# Capítulo 4

# Movimiento oscilatorio

## 4.1. Oscilador armónico

El oscilador armónico, es quizás la entidad física a la cual se recurre con mayor frecuencia ya sea a nivel macroscópico o microscópico. El *movimiento armónico simple* es muy importante en la práctica puesto que es una buena aproximación a las oscilaciones libres en muchas situaciones físicas. El movimiento armónico simple se da cuando las fuerzas o torques que hacen que el objeto tienda a volver a su posición de equilibrio, son proporcionales a los desplazamientos respecto a esta posición de equilibrio.

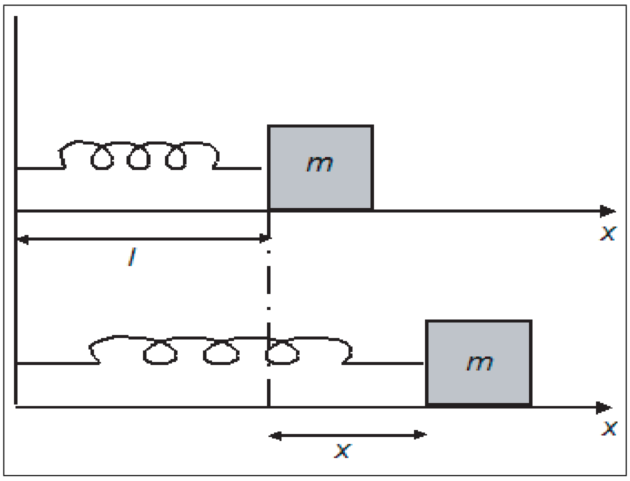

Figura 4.1: Sistema masa-resorte visto como oscilador armónico.

Esta fuerza, llamada de *restitución*, se encuentra frecuentemente en la naturaleza y es de la forma: $\vec{F} = -k\vec{r}$. En particular, para el caso unidimensional se tendrá:

$$\vec{F} = -kx\vec{1_x},$$

siendo $K$, la llamada *constante de elasticidad del resorte*. Como $F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$, entonces, integrando se halla la energía potencial:

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{2}kx^2}.$$

Recordando que el intervalo de tiempo para el movimiento unidimensional para $t_0 = 0$ es

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - \frac{1}{2}kx^2}}.$$

Para resolver la integral anterior, se hace el cambio de variable $\sin\theta = x\sqrt{\frac{k}{2E}}$ y la sustitución $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, con lo que queda:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta \mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{k}{2}}\sqrt{1 - \sin^2\theta}}.$$

Lo que finalmente da

$$t = \frac{1}{\omega}(\theta - \theta_0) \quad \Longrightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega t.$$

De la expresión del cambio de variable utilizado, se puede escribir:

$$x = A\sin(\omega t - \theta_0),$$

donde, las características oscilatorias son: la *amplitud* $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$, la *frecuencia* $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, y el *período* $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$. Por otra parte, las *condiciones iniciales* están determinadas por las constantes $A$ y $\theta_0$ mediante

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}kA^2 \\ x_0 &= A\sin\theta_0. \end{aligned}$$

La ecuación de movimiento para un oscilador armónico lineal es

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -kx\vec{1}_x,$$

que se puede escribir como:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

de cuya ecuación indicial se obtiene: $r = \pm i\omega$; lo que permite escribir la solución:

$$x = A'\mathrm{e}^{i\omega t} + B'\mathrm{e}^{-i\omega t} = A\sin\omega t + B\cos\omega t.$$

Sea ahora, un oscilador sometido a dos fuerzas adicionales:

$$\begin{aligned}\vec{F}_d &= -\beta\vec{v} && \text{(rozamiento)}\\ \vec{F}_{\text{ext}} &= \vec{F}_0 \sin\omega_0 t && \text{(fuerza externa).}\end{aligned}$$

Por lo tanto, en una dimensión, la ecuación de movimiento es:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \sin\omega_0 t, \tag{4.1}$$

con

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\tfrac{k}{m}} && \text{(frecuencia angular)}\\ \gamma &= \tfrac{\beta}{2m} && \text{(coeficiente de amortiguamiento)}\\ f_0 &= \tfrac{F_0}{m} && \text{(fuerza por unidad de masa).}\end{aligned}$$

