

Capítulo 1

Introducción

La Mecánica Clásica es quizás la primera parte de la Física que comenzamos a estudiar, ya en los primeros cursos de secundaria, se presenta a la Mecánica como lo más representativo de la Física; quien no recuerda sus primeras lecciones de vectores, cinemática, dinámica, choques, conservación de la energía, etc. Todos estos temas presentados en forma sencilla a los estudiantes de secundaria tienen en realidad un formalismo basado en el cálculo diferencial e integral que es la vía que se utiliza con los estudiantes de primer semestre de universidad para describir toda esta temática. Sin embargo, se puede formalizar aún más la Mecánica y es así que se empieza con una descripción basada en análisis vectorial, geometría diferencial, cálculo variacional y las situaciones en las que se utilizan ecuaciones diferenciales dejan de ser triviales.

Si bien la Física ha conocido grandes revoluciones a principios del siglo XX con el surgimiento de la Teoría de la Relatividad formulada por Einstein en 1905 y con el de la Mecánica Cuántica formulada por Schrödinger y Heisenberg; a pesar de que la Mecánica Clásica constituye un caso especial de ambas cuando la velocidad de los móviles es mucho menor a la velocidad de la luz en el vacío o cuando la constante de Planck tiende a cero respectivamente, la Mecánica tal como la formularon Newton, Euler, Lagrange y Hamilton sigue siendo una base para cualquier ciencia y no es una cuestión del pasado, por lo que no es casual que los cursos de Física tanto en la secundaria como en la universidad comiencen con el estudio de la Mecánica. Nuevamente, a principios del siglo XX, Poincaré se dio cuenta de la existencia de trayectorias caóticas al tratar de resolver el problema de los tres cuerpos. La ciencia incipiente del caos apareció con mucha fuerza a partir de los años sesenta con un gran aporte de la escuela soviética que dio lugar a que se den las bases de esta teoría que posteriormente se constató que tenía aplicación en distintas ramas de la ciencia con lo cual empieza lo

que se denomina la ciencia de Sistemas Complejos que para muchos autores y científicos constituye la “ciencia del siglo XXI”. La Mecánica debió reconocer algunos yerros señalados por la Teoría del Caos pero finalmente, se podría decir que la Mecánica y el Caos se unieron en lo que se denomina Caos Hamiltoniano. Este último tema ya se incluye en la currícula de la mayor parte de cursos de Mecánica Clásica y se lo tratará en el último capítulo de esta obra.

1.1. Aspectos históricos

Desde la aparición de la especie humana, de manera directa o indirecta, el hombre estuvo ligado con la Mecánica, ya sea para sus actividades cotidianas y de supervivencia, como para sus razonamientos acerca del “funcionamiento de la naturaleza”.

Si se deben señalar a personas que se interesaron de manera apasionada en encontrar leyes que describan la naturaleza y los movimientos inherentes a ella, no se puede olvidar al filósofo griego Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) quien fue el primero en comprender la necesidad de la existencia de fuerzas externas para que los cuerpos cambien su estado de movimiento o su trayectoria. La base aristotélica era experimental simple lo que le condujo a algunas malas interpretaciones.

El primer esfuerzo fructífero de abstracción lo realizó Galileo (1564-1642) quien pudo comprender cómo transcurre el movimiento de los cuerpos. Además, el propio Galileo se dio cuenta de la importancia de las fuerzas de fricción sobre el movimiento de los cuerpos. Evidentemente, los aportes de Galileo fueron muy importantes para dar los cimientos a la Mecánica pero fue Isaac Newton quien de manera elegante y sencilla a la vez construye la obra gruesa del monumental edificio de la Mecánica. Curiosamente, Newton ve la luz justamente el año en el que Galileo fallece como si recibiese la posta de continuar con el establecimiento de la Mecánica. Huelga hablar de Newton, quien para muchos sigue siendo un referente y considerado como el mejor científico de todos los tiempos. La prolífica labor de Newton en áreas tales como la Mecánica, la Astronomía, la Óptica, y la Matemática, hacen que se justifique plenamente el sitio que alcanzó en la historia de la ciencia. Las tres leyes que Newton establece para la Mecánica revolucionaron el mundo de la Física y dieron a esta ciencia su carácter formal y predictivo; además con su invención del cálculo diferencial, no solo contribuye a la Mecánica sino también a la Física en general que se valdrá de ello para la formalización de las diferentes partes de la Física que fueron surgiendo a partir de entonces. Finalmente, con su

teoría de la gravitación, une indisolublemente a la Física y a la Astronomía, permitiéndole a esta última adquirir un carácter formal y predictivo no sólo basándose en observaciones experimentales sino a través de la resolución de ecuaciones que dan cuenta de la interacción de los cuerpos celestes en cuestión.

Acabamos de indicar las bondades del trabajo de Newton, sin embargo, empezaron a surgir problemas de muy difícil resolución para los cuales parecía no ser posible la solución mediante la aplicación de las leyes de Newton debido a la existencia de ligaduras y restricciones. Felizmente, las ideas de Leonhard Euler (1707-1783), “viejo conocido” de la Física por sus trabajos relacionados al movimiento de los fluidos, permite introducir un nuevo concepto: el de “coordenadas generalizadas” y una formulación basada en estas, que se adapta mejor a la descripción del sistema. Las ideas de Euler fueron rápidamente adoptadas por Lagrange (1736-1813) quien reformula las leyes de la Mecánica en una forma elegante, obviando la notación vectorial y considerando de manera natural las restricciones presentes en el sistema. El formalismo lagrangiano contiene los gérmenes de nuevas y grandes teorías que surgieron en los años venideros, tales como el Electromagnetismo, la Mecánica Cuántica y la Teoría de Campos. Las ecuaciones de Lagrange se impusieron por más de medio siglo, pero a mediados del siglo XIX, Hamilton (1805-1865) propone un nuevo formalismo en el que se toma en consideración los llamados “momentos generalizados”, se introduce el concepto de *espacio de fases* y se da un carácter más geométrico a la Mecánica. El formalismo hamiltoniano se adapta bien a sistemas que están bajo el efecto de una perturbación. Finalmente, este formalismo, permite una transición natural hacia la Mecánica Cuántica.

Un personaje muy importante en lo que a Física y Matemática se refiere es Henri Poincaré (1854-1912) y se lo considera como el fundador de la Teoría de Sistemas Dinámicos. Poincaré aborda el problema de la resolución de ecuaciones diferenciales desde un punto de vista geométrico. En 1888 con su trabajo “Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica” se hace acreedor a un premio científico otorgado por el rey suizo-noruego Oscar II y éste trabajo pone en evidencia algunos conceptos y herramientas que hoy son parte de la Teoría del Caos.

Entre fines de los años 60 y principios de los 80 del siglo pasado, se reconoció ampliamente que sistemas dinámicos simples podían dar lugar a comportamientos complejos y se aclamó una revolución científica que comprendía a varias disciplinas bajo el denominativo impresionante de “Caos”. Sin embargo, algunos matemáticos se apresuraron en señalar que la pretendida revolución estaba directamente relacionada con los trabajos del siglo XIX realizados por Poincaré. A pesar de que actualmente se tiene

una pugna epistemológica entre los defensores del carácter revolucionario de la Teoría del Caos surgida en los años 60 y los que consideran que la Teoría de Sistemas Dinámicos de Poincaré es la verdadera acreedora de los lauros que hoy se tienen en lo que es la Dinámica No Lineal, es evidente que sea cual fuere la visión correcta, el éxito que hoy alcanzaron estas teorías es innegable y se deben mencionar a algunos científicos que coadyuvaron al establecimiento contemporáneo de las mismas; así, Smale, Lorenz y Ruelle son parte de la “historia del caos”.

Para terminar con estos aspectos históricos, vale la pena citar la declaración solemne que en 1986 formuló el entonces presidente de la Unión Internacional de Mecánica Pura y Aplicada, James Lighthill, quien señala textualmente: “Aquí, me corresponde hacer un alto y hablar en nombre del gran conjunto de profesionales de la Mecánica. Estamos muy conscientes de que el entusiasmo que alimentó a nuestros predecesores en cuanto al carácter predictivo de la mecánica newtoniana y lo que les movió a hacer generalizaciones que hoy en día sabemos que son falsas. Queremos presentar colectivamente nuestras disculpas por haber inducido en el público culto un error que nosotros nos encargamos de difundir a propósito del determinismo de los sistemas que satisfacen la leyes newtonianas del movimiento, ideas que se revelaron como falsas en los años 60.”

1.2. Conceptos de álgebra lineal

El álgebra lineal constituye una de las herramientas más utilizadas en Física, ya sea que se trate con Mecánica Clásica o Cuántica. A continuación se dan de manera sucinta los conceptos más relevantes que serán utilizados a lo largo del curso.

1.2.1. Dependencia e independencia lineal

Sea \mathcal{E} un espacio vectorial y consideremos p vectores no nulos de \mathcal{E} : $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p$. Dichos vectores forman un sistema *linealmente dependiente* si existen elementos (números) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ no todos nulos tales que:

$$\boxed{\sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} ; \exists \alpha_i \neq 0} \quad (\text{sistema } \textit{ligado} \text{ o linealmente dependiente}).$$

En cambio si:

$$\boxed{\sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} ; \forall \alpha_i = 0} \quad (\text{sistema } \textit{libre} \text{ o linealmente independiente}).$$

1.2.2. Base de un espacio vectorial

Se denomina *base* de un espacio vectorial \mathcal{E} a todo sistema libre de vectores de orden máximo.

Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ un sistema libre de orden n . Si $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$ es una base de \mathcal{E} , entonces un vector cualquiera $\vec{x} \in \mathcal{E}$ se puede expresar como una *combinación lineal* de los \vec{e}'_i :

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}'_1 + x^2 \vec{e}'_2 + \dots + x^n \vec{e}'_n = \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}'_i$$

1.2.3. Cambio de base

Sea un espacio vectorial \mathcal{E}_n , el cual admite una infinidad de bases.

Sea $\vec{x} \in \mathcal{E}_n$ y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ y $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n\}$ dos bases arbitrarias de \mathcal{E}_n . Expresando los vectores de cada una de estas bases mediante la otra, se tiene:

$$\vec{e}'_j = \sum_{i=1}^n A_j^i \vec{e}_i$$

y

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^n A_i^j \vec{e}'_j.$$

Sea \vec{x} un vector cualquiera de \mathcal{E}_n , de componentes x^i respecto a la base $\{\vec{e}_i\}$ y x'^j respecto a la $\{\vec{e}'_j\}$; es decir:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^n x'^j \vec{e}'_j$$

Por consiguiente, se puede escribir:

$$x^i = \sum_{j=1}^n A_j^i x'^j$$

y también:

$$x'^j = \sum_{i=1}^n A_i^j x^i$$

1.2.4. Convenio de Einstein

Siempre que en un monomio figure dos veces el mismo índice, una vez como superior y otra como inferior, se debe, salvo aviso en contra, sumar los monomios obtenidos dando a este índice todos los valores posibles.

