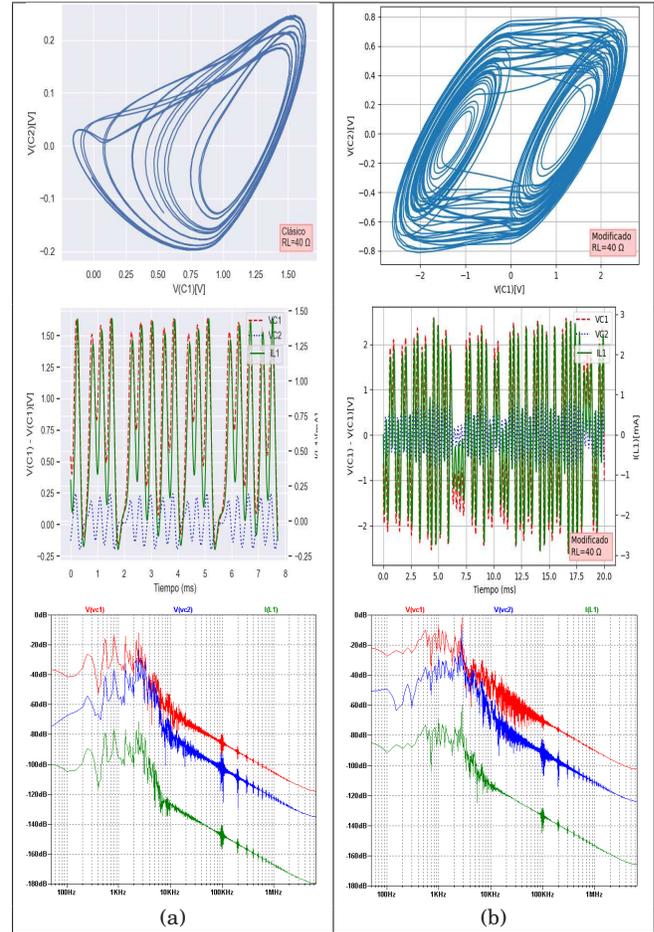


FIG. 12.— (Color online) Gráficas del espacio de fases (superior), series temporales (centro) y FFT (inferior). El valor del parámetro de control utilizado es $R_L = 40 \Omega$ para (a) e^2 y (b) e^3 .

atractores Rössler ilustran lo que se conoce como una coexistencia de atractores que ocurre cuando no se tiene una crisis de intermitencia, como señalan Rocha & Medrano-T (2016) en su trabajo de atractores ocultos y coexistentes.

Como se detalló anteriormente, las consideraciones utilizadas nos dan una buena certeza de que se descartó la región transitoria en ambos circuitos; pero otra cosa crucial que se observó en las simulaciones es que el tiempo que le toma superar el transitorio a ambos circuitos, a medida que R_L aumenta, es aproximadamente el mismo y se puede ver en la Fig. 15.

Esta es una comparación cualitativa que se realizó estimando los tiempos observados cuando las series temporales salían del régimen transitorio y es por eso que no tienen sus barras de error. Se puede notar que el tiempo de simulación para generar los distintos atractores, depende sobre todo, del tiempo que le toma a la señal salir de la región transitoria. Una vez conocido el tiempo transitorio, el tiempo de simulación puede ser muy pequeño para aligerar la potencia computacional requerida y también el atractor en el espacio de fases no se verá muy relleno por los datos (a causa de tiempos de simulación muy grandes para evitar la región

