

## CONDICIONES DE SINCRONIZACIÓN EN DOS PÉNDULOS ACOPLADOS SYNCHRONIZATION CONDITIONS OF TWO COUPLED PENDULA

A. R. TICONA BUSTILLOS<sup>1</sup> & G. M. RAMÍREZ ÁVILA<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés  
Casilla 8635, La Paz, Bolivia

<sup>2</sup> AG Nichtlineare Dynamik (S) / Kardiovaskuläre Physik  
Institut für Physik  
Humboldt-Universität zu Berlin, Robert-Koch-Platz 4, 10115 Berlin, Alemania  
(Recibido 5 de febrero de 2010; aceptado 7 de marzo de 2010)

### RESUMEN

Con base en un modelo discreto de péndulo amortiguado, se estudian las condiciones de sincronización para dos péndulos acoplados, variando las características propias de los péndulos, así como las condiciones de acoplamiento. Se encuentran las cuencas de atracción para diferentes situaciones en las que se fijan los parámetros de control. Variando los valores de los parámetros de control (longitud, masa y coeficiente de disipación), se encuentran diagramas de fase relacionados con las condiciones iniciales de uno de los péndulos, mediante los cuales es posible identificar regiones de sincronización. Se hace énfasis en la sincronización 1:1 aunque sincronizaciones de otros órdenes son también posibles.

*Descriptores:* sistemas dinámicos no-lineales — sincronización — osciladores acoplados

Código(s) PACS: 05.45.\_a, 05.45.Xt

### ABSTRACT

Based on a damped pendulum discrete model, we studied the synchronization conditions for two coupled pendula, varying both the pendulas features and coupling conditions. We found the basis for attraction in several situations in which the control parameters were fixed. Varying the control parameters (length, mass and damping coefficient), we found phase diagrams related to the initial conditions of one of the pendula; in these diagrams we identified synchronization regions. We emphasize the synchronization with a winding number  $\rho \approx 1$  (synchronization 1:1); nevertheless, other synchronization orders are possible ( $\rho \neq 1$ ).

*Subject headings:* dynamical systems (non-linear) — synchronization — coupled oscillators

### 1. INTRODUCCIÓN

El fenómeno de sincronización es muy común en la naturaleza y muchos sistemas de diversa índole exhiben este comportamiento (Strogatz 2003; Rosenblum & Pikovsky 2003), destacándose entre ellos los sistemas biológicos (Glass 2001), las reacciones químicas (Shabunin et al. 2003; Fukuda et al. 2005), los circuitos electrónicos (Kittel et al. 1998; Ramírez Ávila et al. 2003), los láseres (Roy & Thornburg 1994; López-Gutiérrez et al. 2009) y por supuesto, los péndulos (Huygens 1986; Smith et al. 2003) que desde el punto de vista histórico, constituye el primer sistema en el cual se observó sincronización (Huygens 1673); los péndulos, a pesar de ser sistemas en apariencia simples siguen concitando la atención y son sujetos de investigación tanto desde el punto de vista teórico como experimental (Baker & Blackburn 2009).

En este trabajo, nos abocamos a encontrar las condiciones de sincronización para dos péndulos acoplados. Se sabe que para sistemas no lineales disipativos, es posible la existencia de más de un atrac-

tor, por lo que diferentes condiciones iniciales pueden evolucionar hacia cualquiera de los atractores coexistentes; así, el conjunto de condiciones iniciales que se aproxima a un atractor, es llamado la *cuenca de atracción* de este atractor (Kapitaniak & Bishop 1999). En §2 se describe el modelo utilizado para estudiar el sistema de dos péndulos acoplados con disipación, en la primera parte de §3 se muestran diferentes cuencas de atracción del sistema que nos dan una idea de cómo obtener condiciones de sincronización; posteriormente, se muestran las regiones de sincronización, que pueden asociarse a las llamadas lenguas de Arnold (en el sentido de que representan regiones de sincronización de una manera similar a la utilizada en (Pikovsky et al. 2001; Ramírez Ávila 2004)<sup>1</sup>) para diferentes situaciones en las que los parámetros varían. Se darán finalmente en §4 las conclusiones y las perspectivas de este trabajo.

<sup>1</sup> Estas regiones de sincronización se diferencian de las lenguas de Arnold, en el sentido que en lugar de representarlas en un plano intensidad de acoplamiento vs. frecuencia, son representaciones en el plano parámetro de control vs. condiciones iniciales.

