

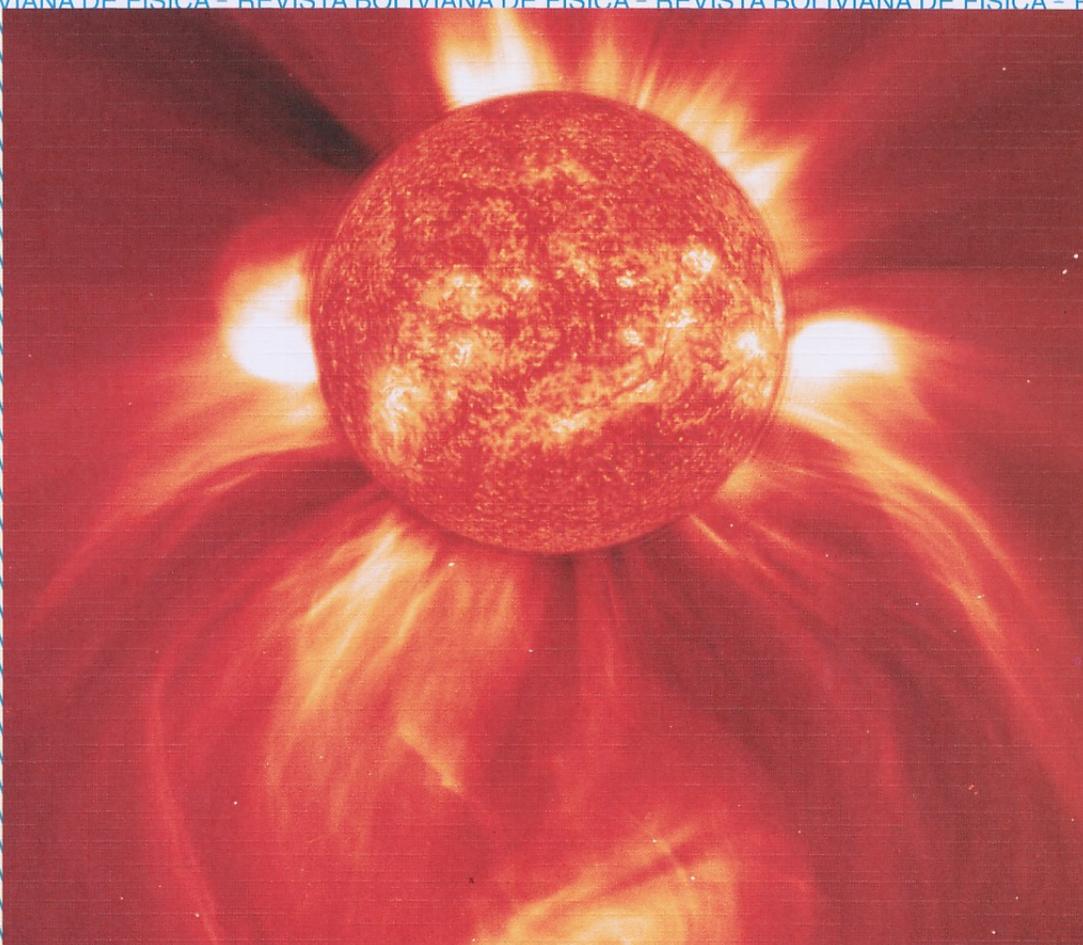
ISSN - 1562-3823

Indexada en PERIODICA

# REVISTA BOLIVIANA DE FISICA

NUMERO 13

OCTUBRE 2007 - LA PAZ - BOLIVIA



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FISICAS  
CARRERA DE FISICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FISICA

---

## REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

Ésta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

### COMITÉ EDITORIAL

#### Sociedad Boliviana de Física

**Dr. Diego Sanjinés Castedo**

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: sanjines@fiumsa.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax:(591-2)2792622

#### Instituto de Investigaciones Físicas

**Lic. Alfonso Velarde Chávez**

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: avelarde@fiumsa.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax:(591-2)2792622

#### Carrera de Física

**Lic. Deterlino Urzagasti**

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: urza@fiumsa.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax:(591-2)2792622