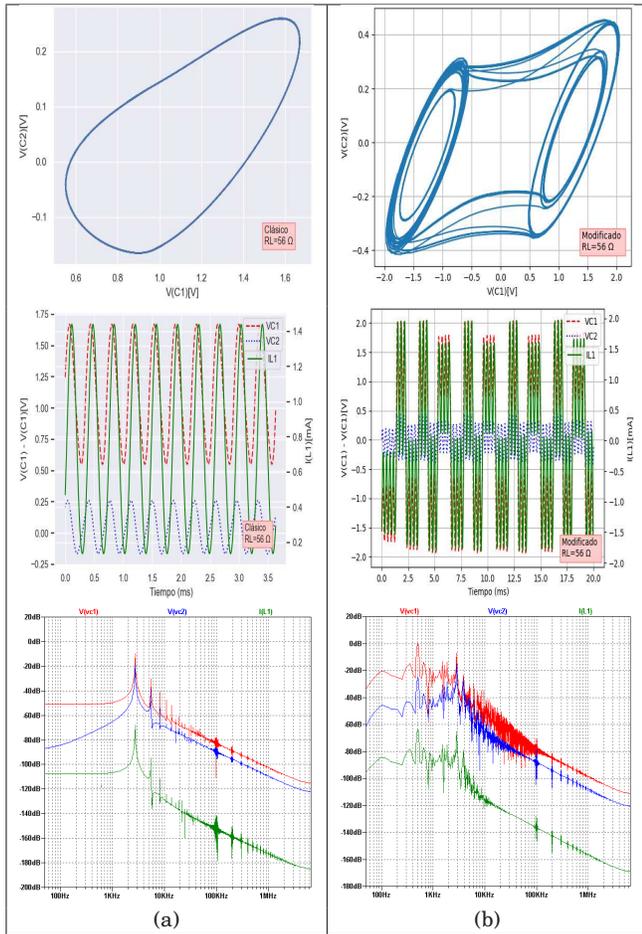


FIG. 13.— (Color online) Gráficas del espacio de fases (superior), series temporales (centro) y FFT (inferior). El valor del parámetro de control utilizado es $R_L = 56 \Omega$ para (a) \mathcal{C}^2 y (b) \mathcal{C}^3 .

TABLA 3
VALORES MEDIDOS EN LABORATORIO

Elemento	Descripción	Valor medido
L	Inductor moldeado	9.1 ± 0.1 mH
C_1	Condensador cerámico E 103H	10.1 ± 0.1 nF
C_2	Condensador cerámico 104	100.7 ± 0.1 nF
R_L	Resistencia interna de L	$54.6 \pm 0.1 \Omega$
Q	Factor de calidad de L	8.7 ± 0.1
w	Frecuencia utilizada en Q	271.3 kHz

transitoria), siempre y cuando nos aseguremos de no toparnos con los casos especiales como la crisis de intermitencia.

3.3. Dinámica con tres parámetros de control

Ahora utilizamos tres parámetros de control R_L , R y L , los valores explorados fueron: $R_L = [1,61] \Omega$ (en pasos de 10Ω), $R = [600,2000] \Omega$ (en pasos de 100Ω) y $L = [8,18]$ mH (en pasos de 2 mH). Adicionalmente, se realizó unas simulaciones complementarias para tener mayor precisión (con intervalos más pequeños de R_L y R) en los límites de las regiones, resultando ≈ 9000 simulaciones; cada una de las cuales generaba una imagen con dos gráficas, una correspondiente al espacio de fases y la otra a las series temporales. Esto se logró vinculando