## 2. MODELO

Al igual que en (Ticona Bustillos & Ramírez Ávila 2008), utilizamos el modelo discretizado de péndulo

y lo adaptamos para la situación en la cual se tienen dos péndulos acoplados con disipación, cuyas ecuaciones están dadas por:

$$\begin{aligned} l\theta_{t+1}^{(1)} &= \theta_t^{(1)} + b^{(1)} \left( \theta_t^{(1)} - \theta_{t-1}^{(1)} - K^{(1)} \text{sen } \theta_t^{(1)} \right) + \frac{w}{m^{(1)}} \text{sen } \theta_t^{(2)} \\ \theta_{t+1}^{(2)} &= \theta_t^{(2)} + b^{(2)} \left( \theta_t^{(2)} - \theta_{t-1}^{(2)} - K^{(2)} \text{sen } \theta_t^{(2)} \right) + \frac{w}{m^{(2)}} \text{sen } \theta_t^{(1)}, \end{aligned} \quad (1)$$

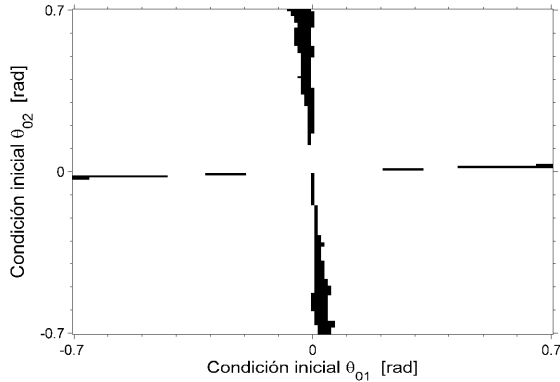


FIG. 1.— Cuenca de atracción para identificar las regiones de sincronización 1:1 (regiones oscuras) cuando la relación de longitud de los péndulos acoplados es  $l_2 = 2l_1$  con  $\rho = 1.0000 \pm 0.0020$ . Se observa una simetría en la región de sincronización que nos lleva a interpretar que la sincronización 1:1 es favorecida cuando las condiciones iniciales son bastante diferentes.

donde los superíndices 1 y 2 identifican a cada uno de los péndulos acoplados<sup>2</sup> y  $w$  representa las condiciones de acoplamiento, la cual contiene a la distancia de separación entre los péndulos y a la rigidez del material usado para acoplar los mismos; además:

$$b^{(i)} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^{(i)}}{m^{(i)}} \Delta t} \quad \text{y} \quad K^{(i)} = \frac{g \Delta t^2}{l^{(i)}}, \quad (2)$$

con  $i = 1, 2$ .

Este modelo fue comparado con valores experimentales en (Ticona Bustillos & Ramírez Ávila 2008), dando muy buenos resultados, con lo que pudimos estudiar las principales características de transmisión de movimiento en función de las características del sistema. Además, se pudo verificar la fuerte dependencia de este sistema con las condiciones iniciales y algunas características de sincronización, las cuales estudiamos con más detalle a continuación.

## 3. RESULTADOS

Primeramente, se determinaron las cuencas de atracción para posibles situaciones en las cuales se pueden controlar ciertos parámetros, como la masa de la lenteja y la longitud del péndulo, la disipación

<sup>2</sup> Por razones de comodidad en la notación, se utilizará a lo largo del artículo  $m_i = m^{(i)}$  y  $l_i = l^{(i)}$ .

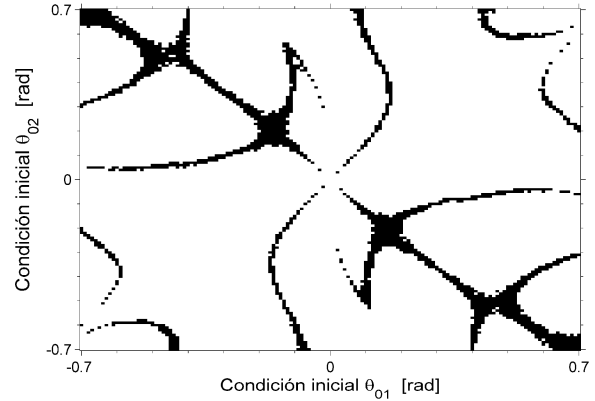


FIG. 2.— Cuenca de atracción delimitando las situaciones en las que  $\rho = 1.0000 \pm 0.0001$  (región oscura), cuando se considera que las masas de las lentejas de los péndulos son de 0.050 kg y 1.000 kg respectivamente. La sincronización 1:1 es favorecida cuando las condiciones iniciales de ambos péndulos tienen valores similares y con el mismo signo (extremos inferior izquierdo y superior derecho), tienen valores similares con diferente signo (región casi rectilínea con pendiente aproximada de -1) o tienen valores diferentes pero con el mismo signo y con la particularidad que uno de los péndulos debe tener una condición inicial no muy lejana a cero (el resto de las regiones de sincronización).

y el factor de acoplamiento. Para el trabajo numérico, se utilizó el valor de la aceleración debida a la gravedad en La Paz:  $g = 9.775 \text{ m/s}^2$ ; este valor ya fue utilizado en (Ticona Bustillos & Ramírez Ávila 2008), para comparar los resultados con medidas experimentales, las cuales fueron realizadas en esta ciudad.