Así, en el cambio de base:

$$x^i = A_j^i x'^j \quad ; \quad x'^j = A_i^j x^i$$

1.2.5. Espacio vectorial euclidiano

Sea un espacio vectorial \mathcal{E}_n , definido sobre el cuerpo de los números reales y, suponiendo que existe una ley de composición tal que a todo par de vectores \vec{x}, \vec{y} hace corresponder un número real $\vec{x} \cdot \vec{y}$ que goza de las propiedades:

1. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (conmutatividad).
2. $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\alpha \vec{y}) = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$ (asociatividad respecto a la multiplicación por un escalar).
3. $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ (distributividad respecto a la adición vectorial).
4. Si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ para cualquier valor de \vec{x} , se tiene que $\vec{y} = \vec{0}$.

En tal caso, \mathcal{E}_n es un *espacio vectorial euclidiano* y la ley de composición $\vec{x} \cdot \vec{y}$ es el *producto escalar* o *producto interno* en dicho espacio.

Considerando el espacio euclidiano \mathcal{E}_n referido a una base cualquiera $\{\vec{e}_i\}$, y sean

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i \quad \vec{y} = y^j \vec{e}_j$$

dos vectores arbitrarios de \mathcal{E}_n . Entonces:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^i y^j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j).$$

Se define el *tensor métrico* que es simétrico como:

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j,$$

por lo que

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = g_{ij} x^i y^j,$$

con

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

1.2.6. Ortogonalidad y norma

En un espacio euclidiano \mathcal{E}_n , se dice que \vec{x} e \vec{y} son *ortogonales* cuando

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

La *norma* de un vector se define como

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{g_{ij}x^i x^j}.$$

Todo vector cuya norma sea igual a 1 se denomina *normalizado* o *unitario*.

1.2.7. Sistemas ortonormales de vectores

Sea el espacio vectorial *propriadamente euclidiano* \mathcal{P}_n . Un sistema de r vectores de \mathcal{P}_n se dirá *ortonormal*, si los vectores que lo componen están normalizados y son ortogonales dos a dos. El concepto de sistema ortonormal, nos permite definir *sistemas de coordenadas* en un espacio tridimensional.

1.3. Sistemas de referencia

Desde un punto de vista físico, en un espacio tridimensional, se puede introducir un sistema de coordenadas para describir la posición de un objeto físico cualquiera. Por consiguiente, el conjunto sistema de coordenadas y objeto físico dan lugar a lo que se denomina *sistema de referencia*. Estos sistemas de referencia están definidos en \mathbb{R}^n y cualquier punto del espacio \mathbb{R}^n , puede ser descrito mediante un *vector de posición*. Está claro que para los fines del estudio de la Mecánica Clásica, nos restringiremos al espacio \mathbb{R}^3 .

1.3.1. Vector de posición

De acuerdo con los conceptos de álgebra lineal vistos en §1.2.2, se sabe que un vector puede escribirse en términos de los vectores de la base como

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i$$

lo que se puede escribir también en términos matriciales como

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

1.3.1.a. Coordenadas cartesianas

Este sistema de coordenadas es el más sencillo y el que intuitivamente adoptamos para la descripción de algún fenómeno. En este sistema de coordenadas, el vector de posición se escribe como

$$\vec{r} = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z,$$

donde se utiliza la notación $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ y $\vec{1}_z$ para los *vectores unitarios* o *versores* en cada dirección.

1.3.1.b. Coordenadas cilíndricas

Uno de los sistemas más sencillos y usados es el de coordenadas cilíndricas (ver Fig. 1.3.1.b).

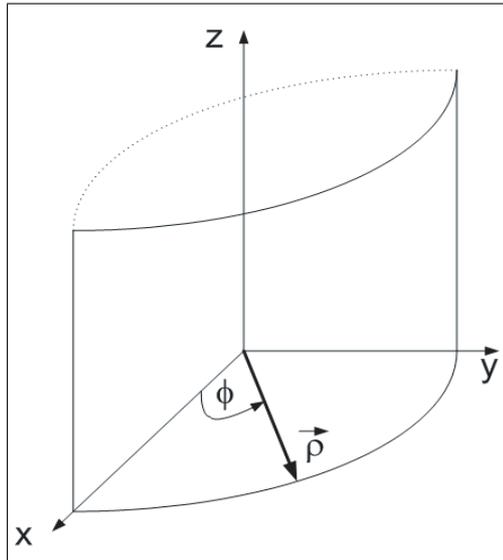


Figura 1.1: Sistema de coordenadas cilíndricas.

Este sistema está relacionado con un sistema cartesiano mediante las relaciones:

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$z = z.$$

Por lo tanto, el vector de posición puede escribirse como:

$$\vec{r} = \rho \cos \phi \vec{1}_x + \rho \sin \phi \vec{1}_y + z\vec{1}_z.$$

Está claro que el vector de posición puede ser expresado en términos de los versores correspondientes al propio sistema de coordenadas. Así, en una transformación $\{x^i\} \rightarrow \{x'^i\}$, los vectores unitarios en el nuevo sistema estarán dados por:

$$\{\vec{1}'_i\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x'^i} \\ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x'^i} \right| \end{array} \right\}.$$

De acuerdo con lo anterior,

$$\vec{1}'_\rho = \cos \phi \vec{1}_x + \sin \phi \vec{1}_y$$

$$\vec{1}'_\phi = -\sin \phi \vec{1}_x + \cos \phi \vec{1}_y$$

$$\vec{1}'_z = \vec{1}_z.$$

Lo anterior puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \vec{1}_\rho \\ \vec{1}_\phi \\ \vec{1}_z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \vec{1}_x \\ \vec{1}_y \\ \vec{1}_z \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una *matriz ortogonal* puesto que satisface las propiedades:

(i) $\det \mathbf{A} = 1$

(ii) $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$.

De acuerdo con las propiedades anteriores, se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} \vec{1}_x \\ \vec{1}_y \\ \vec{1}_z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^t \begin{pmatrix} \vec{1}_\rho \\ \vec{1}_\phi \\ \vec{1}_z \end{pmatrix}.$$

Con lo que finalmente, el *vector de posición en coordenadas cilíndricas* resulta:

$$\boxed{\vec{r} = \rho \vec{1}_\rho + z \vec{1}_z.}$$

1.3.1.c. Coordenadas esféricas

Otro tipo de sistemas de coordenadas que es muy utilizado en problemas físicos debido a la simetría que impone es el sistema de coordenadas esféricas que encuentra una gran aplicación cuando se tratan con problemas de simetría radial, particularmente cuando las fuerzas sólo dependen de las distancias, es decir, son de la forma $\vec{F} = f(r)\vec{1}_r$. Las ecuaciones de transformación entre un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares y un sistema de coordenadas esféricas, están dadas por:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \theta \cos \phi \\ y &= \rho \sin \theta \sin \phi \\ z &= \rho \cos \theta. \end{aligned}$$

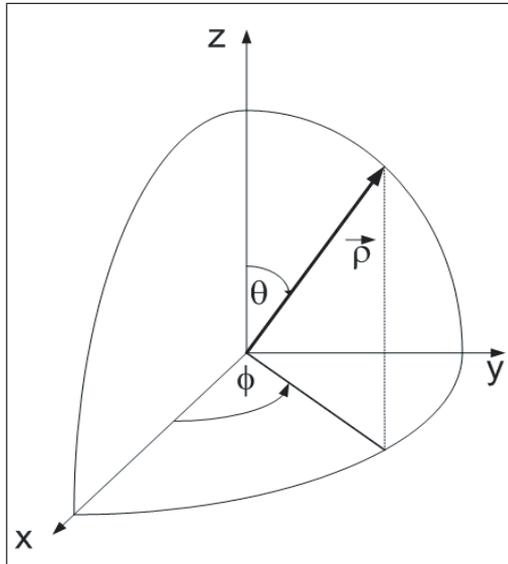


Figura 1.2: Sistema de coordenadas esféricas.

De acuerdo al procedimiento seguido en §1.3.1.b, se puede hallar la relación:

$$\begin{pmatrix} \vec{1}_\rho \\ \vec{1}_\theta \\ \vec{1}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{1}_x \\ \vec{1}_y \\ \vec{1}_z \end{pmatrix},$$

donde la matriz **A** sigue cumpliendo con las propiedades (i) y (ii) mencionadas en §1.3.1.b. Así, se encuentra el *vector de posición en coordenadas esféricas*:

$$\vec{r} = \rho \vec{1}_\rho.$$

1.3.2. Vector desplazamiento

Este vector es importante desde el punto de vista de definición de las magnitudes físicas elementales. En general, se lo define como:

$$d\vec{x} = d(x^i \vec{e}_i) = dx^i \vec{e}_i + x^i d\vec{e}_i.$$

Para el caso particular de *sistemas ortogonales* se tiene $d\vec{x} = dx^i \vec{e}_i$. Por lo que en los sistemas estudiados en §1.3.1, el vector desplazamiento estará dado por:

Coordenadas cartesianas $d\vec{r} = dx\vec{1}_x + dy\vec{1}_y + dz\vec{1}_z$

Coordenadas cilíndricas Para hallar el vector desplazamiento en cualquier sistema ortogonal con coordenadas $\{x^i\}$, se utiliza:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} dx^i.$$

Que en el caso de coordenadas cilíndricas es:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz.$$

Tras cálculos sencillos y utilizando algunas identidades resultantes de §1.3.1.b, se obtiene finalmente el *vector desplazamiento en coordenadas cilíndricas*:

$$\boxed{d\vec{r} = d\rho\vec{1}_\rho + \rho d\phi\vec{1}_\phi + dz\vec{1}_z.}$$

Coordenadas esféricas De manera similar se puede escribir una expresión para el vector desplazamiento en coordenadas esféricas en la forma:

$$d\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right) \begin{pmatrix} d\rho \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}.$$

Nuevamente, después de algunas operaciones sencillas y considerando identidades resultantes de §1.3.1.c, se halla que el *vector desplazamiento en coordenadas esféricas* es:

$$\boxed{d\vec{r} = d\rho\vec{1}_\rho + \rho d\theta\vec{1}_\theta + \rho \sin \theta d\phi\vec{1}_\phi.}$$

Evidentemente, se pueden hallar, tanto el vector de posición, como el vector desplazamiento en otros sistemas de coordenadas. Solo con el fin de citar algunos:

- Cilíndricas elípticas.
- Cilíndricas parabólicas.
- Bipolares.
- Esferoidales prolatas o alargadas.
- Esferoidales oblatas.
- Parabólicas
- Toroidales.
- Biesféricas.
- Elipsoidales confocales.
- Cónicas
- Parabólicas confocales.

