Capítulo 2

Mecánica de la partícula

La Física es una ciencia exacta puesto que sus leyes están expresadas en forma matemática. Se puede enumerar algunas características de la Física como ciencia:

- Estudia las formas más generales del movimiento de la materia y sus transformaciones mutuas.
- Es una ciencia cuantitativa.
- Para ella es de gran interés las relaciones métricas entre las diversas magnitudes que caracterizan a los fenómenos en la naturaleza.
- Manifiestamente se tiene necesidad de medir magnitudes.

Este curso está dedicado a la **Mecánica** y si se quiere dar una definición de la misma, se puede decir que *es una disciplina de la Física que tiene como objeto estudiar los movimientos de los cuerpos materiales*. Es decir, se podría catalogar a la Mecánica como la *teoría del movimiento*.

El objetivo de un físico es poder describir y darles una *realidad física* a los fenómenos que se dan en el universo. Para la realización de estos dos aspectos, el físico debe construir modelos matemáticos que además le permitan hacer predicciones acerca de los fenómenos objeto de su estudio. Los modelos matemáticos deben emular a los sistemas físicos en consideración. Aunque el hecho de hacer predicciones no implique necesariamente el haber comprendido de manera cabal un determinado fenómeno, esto es importante para un físico en situaciones en las que la resolución analítica de las ecuaciones salidas de los modelos no sean fáciles y se deba recurrir a la *simulación*.

2.1. Conceptos elementales de Mecánica

A continuación, se recapitularán algunos conceptos que son esenciales en Mecánica, a saber:

Sistema físico: Es una porción del universo sometida a estudio. Podemos asociar a un sistema físico con una colección de partículas. Hablar de sistema físico es equivalente a referirse al objeto físico en cuestión.

Partícula: Puede considerarse como un *punto material*. En la mecánica elemental, se puede asociar a un cuerpo cualquiera el movimiento de una partícula o punto, sin tener en cuenta las dimensiones del cuerpo. El concepto de partícula está asociado con el de punto material, al cual se le puede asociar una masa o una carga.

Sistema de coordenadas: Es un sistema que sirve para indicar las posiciones de las partículas en el espacio.

Sistema de referencia: Es un sistema de coordenadas definido en el espacio real $\mathbb{R}^3$, respecto del cual se describe el *movimiento* de un cuerpo físico. Como se mencionó en §1.3, un *sistema de referencia* está dado por el *objeto físico* y el *sistema de coordenadas*.

Prácticamente, cualquier problema de *Dinámica Clásica* es un caso especial de uno de los tipos generales siguientes:

(i) Partiendo de unas fuerzas dadas que actúan sobre un sistema de masas; además, conocidas las restricciones, la posición y velocidad de cada una de las masas en un instante determinado, se requiere hallar el *movimiento* del sistema, es decir, la *posición*, la *velocidad* y la *aceleración* de cada una de las masas en función del tiempo.

(ii) Partiendo de unos movimientos dados para un sistema, se requiere hallar un posible conjunto de fuerzas que produciría tales movimientos. En general, algunas o todas las fuerzas pueden variar con el tiempo, lo que conduce al concepto de *ecuaciones de movimiento*

Ecuaciones de movimiento: Son las relaciones entre las posiciones, velocidades y aceleraciones que permiten determinar el *estado mecánico* del sistema en un instante dado y prevén su comportamiento en instantes siguientes.

Estado mecánico o de movimiento: Estado caracterizado por las *variables dinámicas* específicas que toma el sistema físico.

Variables dinámicas: Son todas aquellas variables que caracterizan el movimiento de un sistema físico, tales como:

- La masa m que se define como la resistencia que ofrece un cuerpo a cambiar su estado de movimiento.
- Las variables cinemáticas posición $\vec{r}$, la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$.
- La fuerza $\vec{F}$ que es el agente que produce cambios en el estado de movimiento de un sistema físico.
- Si bien el estado de movimiento depende del tiempo, éste no es una variable dinámica y simplemente juega el rol de parámetro en Mecánica Clásica.