Analizamos el comportamiento de la relación  $\rho = T_2/T_1 = 1$  de los períodos de los péndulos, variando las condiciones iniciales de los mismos. Esta consideración, nos permite identificar las condiciones iniciales para las cuales es posible la sincronización 1:1 entre los péndulos. Tomamos condiciones iniciales desde -0.7 hasta 0.7 rad. Nuestro primer estudio (Figs. 1-2) implica el establecimiento de las regiones de sincronización 1:1 (regiones oscuras) de las que no siguen esta relación (regiones claras), utilizando los siguientes valores para el factor resultante de disipación y el factor de acoplamiento:  $b^{(1)} = b^{(2)} = 0.9999$  y  $w = 1 \times 10^{-6}$  respectivamente. Cada punto mostrado en estas figuras corresponde a un promedio de  $\rho$  obtenido sobre las 50 últimas oscilaciones consideradas en las simulaciones para cada péndulo.

En la Fig. 1 mostramos un caso en el cual ambos

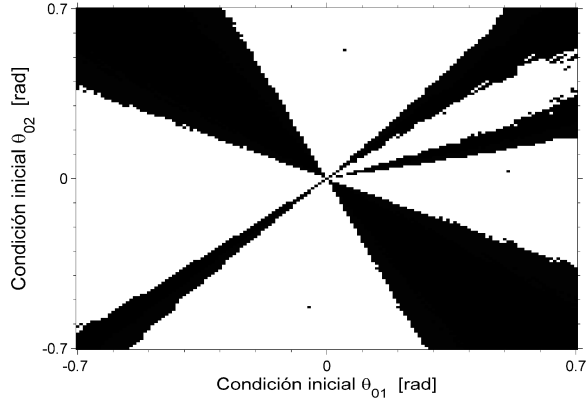


FIG. 3.— Cuenca de atracción cuando  $l_1 = l_2 = 1.00$  m y  $m_1 = m_2 = 0.050$  kg, fijando  $b^{(1)} = b^{(2)} = 0.999$  con  $\rho = 1.0000 \pm 0.0004$  en las regiones de sincronización, las cuales presentan cierta simetría en el sentido que los péndulos deben tener condiciones iniciales de signo contrario cuando los ángulos iniciales son pequeños. Es notable también el ensanchamiento de las regiones de sincronización a medida que se consideran condiciones iniciales mayores. Se observa finalmente la aparición de una nueva región de sincronización no simétrica para valores pequeños del ángulo inicial del péndulo 2.

péndulos tienen una masa de 0.0500 kg y los largos son de 1.00 m y 2.00 m, respectivamente. Los puntos nos muestran los valores obtenidos para  $\rho$  a partir de las diferentes condiciones iniciales, donde hacemos la distinción entre las regiones en las cuales se presenta la sincronización 1:1 (oscura) de las que no presentan esta característica (clara). Podemos observar que la región en forma de cruz corresponde a las condiciones de sincronización 1:1 ya que se obtienen valores de  $\rho$  muy cercanos a la unidad. Es interesante observar la simetría en la Fig. 1, lo que nos indica por una parte que el conjunto de condiciones iniciales que nos llevan a  $\rho \approx 1$  es bastante reducido y por otra parte que para obtener esta situación, las condiciones iniciales de ambos péndulos deben ser muy próximas a cero o en su defecto, uno de los péndulos debe tener una condición inicial cercana a cero y el otro un ángulo inicial considerable, situación que da lugar a que la región de sincronización 1:1 se ensanche. Esto último implica que es más fácil alcanzar una sincronización 1:1 entre los péndulos cuando uno de ellos empieza en el reposo relativo ( $\theta_0 = 0$ ) y el otro con una amplitud grande.

Para los resultados de la Fig. 2 el largo de ambos péndulos es de 1.00 m y las masas son de 0.050 kg y 1.000 kg respectivamente. En este caso, se observa que también existe una simetría en las regiones de sincronización 1:1, donde se pueden resaltar tres aspectos interesantes, a saber: (i) Los extremos inferior izquierdo y superior derecho presentan una simetría que implica que las condiciones iniciales de ambos péndulos deben tener valores similares y del mismo signo. (ii) La región rectilínea de pendiente negativa muestra que los péndulos deben comenzar cada uno en extremos opuestos para favorecer la sincronización 1:1. (iii) Las otras regiones de sincronización muestran que los valores de las condiciones iniciales pueden ser bastante diferentes pero deben tener el mismo signo y además uno de los péndulos

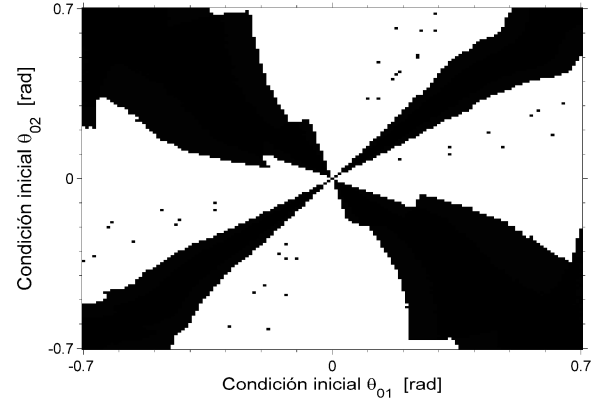


FIG. 4.— Cuenca de atracción para longitudes y masas iguales para los péndulos, con  $b^{(1)} = b^{(2)} = 0.9999$ , cuando se considera un factor de acoplamiento  $w = 5 \times 10^{-6}$ . Las regiones de sincronización oscuras corresponden al valor  $\rho = 1.0000 \pm 0.0021$ . Existe una simetría entre estas regiones y se nota que la densidad de las mismas es mayor que en los anteriores casos.

debe comenzar con un ángulo pequeño no muy alejado de cero.

