Capítulo 3

Fuerzas centrales

3.1. Ecuación de movimiento y cuadraturas

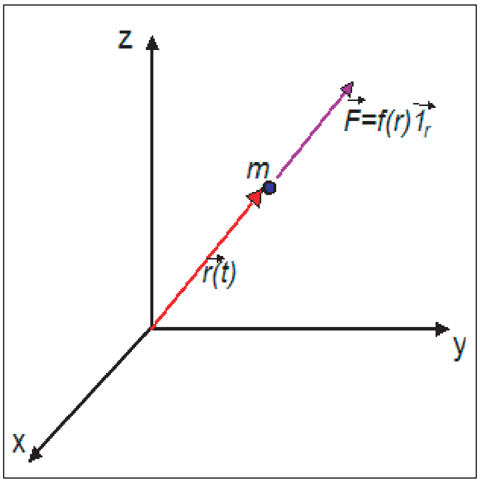

Figura 3.1: Las fuerzas centrales sólo dependen de la distancia al origen.

Sea un campo de fuerzas que depende únicamente de la distancia al origen:

$$\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}\right).$$

A este tipo de fuerzas se las llama *centrales*.

Si la fuerza es conservativa, entonces existirá una función $V = V\left(\vec{r}\right)$, la energía potencial, como un campo escalar tal que

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = -\nabla V\left(\vec{r}\right).$$

Bajo estas condiciones

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}\left(\vec{r}\right),$$

constituye la la ecuación de movimiento y tiene una primera cuadratura que es el *teorema de conservación de la energía mecánica total*:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V\left(\vec{r}\right). \tag{3.1}$$

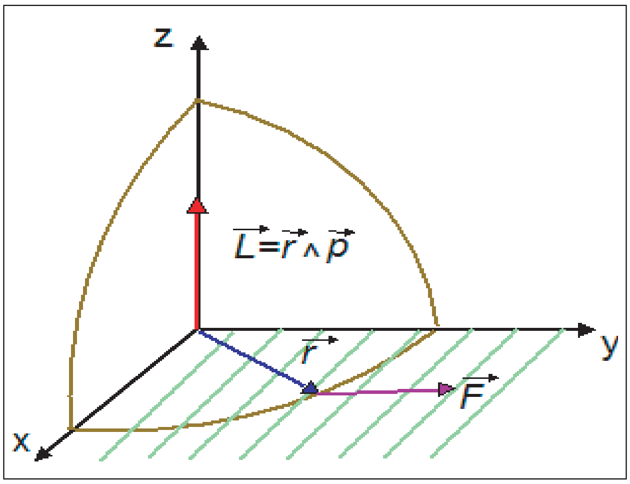

Figura 3.2: Simetría esférica para problemas con fuerzas centrales.

Como $V = V(\vec{r})$, el problema tiene *simetría esférica*, por lo que se utilizará un sistema de coordenadas para su descripción, teniendo en cuenta que el movimiento se realiza en el plano $x - y$, lo que se traduce en que $\theta = \frac{\pi}{2}$, lo que da

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= 0. \end{aligned}$$

La elección se facilita observando que:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= F(\vec{r})\,\vec{1}_r \\ \vec{r} &= r\vec{1}_r, \end{aligned}$$

por consiguiente, $\vec{r}\wedge\vec{F} = \vec{0}$, que de acuerdo con las leyes de Newton, nos indica que $\vec{L}$ =cte. Es decir, el torque neto alrededor del origen es cero y el momento angular debe ser constante. Entonces:

$$\vec{L} = l\vec{1}_z \qquad (l = \text{cte.})$$

Como en coordenadas esféricas, la velocidad tiene la forma

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{1}_r + r\dot{\theta}\vec{1}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{1}_\phi$$

y puesto que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\dot{\theta} = 0$, entonces, se puede escribir

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2,$$

por lo que la conservación de la energía queda:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + V(\vec{r}).$$