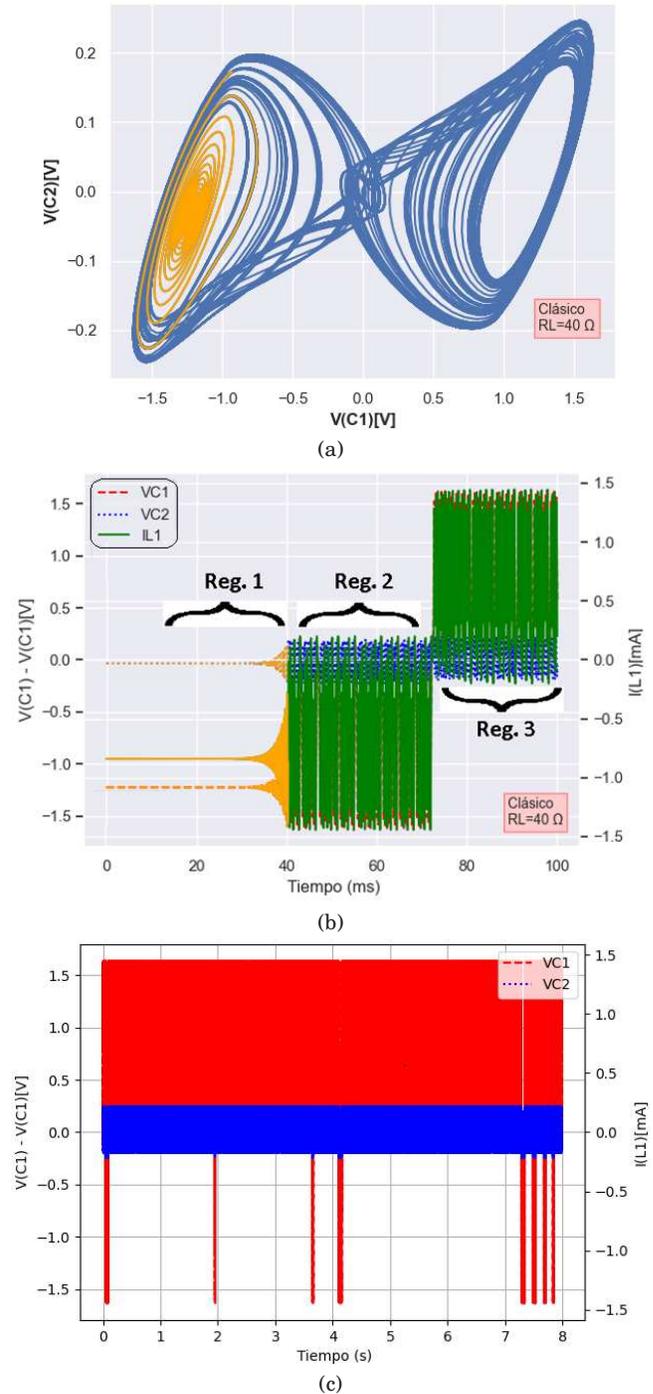


FIG. 14.— (Color online) Efectos del tiempo de simulación en el \mathcal{C}^2 utilizando $R_L = 40 \Omega$. (a) Dos atractores Rössler con la región transitoria (color naranja), (b) Serie temporal con 100 ms donde se puede ver el transitorio (Reg.1), primera y segunda región “estable”, Reg.2 y Reg.3, respectivamente, (c) Serie temporal con 8 s de simulación y no tiene una estabilización (las líneas rojas que están abajo en realidad crean un “hueco”, pero es imperceptible debido a la cantidad de datos).

LTSpice con Python para la automatización; pero debido a que la potencia computacional juega un rol muy importante, se aumentó el paso de tiempo máximo a 1 ms; incluso con esa consideración el tiempo de ejecución del programa que generó todas

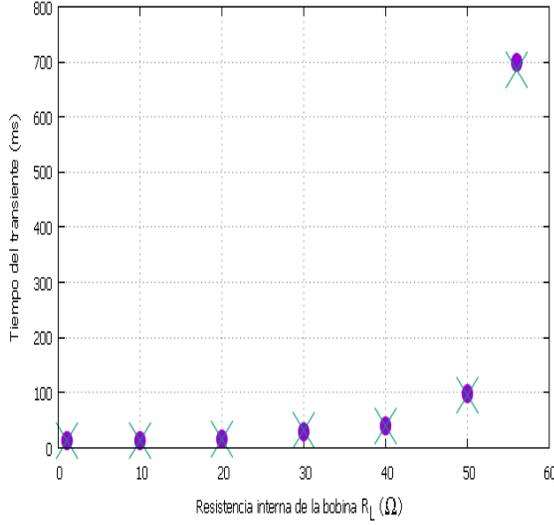


FIG. 15.— Resistencia interna de la bobina y tiempo de duración del régimen transitorio. Los puntos pertenecen al \mathcal{C}^2 y las “x” al \mathcal{C}^3 .

esas imágenes fue ~ 13 horas, dicho programa fue ejecutado por separado y simultáneamente en dos computadoras intel(R) Core(TM) i5-4570 CPU con RAM de 8 GB (una computadora ejecutaba el Script del programa del \mathcal{C}^2 y la otra del \mathcal{C}^3).

Para compensar la consideración del paso de tiempo, se volvió a repetir (sin la automatización en Python) las simulaciones que lo requerían con 0.01 ms en el paso de tiempo máximo.

La Fig. 16 muestra los intervalos pintados, en los planos de parámetros R_L - R , en los que se obtiene comportamiento caótico para el \mathcal{C}^2 (columna izquierda) y el \mathcal{C}^3 (columna derecha). Pero, solo se muestra los resultados para $L = 14, 16$ y 18 mH debido a que el \mathcal{C}^2 solo mostró comportamientos caóticos a partir de 14 mH, cosa que no ocurre con el \mathcal{C}^3 (como se muestra más adelante en el espacio de parámetros). Entonces, en:

(a) La línea roja representa la zona en la que aparece el atractor Rössler, la región a la derecha de esta línea es donde aparecen comportamientos periódicos de período “n” y puntos de equilibrio; en cambio (b) muestra el intervalo en el que se tiene atractores double-scroll a medida que aumenta R_L (señalado con una mayor tonalidad de celeste). Esta región aparenta mantenerse constante en un intervalo de R a medida que aumenta R_L .

(c) Tenemos dos regiones caóticas de color rojo y celeste que pertenecen a los atractores Rössler y double-scroll, respectivamente. También se encontró nuevamente una pequeña región de crisis de intermitencia; en cambio (d) muestra un caso similar al anterior, pero desplazado hacia arriba.