En las Figs. 3 y 4 utilizamos valores iguales para los largos y las masas de ambos péndulos ( $l_1 = l_2$  y  $m_1 = m_2$ ), fijando el valor de  $b^{(1)} = b^{(2)} = 0.999$ . En la Fig. 3, la densidad de regiones de sincronización 1:1 es mayor, resaltando las regiones en las cuales los ángulos iniciales deben ser pequeños para ambos péndulos y de diferente signo (parte central), notándose luego un ensanchamiento considerable a medida que los ángulos iniciales son mayores; se observa también la aparición de nuevas regiones de sincronización no simétricas como la que aparece en la parte central y derecha de la Fig. 3, en la cual, ambos ángulos iniciales tienen valores positivos pero el del péndulo 2 puede permanecer cercano a cero, en tanto que el del péndulo 1 puede crecer linealmente.

Finalmente, en la Fig. 4 fijamos el factor de acoplamiento en  $w = 5 \times 10^{-6}$ . La distribución de las regiones de sincronización es parecida a la de la Fig. 3 pero estas regiones se ensanchan, lo que nos lleva a pensar que gracias al mayor acoplamiento entre los péndulos, la sincronización 1:1 se ve favorecida. Nuevamente, la lógica de condiciones iniciales de la misma magnitud pero de signos contrarios son las que llevan a la sincronización 1:1; sin embargo, como se señaló anteriormente, existe un aumento notorio de estas regiones con una tendencia a ocupar gran parte del plano  $\theta_{02}$  vs.  $\theta_{01}$ . También se pueden observar manchas difusas representando regiones de sincronización 1:1 lo que muestra una vez más la tendencia que tienen las regiones de sincronización a hacerse más extensas, máxime si el factor de acoplamiento aumenta su valor.

A continuación, se estudian la sincronización cuando se hacen variar un parámetro de control y las condiciones iniciales del segundo péndulo, fijando los valores del primer péndulo en:  $m_1 = 0.050$  kg y  $l_1 = 1.00$  m, siendo la condición inicial del primer péndulo en todos los casos  $\theta_{01} = 0.5$  rad. De esta manera, se obtienen las regiones que guardan similitud con las lenguas de Arnold como se mencionó anteriormente,

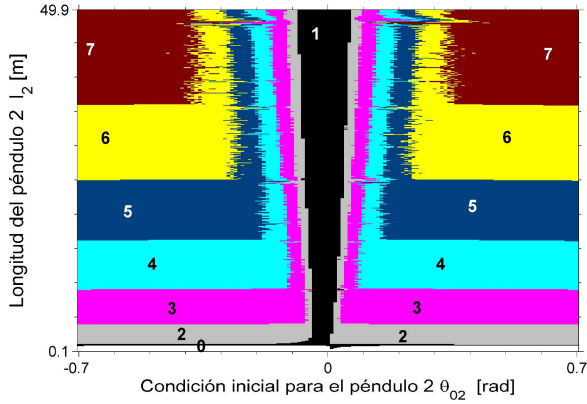


FIG. 5.— (Color online) Plano de fases  $l_2$  vs.  $\theta_{02}$  para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a  $\rho = 1.0000 \pm 0.0289$  (región oscura identificada con 1), cuando  $m_1 = m_2 = 0.050$  kg. Las otras regiones que se identifican con 0, 2-7 corresponden a zonas en las que se pueden encontrar otros órdenes de sincronización con  $\rho = (0,1)$ ,  $\rho = (1,2)$ ,  $\dots$ ,  $\rho = (6,7)$ . Es claro que en estos intervalos,  $\rho \in P^+$  por lo que no sólo existen regiones de sincronización sino también cuasi-periodicidades y caos.

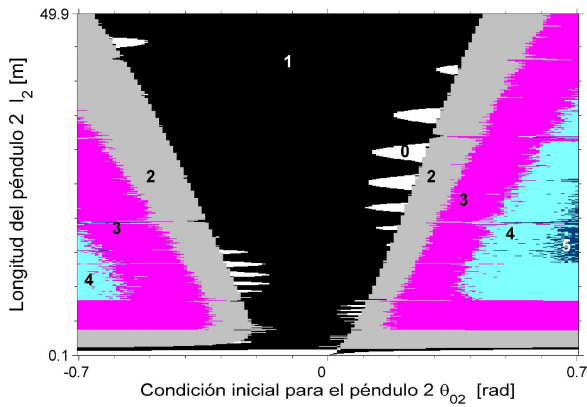


FIG. 6.— (Color online) Plano de fases  $l_2$  vs.  $\theta_{02}$  para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a  $\rho = 1.0000 \pm 0.0201$  (región oscura identificada con 1), cuando  $m_1 = 5m_2 = 0.050$  kg. Las regiones identificadas con los números 0, 2, 3, 4 y 5 corresponden a regiones en las cuales  $\rho = (0,1)$ ,  $\rho = (1,2)$ ,  $\rho = (2,3)$ ,  $\rho = (3,4)$  y  $\rho = (4,5)$  respectivamente. Se nota el desplazamiento del eje de simetría hacia la izquierda ( $\theta_{02} < 0$ ), lo que repercute en el hecho que la región 5 sólo se presente en la parte derecha del plano. Las regiones blancas en forma de “dedos” al interior de la lengua de Arnold es posible que sean el resultado de los errores del cálculo numérico pues si se considera un intervalo ligeramente mayor para el valor de  $\rho$  de la lengua de Arnold, estas desaparecen.