Además, el producto vectorial

$$\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p},$$

nos da, considerando la Fig. 3.1, en la que se muestra que $\vec{1}_r \wedge \vec{1}_\phi = \vec{1}_z$:

$$\vec{L} = mr^2\dot{\phi}^2\vec{1}_z.$$

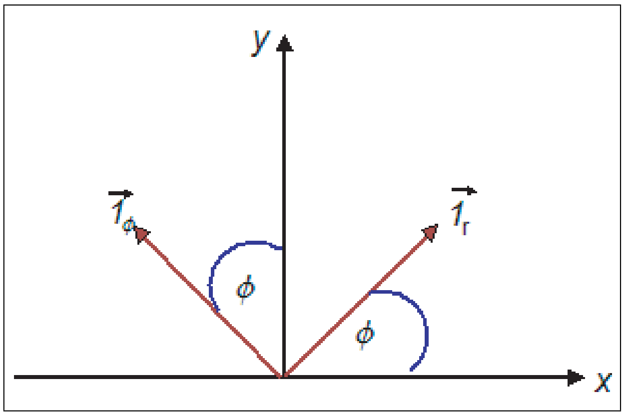

Figura 3.3: Relación entre vectores unitarios en el plano $x - y$.

Siendo l una constante, se tendrá entonces:

$$\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}.$$

Por lo tanto, del teorema de conservación de la energía se tiene:

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2r^2}\right) = E - V(r).$$

Expresión que despejando $\dot{r}$, se puede integrar, obteniéndose así:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[e - V(r)\right] - \frac{l^2}{m^2r^2}}}, \tag{3.2}$$

lo que constituye la *segunda cuadratura* del problema. La integral proporciona $r = r(t)$ una vez conocida la forma de $V = V(r)$.

3.2. Velocidad areolar y ecuación de la trayectoria

En la Fig. 3.2, se observa que el elemento de área

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\phi,$$

puede variar con el tiempo de forma que

$$\dot{A} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi},$$

y reemplazando la expresión para $\dot{\phi}$, se obtiene que este cambio con el tiempo denominado *velocidad areolar* resulta:

$$\boxed{\dot{A} = \frac{l}{2m} = \text{cte}}.$$

El hecho de que la velocidad areolar sea constante es una consecuencia directa de la centralidad de la fuerza y expresa matemáticamente el enunciado de la *segunda ley de Kepler*.

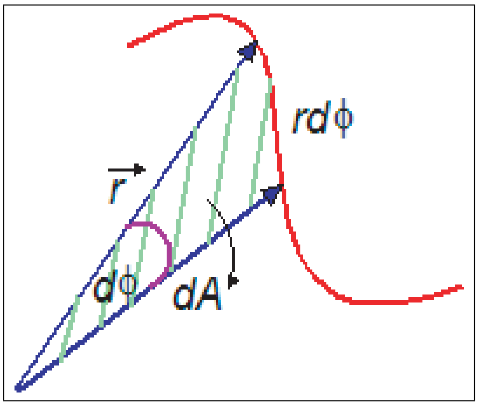

Figura 3.4: Área barrida por un vector a lo largo de un elemento de arco.

También de $\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}$, se tiene:

$$d\phi = \frac{l}{mr^2}dt,$$

por lo que la ecuación de la trayectoria se puede escribir, utilizando la segunda cuadratura:

$$d\phi = \frac{l dr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(r)\right] - \frac{l^2}{m^2r^2}}},$$

o bien

$$\phi = \int \frac{l}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2m\left[E - V(r)\right] - \frac{l^2}{r^2}}} + \text{cte.}$$

Volviendo a la primera cuadratura

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r),$$

se muestra que se puede considerar la parte radial del movimiento como un movimiento lineal propio de una partícula sometida a un *"potencial efectivo"*

$$V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2},$$

donde el término $\frac{l^2}{2mr^2}$, se denomina *energía centrífuga*. Cuando

$$E = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2},$$

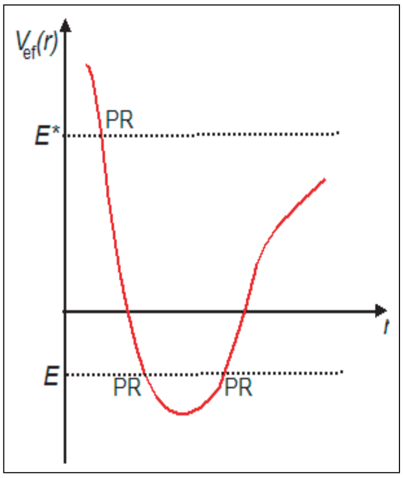

Figura 3.5: Potencial efectivo y puntos de retorno.

se tiene $\dot{r} = 0$. Esta condición determina los *puntos de retorno* para los que la dirección del movimiento se invierte.