La solución general de (4.1) es la suma de las soluciones homogénea y particular:

$$x = x_h(t) + x_p(t).$$

La solución $x_h$, se la obtiene al resolver

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

cuya ecuación indicial es $\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega^2 = 0$, que da como solución

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2},$$

lo que nos proporciona para la solución homogénea:

$$x_h(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A'\mathrm{e}^{\alpha' t} + B'\mathrm{e}^{-\alpha' t}\right),$$

con $\alpha' = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$. Del análisis de $\alpha'$, se ve que se tienen tres casos. Los tres casos posibles -que además se ilustran en la Fig. 4.2- son:

**Subamortiguamiento.** En este caso, se tendrá movimiento oscilatorio si $\gamma^2 < \omega^2$, lo que equivale a tener la condición: $\beta^2 < 4km$. Se puede escribir

$$\alpha' = i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} = i\sigma,$$

por lo que la solución homogénea será:

$$x_h(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A'\mathrm{e}^{i\sigma t} + B'\mathrm{e}^{-i\sigma t}\right) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A\sin\sigma t + B\cos\sigma t\right),$$

lo que se puede escribir:

$$\boxed{x_h(t) = Ce^{-\gamma t}\cos\left(\sigma t - \phi\right)},$$

donde $\phi$ es el *ángulo de fase* y $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, es la denominada *amplitud armónica*.

**Sobreamortiguamiento.** En este caso, $\gamma^2 > \omega^2$, por lo que $\beta^2 > 4km$, que permite escribir la solución homogénea:

$$\boxed{x_h(t) = e^{-\gamma t}\left(A'e^{\alpha' t} + B'e^{-\alpha' t}\right)}$$

**Amortiguamiento crítico.** Se tendrá movimiento críticamente amortiguado si $\gamma^2 = \omega^2$, es decir, $\beta^2 = 4km$; lo que da para la solución homogénea

$$\boxed{x_h(t) = e^{-\gamma t}\left(A' + B't\right)}.$$

La importancia de este amortiguamiento radica en el hecho de que, para las mismas condiciones iniciales, un sistema volverá a su posición de equilibrio en el menor tiempo posible.

La *solución particular*, se encuentra sustituyendo la forma general

$$x = C_1 \sin\omega_0 t + C_2 \cos\omega_0 t$$

y sus derivadas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_0 C_1 \cos\omega_0 t - \omega_0 C_2 \sin\omega_0 t \\ \ddot{x} &= -\omega_0^2 C_1 \sin\omega_0 t - \omega_0^2 C_2 \cos\omega_0 t = -\omega_0^2 x \end{aligned}$$

en (4.1); lo que da

$$\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)C_1 - 2\gamma\omega_0 C_2\right]\sin\omega_0 t + \left[\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)C_2 + 2\gamma\omega_0 C_1\right]\cos\omega_0 t = f_0 \sin\omega_0 t.$$

De donde, igualando, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)C_1 - 2\gamma\omega_0 C_2 &= f_0 \\ \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)C_2 + 2\gamma\omega_0 C_1 &= 0, \end{aligned}$$

cuyas solución es:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{f_0\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2} \\ C_2 &= -\frac{2\gamma\omega_0 f_0}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}. \end{aligned}$$