1.3.3. Elemento de arco

Para cualquier sistema de coordenadas, el elemento de arco se define como la *distancia entre dos puntos vecinos*. En términos matemáticos:

$$ds = \sqrt{d\vec{x} \cdot d\vec{x}},$$

que tomando en cuenta la definición del producto interno en un espacio vectorial euclidiano.

$$ds = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}$$

o simplemente, en términos de los vectores desplazamiento:

$$ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}}.$$

En base a esta última expresión, es fácil escribir el elemento de arco en cualquier sistema de coordenadas si se conoce el vector desplazamiento y se procede a efectuar el producto escalar. Así:

Coordenadas cartesianas $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$

Coordenadas cilíndricas $ds = \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (dz)^2}.$

Coordenadas esféricas $ds = \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2(d\theta)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2}.$

Es evidente que $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. Desarrollando la suma anterior, es fácil darse cuenta que las componentes del tensor métrico en los diferentes sistemas de coordenadas están dadas por:

Coordenadas cartesianas

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j. \end{cases}$$

Coordenadas cilíndricas

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j = 1, 3 \\ \rho^2 & ; i = j = 2 \\ 0 & ; i \neq j. \end{cases}$$

Coordenadas esféricas

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j = 1 \\ \rho^2 & ; i = j = 2 \\ \rho^2 \sin^2 \theta & ; i = j = 3 \\ 0 & ; i \neq j. \end{cases}$$

Como se vio en §1.2.5, el tensor métrico g_{ij} se genera a partir del producto interno de los vectores de la base $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$. En el caso de sistemas ortogonales, el tensor métrico representa una matriz diagonal de la forma:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix},$$

donde, h_i representan los *factores de escala*. Por otro lado, los vectores de la base no necesariamente son normalizados. Estos vectores, pueden encontrarse a partir de la relación:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}.$$

Así se tendrán en cada uno de los sistemas coordenados:

Coordenadas cartesianas

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{con } \vec{e}_x = \vec{1}_x, \vec{e}_y = \vec{1}_y, \vec{e}_z = \vec{1}_z.$$

Coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde los vectores de la base son:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \vec{1}_x + \sin \phi \vec{1}_y = h_\rho \vec{1}_\rho \\ \vec{e}_\phi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \vec{1}_x + \rho \cos \phi \vec{1}_y = h_\phi \vec{1}_\phi \\ \vec{e}_z &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{1}_z = h_z \vec{1}_z \end{aligned}$$

Coordenadas esféricas

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

siendo los vectores de la base:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \sin \theta \cos \phi \vec{1}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{1}_y + \cos \theta \vec{1}_z = h_\rho \vec{1}_\rho \\ \vec{e}_\theta &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \rho \cos \theta \cos \phi \vec{1}_x + \rho \cos \theta \sin \phi \vec{1}_y - \rho \sin \theta \vec{1}_z = h_\theta \vec{1}_\theta \\ \vec{e}_\phi &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin \theta \sin \phi \vec{1}_x + \rho \sin \theta \cos \phi \vec{1}_y = h_\phi \vec{1}_\phi. \end{aligned}$$

Si se explicitan los cambios de base como en §1.2.3, $\vec{e}_j^i = A_j^i \vec{e}_i$, $\vec{e}_i = A_i^j \vec{e}_j^i$. Donde,

$$\begin{aligned} A_i^j &\Rightarrow \mathbf{J} \text{ siendo } \mathbf{J} \text{ la matriz jacobiana} \\ A_j^i &\Rightarrow \mathbf{J}^{-1} \text{ siendo } \mathbf{J}^{-1} \text{ la matriz jacobiana inversa.} \end{aligned}$$

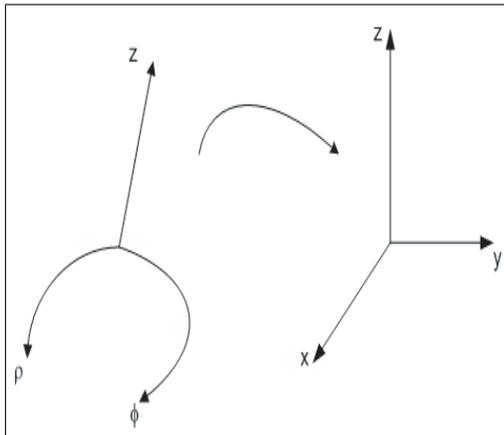


Figura 1.3: Transformación de sistemas de coordenadas.

En el caso de sistemas ortogonales, \mathbf{J} es *ortogonal* pero no normalizada, es decir, sólo cumple con $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^t$. Es así que se pueden escribir las matrices de transformación en el ejemplo mostrado en la Fig. 1.3.3:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x_\rho & x_\phi & x_z \\ y_\rho & y_\phi & y_z \\ z_\rho & z_\phi & z_z \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\phi & y_\phi & z_\phi \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix}.$$

Utilizando las anteriores matrices de transformación, es sencillo realizar los cambios de base entre sistemas de coordenadas (en el caso mostrado en la figura, de cartesianas a cilíndricas y viceversa).

Con la introducción de las matrices de transformación, se pueden representar otros vectores, así, el “vector” de posición se puede escribir:

$$\vec{r} = x^i \vec{e}_i = A_i^j x^j \vec{e}_i,$$

donde $A_i^j = \mathbf{J}^{-1}$. Escribiendo en términos matriciales se tendrá:

$$\vec{r} = \vec{e}^i \otimes \mathbf{J}^{-1} \otimes \vec{x}.$$

Así, para coordenadas cilíndricas:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\phi & y_\phi & z_\phi \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Haciendo el producto matricial correspondiente, se llega al resultado ya conocido:

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z = \rho |\vec{e}_\rho| \vec{1}_\rho + z |\vec{e}_z| \vec{1}_z = \rho \vec{1}_\rho + z \vec{1}_z.$$

Similarmente para coordenadas esféricas:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\phi & y_\phi & z_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Luego de realizado el producto matricial, se tiene:

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho = \rho |\vec{e}_\rho| \vec{1}_\rho = \rho \vec{1}_\rho.$$

Ahora, si se aborda al *vector desplazamiento*, éste es un auténtico vector, pues $d\vec{x} = dx^i \vec{e}_i$. Así, en coordenadas cartesianas, se tendrá:

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, $d\vec{r} = dx \vec{1}_x + dy \vec{1}_y + dz \vec{1}_z$. En tanto que en coordenadas cilíndricas:

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\rho \\ d\phi \\ dz \end{pmatrix}.$$

Recordando que $\vec{e}_x = d\rho |\vec{e}_\rho| \vec{1}_\rho + d\phi |\vec{e}_\phi| \vec{1}_\phi + dz |\vec{e}_z| \vec{1}_z = d\rho h_\rho \vec{1}_\rho + d\phi h_\phi \vec{1}_\phi + dz h_z \vec{1}_z$. Lo que finalmente da: $d\vec{r} = d\rho \vec{1}_\rho + \rho d\phi \vec{1}_\phi + dz \vec{1}_z$. Finalmente, en coordenadas esféricas se tendrá:

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\rho \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} = d\rho \vec{1}_\rho + \rho d\theta \vec{1}_\theta + \rho \sin \theta d\phi \vec{1}_\phi.$$

1.3.4. Velocidad

De Física Elemental, se sabe que la velocidad está definida por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

A partir de esta simple definición, se encuentra que para los diferentes casos de sistemas coordenados que se estudiaron previamente, se tendrá:

Coordenadas cartesianas

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{1}_x + \frac{dy}{dt}\vec{1}_y + \frac{dz}{dt}\vec{1}_z = \dot{x}\vec{1}_x + \dot{y}\vec{1}_y + \dot{z}\vec{1}_z. \quad (1.1)$$

Coordenadas cilíndricas

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{1}_\rho + \rho \frac{d\phi}{dt}\vec{1}_\phi + \frac{dz}{dt}\vec{1}_z = \dot{\rho}\vec{1}_\rho + \rho\dot{\phi}\vec{1}_\phi + \dot{z}\vec{1}_z. \quad (1.2)$$

Sin embargo, este mismo resultado podía haberse obtenido a partir de la expresión explícita del vector de posición en coordenadas cilíndricas

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{1}_\rho + z\vec{1}_z) = \dot{\rho}\vec{1}_\rho + \rho \frac{d\vec{1}_\rho}{dt} + \dot{z}\vec{1}_z,$$

y utilizando las igualdades que resultan de la transformación de coordenadas cartesianas a cilíndricas:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{1}_\rho}{dt} &= \dot{\phi}\vec{1}_\phi \\ \frac{d\vec{1}_\phi}{dt} &= -\dot{\phi}\vec{1}_\rho, \end{aligned} \quad (1.3)$$

se llega al mismo resultado $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{1}_\rho + \rho \frac{d\vec{1}_\rho}{dt} + \dot{z}\vec{1}_z$.

Coordenadas esféricas

Similarmente, para coordenadas esféricas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{1}_\rho + \rho \frac{d\theta}{dt}\vec{1}_\theta + \rho \sin \theta \frac{d\phi}{dt}\vec{1}_\phi = \dot{\rho}\vec{1}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{1}_\theta + \rho \sin \theta \dot{\phi}\vec{1}_\phi. \quad (1.4)$$

Ahora, si se toman en cuenta las variaciones temporales de los versores:

$$\frac{d\vec{1}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{1}_\theta + \sin \theta \dot{\phi}\vec{1}_\phi \quad (1.5)$$

$$\frac{d\vec{1}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{1}_\rho + \cos \theta \dot{\phi}\vec{1}_\phi \quad (1.5)$$

$$\frac{d\vec{1}_\phi}{dt} = -\sin \theta \dot{\phi}\vec{1}_\rho - \cos \theta \dot{\phi}\vec{1}_\theta, \quad (1.6)$$

y el valor del vector de posición en coordenadas esféricas $\vec{r} = \rho \vec{1}_\rho$, se llega nuevamente al resultado $\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \vec{1}_\rho + \rho \frac{d\theta}{dt} \vec{1}_\theta + \rho \sin \theta \frac{d\phi}{dt} \vec{1}_\phi = \dot{\rho} \vec{1}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{1}_\theta + \rho \sin \theta \dot{\phi} \vec{1}_\phi$.

De los anteriores resultados, se podría escribir que en general, si se tiene una transformación $\{x^i\} \rightarrow \{x'^i\}$, la velocidad en el nuevo sistema de coordenadas podrá escribirse como:

$$\vec{v}' = \sum_{i=1}^3 h'_{x'_i} \dot{x}'_i \vec{1}_{x'_i} \quad (1.7)$$

1.3.5. Aceleración

Para hallar la aceleración de una partícula en cualquier sistema de coordenadas, se toma la definición básica:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Así, en los sistemas de coordenadas que constituyen nuestros ejemplos:

Coordenadas cartesianas

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x} \vec{1}_x + \ddot{y} \vec{1}_y + \ddot{z} \vec{1}_z. \quad (1.8)$$

Coordenadas cilíndricas A partir de la expresión de la velocidad, se encuentra:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} = \frac{d}{dt} (\dot{\rho} \vec{1}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{1}_\phi + \dot{z} \vec{1}_z),$$

lo que luego de algunas operaciones simples da:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \vec{1}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \vec{1}_\phi + \ddot{z} \vec{1}_z. \quad (1.9)$$

Coordenadas esféricas De manera similar, para coordenadas esféricas:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} = \frac{d}{dt} (\dot{\rho} \vec{1}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{1}_\theta + \rho \dot{\phi} \sin \theta \vec{1}_\phi),$$

después de cálculos sencillos se obtiene finalmente:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 - \rho \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \vec{1}_\rho + \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\theta}) - \rho \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right] \vec{1}_\theta + \left[\frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{d}{dt} (\rho^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) \right] \vec{1}_\phi. \quad (1.10)$$

1.4. Elementos de geometría diferencial

La Geometría Diferencial permite el estudio analítico de curvas y figuras en espacios vectoriales definidos. Las curvas que describen los objetos físicos en movimiento, en general son *alabeadas* y es justamente gracias a la Geometría Diferencial que caracteriza todas las propiedades geométricas locales de estas curvas.