(e) Se tienen nuevamente dos regiones caóticas. En el gráfico se ve como estas van disminuyendo en el \mathcal{C}^2 a medida que R_L aumenta; en cambio (f) muestra también un caso similar al anterior (d), que también es desplazado hacia arriba, nuevamente la región caótica continua manteniéndose aproximadamente

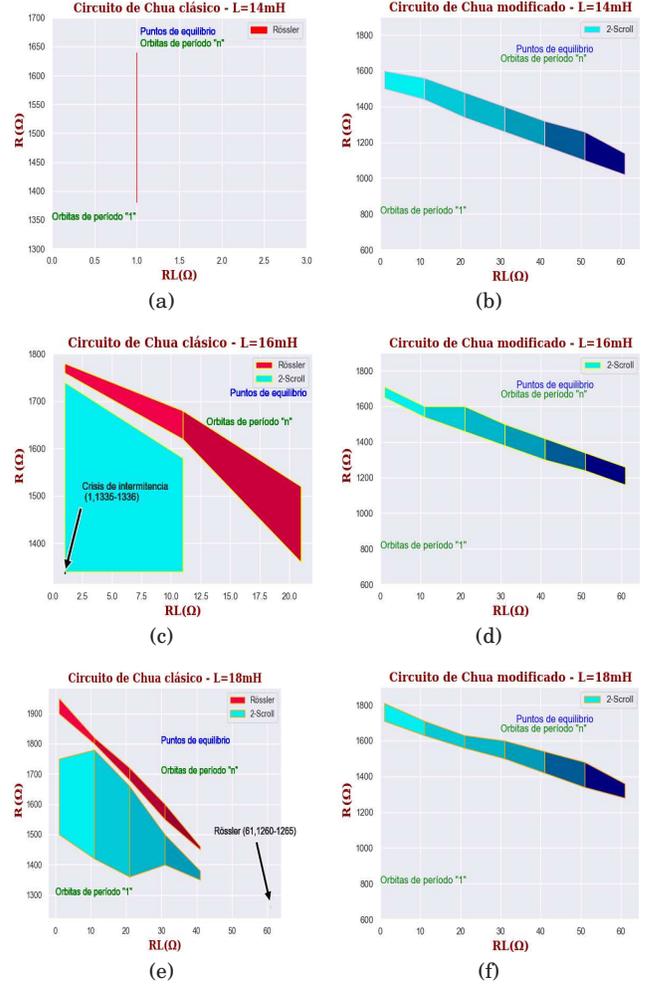


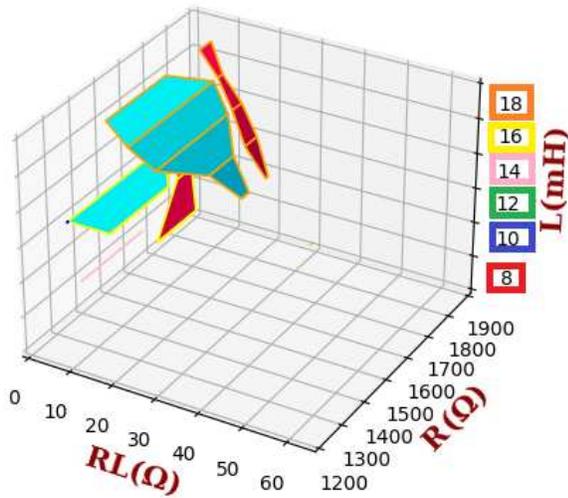
FIG. 16.— (Color online) Regiones que presentan comportamiento caótico en el \mathcal{C}^2 (a), (c) y (e) (columna izquierda) y \mathcal{C}^3 (b), (d) y (f) (columna derecha). Utilizando $R = R_7$ y R_L , para distintos valores de L . Las regiones que tienen distintas tonalidades azules son las que contienen comportamiento caótico tipo double-scroll y las regiones rojas contienen comportamiento caótico con atractores tipo Rössler (en las regiones exteriores a estas se tienen comportamientos periódicos).

constante según R_L aumenta.