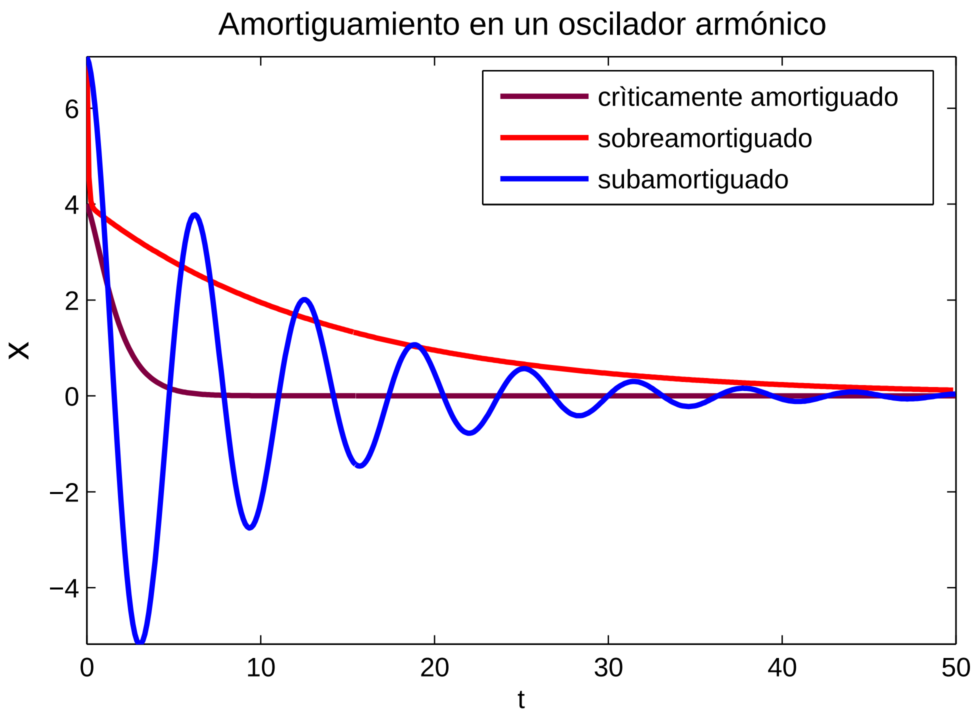


Figura 4.2: Tipos de amortiguamiento en un oscilador armónico. Los valores que se tomaron fueron en unidades del S.I.: $A' = 4$, $B' = 3$, $m = 1$, $k = 1$ para todos los casos y para el subamortiguamiento, $\beta = 0{,}2$, para el sobreamortiguamiento, $\beta = 14$ y para el amortiguamiento crítico, $\beta = 2$.

Por lo que la *solución particular* es:

$$x_p = \frac{f_0}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\sin\omega_0 t - 2\gamma\omega_0\cos\omega_0 t\right].$$

Haciendo:

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}}\\ \sin\varphi &= \frac{2\gamma\omega_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}},\end{aligned}$$

con lo que la solución particular queda:

$$\boxed{x_p(t)=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega_0^2}}\sin\left(\omega_0 t-\varphi\right)},$$

donde $\varphi=\arctan\left(\frac{2\gamma\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}\right)$. Finalmente, la *solución general* $x(t)=x_h(t)+x_p(t)$ es:

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A'\mathrm{e}^{\alpha' t}+B'\mathrm{e}^{-\alpha' t}\right)+\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega_0^2}}\sin\left(\omega_0 t-\varphi\right).$$

$x_h(t)\to 0$ rápidamente, es decir, desaparece en un tiempo corto, por lo que se puede decir que $x_h(t)$ es una *solución transitoria* y $x_p(t)$ es la *solución estable*, por lo que $x_p(t)$representa la *solución general* del problema:

$$\boxed{x(t)=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega_0^2}}\sin\left(\omega_0 t-\varphi\right)}\ \text{(oscilaciones forzadas).}$$

## 4.2. Resonancia

Es el fenómeno consistente en la máxima transmisión de potencia entre dos sistemas oscilantes. Para el oscilador armónico simple se tiene:

$$\nabla\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ -kx & 0 & 0\end{vmatrix}=0\,,$$

por lo que $\vec{F}$ es *conservativa* y $\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial z}=0$ y $\frac{\partial V}{\partial x}=kx$, lo que da finalmente $V=\frac{1}{2}kx^2$. Así, la *energía mecánica total* es $E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$.