Partícula libre: Sistema físico que no interactúa con ningún otro cuerpo.

Sistema de referencia inercial: Sistema de referencia en el cual, la forma más sencilla de movimiento es la de *partícula libre*. Sea el sistema físico compuesto por una partícula sobre la cual actúan solamente *fuerzas externas*; lo que equivale a decir que la descripción se hace respecto a un sistema inercial de referencia.

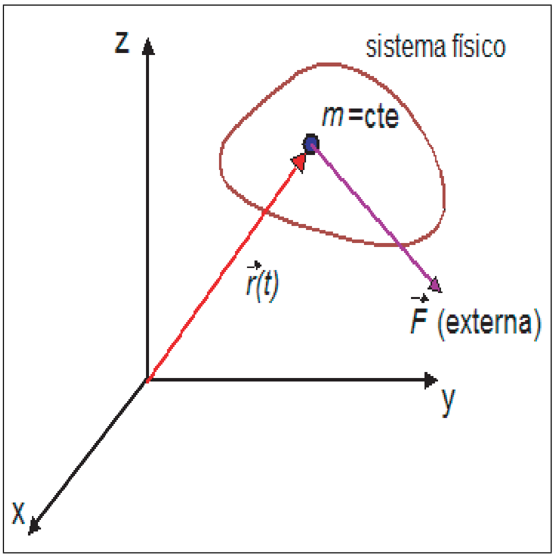

Figura 2.1: Representación de un sistema de referencia inercial.

Fuerzas reales o físicas: Persisten frente a transformación de coordenadas.

Fuerzas inerciales o pseudofuerzas: Se anulan en sistemas inerciales.

Algunas variables dinámicas en coordenadas cartesianas:

Vector de posición $\vec{r}(t) = x(t)\vec{1_x} + y(t)\vec{1_y} + z(t)\vec{1_z}$.

Vector velocidad $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{1_x} + \dot{y}\vec{1_y} + \dot{z}\vec{1_z}$.

Vector aceleración $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{1_x} + \ddot{y}\vec{1_y} + \ddot{z}\vec{1_z}$.

Vector momento lineal $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{x}\vec{1_x} + m\dot{y}\vec{1_y} + m\dot{z}\vec{1_z}$.

2.2. Leyes de Newton

Las leyes de Newton son consideradas como los axiomas de la Mecánica y cada una de ellas es independiente la una de la otra. Se las formula de la siguiente forma:

Primera ley: Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que se vea obligado a alterar este estado por fuerzas aplicadas a él

$$\vec{F} = \vec{0}.$$

Segunda ley: La variación del momento lineal con el tiempo es proporcional a la fuerza aplicada, y su dirección es la de esta fuerza

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Tercera ley: A cada acción, se opone siempre una reacción igual y en sentido contrario

$$\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}.$$

Esta ley no se aplica para el caso de una sola partícula.

2.2.1. Condiciones de validez de las leyes de Newton

Hasta principios del siglo XX se creía que la mecánica newtoniana describía completamente el movimiento de todos los cuerpos en el universo. Sin embargo, con la aparición de la Teoría Especial de la Relatividad (TER), la Teoría General de la Relatividad (TGR) y la Mecánica Cuántica (MC), se vio que la mecánica newtoniana sólo se aplicaba bajo ciertas condiciones que pasamos a enumerar:

(i) Elección de un sistema inercial de referencia.

(ii) La masa m debe ser constante. Por otro lado, la velocidad de las masas del sistema deben ser muy inferiores a la de la luz. En caso contrario, la descripción se hace utilizando la TER:

$$K_\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(m u_\mu\right),$$

donde K_μ es la tetrafuerza, τ es el tiempo propio y u_μ es la tetravelocidad.

(iii) Las masas del sistema deben ser grandes en comparación con las de los átomos y las de las partículas atómicas; caso contrario, se entra en el dominio de la MC.