1.4.1. Representaciones regulares

Se denomina *representación paramétrica regular* a una función vectorial

$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda) \quad ; \quad \lambda \in \mathbf{I},$$

la cual goza de las siguientes propiedades:

- (i) $\vec{r}(\lambda)$ es de clase \mathcal{C}^1 en \mathbf{I} .
- (ii) $\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \neq \vec{0} \quad \forall \lambda \in \mathbf{I}$.

Entonces, una curva C queda descrita dando los valores de \vec{r} como función de cualquier parámetro λ .

Nota acerca de las funciones de clase \mathcal{C}^n : Una función numérica, escalar o vectorial f pertenece a la clase \mathcal{C}^n en un intervalo \mathbf{I} , si existe la derivada de orden n -ésimo de f y es continua en \mathbf{I} .

Ejemplo: Analizar la función vectorial $\vec{r}(\lambda) = 2\lambda^{5/2}\vec{1}_1 + e^\lambda\vec{1}_2 + \cos \lambda\vec{1}_3$.

Primeramente, se calculan las derivadas para saber de qué clase es esta función. Como:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{d\lambda} &= 5\lambda^{3/2}\vec{1}_1 + e^\lambda\vec{1}_2 - \sin \lambda\vec{1}_3 \\ \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} &= \frac{15}{2}\lambda^{1/2}\vec{1}_1 + e^\lambda\vec{1}_2 - \cos \lambda\vec{1}_3 \\ \frac{d^3\vec{r}}{d\lambda^3} &= \frac{15}{4}\lambda^{-1/2}\vec{1}_1 + e^\lambda\vec{1}_2 + \sin \lambda\vec{1}_3. \end{aligned}$$

Se ve que $\frac{d\vec{r}}{d\lambda}$ y $\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}$ son continuas para todo λ pero $\frac{d^3\vec{r}}{d\lambda^3}$ no existe en $\lambda = 0$. Por consiguiente, $\vec{r}(\lambda) \in \mathcal{C}^2$ en $-\infty < \lambda < \infty$. Por otro lado, se observa que $\vec{r}(\lambda)$ tiene derivadas continuas de todo orden en cualquier intervalo que no contenga al origen, es decir, en este tipo de intervalo $\vec{r}(\lambda) \in \mathcal{C}^\infty$.

Evidentemente, se puede escoger una base $\{\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z\}$ en un espacio vectorial \mathcal{E}^3 . Así, un vector cualquiera puede representarse en este espacio vectorial como:

$$\vec{r}(\lambda) = x(\lambda)\vec{1}_x + y(\lambda)\vec{1}_y + z(\lambda)\vec{1}_z.$$

Ejemplo: Analizar la representación $\vec{r}(\lambda) = \lambda\vec{1}_x + (\lambda^2 + 2)\vec{1}_y + (\lambda^3 + \lambda)\vec{1}_z$.
Como:

(i) $\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \vec{1}_x + 2\lambda\vec{1}_y + (3\lambda^2 + 1)\vec{1}_z$ es continua, y

(ii) $\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \neq \vec{0} \forall \lambda$ ya que $\left|\frac{d\vec{r}}{d\lambda}\right| = \sqrt{1 + 4\lambda^2 + (3\lambda^2 + 1)^2} \neq 0$.

Consiguientemente, la representación $\vec{r}(\lambda)$ es regular para todo valor de λ .

Ejemplo: La cisoide de Diocles en coordenadas polares es

$$r = 2 \sin \theta \tan \theta \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Hallar su representación paramétrica en coordenadas polares.

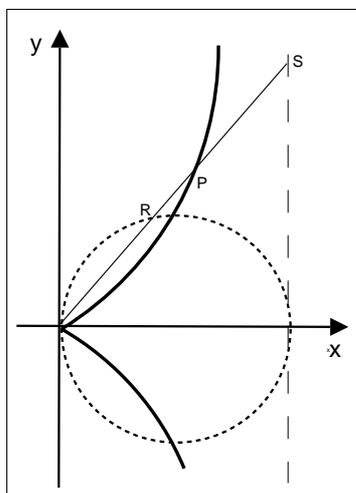


Figura 1.4: Cisoide de Diocles en la que se debe cumplir que $\overline{OP} = \overline{RS}$.

Primeramente, se puede representar la cisoide tal como se muestra en la Fig. 1.4.1, donde para graficar la cisoide se utilizó el hecho que $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$. Por otra parte, se sabe que en coordenadas polares se tiene:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \Rightarrow x = 2 \sin^2 \theta \\ y &= r \sin \theta \Rightarrow y = 2 \sin^2 \theta \tan \theta. \end{aligned}$$

Por lo que en términos del parámetro θ y los vectores unitarios en el sistema de coordenadas cartesianas, se tendrá:

$$\vec{r}(\theta) = 2 \sin^2 \theta \vec{1}_x + 2 \sin^2 \theta \tan \theta \vec{1}_y,$$

por lo que su derivada

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = 4 \sin \theta \cos \theta \vec{1}_x + 2 \sin^2 \theta (\sec^2 \theta + 2) \vec{1}_y,$$

es idénticamente nula si $\theta = 0$, por lo que la representación paramétrica *no es regular*.

1.4.2. Longitud de arco

Un arco regular

$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda) \quad ; \quad a \leq \lambda \leq b,$$

tiene como *longitud*:

$$s = \int_a^b \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| d\lambda = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dx^3}{d\lambda} \right)^2} d\lambda. \quad (1.11)$$

En un sistema cartesiano:

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2} d\lambda.$$

Ejemplo: Calcular la longitud de arco de la curva

$$\vec{r}(\lambda) = e^\lambda \cos \lambda \vec{1}_1 + e^\lambda \sin \lambda \vec{1}_2 + e^\lambda \vec{1}_3, \quad \text{en } 0 \leq \lambda \leq \pi.$$

Utilizando (1.11), se tiene que:

$$s = \int_0^\pi \sqrt{(e^\lambda \cos \lambda - e^\lambda \sin \lambda)^2 + (e^\lambda \sin \lambda + e^\lambda \cos \lambda)^2 + e^{2\lambda}} d\lambda,$$

haciendo cálculos sencillos, se llega finalmente a:

$$s = \sqrt{3}(e^\pi - 1).$$

La determinación de la longitud de arco de una curva en un intervalo dado, permite conocer las características de la misma y evidentemente tiene especial importancia cuando se describe el movimiento de un objeto físico. Dada su importancia, la longitud de arco puede ser considerada como un parámetro de la curva.

1.4.3. Longitud de arco como parámetro

Se ha visto anteriormente que el elemento de arco se definía en términos de un parámetro λ y nos permitía calcular la longitud de una determinada curva en un intervalo dado del valor del parámetro.

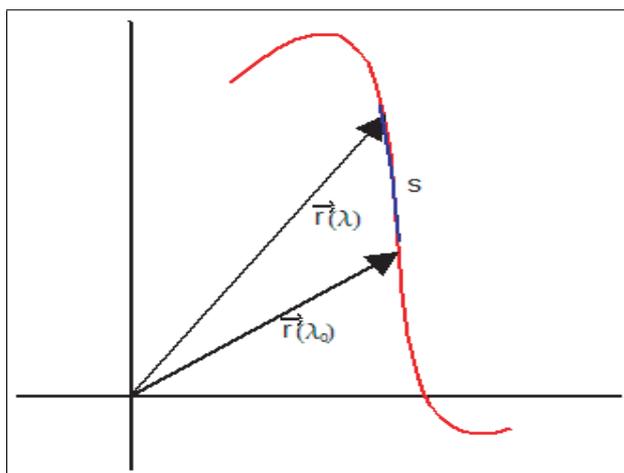


Figura 1.5: Longitud de arco en términos de las funciones vectoriales $\vec{r}(\lambda_0)$ y $\vec{r}(\lambda)$

Sin embargo, a veces es conveniente expresar la longitud de arco como un parámetro que nos permita determinar los elementos geométricos de las curvas en cuestión. Así, consideremos $\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$ como una curva regular en I y considerando la función

$$s = s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| d\lambda,$$

por lo que:

- Si $\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow s \geq 0$ y es igual a la longitud de arco de la curva comprendida entre $\vec{r}(\lambda_0)$ y $\vec{r}(\lambda)$.
- Si $\lambda < \lambda_0 \Rightarrow s < 0$ y es igual a la longitud de arco, tomada con signo negativo, entre $\vec{r}(\lambda_0)$ y $\vec{r}(\lambda)$.

Ahora, si se toma la derivada de la longitud de arco con respecto al parámetro λ :

$$\frac{ds}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| d\lambda = \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right|$$

y dado que por lo anterior se puede considerar a la longitud de arco como parámetro, se puede introducir la siguiente:

Definición Una representación $\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$ es una *representación en función de la longitud de arco*, o también una *representación natural* si $\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1$.

Por lo que si $\vec{r} = \vec{r}(s)$ es una representación natural de una curva C , entonces: $|s_2 - s_1|$ es la longitud del segmento de arco de C entre $\vec{r}(s_1)$ y $\vec{r}(s_2)$.

Si $s = s(\lambda)$ está definida por la integral:

$$s = s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| d\lambda,$$

entonces, $\vec{r} = \vec{r}(\lambda(s))$ es una *representación natural*, con

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| \left| \frac{d\lambda}{ds} \right| = 1.$$

Ejemplo: Representar gráficamente y hallar la representación natural de la hélice circular:

$$\vec{r}(\lambda) = a \cos \lambda \vec{1}_1 + a \sin \lambda \vec{1}_2 + b\lambda \vec{1}_3, \text{ en } 0 < \lambda < \infty, \text{ con } a, b \neq 0.$$

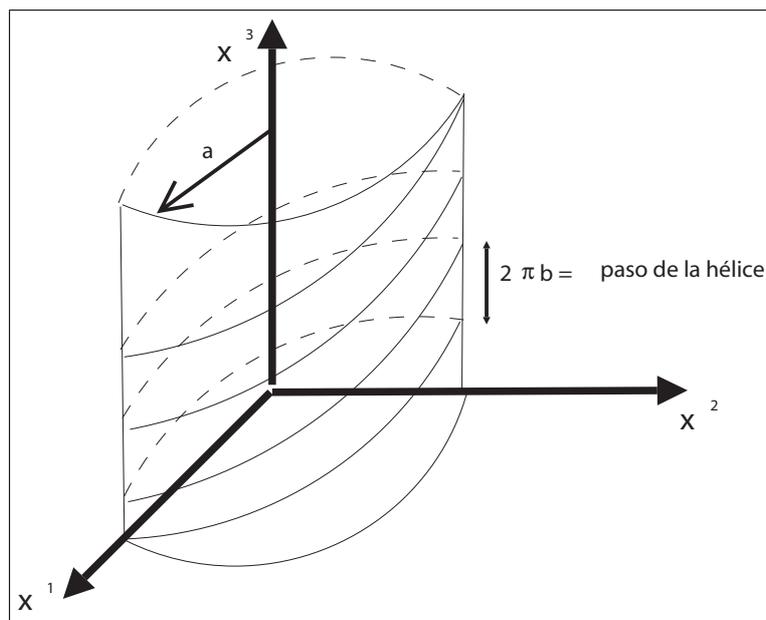


Figura 1.6: Representación gráfica de una hélice circular.