Para el *oscilador armónico forzado*, la *potencia instantánea* es:

$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv=\frac{F_0 f_0\omega_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega_0^2}}\sin\omega_0 t\cos\left(\omega_0 t-\varphi\right).$$

La *potencia máxima* está definida por

$$\langle P\rangle=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}Fv\mathrm{d}t\,,$$

por lo que en nuestro caso, la potencia media por ciclo es

$$\langle P\rangle=\frac{F_0 f_0\omega_0}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega_0^2}}\frac{1}{T}\left(\int_0^T\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t\cos\varphi\mathrm{d}t+\int_0^T\sin^2\omega_0 t\sin\varphi\mathrm{d}t\right).$$

Recordemos que un conjunto de funciones $f_i(x)$ es ortogonal en un intervalo $a < x < b$ si para dos funciones cualesquiera $f_m(x)$ y $f_n(x)$ que están contenidas en $f_i(x)$, se cumple

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ g_n & ; \quad m = n \,. \end{cases}$$

Para un conjunto de funciones trigonométricas:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ \frac{T}{2} & ; \quad m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ \frac{T}{2} & ; \quad m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t = 0 \;, \; \forall m, n \;; \; \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \;.$$

Por lo que

$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2 \omega_0}{2m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}} \sin\varphi.$$

Es decir, la *potencia máxima transmitida* se dará cuando $\sin\varphi = 1$, con lo que

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{F_0^2 \omega_0}{2m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}} \;,$$

y

$$\sin\varphi = \frac{2\gamma\omega_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}} = 1 \;,$$

lo que da finalmente la *condición de resonancia*:

$$\boxed{\omega = \omega_0} \;.$$

El máximo valor de la amplitud es:

$$A_f = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}} \;,$$

ocurre cuando $\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega_0^2$ es mínimo; esto es, si $g=\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega_0^2$, se debe tener $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\omega_0}=0$ y $\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\omega_0^2}>0$. Para la primera derivada de $g$ se tiene

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\omega_0}=\omega_0\left(\omega_0^2-\omega^2+2\gamma^2\right)=0\,,$$

por lo que se tendrán las soluciones

1. $\omega_0=0$ que se la descarta de antemano puesto que su existencia implicaría la no existencia de oscilación forzada.

2. En tanto, $\omega_0=\sqrt{\omega^2-2\gamma^2}=\omega_{0R}$, es una solución válida y representa la *frecuencia angular resonante*.

Para la derivada segunda, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}\omega_0^2}=16\left(\frac{\omega^2}{2}-\gamma^2\right)>0\,,$$

y efectivamente representa un *mínimo* puesto que $\gamma^2<\frac{\omega^2}{2}$. Luego, el valor de la máxima amplitud para la *frecuencia resonante* es

$$\boxed{A_{f(\max)}=\frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega^2-\gamma^2}}}\,.$$

La *amplitud del estado estacionario*, se puede expresar en términos de la *frecuencia angular de resonancia*, $\omega_{0R}$, sabiendo que $\omega^2=\omega_{0R}^2+2\gamma^2$, lo que da finalmente:

$$\boxed{A_f=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_{0R}^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\left(\omega^2-\gamma^2\right)}}}\,.$$

La Fig. 4.3, muestra la curva característica que da la amplitud en función del cuadrado de la frecuencia angular de la fuerza impulsora; en esta Fig. también se observa la localización de las frecuencias natural, de resonancia, y de amortiguamiento.

### 4.2.1. Fuerzas impulsoras

Un tipo de fuerzas muy importante en la Física corresponde al de las *fuerzas impulsoras* que se caracterizan por ser de muy *corta duración* lo que tiene como consecuencia que el intervalo de aplicación de estas fuerzas es $\Delta t\to 0$ y también el desplazamiento durante el cual actúa la fuerza se