por lo que se utilizará en lo sucesivo esta terminología.

En primer lugar tomamos en cuenta la variación del largo del segundo péndulo, consideramos valores desde 0.10 m hasta 50.00 m, la masa de la lenteja de este péndulo es mantenida en 0.050 kg. En las Figs. 5-11, se muestran las regiones equivalentes a las lenguas de Arnold, donde nos concentramos en la región con  $\rho \approx 1$ , aunque, otras regiones con otros órdenes de sincronización pueden estar también presentes. En la Fig. 5, se muestra el diagrama de fase  $l_2$  vs.  $\theta_{02}$ , en el cual aparece claramente la lengua de Arnold con  $\rho \approx 1$  (región oscura identificada con el número

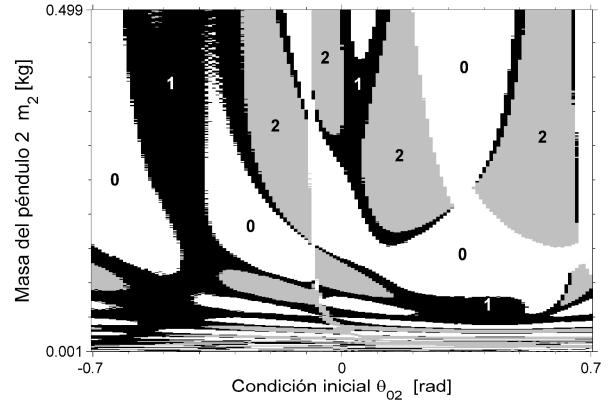


FIG. 7.— Plano de fases  $m_2$  vs.  $\theta_{02}$  para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a  $\rho = 1.0000 \pm 0.0005$  (región oscura identificada con 1), cuando  $l_1 = l_2 = 1.00$  m. Se evidencia la presencia de regiones para  $\rho = (0,1)$  y  $\rho = (1,2)$ , (regiones identificadas con 0 y 2) aunque muchas de las regiones, sobre todo las identificadas con 0, en realidad pueden ser consideradas como parte de la lengua de Arnold  $\rho \approx 1$  puesto que la precisión numérica es mayor a la que se puede obtener experimentalmente.

1). Además, se identifican regiones en las que  $\rho$  toma valores comprendidos en los intervalos  $(0,1)$ ,  $(1,2)$ ,  $\dots$ ,  $(6,7)$  que se identifican con los números 0, 2,  $\dots$ , 7 respectivamente. Es interesante notar que estas regiones, en general, están bien definidas y son simétricas respecto de la situación en la cual  $\theta_{02} = 0$ .

Modificando el valor del coeficiente de disipación, no se notan cambios apreciables, pero cambiando el valor de la masa del segundo péndulo, por ejemplo a 0.010 kg, constatamos que la lengua de Arnold para  $\rho \approx 1$  es más extensa que en el caso de masas iguales de las lentejas de ambos péndulos, como se puede observar en la Fig. 6. Además, se constata que la simetría existente en el caso anterior (Fig. 5) se rompe y se podría pensar que el eje de simetría ya no pasa por  $\theta_{02} = 0$ , sino que está desplazado a la izquierda del plano ( $\theta_{02} < 0$ ). Como en el anterior caso, se identifican otras regiones en las cuales  $\rho = (0,1)$ ,  $\rho = (1,2)$ ,  $\dots$ ,  $\rho = (4,5)$ , identificando las mismas con los números 0, 2,  $\dots$ , 5 respectivamente, siendo  $\rho$  real y positivo lo que puede dar lugar a regiones en las cuales el comportamiento de los péndulos es periódico, cuasi-periódico o caótico. Un aspecto interesante es la aparición de regiones claras al interior de la lengua de Arnold; en principio, esto significaría que regiones con  $\rho < 1$  rompen la simetría de la lengua de Arnold: Sin embargo, estas regiones en particular si bien poseen  $\rho < 1$ , este valor es muy cercano a 1 por lo que se podría pensar que los errores propios del cálculo numérico hacen que no se consideren estas regiones en el intervalo elegido para  $\rho$ . Otro aspecto a resaltar es la aparición de una pequeña región  $\rho = (4,5)$  sólo en la parte derecha del plano; esto se justifica fácilmente por el hecho de la ruptura de simetría referida líneas arriba.