(iv) En el caso de que ciertas masas del sistema sean muy grandes, o se consideren intervalos de tiempo muy largos (del orden de siglos); o en problemas que abarquen estas dos condiciones, la TGR concuerda mejor con la experiencia que la mecánica newtoniana. Un ejemplo es el cálculo de la precesión del perihelio de la órbita de Mercurio, en el que se debe utilizar la TGR.

2.2.2. Sistemas rotacionales

Debido al carácter vectorial de las variables dinámicas, los cambios pueden ocurrir tanto en magnitud como en dirección, por lo que es conveniente introducir los conceptos de *torque* y *momento angular*:

Torque: Se lo denomina también como momento de una fuerza y está definido por:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}.$$

Momento angular: Se lo define por:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}.$$

Por lo que las *leyes de Newton para movimiento rotacional*, toman la forma:

Primera ley: $\vec{\tau} = 0$.

Segunda ley: $\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$.

Tercera ley: No se aplica.

2.2.3. Constantes de movimiento

Sea una magnitud A; se dice que A es una *constante de movimiento* o *integral de movimiento* si:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0,$$

con lo que se dirá que se tiene una *ley de conservación* de A.

De la primera ley, resultan las leyes de conservación:

Conservación del momento lineal: $\vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{p}$ =cte.

Conservación del momento angular $\vec{\tau} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{L}$ =cte.

2.2.4. Descripción escalar

El formalismo anterior, puede describirse *escalarmente* y es así que aparecen magnitudes de este tipo tales como el trabajo y la energía. Para llegar a la descripción escalar, se parte de: $\vec{F} = m\vec{a}$. Haciendo el producto escalar de la anterior expresión por el vector desplazamiento, teniendo en cuenta que $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\vec{r}}\vec{e}$ e integrando entre dos puntos cualesquiera 1 y 2:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m \int_1^2 \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v},$$

lo que da finalmente:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right).$$

2.2.4.a. Magnitudes escalares importantes

Como se indicó anteriormente, las magnitudes escalares trabajo y energía juegan un rol muy importante en la Mecánica y su utilización en la Termodinámica es una de las bases de esta ciencia.

Trabajo: El trabajo total efectuado por un campo de fuerzas $\vec{F}$ al mover la partícula del punto 1 al 2 a lo largo de la curva C es:

$$W_{12} = \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{2.1}$$

Energía cinética (T) Capacidad de realizar trabajo en virtud del *movimiento*:

$$T = \frac{1}{2} m v^2.$$

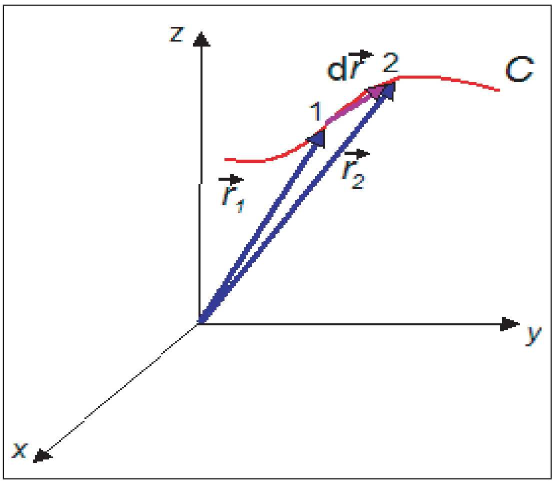

Figura 2.2: Representación del concepto de trabajo.

Energía potencial (V) Capacidad de realizar trabajo en virtud de la posición.

La integral (2.1) no puede integrarse inmediatamente y puede ocurrir que dependa de la trayectoria. Por esto, es importante definir los tipos de fuerzas.

Fuerzas conservativas Si el campo de fuerzas es tal que el trabajo W realizado a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo; es decir,

$$\boxed{\oint W = \oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0}$$

(fuerzas conservativas).

Fuerzas disipativas En este caso:

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \neq 0.$$

Si la fuerza es conservativa, por el *teorema del rotacional de Stokes*:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int \int_S \left(\nabla \wedge \vec{F} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Entonces, $\nabla \wedge \vec{F} = \vec{0}$. Por consiguiente, se puede escribir:

$$\vec{F} = -\nabla V,$$

el signo negativo se introduce por conveniencia.