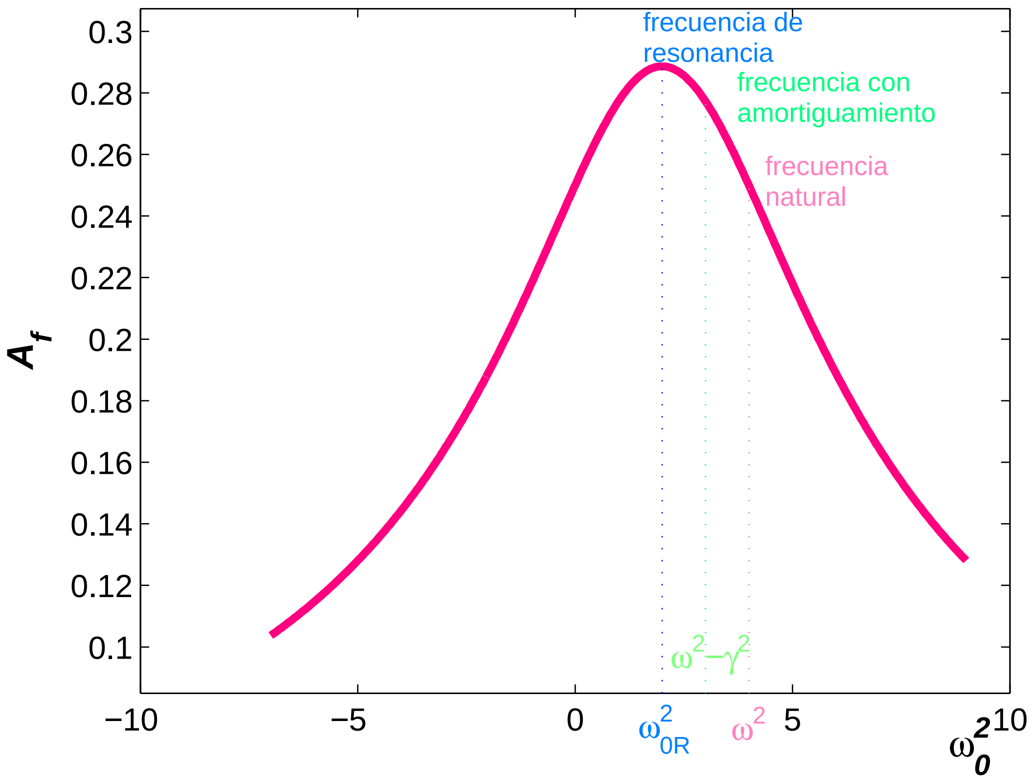


Figura 4.3: Curva de la amplitud en función del cuadrado de la frecuencia para valores de $F_0 = 1$, $m = 1$, $\gamma = 1$ y $\omega = 2$ en unidades del S.I.

comporta como $\Delta x \to 0$; en tanto que la cantidad de movimiento tendrá un cambio finito $\Delta p$. Se puede definir una *fuerza impulsora unidad* como la que produce un cambio de una unidad en la cantidad de movimiento durante el intervalo $\Delta t$ en el que actúa la fuerza impulsora:

$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} F(t)\mathrm{d}t = 1\ ,$$

luego, el impulso producido si $F$ es constante será $F\Delta t = 1$, con lo que $F = \frac{1}{\Delta t}$ Si $p_0\Delta(t-a)$ es la fuerza impulsora constante que al actuar sobre la partícula en el tiempo medio $t = a$ durante un intervalo $\Delta T$ imparte a la partícula una cantidad de movimiento $p_0$. Por consiguiente, $\Delta(t-a)$ es una función adimensional de impulso de magnitud $\frac{1}{\Delta t}$ que actúa en el mismo intervalo. Cuanto menor sea el intervalo $\Delta t$ durante el cual actúa la fuerza impulsora es claro que mayor será la aproximación, pues para $\Delta t$ suficientemente pequeño, el desplazamiento será despreciable.

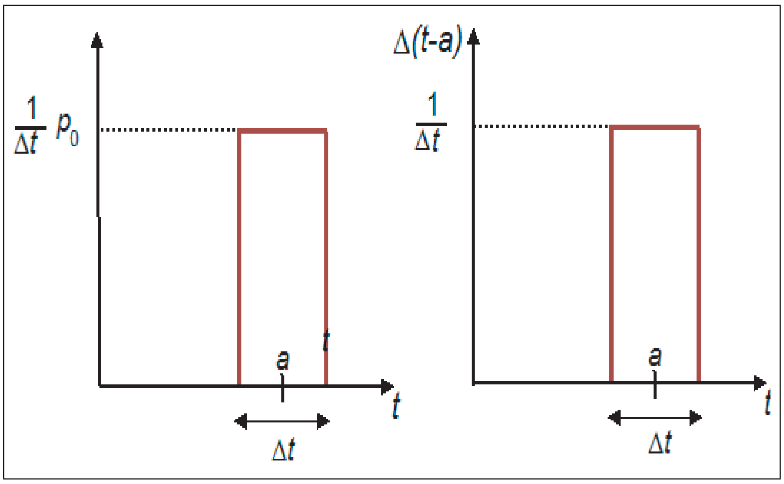


Figura 4.4: Fuerza impulsora y fuerza impulsora unidad constantes.