3.3. Problema de Kepler

Para el potencial $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, donde α es una constante que está dada por

$$\alpha = Gm_1m_2.$$

El potencial efectivo es:

$$V_{\text{ef}} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r},$$

por lo que, considerando la ecuación para ϕ, se tiene introduciendo el potencial de Kepler:

$$\phi = \int \frac{l}{r^2} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{l^2}{r^2}}} + \text{cte.}$$

Si se hace el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$, con lo que $\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$, se obtiene:

$$\phi = -\int \frac{l\mathrm{d}u}{\sqrt{2mE + 2m\alpha u - l^2u^2}} + \text{cte.}$$

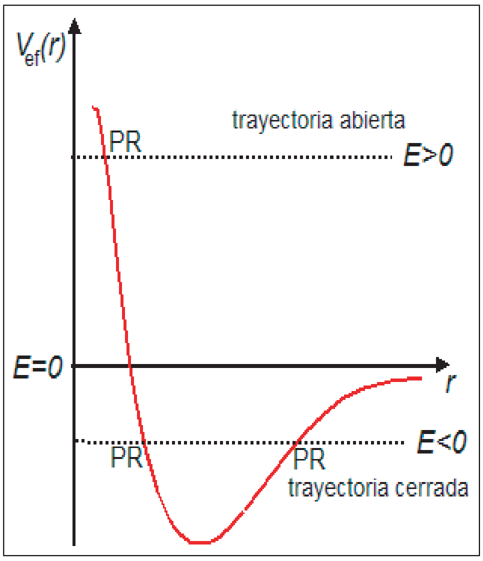

Figura 3.6: Potencial efectivo de Kepler.

Utilizando la integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right),$$

se tiene para la ec. en ϕ:

$$\phi - \phi_0 = \arcsin\left(\frac{-l^2u + m\alpha}{\sqrt{m^2\alpha^2 + 2mEl^2}}\right),$$

que se puede reescribir

$$\sin\left(\phi - \phi_0\right) = \frac{m\alpha - \frac{l^2}{r}}{\sqrt{2mEl^2 + m^2\alpha^2}},$$

de donde, despejando r:

$$r = \frac{l^2}{m\alpha - \sqrt{2mEl^2 + m^2\alpha^2}\sin\left(\phi - \phi_0\right)}.$$

Si se elige $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, la ecuación para r queda:

$$r = \frac{l^2}{m\alpha + \sqrt{2mEl^2 + m^2\alpha^2}\cos\phi}. \tag{3.3}$$

Comparando con la ecuación general de las *cónicas*

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi},$$

se obtiene que para el parámetro p y la excentricidad ϵ, se tienen:

$$p = \frac{l^2}{m\alpha} \quad ; \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}}.$$

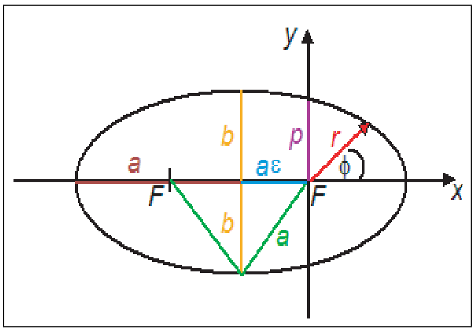

Figura 3.7: Propiedades de la elipse.