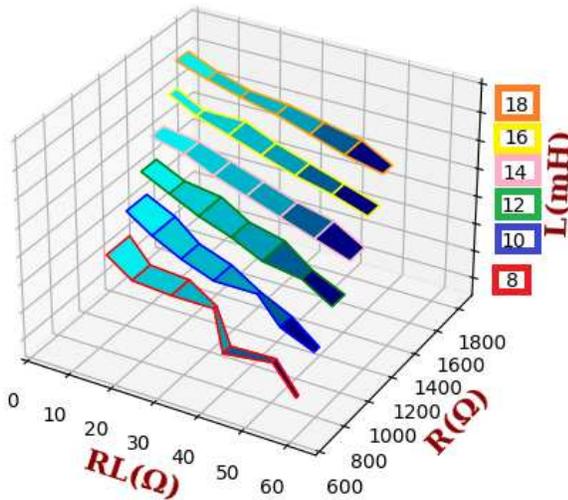
En el espacio de parámetros de la Fig. 17 se puede comparar el tamaño de las regiones caóticas en ambos circuitos, donde cada color de contorno hace referencia a distintos valores de L .

4. CONSTRUCCIÓN EXPERIMENTAL DEL \mathcal{C}^3

Los resultados del \mathcal{C}^3 físico, Figs. 18-19, muestran su dinámica utilizando los valores de la Tabla 2; pero con algunos valores ligeramente diferentes que valen la pena mostrar y están en la Tabla 3, esto debido a la característica sensibilidad a las condiciones iniciales que tienen estos sistemas caóticos. Los componentes electrónicos fueron ensamblados en un protoboard y utilizando un osciloscopio digital UTD-2072CEX con un ancho de banda de 70 MHz, se pudo ver su evolución dinámica, estas son: (a), (c), (e) y (f). Mientras que (b), (f) y (g) corresponden a las simulaciones en LTSpice XVII.



(a)



(b)

FIG. 17.— (Color online) Espacio de parámetros del (a) c^2 y (b) c^3 . Cada contorno corresponde a distintos valores de L , estos son: 8 mH (rojo), 10 mH (azul), 12 mH (verde), 14 mH (rosado), 16 mH (amarillo) y 18 mH (naranja). Nuevamente las regiones que tienen distintas tonalidades azules son las que contienen comportamiento caótico tipo double-scroll y las regiones rojas contienen comportamiento caótico con atractores tipo Rössler (en las regiones exteriores a estas se tienen comportamientos periódicos).

Estos comportamientos dinámicos son:

- (a)-(b) Atractor periódico de periodo uno, tipo Ciclo límite.
- (c)-(f) Atractor extraño caótico, tipo double-scroll.
- (g)-(h) Atractor periódico de periodo 3.

Como se mencionó anteriormente, es claro el importante papel del ruido cuando se estudian circuitos electrónicos. Es esencial considerar tales efectos al estudiar con más detalle estos sistemas en términos de controlabilidad; por ejemplo, el ruido intrínseco a cualquier circuito electrónico, debido a la temperatura y al conjunto del experimento, puede llevar la trayectoria de la dinámica natural del atractor regular para la región