La representación gráfica de la hélice (ver Fig. 1.4.3) se obtiene reemplazando valores numéricos de λ y considerando valores no nulos para a y b , siendo a , el radio de la hélice circular y b está relacionado con el paso de la hélice. A partir de

$$s = \int_0^\lambda \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| d\lambda,$$

se encuentra que

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} \lambda,$$

con lo que despejando λ , se obtiene la *representación natural de la hélice circular*:

$$\vec{r} = a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \vec{1}_1 + a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \vec{1}_2 + \left(\frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \vec{1}_3.$$

Uno de los problemas fundamentales de la geometría es el de determinar con exactitud los elementos geométricos que distinguen unas figuras de otras, es decir, cuantificándolos. Se puede demostrar que este problema puede resolverse en general para curvas regulares suficientemente suaves. Una *curva regular* viene determinada por dos cantidades escalares: la *curvatura* y la *torsión*, las cuales se pueden expresar como funciones del parámetro natural.

1.4.4. Vector tangente unitario

Este vector unitario es llamado también *versor tangencial*. Para definir este versor, consideremos a $\vec{r} = \vec{r}(s)$ como una representación natural de una curva regular C . Se define:

$$\boxed{\vec{1}_T = \frac{d\vec{r}}{ds}} \text{ (vector tangente unitario).}$$

Es claro que si $\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$ es una representación arbitraria de la curva C y tiene la misma orientación que $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Entonces:

$$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{d\lambda} = \vec{1}_T \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right|,$$

o de otro modo:

$$\vec{1}_T = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\lambda}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right|}.$$

1.4.5. Versor normal

Es otro vector unitario que está definido por:

$$\boxed{\vec{1}_N = \frac{\frac{d\vec{1}_T}{ds}}{\left| \frac{d\vec{1}_T}{ds} \right|}} \text{ (versor normal).}$$

Derivando el vector tangente unitario respecto a la longitud de arco:

$$\frac{d\vec{1}_T}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\frac{d\vec{r}}{d\lambda}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right|} \right) = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\frac{d\vec{r}}{d\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right)^2}} \right) \frac{d\lambda}{ds},$$

continuando el proceso de derivación y tomando en cuenta que

$$\frac{ds}{d\lambda} = \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| = \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right)^2}$$

se llega finalmente a:

$$\vec{1}_N = \frac{\frac{\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}}{\left(\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right)^2} - \frac{\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}}{\left[\left(\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right)^2 \right]^2}}{\left| \frac{d\vec{1}_T}{ds} \right|} \quad (1.12)$$

Ejemplo: Hallar el vector tangente unitario para la hélice circular:

$$\vec{r}(\lambda) = a \cos \lambda \vec{1}_x + a \sin \lambda \vec{1}_y + b \lambda \vec{1}_z, \text{ con } a, b \neq 0.$$

Puesto que

$$\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

entonces se tendrá para el vector tangente unitario:

$$\vec{1}_T = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{ds} = \frac{-a \sin \lambda \vec{1}_x + a \cos \lambda \vec{1}_y + b \vec{1}_z}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1.4.6. Versor binormal

Un otro vector unitario que se utiliza para caracterizar las curvas regulares es el *versor binormal* que está definido por:

$$\vec{1}_B = \vec{1}_T \wedge \vec{1}_N \text{ (versor binormal).}$$

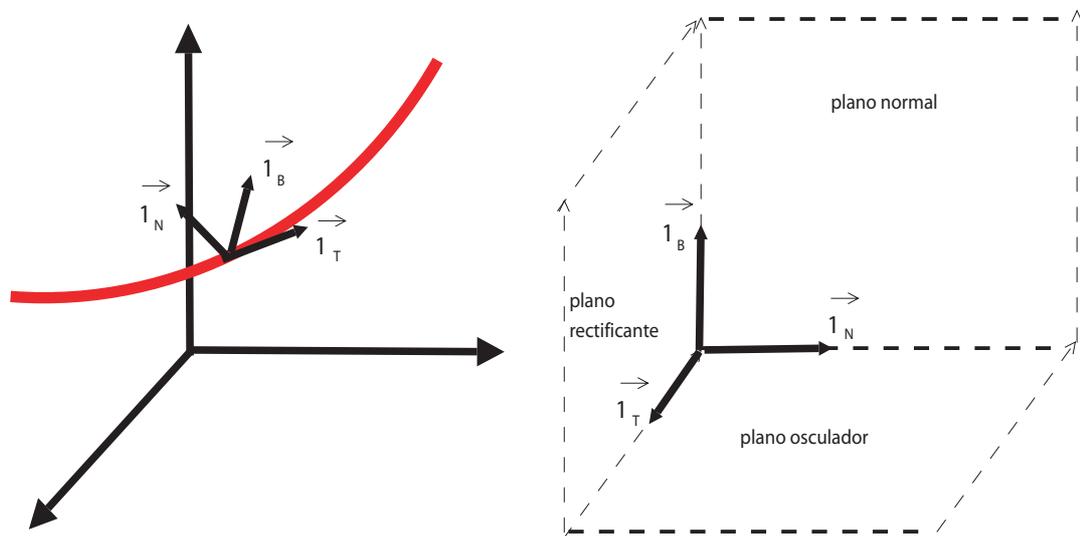


Figura 1.7: Vectores unitarios que caracterizan a una curva y los planos que forman.

Una representación de los vectores unitarios que caracterizan una curva, además de los planos que forman estos, se muestra en la Fig. 1.7.

A partir de estos vectores unitarios, se pueden escribir las ecuaciones para las *rectas* denominadas *tangente*, *normal principal* y *binormal*:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_0 + c\vec{1}_T && \text{recta tangente} \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + c\vec{1}_N && \text{recta normal principal} \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + c\vec{1}_B && \text{recta binormal.}\end{aligned}$$

En tanto que las ecuaciones para los planos denominados *normal*, *rectificante* y *osculador* están dadas por:

$$\begin{aligned}(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{1}_T &= 0 && \text{plano normal} \\ (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{1}_N &= 0 && \text{plano rectificante} \\ (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{1}_B &= 0 && \text{plano osculador.}\end{aligned}$$

1.4.7. Curvatura

El *vector curvatura* se define por:

$$\vec{k} = \frac{d\vec{1}_T}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \quad (\text{vector curvatura}).$$

Donde $\vec{r} = \vec{r}(s)$ es una curva regular de clase ≥ 2 , por lo que $\vec{1}_T$ es de clase \mathcal{C}^1 y por consiguiente, se puede considerar su derivada.

La longitud del vector curvatura es $\kappa = |\vec{k}|$ y se denomina *curvatura*. En tanto que el recíproco de la curvatura es el denominado *radio de curvatura*:

$$\rho = \frac{1}{\kappa}.$$

Se llama *punto de inflexión* a un punto de la curva C en el que el vector curvatura es idénticamente nulo, es decir, en el punto de inflexión:

$$\kappa = 0 \quad \text{y} \quad \rho = \infty.$$

Ejemplo: Hallar la curvatura y el radio de curvatura para la circunferencia de radio a :

$$\vec{r}(\lambda) = a \cos \lambda \vec{1}_1 + a \sin \lambda \vec{1}_2, \quad \text{con } a > 0.$$

De la definición de vector curvatura, se ve que primeramente se debe hallar el vector tangente unitario:

$$\vec{1}_T = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\lambda}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right|} = -\sin \lambda \vec{1}_1 + \cos \lambda \vec{1}_2,$$

por lo que el vector curvatura será:

$$\vec{k} = \frac{d\vec{1}_T}{ds} = \frac{\frac{d\vec{1}_T}{d\lambda}}{\frac{ds}{d\lambda}} = \frac{-\cos \lambda \vec{1}_1 - \sin \lambda \vec{1}_2}{a},$$

y la curvatura:

$$|\vec{k}| = \kappa = \frac{1}{a}.$$

Y siendo el radio de curvatura el inverso de la curvatura, su expresión para esta curva será: $\rho = a$.

Se pueden hacer algunas otras consideraciones acerca de la *curvatura*. Así, está claro que si la curva en cuestión es una recta, el valor de la curvatura es idénticamente nula. Por otra parte, recordando la definición del versor normal y teniendo en cuenta que $\kappa = \left| \frac{d\vec{1}_T}{ds} \right|$, entonces se puede expresar el versor normal como:

$$\vec{1}_N = \frac{\vec{k}}{\kappa},$$

por lo que la curvatura puede expresarse también como $\kappa = \vec{k} \cdot \vec{1}_N$. De la expresión hallada para el versor normal (1.4.6), se puede escribir:

$$\kappa^2 = \left\{ \frac{\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}}{\left(\frac{d\vec{r}}{d\lambda}\right)^2} - \frac{\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}}{\left[\left(\frac{d\vec{r}}{d\lambda}\right)^2\right]^2} \right\}^2.$$

Desarrollando el binomio y haciendo simplificaciones se llega a:

$$\kappa^2 = \frac{\left(\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}\right)^2 \left(\frac{d\vec{r}}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}\right)^2}{\left[\left(\frac{d\vec{r}}{d\lambda}\right)^2\right]^3}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta la relación vectorial $(\vec{A} \wedge \vec{B})^2 = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$ se llega a la expresión para la curvatura:

$$\kappa = \frac{\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} \right|}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right|^3}. \quad (1.13)$$

Una otra consideración que se puede hacer es que si $\vec{r} = \vec{r}(s)$ es de clase $\mathbb{C}^{n \geq 2}$ y $\Delta\varphi$ representa el ángulo que forman los vectores tangente unitarios

$\vec{1}_T(s)$ en $\vec{r}(s)$ y $\vec{1}_T(s + \Delta s)$ en un punto vecino $\vec{r}(s + \Delta s)$, siendo $\Delta s > 0$. Lo anterior está representado en la Fig. 1.8, en la cual se ve que

$$\left| \vec{1}_T(s + \Delta s) - \vec{1}_T(s) \right| = 2 \left| \vec{1}_T(s) \right| \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

Si $\Delta\varphi$ es pequeño, entonces, $\left| \vec{1}_T(s + \Delta s) - \vec{1}_T(s) \right| \approx \Delta\varphi$, por lo que

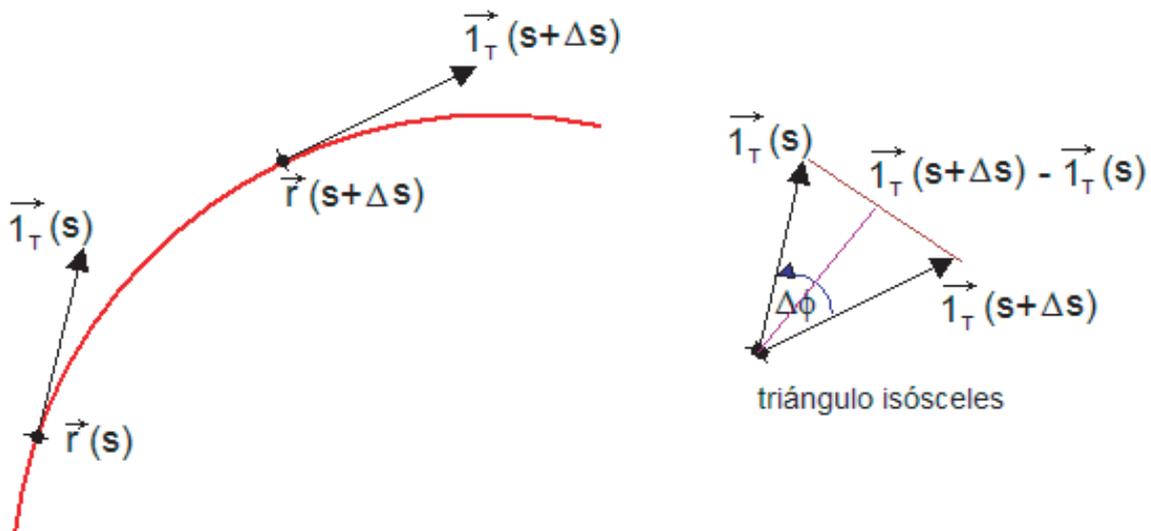


Figura 1.8: Vectores tangente unitarios en dos puntos vecinos de una curva y definición del ángulo de contingencia.

$$\kappa = \left| \frac{d\vec{1}_T}{ds} \right| = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{1}_T(s + \Delta s) - \vec{1}_T(s)}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|,$$

donde $\Delta\varphi$ es el llamado *ángulo de contingencia*. Este resultado muestra que la curvatura mide la rapidez de variación de la dirección de la tangente respecto de la longitud de arco.