Ahora, fijando  $l_1 = l_2 = 1.00$  m y variando el valor de  $m_2$ , podemos observar en la Fig. 7 que la lengua de Arnold para  $\rho \approx 1$  ya no tiene una estructura sencilla como era el caso en las Figs. 5-6 y ocupa varias regiones del plano, el cual contiene también regiones

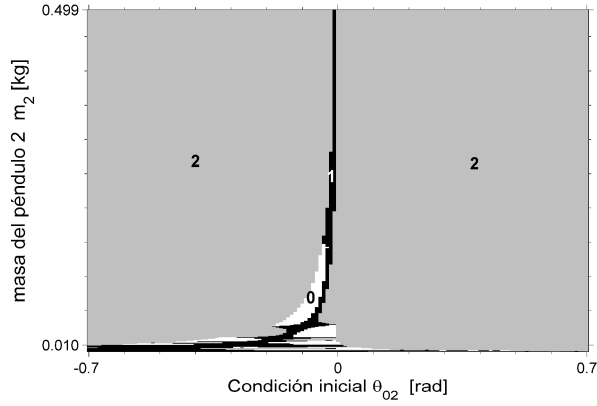


FIG. 8.— Plano de fases  $m_2$  vs.  $\theta_{02}$  para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a  $\rho = 1.0000 \pm 0.0006$  (región oscura identificada con 1), cuando  $l_2 = 2l_1 = 2.00$  m. También existen regiones en las cuales,  $\rho = (0,1)$  y  $\rho = (1,2)$ , (regiones identificadas con 0 y 2), pero al igual que en los anteriores casos,  $\rho = (0,1)$  puede ser absorbida por la región de sincronización 1:1.

con  $\rho = (0,1)$  y  $\rho = (1,2)$ . Nuevamente, nuestros resultados son conservadores en cuanto a la región de sincronización 1:1 puesto que la precisión numérica que se considera supera la precisión que se podría tener en las mediciones experimentales, por lo que es posible que las regiones de sincronización 1:1 ocupen una extensión mayor en el plano de fases  $m_2$  vs.  $\theta_{02}$ . Por otra parte, es interesante notar que en la zona en la cual  $m_2 \approx m_1$ , se tiene una tendencia a que la región de sincronización esté presente casi para todos los valores de  $\theta_{02}$ , lo que en cierta manera confirma los resultados obtenidos en la Fig. 3.

En cambio si  $l_2 = 2l_1 = 2.00$  m, la lengua de Arnold en el plano  $m_2$  vs.  $\theta_{02}$  es muy pequeña, como se ve en la Fig. 8. Es claro que la mayor parte del plano corresponde a valores  $\rho = (1,2)$  por lo que en estas regiones bien podrían haber sincronizaciones de otros órdenes, cuasi-periodicidades o caos. Se observa también que cuando  $m_2 \rightarrow m_1$ , las únicas condiciones iniciales  $\theta_{02}$  que preservan la sincronización 1:1 son aquellas en las que  $\theta_{02} \rightarrow 0$ , en concordancia con los resultados de la Fig. 1. Los anteriores resultados indican que tanto la masa de la lenteja como la longitud del péndulo juegan papeles importantes en la sincronización de los dos péndulos acoplados.

De igual manera podemos analizar la sincronización en función del factor de acoplamiento. En la Fig. 9 se nota que para valores pequeños del factor de acoplamiento, existe sincronización casi para todas las condiciones iniciales, en cambio para valores grandes de dicho factor, la sincronización parece desaparecer dando lugar a una “granularidad” en la que se tienen valores de  $\rho = (0,2)$ . En la Fig. 9, se consideraron masas de las lentejas de los péndulos iguales pero no las longitudes de los mismos; sin embargo, el comportamiento cuando se tiene  $l_1 = l_2$  no se modifica sustancialmente.

Finalmente, si variamos el valor del coeficiente de disipación  $\lambda = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$  tenemos que para péndulos con las mismas características ( $l_1 = l_2$  y  $m_1 = m_2$ ), la región de sincronización 1:1, abarca casi todo el

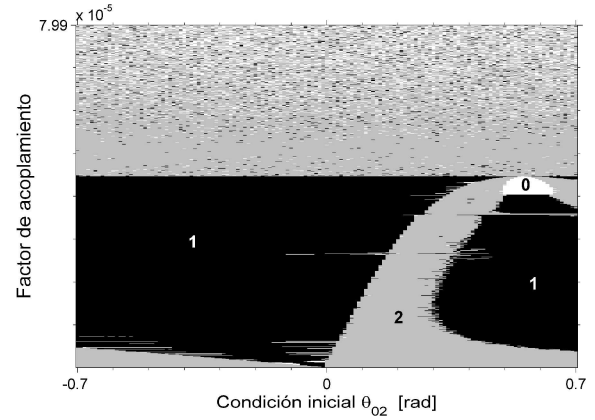


FIG. 9.— Plano de fases  $w$  vs.  $\theta_{02}$  para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a  $\rho = 1.0000 \pm 0.0248$  (región oscura identificada con 1), cuando  $l_2 = 2l_1 = 2.00$  m y  $m_1 = m_2 = 0.050$  kg. La región de sincronización 1:1 está bien definida para valores  $w \approx 5 \times 10^{-6}$ ; para valores mayores, ya no se encuentra una región bien definida para la sincronización 1:1 y se tiene una especie de “granularidad” con valores para  $\rho$  comprendidos en el intervalo (0,2).