Por ora parte, si $\mathcal{V} = V + k$, se tendrá entonces $\nabla \mathcal{V} = \nabla V$ por lo que

$$\vec{F} = -\nabla (V + k) = -\nabla V,$$

con lo que se tiene que el nivel cero de V es arbitrario.

$$\int_1^2 \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_1^2 \nabla V \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_1^2 \mathrm{d}V = V_1 - V_2,$$

luego: $V_1 - V_2 = T_2 - T_1$, con lo que

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2 = E = \text{cte}$$

y se tiene:

Teorema de conservación de la energía para una partícula Si las fuerzas que actúan sobre una partícula son *conservativas*, la *energía total* $T + V$ de la partícula se conserva.

Potencia Una otra magnitud escalar que para algunos problemas es importante y está definida como el ritmo de cambio energético $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$. Como $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$, entonces se tendrá:

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v}.$$

2.3. Movimiento unidimensional

Consideremos el movimiento de una partícula a lo largo del eje x; así, se puede escribir $F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ y V=V(x). Del teorema de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(x) = E.$$

Acomodando términos e integrando la anterior expresión, se tiene que el *intervalo de tiempo* puede ser escrito como:

$$\boxed{\Delta t = t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - V(x)}}}\,.$$

La anterior ecuación proporciona información acerca del sistema mecánico. Si se representa $V(x)$ vs x, se pueden describir cualitativamente los tipos de movimiento posibles. De acuerdo con la ec. anterior, está claro que para una energía dada E, la partícula está confinada a aquellas regiones del eje x en las que $V(x) \leq E$. En la Fig. 2.3 se hace un análisis cualitativo para 6 energías: E_0 a E_5. Así, se ve que si la energía del sistema es E_0, esta es

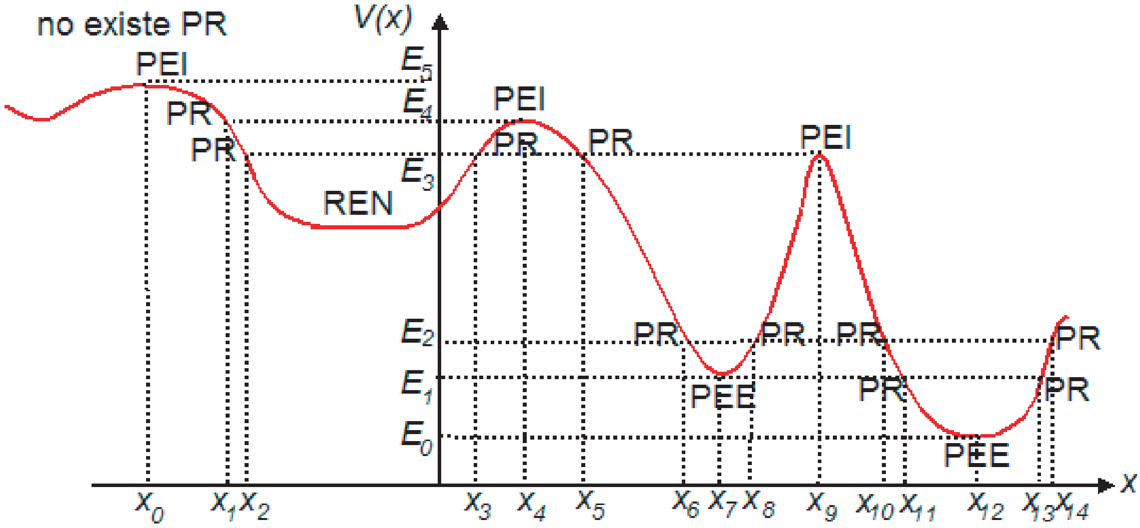

Figura 2.3: Curva potencial para las situaciones en las que se tienen energías E_0, E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5. Las abreviaciones PR, PEE, PEI y REN denotan respectivamente, *punto de retorno, punto de equilibrio estable, punto de equilibrio inestable* y *región de equilibrio neutro*.