Ejemplo: En un plano cartesiano, una curva está descrita por la función $y = f(x)$. Hallar una expresión para la curvatura y luego aplicar para la función parabólica $y^2 = 4ax$.

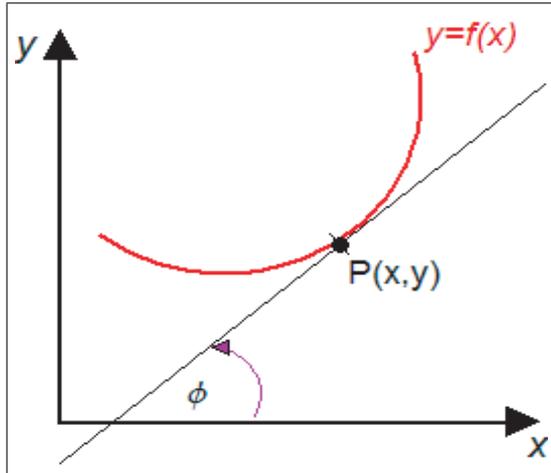


Figura 1.9: Determinación de la curvatura para una curva $y = f(x)$.

Para determinar la curvatura, se parte de $\kappa = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$. Por otro lado, se puede escribir $\left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \frac{\left| \frac{d\varphi}{dx} \right|}{\left| \frac{ds}{dx} \right|}$. Se tienen además: $\tan \varphi = \frac{dy}{dx}$ y también $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$. Con lo anterior, se tiene:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

lo que permite escribir finalmente para la curvatura:

$$\kappa = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \frac{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Aplicando la anterior ecuación para la parábola $y^2 = 4ax$, se halla que la curvatura es:

$$\kappa = \frac{a^2}{2(ax + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1.4.8. Torsión

Si $\vec{r} = \vec{r}(s)$ es una curva regular de clase $\mathcal{C}^{n \geq 3}$ y si a todo lo largo de ella $\vec{1}_N(s)$ es de clase \mathcal{C}^1 . En ese caso, se puede hacer la derivada del versor binormal:

$$\frac{d}{ds} \vec{1}_B(s) = \frac{d}{ds} \left[\vec{1}_T(s) \wedge \vec{1}_N(s) \right],$$

lo que da:

$$\frac{d\vec{1}_B}{ds} = \vec{1}_T \wedge \frac{d\vec{1}_N}{ds}. \tag{1.14}$$

Se debe señalar que $\frac{d\vec{1}_N}{ds}$ es ortogonal a $\vec{1}_N$ y, por ende, paralelo al plano rectificante. Es así que $\frac{d\vec{1}_N}{ds}$ puede escribirse como combinación lineal de $\vec{1}_T$ y $\vec{1}_B$:

$$\frac{d\vec{1}_N}{ds} = \mu(s)\vec{1}_T + \tau(s)\vec{1}_B.$$

Reemplazando la anterior expresión en (1.14), se halla que:

$$\frac{d\mathbf{1}_B}{ds} = -\tau(s)\mathbf{1}_N.$$

Haciendo el producto escalar por $\mathbf{1}_N$ en ambos miembros, se encuentra finalmente que:

$$\tau(s) = -\frac{d\mathbf{1}_B}{ds} \cdot \mathbf{1}_N \quad (\text{segunda curvatura o torsión de } C \text{ en } \vec{r} = \vec{r}(s)).$$

Por lo que se pueden escribir las *propiedades intrínsecas* de una curva:

$$\kappa = \frac{d\mathbf{1}_T}{ds} \cdot \mathbf{1}_N \quad ; \quad \tau = -\frac{d\mathbf{1}_B}{ds} \cdot \mathbf{1}_N.$$

Usualmente, la torsión se expresa mediante:

$$\tau = \frac{\left[\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} \frac{d^3\vec{r}}{d\lambda^3} \right]}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} \right|^2} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \cdot \left(\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} \wedge \frac{d^3\vec{r}}{d\lambda^3} \right)}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} \right|^2}. \quad (1.15)$$

Para demostrar (1.15), se deben hallar las expresiones de las derivadas primera, segunda y tercera de $\vec{r}(s)$ con respecto a s y considerando el parámetro λ . Así, se tendrá:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{ds} &= \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{ds}, \\ \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} &= \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \left(\frac{d^2\lambda}{ds^2} \right) + \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2, \\ \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} &= \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \left(\frac{d^3\lambda}{ds^3} \right) + 3 \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} \left(\frac{d\lambda}{ds} \right) \left(\frac{d^2\lambda}{ds^2} \right) + \frac{d^3\vec{r}}{d\lambda^3} \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^3. \end{aligned}$$

Con estas derivadas, se debe hacer el *triple producto escalar* que nos da:

$$\left[\frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right] = \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^6 \left[\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} \frac{d^3\vec{r}}{d\lambda^3} \right].$$

Recordando que $\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{d\lambda}} = \frac{1}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right|}$, entonces:

$$\left[\frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right] = \frac{\left[\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} \frac{d^3\vec{r}}{d\lambda^3} \right]}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right|^6}. \quad (1.16)$$

Además, como la curvatura está dada por (1.13), se puede escribir:

$$\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right|^6 = \frac{\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} \right|^2}{\kappa^2},$$

lo que permite reescribir (1.16) como:

$$\left[\frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right] = \frac{\kappa^2 \left[\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} \frac{d^3\vec{r}}{d\lambda^3} \right]}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} \right|^2}. \quad (1.17)$$

Por otro lado, las derivadas de \vec{r} con respecto de s , en términos de los vectores unitarios están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{ds} &= \vec{1}_T, \\ \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} &= \frac{d\vec{1}_T}{ds} = \kappa \vec{1}_N, \\ \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} &= -\kappa^2 \vec{1}_T + \frac{d\kappa}{ds} \vec{1}_N + \kappa \tau \vec{1}_B. \end{aligned}$$

Por consiguiente, el triple producto escalar de estas derivadas nos permite hallar:

$$\left[\frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right] = \kappa^2 \tau,$$

que reemplazando en (1.17), da (1.15). Una consecuencia importante es que si $\tau = 0$, entonces, se tiene una curva plana.

Ejemplo: Verificar si la curva $\vec{r} = \lambda \vec{1}_1 + \frac{\lambda+1}{\lambda} \vec{1}_2 + \frac{1-\lambda^2}{\lambda} \vec{1}_3$, está completamente contenida en un plano.

Si la curva se halla contenida completamente en un plano, se debe cumplir que $\tau = 0$. Para la verificación, se procede a hallar las derivadas de \vec{r} con respecto al parámetro λ :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{d\lambda} &= \vec{1}_1 - \frac{1}{\lambda^2} \vec{1}_2 - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2} \vec{1}_3, \\ \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} &= \frac{2}{\lambda^3} (\vec{1}_2 + \vec{1}_3), \\ \frac{d^3\vec{r}}{d\lambda^3} &= -\frac{6}{\lambda^4} (\vec{1}_2 + \vec{1}_3). \end{aligned}$$

Por lo que el triple producto escalar $\left[\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} \frac{d^3\vec{r}}{d\lambda^3} \right] = 0$, lo que implica que $\tau = 0$ y por lo tanto, la curva está completamente contenida en un plano.

1.4.9. Fórmulas de Frenet-Serret

En §1.4.7 y §1.4.8, se encontraron relaciones en las cuales estaban involucradas las derivadas de los vectores unitarios tangente y binormal con respecto a la longitud de arco. En el primer caso, aparecía la curvatura y en el segundo caso la torsión. Sin embargo, no se encontró hasta el momento la derivada del versor normal con respecto a la longitud de arco; para ello, se parte de $\vec{1}_N = \vec{1}_B \wedge \vec{1}_T$, por lo que tomando en cuenta las expresiones para las derivadas de los versores tangente y binormal con respecto a s , la derivada del vector unitario normal con respecto al parámetro natural s es:

$$\frac{d\vec{1}_N}{ds} = -\kappa\vec{1}_T + \tau\vec{1}_B.$$

En síntesis, se pueden escribir las derivadas de todos los vectores unitarios con respecto a la longitud de arco, lo que se conoce como las *fórmulas de Frenet-Serret*:

$$\frac{d\vec{1}_T}{ds} = \kappa\vec{1}_N, \quad (1.18)$$

$$\frac{d\vec{1}_N}{ds} = -\kappa\vec{1}_T + \tau\vec{1}_B, \quad (1.19)$$

$$\frac{d\vec{1}_B}{ds} = -\tau\vec{1}_N. \quad (1.20)$$

Estas fórmulas pueden escribirse también en la forma:

$$\frac{d\vec{1}_i}{ds} = \mathcal{F}_i^j \vec{1}_j,$$

es decir, en términos matriciales:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{1}_T}{ds} \\ \frac{d\vec{1}_N}{ds} \\ \frac{d\vec{1}_B}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{1}_T \\ \vec{1}_N \\ \vec{1}_B \end{pmatrix}.$$

1.5. Elementos de análisis vectorial

El análisis vectorial es esencial en el estudio de la Física puesto que muchas de las magnitudes involucradas en la descripción de fenómenos tienen justamente un carácter vectorial (cantidades con magnitud y dirección). Históricamente hablando, las primeras cantidades vectoriales que

aparecieron en la Física son justamente cantidades mecánicas tales como el *desplazamiento*, la *velocidad*, la *aceleración*, la *fuerza*, los *momentos lineal y angular*, etc. Sin embargo, en el desarrollo histórico de la mecánica no se utilizó explícitamente el análisis vectorial y fue recién en los trabajos de Maxwell sobre el electromagnetismo que la utilización del análisis vectorial cobró importancia. Antes de comenzar la descripción de las operaciones vectoriales se revisarán algunos conceptos importantes ligados con el análisis vectorial.

1.5.1. Función de punto

Una función $\varphi(x^i) = \varphi(x^1, x^2, x^3)$ definida en una región, se llama una *función de punto o escalar*. Los puntos en esa región del espacio están determinados por sus coordenadas x^i .

Otro concepto importante es el de *campo*, que se define como una función de punto en \mathbb{R}^n (en particular en una región \mathfrak{R} de \mathbb{R}^3). Un campo puede ser escalar, vectorial o tensorial, dependiendo de la naturaleza matemática de la función que lo define. Especifiquemos brevemente cada uno de estos campos.