Cuando $\Delta t$ tiende a cero, la fuerza impulsora tenderá a infinito con lo que el producto de estas magnitudes será finito. Ahora, sea la fuerza impulsora unidad

$$F = \frac{1}{\Delta t\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{(\Delta t)^2}}.$$

Se puede idealizar esta situación diciendo que la fuerza impulsora unidad tiene un valor muy grande en el punto $t = a$ y un valor cero en todos los demás puntos. Dado que la fuerza impulsora

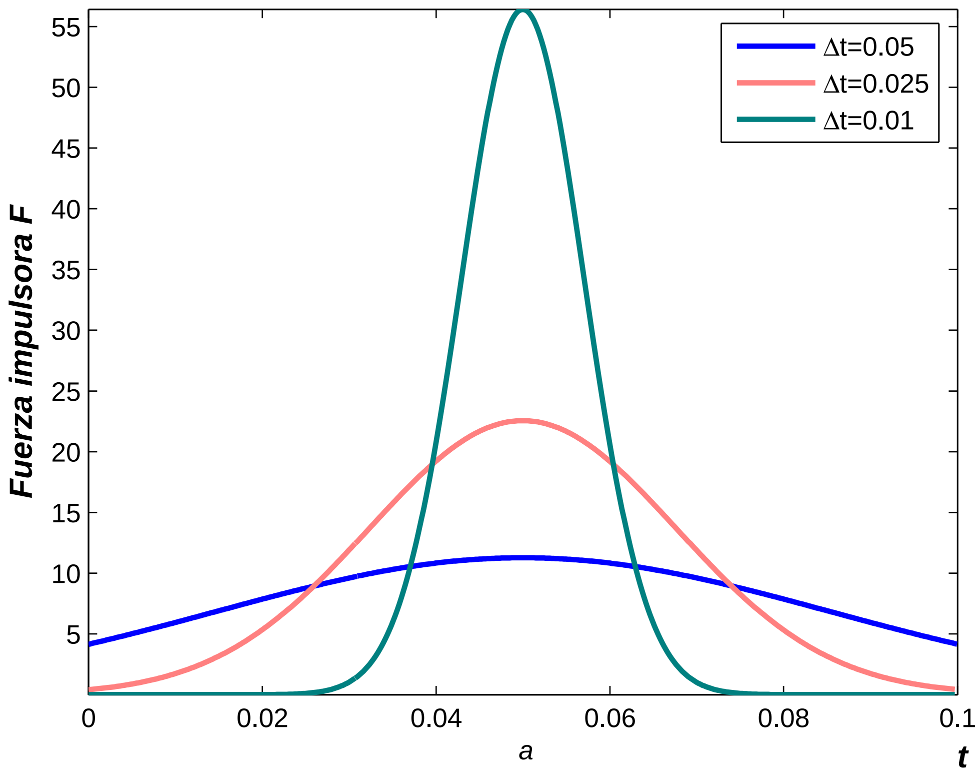


Figura 4.5: Fuerzas impulsoras para $a = 0{,}05$ y diferentes valores de $\Delta t$

$F = p_0\delta(t-a)$ da lugar a un cambio $p_0$ en la cantidad de movimiento de la partícula, entonces, $\delta(t-a)$ se asume como la función idealizada del impulso unidad que tiene entre otras propiedades:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t-a)\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & ; \quad t_1 < a < t_2 \\ 0 & ; \quad \text{eoc} \end{cases} ,$$

$$\delta(t-a) = 0 \quad ; \quad t \neq a ,$$

$$\delta(t-a) = \delta(a-t) .$$

Esta función es llamada *delta de Dirac* y se caracteriza por no tener área bajo su curva. La importancia de la fuerza impulsora unidad radica en el hecho de que cualquier fuerza dependiente del tiempo se puede expresar por una suma de fuerzas impulsoras; y por el principio de superposición, que satisfacen las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales, la solución para una fuerza dependiente del tiempo se podrá, consiguientemente, expresar por la suma de las soluciones para las fuerzas impulsoras.