la menor energía posible y la partícula sólo podría mantenerse en reposo en x_{12} que es un *punto de equilibrio estable*. Para la energía E_1, la partícula puede estar en reposo en x_7 que es también un *punto de equilibrio estable* o también podría oscilar entre los llamados *puntos de retorno del movimiento* x_{11} y x_{13}; estos puntos son así denominados ya que la velocidad de la partícula disminuye al acercarse a ellos y una vez que se los alcanza, la partícula invierte su sentido de movimiento. Si el sistema tiene una energía E_2, se tendrán 4 posibles puntos de retorno: x_6 y x_8, además de x_{10} y x_{14}. Con una energía E_3, se presentan situaciones muy interesantes ya que existen 3 *puntos de retorno* claramente identificados: x_{10} y x_{14}, pero entre estos puntos, existe una *región de equilibrio neutro* lo que hace que la partícula , una vez que alcanza esa región tienda sólo a moverse en ella y no vuelva a alcanzar los puntos de retorno salvo que se le aplique una fuerza adicional; el otro *punto de retorno* es x_5 que junto a x_9 que en rigor es un *punto de equilibrio inestable*, es decir, que si bien la partícula podría estar en reposo en ese punto, la mínima perturbación hace que el sistema abandone esa situación de equilibrio inestable, por lo que la partícula podría oscila entre x_5 y x_9 o pasar al otro valle donde x_{12} es un punto de equilibrio estable. Para E_4, se tiene una situación similar a la anterior, sólo que en este caso, el único punto de retorno es x_1 y x_4 es un punto de equilibrio inestable que podría hacer oscilar el sistema entre x_1 y x_4 o podría permitir que el sistema pase a los otros valles en los que x_7 y x_{12} son puntos de equilibrio estable. En tanto, para E_5, sólo hay un *punto de equilibrio inestable*, x_0, que al tener probabilidad mínima de ser alcanzado hará que la partícula tienda a estar en la *región de equilibrio neutro*. Finalmente, para energías mayores a E_5, no hay puntos de retorno y la partícula sólo se mueve en un sentido.

Ejemplos de potenciales:

Potencial de Morse $V(x) = \mathrm{e}^{-2\alpha x} - 2\mathrm{e}^{-\alpha x}$.

Potencial de Lennard-Jones $V(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$.

Potencial gravitacional $V(x) = -G\frac{M}{x}$.

Potencial de Yukawa $V(x) = -\frac{x_0}{x}V_0\mathrm{e}^{-x/x_0}$.

2.4. Campo paralelo de fuerzas

La interacción gravitacional es la más importante a escala mesoscópica puesto que está en relación con muchos de los fenómenos que forman parte de la vida cotidiana de los humanos. En rigor, esta interacción gravitacional, se traduce en una atracción ejercida por la Tierra a todos los objetos masivos que se encuentran sobre o cerca de su superficie.[1] Si representásemos las líneas de fuerza del campo gravitacional originado por la Tierra, las líneas de fuerza estarían dirigidas hacia el centro del planeta en forma radial; sin embargo, si sólo consideramos una pequeña porción de espacio cercana a la superficie terrestre, se verá que las líneas de fuerza pueden considerarse como si estuviesen paralelas y en este caso, con buena aproximación, se puede hablar de un campo paralelo de fuerzas.