La forma de la trayectoria está determinada por el valor de la excentricidad ϵ. Así, se tendrá:

$$\begin{array}{llll} \epsilon < 1 & \Longrightarrow \text{elipse} & \longrightarrow & E < 0, \\ \epsilon = 1 & \Longrightarrow \text{parbola} & \longrightarrow & E = 0, \\ \epsilon > 1 & \Longrightarrow \text{hiprbola} & \longrightarrow & E > 0. \end{array}$$

Se obtiene movimiento finito solamente cuando $E < 0$ y consiguientemente, $\epsilon < 1$. Considerando las propiedades de la elipse, se pueden escribir expresiones explícitas para los semiejes en términos de las variables físicas. Así, el semieje mayor, será:

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|},$$

en tanto que para el semieje menor:

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{l}{\sqrt{2m|E|}}.$$

3.3.1. Leyes de Kepler

A fines del s. XVI y principios del s. XVII, las ideas copernicanas aún no eran bien aceptadas y la Iglesia se encargaba mediante sus tribunales de inquisición de persuadir a los intelectuales de la época a no hacer públicos sus apoyos a la reciente teoría heliocéntrica de Copérnico. Tycho Brahe (1546-1601) era un gran señor danés y un admirable astrónomo cuyos trabajos tienen la calidad de ser continuos y sistemáticos por más de 20 años, jamás realizados en ese entonces. El 4 de febrero de 1600, Brahe tiene un encuentro con Johannes Kepler (1571-1630) y le proporciona generosamente el conjunto de datos que había acumulado de la luna y los planetas.

Muchos astrónomos desde los tiempos de Ptolomeo, trataban de comprender el movimiento del planeta Marte y cuando Kepler recibe los datos de Brahe, su objetivo era justamente poder explicar ese misterioso movimiento del planeta rojo. Kepler recurre a cálculos matemáticos y a nuevos métodos geométricos y por supuesto a la intuición e inspiración que siempre deben acompañar a un científico. A pesar de todo, el movimiento de Marte se resistía a ser satisfactoriamente explicado, hasta que Kepler decide romper con el dogma de que el movimiento de los astros denotaba la "perfección", es decir, trayectorias circulares y adopta luego de largos e intensos razonamientos a la elipse como la trayectoria de Marte y extrapola este resultado a los otros planetas.

Volvamos a las ecuaciones anteriormente formuladas y de la velocidad areolar, tratemos de hallar el *período de revolución*:

$$\int_0^{\pi ab} \mathrm{d}A = \int_0^T \frac{l}{2m}\mathrm{d}T,$$

lo que da

$$T = \frac{2m\pi ab}{l}.$$

Ahora, utilizando las relaciones geométricas y físicas de las trayectorias elípticas para el problema de Kepler, se obtiene:

$$T = \frac{2m}{l}\pi a\left(a\sqrt{1-\epsilon^2}\right) = \frac{2m}{l}\pi a^2\sqrt{\frac{p}{a}},$$

que puede expresarse como:

$$\boxed{T^2 = 4\pi^2 \tfrac{m}{\alpha} a^3} \text{ (Tercera ley de Kepler).}$$

Finalmente, expresando todo en términos sólo de variables físicas:

$$T = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}, \tag{3.4}$$

lo que muestra que el período depende solamente de la energía de la partícula.

Los enunciados de las denominadas *leyes de Kepler*, formuladas en el s. XVII son:

Primera ley de Kepler.- Los planetas se mueven en órbitas elípticas en las que el sol ocupa uno de los focos.

Segunda ley de Kepler.- Las áreas barridas por los radios vectores en tiempos iguales, son iguales.

Tercera ley de Kepler.- El cuadrado del período de revolución es proporcional al cubo del semieje mayor.

3.3.2. Ecuación diferencial de la órbita

La ecuación de movimiento se puede escribir $\vec{F} = m\vec{a}$. Como la aceleración en coordenadas esféricas es:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)\vec{1_r} + \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right) - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right]\vec{1_\theta} + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right)\right]\vec{1_\phi}.$$

Como $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\dot{\theta} = 0$, entonces

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\vec{1_r} + \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\phi}\right)\right]\vec{1_\phi}.$$

Entonces:

$$F(r)\vec{1_r} = m\left[\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\vec{1_r} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\phi}\right)\vec{1_\phi}\right],$$

cuyas componentes son:

$$F(r) = m\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) \tag{3.5}$$

y

$$\frac{m}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\phi}\right) = 0. \tag{3.6}$$

De (3.6), se tiene

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 0,$$

lo que expresa la *conservación del momento angular*.