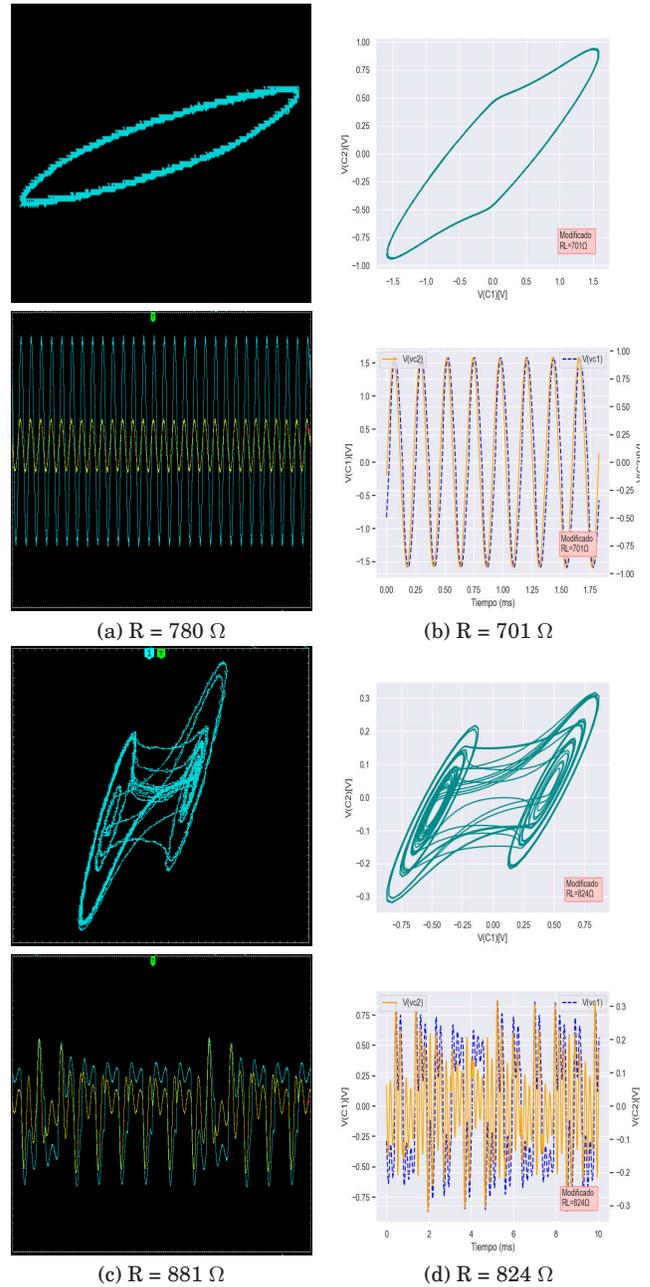


FIG. 18.— Resultados del c^3 experimentalmente (columna izquierda) y de las simulaciones (columna derecha). Solo se muestran las variables dinámicas V_{C1} y V_{C2} , tanto en el espacio de fases, como en las series temporales (las variables están etiquetadas con el mismo color en los ejes). Para las gráficas experimentales el error es de 1Ω y para el caso de las simulaciones se requiere un mayor estudio del software de simulación (cosa que sale fuera del objetivo del presente trabajo).

donde se encuentran conjuntos de sillitas caóticas⁵. En sistemas dinámicos más complejos, como las redes, el ruido intrínseco puede transfigurar el conjunto de silla caótica en un atractor caótico (Medeiros et al. (2019)), pero, en el circuito de Chua, provoca diferencias entre los resultados teóricos y experimentales que pueden eliminarse

⁵ Traducción de: chaotic saddle sets.

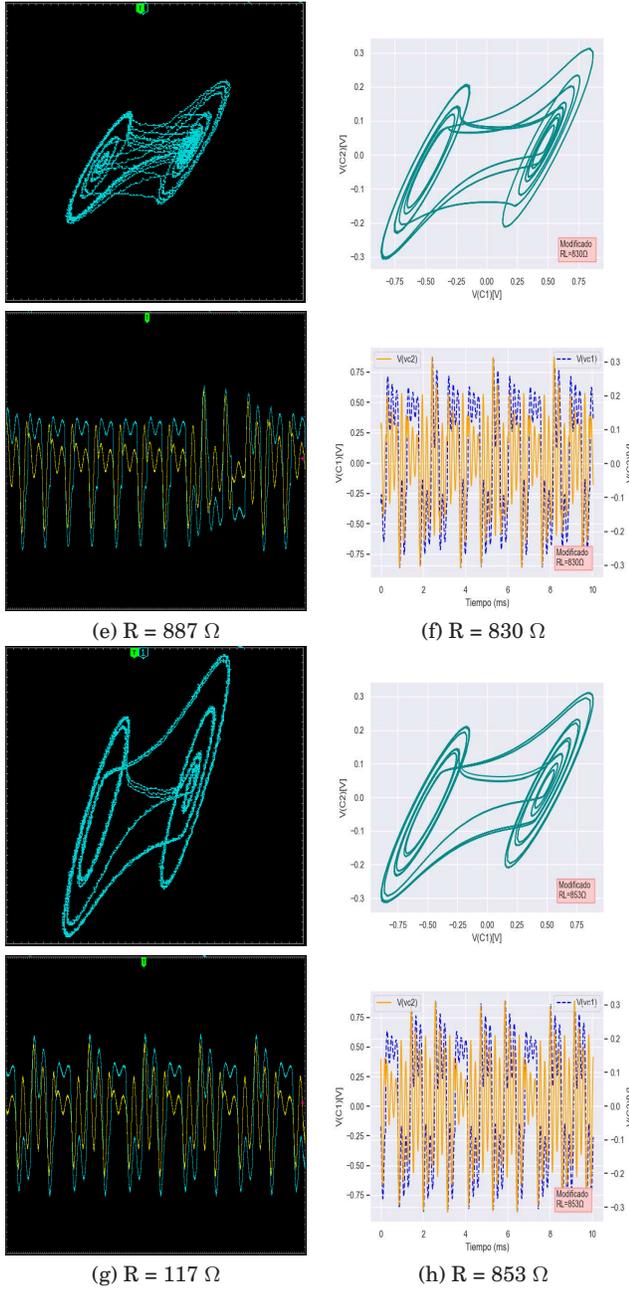


FIG. 19.— (Continuación de la Fig. 18).

disminuyendo el ruido, como lo hace Prebianca et al. (2019) mediante integración numérica de las ecuaciones de movimiento del circuito de Chua utilizando un integrador Runge-Kutta estocástico de cuarto orden, donde muestran cómo el ruido distorsiona las regiones en dichos espacios de control destruyendo únicamente la dinámica periódica. En nuestro caso el único atractor caótico observado es el doble-scroll con pocas manifestaciones periódicas, probablemente por el ruido presente.