1.5.1.a. Campo escalar

En este caso, simplemente una función de punto define un *campo escalar*, puesto que a cada punto le hace corresponder un escalar, que es el valor que toma la función en el mismo. Ejemplos de este tipo de campo son: un campo de temperaturas, un campo de densidades, etc.

1.5.1.b. Campo vectorial

Para la definición de este tipo de campo, consideremos un vector \vec{A} cuyas componentes A^i sean funciones de las coordenadas x^j ($A^i = A^i(x^j)$), definidas en cierta región del espacio. Se tiene entonces, para cada punto P de la región considerada, un vector \vec{A} . El conjunto de vectores así definidos, se denomina un *campo vectorial*. Como ejemplo de estos campos se pueden citar a un campo de velocidades, un campo de fuerzas, etc.

1.5.1.c. Campo tensorial

Similarmente a cómo se definió un campo vectorial, se puede decir que la función que a cada punto P de la región le hace corresponder el tensor

T^{ab} , se denomina *campo de tensores*, ejemplos de los cuales son el tensor de esfuerzos, el tensor de Maxwell, etc.

De manera más compacta, se pueden definir los campos mencionados anteriormente si se considera una base $\{\vec{e}_a\}$, tal que el tensor métrico está dado en la forma usual por $g_{ab} = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b$. Además, si cualquier punto del espacio puede ser descrito mediante $\vec{x} = x^a \vec{e}_a$, entonces se tendrá:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(\vec{x}) & : & \text{campo escalar} \\ v^a &= v^a(\vec{x}) & : & \text{campo vectorial} \\ T^{ab} &= T^{ab}(\vec{x}) & : & \text{campo tensorial,} \end{aligned}$$

donde $\vec{x} = \vec{r}$ representa el vector de posición.

1.5.2. Operaciones vectoriales

Como se señaló anteriormente, en la Física se recurre frecuentemente al análisis vectorial y tensorial pues las magnitudes que sirven para la descripción de los fenómenos relevantes a esta ciencia tienen justamente este carácter. Con los conceptos dados en §1.5.1.a, §1.5.1.b y §1.5.1.c, se pueden ya definir las operaciones más relevantes concernientes a estos campos: gradiente, divergencia y rotacional, pero previo a ello se introducirá un operador que aparece en todas estas operaciones.

1.5.2.a. Operador nabla

Este operador es utilizado con mucha frecuencia tanto en análisis vectorial como tensorial y se lo define como el vector:

$$\vec{\partial} \equiv \vec{\nabla} \equiv \nabla = \vec{e}_a \partial^a,$$

donde se definen los vectores:

$$\partial_a = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \quad ; \quad \partial^a = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Así, se puede escribir:

$$\partial_a = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b \partial^b = g_{ab} \partial^b.$$

Por lo que en coordenadas cartesianas:

$$\partial = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{1}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{1}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{1}_z.$$

1.5.2.b. Gradiente

Se llama *gradiente* de un campo escalar Φ , al vector:

$$\text{grad } \Phi = \partial\Phi = \nabla\Phi = \vec{e}_a \partial^a \Phi. \tag{1.21}$$

Por otra parte, se puede escribir:

$$\partial_b \Phi = \vec{e}_b \cdot \vec{e}_a \partial^a \Phi \quad \Rightarrow \quad \partial_b \Phi = g_{ab} \partial^a \Phi,$$

con

$$\partial_b \Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial\Phi}{\partial x^n} \right).$$

Por lo que en *coordenadas cartesianas*:

$$\text{grad } \Phi = \partial\Phi = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \vec{1}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \vec{1}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \vec{1}_z.$$

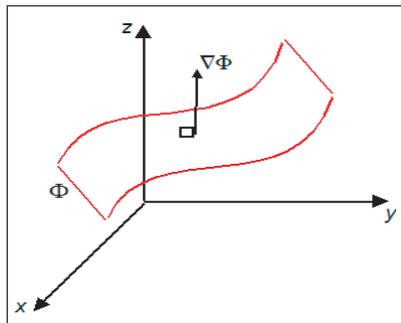


Figura 1.10: Definición gráfica del gradiente.

También $d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\vec{r}$, ya que

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz.$$

Si $\Phi = \text{constante}$ (superficie en \mathbb{R}), luego

$$\nabla\Phi \cdot d\vec{r} = 0,$$

lo que implica que $\nabla\Phi$ es normal a la superficie.

Ejemplo: Hallar el diferencial del vector

$$\vec{F} = \vec{F}(x^i(t), t).$$

La derivada de \vec{F} respecto del tiempo es:

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial\vec{F}}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial\vec{F}}{\partial t},$$

que se puede escribir como

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \nabla \right) \vec{F},$$

por lo que el diferencial de \vec{F} será:

$$d\vec{F} = (d\vec{r} \cdot \nabla) \vec{F} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} dt.$$

Como se indicó anteriormente, ∇ puede ser utilizado también para definir operaciones sobre campos vectoriales. En efecto, sea $\vec{f}(\vec{r})$ un campo vectorial, entonces tanto las operaciones divergencia y rotacional pueden ser definidas para este campo.

1.5.2.c. Divergencia

Esta operación se define como:

$$\operatorname{div} \vec{f} = \partial \cdot \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f}. \quad (1.22)$$

Por lo que en coordenadas cartesianas se tendrá:

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Si \vec{r} es el vector de posición, entonces:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{r} = 3}$$

Ejemplo: Sea $f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, determinar $\nabla \cdot \vec{r}f(r)$. Aplicar el resultado para $f(r) = r^{n-1}$.

A partir de la definición de divergencia;

$$\nabla \cdot \vec{r}f(r) = \partial_x [xf(r)] + \partial_y [yf(r)] + \partial_z [zf(r)],$$

lo que después de cálculos simples da

$$\nabla \cdot \vec{r}f(r) = 3f(r) + r \frac{df}{dr}.$$

Aplicando el resultado a $f(r) = r^{n-1}$, se obtiene:

$$\nabla \cdot \vec{r}r^{n-1} = (n+2)r^{n-1}.$$

1.5.2.d. Rotacional

La operación *rotacional* está definida por:

$$\text{rot } \vec{f} = \partial \wedge \vec{f} = \nabla \wedge \vec{f}, \quad (1.23)$$

lo que en coordenadas cartesianas da:

$$\nabla \wedge \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}.$$

Antes de generalizar las anteriores operaciones vectoriales a sistemas de coordenadas curvilíneas, definiremos un otro operador importante que es el *operador laplaciano*.

1.5.2.e. El operador laplaciano

Definido por:

$$\partial_a \partial^a \equiv \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x^{1\ 2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{2\ 2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{3\ 2}}. \quad (1.24)$$

Por lo que en coordenadas cartesianas, el operador laplaciano toma la forma:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

1.5.2.f. Operaciones vectoriales en coordenadas curvilíneas

Es evidente que el operador ∇ y las operaciones asociadas a él, pueden expresarse en otros sistemas de coordenadas (coordenadas curvilíneas). Así, si se tiene la transformación:

$$x^i \longrightarrow x'^i,$$

el *gradiente* en el nuevo sistema será:

$$\nabla \Phi = f^i \vec{1}'_i = f^1 \vec{1}'_1 + f^2 \vec{1}'_2 + f^3 \vec{1}'_3,$$

donde f^i son coeficientes que se deben determinar. Por otro lado, el vector desplazamiento se expresa en la forma:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x'^i} dx'^i = (h\vec{1}')_i dx'^i.$$

Además, como:

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\vec{r} = h_i (f dx')^i$$

y

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x'^i} dx'^i,$$

por lo que

$$f^i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial\Phi}{\partial x'^i}.$$

Consiguientemente,

$$\nabla\Phi = \left(\frac{1}{h} \frac{\partial\Phi}{\partial x'} \right)^i \vec{1}'_i.$$

Desarrollando la anterior expresión, se tendrá el *gradiente en coordenadas curvilíneas*:

$$\nabla\Phi = \frac{\vec{1}'_1}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial x'^1} + \frac{\vec{1}'_2}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial x'^2} + \frac{\vec{1}'_3}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial x'^3}. \quad (1.25)$$

Deduciéndose así que el *operador* ∇ *en coordenadas curvilíneas* es:

$$\nabla = \frac{\vec{1}'_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x'^1} + \frac{\vec{1}'_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial x'^2} + \frac{\vec{1}'_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial x'^3}.$$

Ahora, si $\Phi = x'^i$ (cualquiera de las coordenadas), entonces:

$$\nabla x'^i = \frac{\vec{1}'_i}{h_i}.$$

Luego, el producto escalar:

$$\nabla x'^i \wedge \nabla x'^j = \frac{\vec{1}'_i \wedge \vec{1}'_j}{h_i h_j} = \frac{\vec{1}'_k}{h_i h_j},$$

por lo que

$$\vec{1}'_k = h_i h_j \nabla x'^i \wedge \nabla x'^j.$$

De una manera más general:

$$\vec{1}'_i = \epsilon^{ijk} h_j h_k \nabla x'^j \wedge \nabla x'^k,$$

donde

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & ; \text{ permutacion ciclica} & ; & i \neq j \neq k \\ -1 & ; \text{ permutacion aciclica} & ; & i \neq j \neq k \\ 0 & ; & i = j = k & ; \text{ todos los otros casos} \end{cases},$$

es el denominado *símbolo tridimensional de Levi-Civita*.

Para hallar la divergencia en un sistema coordenadas curvilíneas cualquiera, definamos un vector $\vec{A} = A^i \vec{1}'_i$, por lo que

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot \left[A^i \left(\epsilon^{ijk} h_j h_k \nabla x'^j \wedge \nabla x'^k \right) \right],$$

para $i = 1$, se puede escribir:

$$\nabla \cdot (A^1 \vec{1}'_1) = \nabla \cdot (A^1 h_2 h_3 \nabla x'^2 \wedge \nabla x'^3).$$

Utilizando el hecho de que para un campo escalar Φ y un vector \vec{A} , se cumple $\nabla \cdot (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \cdot \vec{A} + \Phi (\nabla \cdot \vec{A})$; entonces, luego de operaciones simples, se encuentra

$$\nabla \cdot (A^1 \vec{1}'_1) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x'^1} (A^1 h_2 h_3).$$

Análogamente, para las otras componentes, se tiene:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (A^2 \vec{1}'_2) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x'^2} (A^2 h_3 h_1) \\ \nabla \cdot (A^3 \vec{1}'_3) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x'^3} (A^3 h_1 h_2). \end{aligned}$$

En base a las anteriores expresiones, se puede escribir;

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (A^1 \vec{1}'_1) + \nabla \cdot (A^2 \vec{1}'_2) + \nabla \cdot (A^3 \vec{1}'_3),$$

de donde, la *divergencia en coordenadas curvilíneas* de un vector \vec{A} es:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x'^1} (A^1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial x'^2} (A^2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial x'^3} (A^3 h_1 h_2) \right]. \quad (1.26)$$

Ahora, si se escribe el producto vectorial:

$$\nabla \wedge \vec{A} = \nabla \wedge \left[A^i \left(\epsilon^{ijk} h_j h_k \nabla x'^j \wedge \nabla x'^k \right) \right].$$