De (3.5) y utilizando la expresión de $\dot{\phi}$:

$$F(r) = m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3}.$$

Por otro lado,

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}$$

y

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}\left(\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} + \dot{\phi}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\phi^2}\right).$$

Utilizando nuevamente la expresión de $\dot{\phi}$ y luego de algunos cálculos, se obtiene:

$$\ddot{r} = -\frac{2l^2}{m^2 r^5}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \frac{l^2}{m^2 r^4}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\phi^2}.$$

Por lo que reemplazando en $F(r)$:

$$F(r) = -\frac{2l^2}{m^2 r^5}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \frac{l^2}{m^2 r^4}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\phi^2} - \frac{l^2}{m r^3},$$

lo que finalmente, permite obtener la *ecuación diferencial de la órbita*:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\phi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 - r = \frac{m r^4}{l^2}F(r). \tag{3.7}$$

Esta ecuación, se puede expresar también en términos de u, donde $u = \frac{1}{r}$. Por lo que se tendrá:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{u}\right)}{\mathrm{d}\phi} &= -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} \\
\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{u}\right)}{\mathrm{d}\phi^2} &= \frac{2}{u^3}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2}.
\end{aligned}$$

La ec. (3.7) queda en términos de u:

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{u}\right)}{\mathrm{d}\phi^2} - 2u\left[\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{u}\right)}{\mathrm{d}\phi}\right]^2 - \frac{1}{u} = \frac{m}{l^2 u^4}F\left(\frac{1}{u}\right),$$

con lo que resulta finalmente, la *ecuación de la órbita* en términos de u:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = -\frac{m}{l^2 u^2}F\left(\frac{1}{u}\right). \tag{3.8}$$

Si se conoce la ley de fuerzas F, es posible resolver (3.7) y (3.8). Por otra parte, si se conoce la órbita, se puede encontrar F.

3.4. Ley de la gravitación universal de Newton

Los seres humanos desde su aparición sobre la Tierra sintieron los efectos de la gravedad y a medida que fueron evolucionando, trataron de entender el cómo y el por qué de la actuación de esta fuerza que rige todos nuestros actos de la vida cotidiana. Para todos los seres que habitamos el planeta Tierra, es evidente la influencia que ejerce la fuerza de gravedad; es parte esencial de todas nuestras actividades desde nuestra más temprana edad puesto que incluso los bebés tienen la noción de que deben sostenerse a algo para no caer.

Un momento culminante en la historia de la Física fue el descubrimiento realizado por Isaac Newton de la Ley de la Gravitación Universal: todos los objetos se atraen unos a otros con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros. Al someter a una sola ley matemática los fenómenos físicos más importantes del universo observable, Newton demostró que la física terrestre y la física celeste son una misma cosa. El concepto de gravitación lograba de un solo golpe:

- Revelar el significado físico de las tres leyes de Kepler sobre el movimiento planetario.
- Dar cuenta de la curiosa e inexplicable observación de Galileo Galilei de que el movimiento de un objeto en caída libre es independiente de su masa.
- Resolver el intrincado problema del origen de las mareas.

Ahora, considerando el movimiento planetario en órbitas elípticas y recordando que para una cónica cualquiera se tiene

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\phi}$$

y trabajando con la ecuación diferencial de la órbita (3.8), se tiene que

$$\begin{aligned} u &= \frac{1 + \epsilon\cos\phi}{p} \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} &= -\frac{\epsilon}{p}\sin\phi \\ \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} &= -\frac{\epsilon}{p}\cos\phi, \end{aligned}$$

expresiones que reemplazadas en (3.8), da

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{l^2u^2}{mp},$$

que en términos de r se escribe $F(r) = -\frac{l^2}{mp}\left(\frac{1}{r^2}\right)$, de donde

$$F(r) = -\frac{\alpha}{r^2}.$$

Newton estableció que

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{1}_r, \tag{3.9}$$

donde $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$, es la denominada *constante de gravitación universal*.