Reforzando la ausencia del atractor caótico tipo Rössler anteriormente señalamos que Hidalgo (2008) mediante simulaciones menciona la posibilidad de ausencia de dinámica caótica.

Por otra parte, desde un punto de vista

experimental, existen trabajos relacionados con los efectos del ruido en el circuito de Chua como el de Sánchez et al. (1999). Donde presentan dos métodos diferentes para introducir un componente de ruido en el circuito de Chua y lo estudian en términos de sincronización. Demuestran que se espera que aparezca sincronización si uno de los ruidos aplicados tiene una media distinta de cero que cambia el comportamiento del sistema a periódico.

Por lo tanto, señalamos que la dinámica del circuito de Chua es muy flexible para diferentes propósitos.

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Como se indicó anteriormente, el punto de partida de nuestra investigación tuvo su origen en \mathcal{C}^1 ; sin embargo, al ser predominantemente experimental, no se consideró a este circuito desde una perspectiva práctica por tener una bobina ideal. En tanto que el \mathcal{C}^2 y el \mathcal{C}^3 son circuitos donde se toma en cuenta el aspecto real de la existencia de resistencia interna del inductor, siendo pequeña para \mathcal{C}^2 y mayor para \mathcal{C}^3 ; este último aspecto posibilita la aparición del fenómeno de histéresis. En este trabajo, nos abocamos a estudiar \mathcal{C}^2 desde una perspectiva de simulación y \mathcal{C}^3 tanto desde el punto de vista experimental como de simulación. Por otra parte, ambos circuitos presentan comportamientos regulares y una ruta al caos; para \mathcal{C}^2 a través del desdoblamiento de períodos (duplicación del número de picos por período) a medida que aumenta el valor del parámetro R_L y mediante otro mecanismo para \mathcal{C}^3 que debe ser dilucidado; estas rutas al caos también producen en ambos circuitos la disminución de la amplitud de sus oscilaciones y consecuentemente la modificación de sus escalas de tiempo oscilatorias, tornándose más lenta para \mathcal{C}^3 . En cuanto a la duración del régimen transitorio, este aumenta también con el valor de R_L para ambos circuitos. La diferencia entre el \mathcal{C}^2 y el \mathcal{C}^3 radica en el hecho de que el primero exhibe atractores tipo Rössler y double-scroll, en tanto que el segundo sólo muestra los double-scroll con una marcada asimetría en el espacio de fases. Los planos de parámetros del \mathcal{C}^2 muestran diferentes regiones que denotan comportamientos caóticos y cómo estas regiones se van reduciendo cuando R_L aumenta. Además, se detectaron también pequeñas regiones de crisis de intermitencia para los atractores tipo Rössler, lo que hace pensar que tales situaciones de comportamiento caótico no son estables separadamente. En tanto que el plano de parámetros para \mathcal{C}^3 muestra las regiones caóticas correspondientes a atractores tipo double-scroll y que se extienden más con respecto a R_L . Los espacios de parámetros para ambos tipos de circuito, exhiben características diferentes; mientras que las regiones caóticas en \mathcal{C}^2 están muy próximas las unas a las otras; las correspondientes a \mathcal{C}^3 , se disponen en forma escalonada.

Es importante resaltar el hecho de que los aspectos numéricos también revisten importancia por varios factores, entre los cuales se puede

mencionar: (i) la reproducibilidad de los resultados obtenidos experimentalmente. (ii) Constituyen un complemento esencial al trabajo experimental pues numéricamente pueden encontrarse nuevos aspectos que en los experimentos, en primera instancia, no aparecen. (iii) Pueden utilizarse para planificar nuevos experimentos con el fin de verificar la existencia de fenómenos que aparecen al resolver numéricamente las ecuaciones del sistema.