plano de fases, como se puede observar en la Fig. 10. Regiones con  $\rho = (0,1)$  y  $\rho = (1,2)$  están también presentes en el plano pero al igual que en los anteriores casos, las regiones con  $\rho = (0,1)$ , en general pueden ser absorbidas por las regiones de sincronización 1:1, lo que aumentaría aún más la densidad de regiones con  $\rho \approx 1$ . Otro aspecto interesante es el referido a los valores elevados de  $\lambda$ , para los cuales, la sincronización se pierde; esto está en relación con el hecho de que cuando la disipación es muy grande, los péndulos tienden a volver a su situación de reposo relativo y las medidas de comportamiento sincrónico de los péndulos ya no es posible hacerlas con un transiente adecuado.

En cambio si las longitudes de los péndulos son diferentes, la región de sincronización 1:1 se reduce drásticamente, como se puede observar en la Fig. 11. Trabajando con  $\rho = 1.0000 \pm 0.0013$  se observa que la lengua cerca de la parte central contiene regiones blancas y grises que en principio significan valores de  $\rho = (0,1)$  y  $\rho = (1,2)$  respectivamente; sin embargo, si se considera  $\rho = 1.0000 \pm 0.0097$ , estas regiones desaparecen de la lengua, la cual queda bien definida y además, la región correspondiente a valores elevados del coeficiente de disipación considerados en el plano, pasa a ser considerada como región de sincronización 1:1. En este último caso, se puede pensar también que el hecho de trabajar con valores elevados del factor de disipación  $\lambda$ , no permite cuantificar adecuadamente las oscilaciones tal como se explicó para la Fig. 10. El hecho que la región de sincronización 1:1 sea relativamente pequeña concuerda con los anteriores resultados para situaciones en las que  $l_1 \neq l_2$  (Figs. 1 y 8), en las cuales se tiene la misma situación; sin embargo, no se debe olvidar los resultados mostrados en las Figs. 5 y 6 en las cuales, el intervalo de condiciones iniciales  $\theta_{02}$  que conducen a la sincronización 1:1 crece con la longitud  $l_2$ .

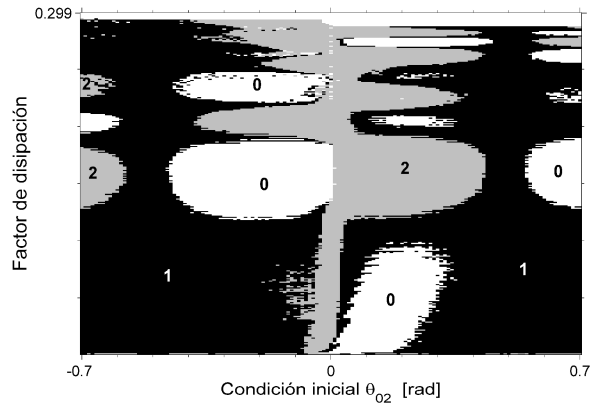


FIG. 10.— Plano de fases  $\lambda$  vs.  $\theta_{02}$  para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a  $\rho = 1.0000 \pm 0.0006$  (región oscura identificada con 1), cuando  $l_2 = l_1 = 1.00$  m y  $m_1 = m_2 = 0.050$  kg. Otras regiones con  $\rho = (0,1)$  y  $\rho = (1,2)$  aparecen pero es notable la predominancia de la región de sincronización 1:1. En la parte superior del plano (valores elevados de  $\lambda$ ), existe una región en la que  $\rho \approx (0.96,1)$

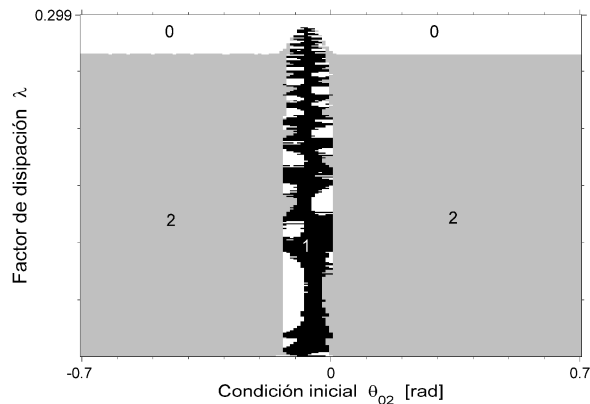


FIG. 11.— Plano de fases  $\lambda$  vs.  $\theta_{02}$  para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a  $\rho = 1.0000 \pm 0.0013$  (región oscura identificada con 1), cuando las longitudes de los péndulos son diferentes:  $l_2 = 2l_1 = 2.00$  m y  $m_1 = m_2 = 0.050$  kg. Las regiones blancas y grises que aparecen sobre la lengua, así como la región blanca en la parte superior, son regiones con  $\rho \approx 1$  pero con menor precisión de la establecida al principio; por lo que se espera que sean parte de la lengua con sincronización 1:1.