Así, para $i = 1$ y teniendo en cuenta que para un campo vectorial Φ y un vector \vec{A} , se cumple $\nabla \wedge (\Phi \vec{A}) = (\nabla \Phi) \wedge \vec{A} + \Phi (\nabla \wedge \vec{A})$ y $\nabla \wedge (\nabla \Phi) = \vec{0}$, se tendrá:

$$\nabla \wedge (A^1 \vec{1}'_1) = \frac{\vec{1}'_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial x'^3} (A^1 h_1) - \frac{\vec{1}'_3}{h_2 h_1} \frac{\partial}{\partial x'^2} (A^1 h_1).$$

Análogamente, para las otras dos componentes:

$$\begin{aligned}\nabla \wedge (A^2 \vec{1}_2) &= \frac{\vec{1}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial x'^1} (A^2 h_2) - \frac{\vec{1}_1}{h_3 h_2} \frac{\partial}{\partial x'^3} (A^2 h_2) \\ \nabla \wedge (A^3 \vec{1}_3) &= \frac{\vec{1}_1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x'^2} (A^3 h_3) - \frac{\vec{1}_2}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial x'^1} (A^3 h_3).\end{aligned}$$

Por lo que el *rotacional en coordenadas curvilíneas* en su forma más compacta estará dado por:

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{1}_1 & h_2 \vec{1}_2 & h_3 \vec{1}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x'^1} & \frac{\partial}{\partial x'^2} & \frac{\partial}{\partial x'^3} \\ A^1 h_1 & A^2 h_2 & A^3 h_3 \end{vmatrix}. \quad (1.27)$$

Finalmente, utilizando (1.26) y considerando que $\vec{A} = \nabla \Phi$, se encuentra que el *laplaciano en coordenadas curvilíneas* es:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x'^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x'^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x'^2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x'^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x'^3} \right) \right]. \quad (1.28)$$

Con las expresiones (1.25)–(1.28), se pueden escribir el gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano para los sistemas de coordenadas que se estudiaron en §1.3, a saber: coordenadas cilíndricas y esféricas.

Coordenadas cilíndricas. Utilizando los valores de los factores de escala $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$ y el respectivo conjunto de coordenadas $(x'^1, x'^2, x'^3) = (\rho, \phi, z)$ y considerando un campo escalar $\Phi = \Phi(\rho, \phi, z)$ y otro vectorial $\vec{A} = (A_\rho, A_\phi, A_z)$, se hallan las operaciones vectoriales:

Gradiente. De (1.25),

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \vec{1}_\rho + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \vec{1}_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{1}_z.$$

Divergencia. A partir de (1.26),

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left[A_\rho + \rho \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \rho \frac{\partial A_z}{\partial z} \right].$$

Rotacional. Con (1.27),

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{1}_\rho + \rho \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{1}_\phi + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{1}_z \right].$$

Laplaciano. De (1.28),

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

Coordenadas esféricas. en este sistema, los factores de escala son $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = \rho \sin\theta$ y el conjunto de coordenadas $(x^1, x^2, x^3) = (\rho, \theta, \phi)$ y considerando $\Phi = \Phi(\rho, \theta, \phi)$ y $\vec{A} = (A_\rho, A_\theta, A_\phi)$ como campo escalar y vectorial respectivamente, se tendrá para las operaciones vectoriales:

Gradiente.

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \vec{1}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \vec{1}_\theta + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \vec{1}_\phi.$$

Divergencia.

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho^2 A_\rho) + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}.$$

Rotacional.

$$\nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\rho \sin\theta A_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi} (\rho A_\theta) \right] \vec{1}_\rho + \rho \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho \sin\theta A_\phi) \right] \vec{1}_\theta + \rho \sin\theta \left[\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta} \right] \vec{1}_\phi \right\}.$$

Laplaciano.

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho^2 \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}.$$

A partir de las siguientes identidades para un campo vectorial \vec{f} :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \wedge \vec{f} &= 0 \\ \nabla \wedge (\nabla\Phi) &= \vec{0}, \end{aligned}$$

se pueden deducir dos conceptos que son de fundamental importancia en Física:

1.5.3. Campo solenoidal

Cuando $\nabla \cdot \vec{f} = 0$, se debe tener

$$\vec{f} = \nabla \wedge \vec{g}, \quad (1.29)$$

donde \vec{g} es otro campo vectorial. Este tipo de campo se denomina *solenoidal*. Para aclarar mejor el concepto de campo solenoidal, especifiquemos los campos \vec{f} y \vec{g} tales que,

$$\begin{aligned} \vec{f} &= f_1 \vec{1}_x + f_2 \vec{1}_y + f_3 \vec{1}_z \\ \vec{g} &= g_1 \vec{1}_x + g_2 \vec{1}_y + g_3 \vec{1}_z, \end{aligned}$$

y de los cuales se quiere determinar \vec{g} . Calculando el rotacional de \vec{g} y utilizando (1.29), se tiene que:

$$\begin{aligned} f_1 &= g_{3y} - g_{2z} \\ f_2 &= g_{1z} - g_{3x} \\ f_3 &= g_{2x} - g_{1y}. \end{aligned}$$

Además, como $\nabla \cdot \vec{f} = 0$, se tendrá $f_{1x} + f_{2y} + f_{3z} = 0$. Para hallar una solución particular, se hace $g_1 = 0$, en consecuencia $f_2 = -g_{3x}$ y $f_3 = g_{2x}$, por lo que

$$\begin{aligned} g_2 &= \int_{x_0}^x f_3 dx + \alpha_2(y, z) \\ g_3 &= - \int_{x_0}^x f_2 dx + \alpha_3(y, z), \end{aligned}$$

pero $f_1 = g_{3y} - g_{2z}$. Entonces

$$f_1 = \alpha_{3y} - \alpha_{2z} - \int_{x_0}^x (f_{2y} + f_{3z}) dx,$$

con lo que

$$f_1 = \alpha_{3y} - \alpha_{2z} + \int_{x_0}^x f_{1x}(x, y, z) dx;$$

lo que finalmente da

$$f_1 = \alpha_{3y} - \alpha_{2z} + f_1(x, y, z) - f_1(x_0, y, z).$$

La anterior ecuación se satisface tomando $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = \int_{y_0}^y f_1(x_0, y, z) dy$. Por tanto, las componentes de \vec{g} son:

$$\begin{aligned} g_1 &= 0 \\ g_2 &= \int_{x_0}^x f_3(x, y, z) dx \\ g_3 &= - \int_{x_0}^x f_2(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y f_1(x_0, y, z) dy. \end{aligned}$$

1.5.4. Campo irrotacional

Por las propiedades de las operaciones vectoriales, se sabe que cuando $\nabla \wedge \vec{f} = \vec{0}$ en \mathbb{R}^3 , se debe tener que $\vec{f} = \nabla\Phi$, donde Φ es un campo escalar. Este tipo de campo vectorial se denomina *irrotacional* o *conservativo*.

Una integral de línea del tipo:

$$I = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r},$$

depende en general de la trayectoria. El conocimiento de que \vec{f} es irrotacional es importante pues en este caso, I no depende de la trayectoria, además que puede ser integrada directamente:

$$I = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \nabla\Phi \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1).$$

Cuando se tienen campos irrotacionales, se trata de encontrar el campo escalar Φ . Como $\vec{f} = \nabla\Phi$. Entonces, haciendo el producto escalar por el vector desplazamiento e integrando, se tiene:

$$\Phi = \int \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int f_1 dx + \int f_2 dy + \int f_3 dz + \text{cte},$$

que en rigor debiera escribirse como:

$$\Phi = \int_{x_0}^x f_1(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y f_2(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z f_3(x_0, y_0, z) dz.$$

Ejemplo: Determinar la naturaleza del campo

$$\vec{f} = x^2 y \vec{1}_x - (xy^2 + y) \vec{1}_y + z \vec{1}_z.$$

Como $\nabla \cdot \vec{f} = 0$, entonces se tiene un *campo solenoidal*, por lo que $\vec{f} = \nabla \wedge \vec{g}$. Por tanto las componentes de \vec{g} con $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ serán:

$$\begin{aligned} g_1 &= 0 \\ g_2 &= \int_0^x f_3 dx = xz \\ g_3 &= - \int_0^x f_2 dx + \int_0^y f_1 dy = xy + \frac{x^2 y^2}{2}, \end{aligned}$$

por lo que \vec{g} puede escribirse como:

$$\vec{g} = xz \vec{1}_y + \left(xy + \frac{x^2 y^2}{2} \right) \vec{1}_z + \text{cte.}$$

Ejemplo: Determinar la naturaleza del campo vectorial

$$\vec{f} = \sin y \sin z \vec{1}_x + x \cos y \sin z \vec{1}_y + x \sin y \cos z \vec{1}_z.$$

Ya que $\nabla \cdot \vec{f} = -2x \sin y \sin z \neq 0$, entonces, el campo no es solenoidal y se debe verificar si el mismo es irrotacional:

$$\nabla \wedge \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \sin y \sin z & x \cos y \sin z & x \sin y \cos z \end{vmatrix} = \vec{0},$$

por lo que \vec{f} representa un *campo irrotacional*. Para la determinación del campo escalar Φ , se considera $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, con lo que haciendo las integrales correspondientes, se halla:

$$\Phi = x \sin y \sin z + \text{cte.}$$

1.5.5. Dinámica vectorial

En las subsecciones precedentes, se dieron las bases del cálculo vectorial y se dio énfasis en lo que concierne a operaciones vectoriales. Sin embargo, recién en §1.5.3 y §1.5.4 estas operaciones vectoriales nos conducen intuitivamente a conceptos físicos. Se concluirá este capítulo revisando los conceptos fundamentales de vectores e indicando su pertinencia en la dinámica.

1.5.5.a. Vectores

Por definición, un *vector* es un elemento que pertenece a un *campo vectorial*, es decir, a una estructura matemática compuesta de un grupo de elementos $\mathcal{V} = \{v_1, \dots\}$ y un *campo de números* que puede ser complejo o real. Se pueden nombrar las siguientes propiedades:

- i) $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}; v_1 + v_2 \in \mathcal{V}$ (propiedad de grupo).
- ii) $\forall v \in \mathcal{V}; \alpha v \in \mathcal{V}$ (multiplicación por un escalar).
- iii) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$ (distributividad respecto al producto por un escalar).
- iv) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (distributividad respecto a la suma de dos escalares).

Un vector se caracteriza por su *ley de transformación*. Así, si se tiene un conjunto de coordenadas x^1, x^2, x^3 . Si se hace un cambio del sistema $\{x\}$ al $\{x'\}$ mediante las ecuaciones

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3) = x'^i(x^j),$$

entonces, la matriz de transformación $J_j^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$ define el cambio de sistema.

Se vio anteriormente transformaciones de vectores tales como la posición, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración; esto nos lleva a la *dinámica vectorial* que suponemos que es válida globalmente con la condición de que solo observadores inerciales puedan efectuar la verificación de las leyes fundamentales. Estos observadores se relacionan con otros únicamente mediante transformaciones lineales que son las denominadas *transformaciones de Galileo*. Por lo anterior, se tiene que la dinámica para un sistema físico (colección de partículas) se puede formular en *notación vectorial*.

Concluimos el capítulo introductorio que tocó los temas más relevantes de matemática que serán útiles a lo largo del curso.