Si bien, en este trabajo se puso de relieve los aspectos ligados a la histéresis, esto amerita un estudio más detallado de este fenómeno que se ha abordado muy poco en la literatura existente. Otros aspectos importantes que se podrían encarar son: (i) Encontrar un formalismo adecuado para la descripción del circuito de Chua \mathcal{C}^3 . (ii) Proponer un modelo matemático del diodo de Chua con histéresis y realizar un estudio numérico detallado con las nuevas ecuaciones. (iii) Explorar situaciones

que conduzcan a fenómenos dinámicos interesantes debido a la presencia de histéresis, como ser la existencia de hipercaos que ocurre en el circuito de Saito (1985). Finalizamos reiterando la importancia de la complementariedad de los trabajos experimental, numérico y teórico.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a todos y cada uno de los investigadores con los que hemos interactuado de una u otra manera, por su colaboración e incentivo desde el área en la que se desenvuelven para realizar el presente trabajo.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Bilotta, E. & Pantano, P. (2008), *Gallery Of Chua Attractors*, (World Scientific).
- Chen, G. & Ueta, T. (2002), *Chaos in circuits and systems*, (World Scientific), **11**.
- Conde-Saavedra, G. & Ramírez-Ávila, G. M. (2007), *Revista Boliviana de Física*, **13**, 58.
- Danforth, Christopher M. (2013), *Chaos in an Atmosphere Hanging on a Wall*, (<http://mpe.dimacs.rutgers.edu/2013/03/17/chaos-in-an-atmosphere-hanging-on-a-wall/>), **17**.
- Fortuna, L., Frasca, M. & Xibilia, M. G. (2009), *Chua's Circuit Implementations: Yesterday, Today and Tomorrow*, (World Scientific).
- Gérard, A., Yapu-Quispe, L., Sakuma, S., Ghezzi, F., & Ramírez Ávila, G. M. (2016). *Nonlinear behavior of the tarka flute's distinctive sounds*, *Chaos*, **26**, 093114.
- Gutiérrez, Salvador Flores, (2008), *Modelado Comportamental de una Clase de Circuitos Caóticos Mediante el uso de SC-CNNs*, (Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica).
- Hegger, R., Kantz, H. & Schreiber, T. (1999), *Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*, *Chaos* **9**, 413.
- Hidalgo, Hugo de Leon, (2008), *Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica*, (Diseño de osciladores caóticos integrados).
- Itoh, M. & Chua, L. O. (2005), *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **15**, 1709.
- Kennedy, Michael Peter & Chua, Leon O. (1991), *International Journal of Circuit Theory and Applications*, **19**, 471.
- Kennedy, Michael Peter (1992), *Frequenz*, **46**, 66.
- Kennedy, Michael Peter (1993), *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **40**, 657.
- Kiliç, R., (2010), *Chua's Circuit Implementations: Yesterday, Today and Tomorrow*, (World Scientific).
- Lavröd, J., (2014), *The Anatomy of the Chua circuit*, (Division of Mathematical, Physics Department of Physics, Faculty of Science, Lunds universitet).
- Lindberg, E. (1993), *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, **3**, 537.
- Lindberg, E. (1994), *Nonlinear Dynamics Of Electronic Systems-Proceedings Of The Workshop Ndes' 93*, (World Scientific).
- Medeiros, E. S., Medrano-T, R. O., Caldas, I. L., Tél, T. & Feudel, U. (2019), *Phys. Rev. E*, **100**, 052201.
- Murali, K. & Lakshmanan, M. (1992), *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I: Regular Papers*, **39**, 264.
- Prebianca, F., Albuquerque, H. A., & Beims, M. W. (2018). *Describing intrinsic noise in Chua's circuit*, *Physics Letters A*, **382**, 2420.
- Ramírez-Ávila, G. M. & Gallas, J. (2008), *Revista Boliviana de Física*, **14**, 1.
- Ramírez-Ávila, G. M. & Gallas, J. (2011), *Revista Boliviana de Física*, **18**, 1.
- Rocha, R. & Medrano-T, R. O. (2009), *Nonlinear Dynamics*. **56**, 389.
- Rocha, R. & Medrano-T, R. O. (2016), *Electronics Letters*, **52**, 1010.
- Saito, Toshimichi (1985), *Electronics and Communications in Japan (Part I: Communications)*, **68**, 49.
- Sánchez, E., Matías, M. A. & Pérez-Muñuzuri, V. (1999), *An Experimental Setup for Studying the Effect of Noise on Chua's Circuit*, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **46**, 517.
- Sano, M. & Sawada, Y. (1985)., *Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series*, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1082.
- Siderskiy, V., "Chua circuits", <http://www.chuacircuits.com/contact.php>, (Web. 02 de Junio de 2022).
- Wang, N., Li, C., Bao, H., Chen, M. & Bao, B. (2019), *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, **66**, 4767.