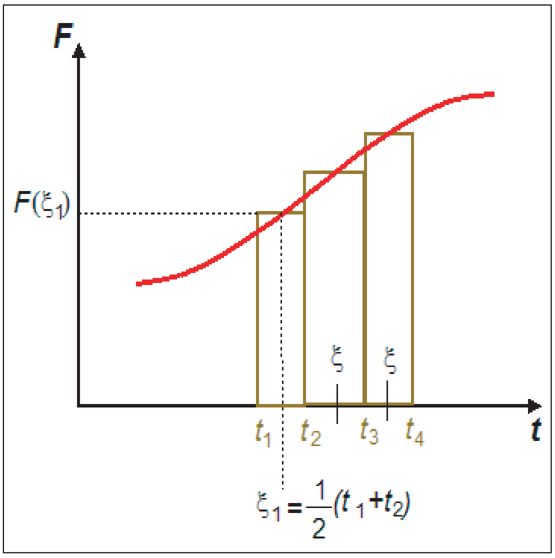


Figura 4.6: Una fuerza cualquiera representada como la suma de una serie de fuerzas impulsoras.

Para una fuerza cualquiera $F(t)$, se puede considerar que para un intervalo de tiempo suficientemente pequeño $t_1 < \Delta t < t_2$, es posible considerar una fuerza continua variando linealmente. El valor que toma esta fuerza en el tiempo medio de este intervalo $\xi_1 = \frac{t_1+t_2}{2}$ representará un valor medio de la fuerza sobre este intervalo, es decir:

$$F(\xi_1) = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} F(t)\mathrm{d}t .$$

Para valores infinitesimales de $\Delta t$, el efecto de $F(t)$ sobre el movimiento de la partícula puede calcularse de forma aproximada por el que produciría la fuerza constante $F(\xi)$ sobre dicho movimiento en el mismo $\Delta t$. Esta última fuerza puede representarse por $F(\xi_1)\Delta(t-\xi_1)\Delta t$ actuando en $\Delta t$. Si se subdivide el tiempo en el cual actúa la fuerza $F(t)$ en $N$

intervalos infinitesimales $\Delta t$, se puede escribir:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{N} F(\xi_n)\Delta(t-\xi_n)\Delta\xi \ ,$$

donde $\Delta(t-\xi_n)$ es la función constante de impulso unidad definida en el intervalo $\Delta t = \Delta\xi$. Tomando el límite cuando estos intervalos tienden a cero:

$$\lim_{\Delta\xi\to 0}\sum_{n=1}^{N} F(\xi_n)\Delta(t-\xi_n)\Delta\xi = \int_{T_1}^{T_2} F(\xi)\delta(t-\xi)\mathrm{d}\xi \ ,$$

donde se utiliza la función delta de Dirac para representar $\Delta(t-\xi)$ cuando $\Delta t \to 0$. $T_1$ y $T_2$ son los límites del período en que $F(t)$ actúa sobre la partícula.

## 4.3. Péndulo simple

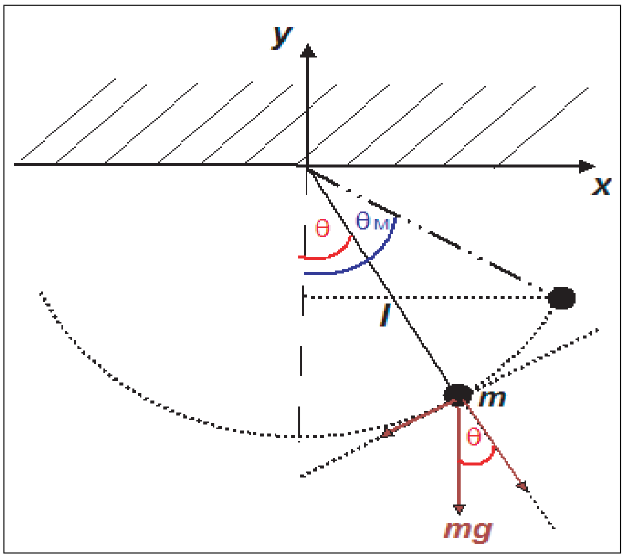


Figura 4.7: Esquema de un péndulo simple.