3.4.1. Velocidad de escape

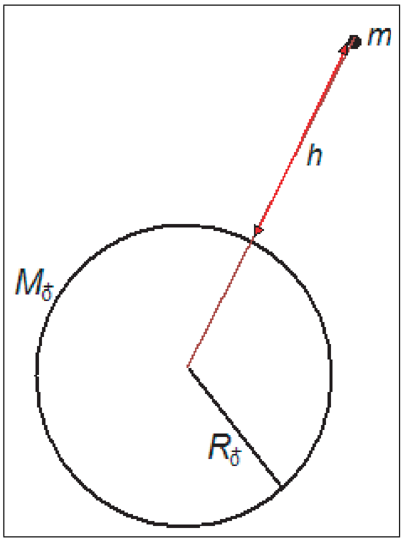

Figura 3.8: Cuerpo de masa m sometido al campo gravitatorio de la Tierra.

La *velocidad de escape* de la Tierra para una partícula es la *velocidad mínima* requerida (sobre la superficie terrestre) para que la partícula pueda abandonar su campo gravitatorio.

Sean M y R, la masa y el radio de la Tierra. Entonces, una partícula de masa m está sometida al campo gravitacional de la Tierra y la fuerza de atracción entre la Tierra y la partícula es:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{1}_r.$$

Utilizando la segunda ley de Newton, se observa que se pierde la dependencia con m y se llega a una integral de la forma:

$$\int_{v_0}^{0} v\,\mathrm{d}v = -GM\int_{R}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2},$$

siendo v_0 la velocidad con la cual la partícula sale de la superficie terrestre. Resolviendo las integrales, se tiene:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Por otra parte, en la superficie de la Tierra:

$$mg = G\frac{Mm}{r^2},$$

relación que nos permite escribir finalmente para la velocidad de escape la expresión:

$$v_0 = \sqrt{2gR}. \tag{3.10}$$

Tomando los valores $g = 9{,}81$ m/s y $R = 6378$ km, se halla que la velocidad de escape toma el valor $v_0 = 11{,}18$ km/s.

Ejemplo: Hallar la fuerza de atracción entre una varilla uniforme infinitamente larga con densidad lineal λ y una masa m situada a una distancia d de la varilla.

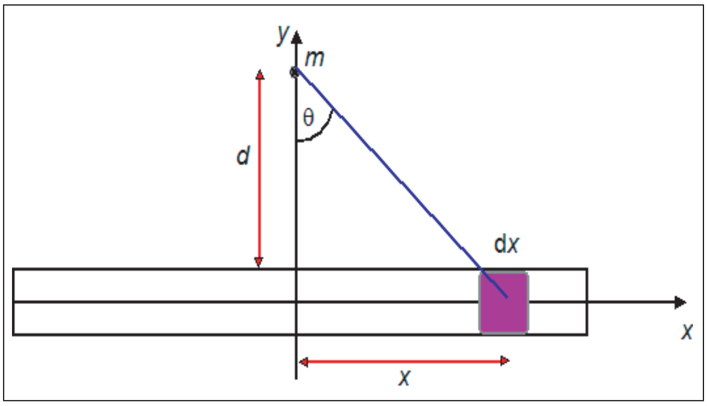

Figura 3.9: Atracción entre una masa m y una varilla de densidad lineal λ

Para la resolución de este problema, se elige un elemento infinitesimal dx de la varilla para describir la interacción con m. Por otra parte, las direcciones de los vectores unitarios deben ser tomadas en cuenta. Po lo que luego de estas consideraciones, el elemento de fuerza vendrá dado por:

$$\mathrm{d}\vec{F} = G\frac{m\lambda \mathrm{d}x}{x^2 + d^2}\left(\sin\theta \vec{1}_x - \cos\theta \vec{1}_y\right).$$

Como $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$ y $\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{x^2+d^2}}$; con lo que se puede integrar, resultando

$$\vec{F} = Gm\lambda\vec{1}_x\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+d^2)^{3/2}} - Gm\lambda\vec{1}_y\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+d^2)^{3/2}}.$$

El integrando de la primera integral es una función impar, por lo que la integral es idénticamente nula; por lo que

$$\vec{F} = -\frac{2Gm\lambda}{d}\vec{1}_y.$$

En el caso de que la varilla no fuese infinitamente larga y tuviese una longitud igual a $2a$, se puede demostrar que la fuerza de atracción es:

$$\vec{F} = -\frac{2Gm\lambda a}{d\sqrt{a^2 + d^2}}\vec{1}_y.$$