2.4.1. Movimiento bajo la influencia de la gravedad

Este problema elemental de la Física, se plantea de manera que $\vec{F} = -mg\vec{1}_z$. Por lo que la ecuación de movimiento será:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -g\vec{1}_z = \ddot{x}\vec{1}_x + \ddot{y}\vec{1}_y + \ddot{z}\vec{1}_z,$$

[1] De acuerdo con las características conocidas de la interacción gravitacional, esta interacción está presente para todos los cuerpos que poseen masa tomando valores que disminuyen con el cuadrado de la distancia entre los objetos en cuestión.

lo que permite escribir las ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{x} = 0\ ; \qquad \ddot{y} = 0\ ; \qquad \ddot{z} + g = 0,$$

que luego de una primera integración y considerando que las condiciones iniciales para la velocidad en cada eje eran v_{0x}, v_{0y} y v_{0z}:

$$v_x = \text{cte.} = v_{0x}\ ; \qquad v_y = \text{cte.} = v_{0y}\ ; \qquad v_z = -gt + v_{0y}.$$

Una segunda integración y considerando que las condiciones iniciales para la posición en cada eje eran x_0, y_0 y z_0, permite hallar las posiciones:

$$x = v_{0x}t + x_0\ ; \qquad y = v_{0y}t + y_0\ ; \qquad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0.$$

Es decir, se necesitan 6 constantes para fijar unívocamente la trayectoria.

2.4.2. Movimiento en el plano con fuerza disipativa

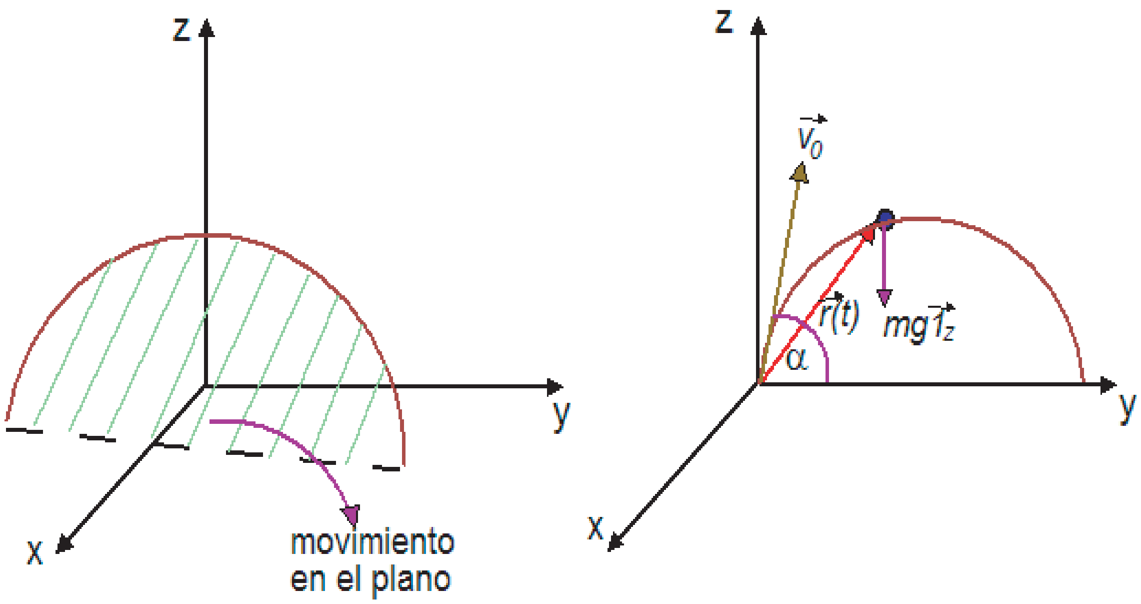

Figura 2.4: Movimiento de proyectiles en el plano que se puede hacer coincidir con uno de los planos de un sistema cartesiano.

El movimiento de proyectiles ocurre en un plano que puede ser acomodado de forma que coincida con uno de los planos de un sistema cartesiano tal como se muestra en la Fig. 2.4. Ahora, si se introduce una fuerza disipativa $-\beta\vec{v}$, donde el factor β depende de la forma y tamaño del cuerpo, así como de la velocidad del aire. Por lo tanto, la segunda ley de Newton para este problema adquiere la forma $\vec{F} = -mg\vec{1_z} - \beta\vec{v}$, que nos da la ecuación de movimiento:

$$\dot{\vec{v}} + \frac{\beta}{m}\vec{v} = -g\vec{1_z},$$

con condiciones iniciales $\vec{r}(t=0) = \vec{r}(0) = 0$ y $\vec{v}(t=0) = \vec{v}(0) = \vec{v_0}$. La ecuación diferencial puede resolverse por cualquier método, con fines ilustrativos, se elegirá el método de *transformadas de Laplace*. Aplicando transformadas de Laplace a la anterior ecuación y teniendo en cuenta algunas de las propiedades de este operador:

$$\mathcal{L}\left[\dot{\vec{v}}\right] + \frac{\beta}{m}\mathcal{L}\left[\vec{v}\right] = -g\vec{1_z}\mathcal{L}[1].$$

Utilizando el hecho de que $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ y que siendo f una función cuya derivada n-ésima se representa por $f^{(n)}$, entonces, la transformada de Laplace de esta derivada es $\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right] = s^n\mathcal{L}[f] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{n-k-1}(0)$, por lo que

$$s\mathcal{L}\left[\vec{v}\right] - \vec{v_0} + \frac{\beta}{m}\mathcal{L}\left[\vec{v}\right] = -g\vec{1_z}\left(\frac{1}{s}\right).$$

Despejando $\mathcal{L}\left[\vec{v}\right]$:

$$\mathcal{L}\left[\vec{v}\right] = \vec{v_0}\left(\frac{1}{s+\frac{\beta}{m}}\right) - g\vec{1_z}\left[\frac{1}{s\left(s+\frac{\beta}{m}\right)}\right].$$

Previo al cálculo de $\vec{v}$ mediante la transformada inversa de Laplace, recordemos que $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = \mathrm{e}^{at}$ y notemos que la expresión $\frac{1}{s\left(s+\frac{\beta}{m}\right)}$ puede desarrollarse en fracciones parciales, lo que da $\frac{m}{\beta}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{\beta}{m}}\right)$. Con todo lo anterior, se puede hallar $\vec{v}$:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v_0}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta}\vec{1_z}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right)} \text{ (velocidad).}$$

Como $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, se puede hallar $\vec{r}$, integrando $\vec{v}$ como función del tiempo, lo que da:

$$\boxed{\vec{r} = \frac{m}{\beta}\vec{v_0}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right) - \frac{mg}{\beta}\vec{1_z}\left(t + \frac{m}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{m}{\beta}\right)} \text{ (posición).}$$

Las componentes de la velocidad son:

$$v_x = 0\,; \qquad v_y = v_0 \cos\alpha \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\,; \qquad v_z = v_0 \sin\alpha \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right).$$

En el punto más alto: $v_z = 0$, por lo que

$$v_0 \sin\alpha \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t_{max}} = \frac{mg}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right),$$

de donde se puede despejar $t_{\max}$ y luego de simples operaciones:

$$\boxed{t_{\max} = \tfrac{m}{\beta}\ln\left(1 + \tfrac{\beta v_0 \sin\alpha}{mg}\right)}$$

que es el *tiempo que tarda en alcanzar la máxima altura*. Por otra parte, trabajando con las componentes de la posición:

$$x = 0\,; \qquad y = \frac{m}{\beta}v_0 \cos\alpha\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right); \qquad z = \frac{m}{\beta}v_0 \sin\alpha\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right) - \frac{mg}{\beta}\left(t + \frac{m}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{m}{\beta}\right).$$

Si se quiere hallar la *altura máxima*, se debe reemplazar en la ecuación correspondiente a la componente z de la posición, el tiempo $t_{\max}$, lo que da finalmente:

$$\boxed{z = \tfrac{m}{\beta}v_0 \sin\alpha - \tfrac{m^2 g}{\beta^2}\ln\left(1 + \tfrac{\beta v_0 \sin\alpha}{mg}\right),}$$

que corresponde a la altura máxima que alcanzará la partícula.

En el problema de movimiento de proyectiles con una fuerza disipativa, las trayectoria ya no serán parábolas perfectas y su forma dependerá fuertemente de β. Con un programa de fácil elaboración se pueden obtener las trayectorias para diferentes valores de β.