#### 4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se determinaron las cuencas de atracción para varios valores de parámetros, pudiéndose observar que las mismas presentan diferentes formas según el valor que toman los parámetros. Nos concentramos en

las condiciones iniciales de los péndulos para las que puede existir sincronización 1:1.

Se han identificado las regiones de sincronización para varias condiciones de los péndulos, en función a las condiciones iniciales del péndulo 2. Si bien nos abocamos a la determinación de la sincronización de orden 1:1, es claro que existen otros órdenes de sincronización. Además, como se tienen valores de  $\rho \subset P^+$ , pueden existir también comportamientos cuasi periódicos y caóticos.

Se puede observar que la longitud y la masa de los péndulos ejercen una gran influencia en la sincronización.

Se ve claramente en todos los casos estudiados, la importancia de la precisión numérica con la que se trabaja y su relación con la exactitud que se puede lograr en mediciones experimentales.

A partir de estos resultados, podemos analizar cuasi periodicidades, diagramas de bifurcación, rutas hacia el caos, en las regiones donde no existe sincronización.

Evidentemente, este modelo es susceptible a ampliarse a más de dos péndulos lo que constituye la continuación natural de esta investigación.

Una parte importante de nuestra investigación es trabajar tanto con mediciones experimentales como con modelos que justamente son validados por estas mediciones. Si bien, por el momento se tienen concordancias importantes entre los resultados experimentales con los obtenidos a partir del modelo, no se descarta para el futuro considerar el sistema de ecuaciones diferenciales para describir el sistema de péndulos acoplados.

Finalmente, se pretende que este tipo de trabajos pueda a posteriori encontrar su aplicación también en aspectos académicos y didácticos, tal como ocurrió con la primera parte de nuestra investigación con péndulos (Ticona Bustillos & Ramírez Ávila 2010).

#### AGRADECIMIENTOS

Agradecemos los valiosos comentarios de los árbitros de la revista, gracias a los cuales pudimos expresar con mayor claridad las ideas de este trabajo. GMRA agradece al Deutscher Akademischer Austausch Dienst (DAAD) por la beca de investigación otorgada.

#### REFERENCIAS

- Bai, E.-W., Lonngren, K. E., & Sprott, J. C. 2002, *Chaos, Solitons & Fractals*, 13, 1515
- Baker, J. L. & Blackburn, J. L. 2009, *The Pendulum: A Case Study in Physics* (Oxford: Oxford University Press)
- Fukuda, H., Morimura, H., & Kai, S. 2005, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 205, 80
- Glass, L. 2001, *Nature*, 410, 277
- Grosu, I. 2003, Master-slave synchronization and control of chaotic Sprott circuit (11th International IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Scuol/Schuls, Switzerland)
- Huygens, C. 1673, *Horologium Oscillatorium* (Paris: Apud F. Muguet)
- . 1986, *The pendulum clock or geometrical demonstrations concerning the motion of pendula as applied to clocks* (Iowa: Ames, Iowa : Iowa State University Press)
- Kapitaniak, T. & Bishop, S. R. 1999, *The Illustrated Dictionary of Nonlinear Dynamics and Chaos* Chichester (John Wiley & Sons, Inc.)
- Kittel, A., Parisi, J., & Pyragas, K. 1998, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 112, 459
- Li, Y.-N., Chen, L., Cai, Z.-S., & Zhao, X.-Z. 2004, *Chaos, Solitons & Fractals*, 22, 767
- López-Gutiérrez, R. M., Posadas-Castillo, C., López-Mancilla, D., & Cruz-Hernández, C. 2009, *Chaos, Solitons & Fractals*, 42, 277
- Ramírez Ávila, G. M. 2004, *Synchronization phenomena in light-controlled oscillators* (PhD thesis)

- Ramírez Ávila, G. M., Guisset, J. L., & Deneubourg, J. L. 2003, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 182, 254
- Ticona Bustillos, A. R. & Ramírez Ávila, G. M. 2008, *Revista Boliviana de Física*, 14, 121
- . 2010, *Revista Boliviana de Física*, 16, 41
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., & Kurths, J. 2001, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, vol 12 (New York: Cambridge University Press)
- Rosenblum, M. & Pikovsky, A. 2003, *Contemporary Physics*, 44, 401
- Roy, R. & Thornburg, K. S. J. 1994, *Physical Review Letters*, 72, 2009
- Shabunin, A., Astakhov, V., Demidov, V., Provata, A., Baras, F., Nicolis, G., & Anishchenko, V. 2003, *Chaos, Solitons & Fractals*, 15, 395
- Smith, H. J. T., Blackburn, J. A., & Baker, G. L. 2003, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13, 7
- Strogatz, S. H. 2003, *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order* (New York: Hyperion Press)
- Sugawara, T., Tachikawa, M., Tsukamoto, T., & Shimizu, T. 1994, *Physical Review Letters*, 72, 3502