El estudio de péndulos fue muy importante para la Física y uno de los fenómenos omnipresentes en la naturaleza como es el de la *sincronización* fue observado y estudiado sistemáticamente por primera vez por Huygens en 1673.

Analizando el esquema del péndulo simple, podemos escribir por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}m\left(l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - mgl\cos\theta = -mgl\cos\theta_M \ ,$$

de donde

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_M} \ .$$

Si $t = 0$ cuando $\theta = 0$ y $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} > 0$; entonces:

$$\int_0^{\theta_M} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_M}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\int_0^t \mathrm{d}t \ ,$$

donde, evidentemente, $t = \frac{T}{4}$. Además, como

$$\cos\theta_M = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta_M}{2}\right) ,$$

se puede escribir

$$2\sqrt{\frac{2g}{l}}t = \int_0^{\theta_M} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\left(\frac{\theta_M}{2}\right)\sqrt{1-\sin^2\varphi}} ,$$

esto en virtud de que al ser $\theta \leq \theta_M$, se puede escribir

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_M}{2}\right)\sin\varphi .$$

Con lo que finalmente se tiene:

$$\boxed{T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\theta_M}{2}\right)\sin^2\varphi}}} .$$

La integral anterior tiene la forma de una *integral elíptica*, por lo que previamente se verán algunas propiedades de las mismas.

**Integrales elípticas.** Se tienen dos clases de integrales elípticas:

**Integral elíptica de primera clase:**

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}} .$$

**Integral elíptica de segunda clase:**

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-m\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta .$$

Recordando el desarrollo en serie del binomio de Newton:

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!}x^n = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots ,$$

por lo que

$$\frac{1}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}} = 1+\frac{1}{2}m\sin^2\theta+\frac{3}{8}m^2\sin^4\theta+\frac{15}{48}m^3\sin^6\theta+\cdots\ ,$$

que se puede escribir

$$\frac{1}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}m^n\sin^{2n}\theta\ ,$$

donde

$$\begin{aligned}(2n)!! &= 2n(2n-2)(2n-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2\\ (2n-1)!! &= (2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\ .\end{aligned}$$

Entonces, reemplazando en la integral

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-m\sin^2\varphi}},\quad ,\quad \text{con}\quad m=\sin^2\left(\frac{\theta_M}{2}\right)\ ,$$

lo que da

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}m^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\mathrm{d}\varphi\ .$$

Por otro lado, usando la función $\beta$, se puede encontrar

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\ ,$$

por lo que el *período para un péndulo simple sin amortiguamiento* es:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\tfrac{l}{g}}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n-1)!!]^2}{[2n!!]^2}\left[\sin^2\left(\frac{\theta_M}{2}\right)\right]^n}\ .$$

Hallando los primeros términos de la serie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_M}{2}\right)+\frac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\theta_M}{2}\right)+\frac{225}{2304}\sin^6\left(\frac{\theta_M}{2}\right)+\cdots\right]\ .$$

Evidentemente, si $\theta_M$ es pequeño, se podrá hacer la aproximación $\sin\theta_M \approx \theta_M$, con lo que el período adquiere la forma conocida de Física Básica:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

El período para un péndulo simple con amplitudes pequeñas, podía haberse obtenido de la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{s} = -mg\sin\theta \quad , \quad \text{con } s = l\theta\ ,$$

lo que da

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0\ ,$$

y aplicando la aproximación de pequeños ángulos (menores a 15º), se tendrá:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0\ ,$$

con lo que la *frecuencia* será $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{g}{l}$, y finalmente, el período será $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.