---

### CONSEJO EDITORIAL

#### **Dra. Lydia S. Cidale**

Facultad de Ciencias Astrnómicas y Geofísicas

Universidad Nacional de La Plata

La Plata-Argentina

e-mail: jmuzzio@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar

#### **Dr. Juan C. Muzzio**

Facultad de Ciencias Astrnómicas y Geofísicas

Universidad Nacional de La Plata

La Plata-Argentina

e-mail: jmuzzio@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar

#### **Dr. Oscar Antonio Rondón**

Institute of Nuclear and Particle Physics

University of Virginia

McCormick Road, Charlottesville, VA 22901

804 924-6787, USA

e-mail: or@virginia.edu

#### **Dr. Oscar Saavedra**

Dipartimento di Fisica Generale

Universita di Torino, Italia

e-mail: saavedra@to.infn.it

#### **Dr. Paulo Murilo Castro de Oliveira**

Instituto de Fisica

Universidade Federal Fluminense

C.P. 1002966, Niterói, RJ-Brasil

e-mail: pmco@regulus.if.uff.br

#### **Dr. Carlos Navia**

Instituto de Física

Universidade Federal Fluminense

Av. Gen. Milton Tavares de Souza

24210-340, Niterói, RJ-Brasil

e-mail: gfcnoj@portela.if.uff.br

#### **Dr. Edison H. Shibuya**

Instituto de Fisica Gleb Wataghin

Universidade Estadual de Campinas

C.P. 6165, 13.083-970 Campinas, SP-Brasil

e-mail: shibuya@ifi.unicamp.br

#### **Dr. Piero Galeotti**

Dipartimento di Fisica Generale

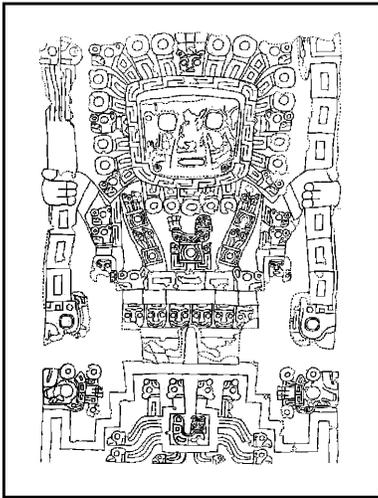
Universita di Torino, Italia

e-mail: galeotti@to.infn.it

---

ISSN 1562-3823

Indexada en PERIODICA



# Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS  
CARRERA DE FÍSICA  
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS  
Y  
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 13  
OCTUBRE DE 2007

## Revista Boliviana de Física

**ISSN 1562-3823**

**Indexada en PERIODICA**

<http://biblioweb.dgsca.unam.mx/latindex>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.  
Casilla 8635, La Paz, Bolivia

*Editores:* Alfonso Velarde Ch., Diego Sanjinés C. y Deterlino Urzagasti.

*Dirección:* Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.  
Tel: (591 2)2792999; FAX: (591 2)2792622.

*Portada:* En esta ocasión y con motivo del Año Heliofísico Internacional presentamos en nuestra portada una imagen del Sol obtenida por la sonda espacial SOHO (*Solar Heliospheric Observatory*) que muestra la eyección de grandes cantidades de masa coronal.

IMPRESO EN BOLIVIA - PRINTED IN BOLIVIA

## CONTENIDO

### A. ARTÍCULOS

COMPORTAMIENTO SÍNCRONO DE OSCILADORES DE RELAJACIÓN IDÉNTICOS GLOBALMENTE ACOPLADOS POR PULSOS <i>G. M. Ramírez Ávila, J.-L. Guisset &amp; J.-L. Deneubourg</i>	1
MEDIDAS DE ALBEDO EN EL SALAR DE UYUNI <i>Marcos F. Andrade, Francesco Zaratti</i>	11
SONIDOS PULSANTES: SILBATOS DOBLES PREHISPÁNICOS ¿Una estética ancestral reiterativa? <i>Arnaud Gérard A.</i>	18
OBSERVACIÓN SIMULTÁNEA DE NEUTRONES SOLARES EN ASOCIACIÓN CON UNA FULGURACIÓN SOLAR DEL 7 DE SEPTIEMBRE DE 2005 <i>E. Ricaldi et al.</i>	29
PRIMERA APROXIMACIÓN A LA ACÚSTICA DE LA “TARKA” <i>Arnaud Gérard A.</i>	33
EMISIÓN NEUTRÓNICA SOLAR DE LARGA DURACIÓN COMPARADA CON LA RADIACIÓN PRODUCIDA POR ELECTRONES EN LA FULGURACIÓN SOLAR DEL 7 DE SEPTIEMBRE DE 2005 <i>T. Sako et al.</i>	39

### B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

CIRCULACIÓN ATMOSFÉRICA SOBRE TERRITORIO BOLIVIANO DURANTE LA FASE ACTIVA Y PASIVA DEL MONZÓN SUDAMERICANO <i>Andrés W. Burgoa Mariaca</i>	45
DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN LÁSER SÓLIDO PULSADO DEL TIPO YAG: ND <sup>+++</sup> <i>Omar Alberto Ormachea Muñoz</i>	54
ESTUDIO DE DOS CIRCUITOS CAÓTICOS <i>G. Conde S., G. M. Ramírez A.</i>	58
LA ATMÓSFERA DE LA PAZ EN LA NOCHE DE SAN JUAN <i>Marcos F. Andrade, Francesco Zaratti</i>	75
UNA DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE ONDAS PLANAS PARA EL CÁLCULO DE BANDAS FOTÓNICAS <i>Archuleta-García et al.</i>	79

## CONTENIDO

EXTENSIÓN DEL PROCESO DE ORNSTEIN-UHLENBECK PARA LA DESCRIPCIÓN DEL CRECIMIENTO ECONÓMICO EN UNA SOCIEDAD SUJETA A AMENAZA DELINCUENCIAL	<i>Subieta M.A. &amp; Ramírez G.M.</i>	87
COPENHAGUEN	<i>Michael Frayn</i>	98
<b>C. MEMORIAS DE LA REUNIÓN ANUAL DE LA SOBOFI U OTRAS REUNIONES DE FÍSICA</b>		
XVIII REUNIÓN NACIONAL DE LA SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA “FÍSICA, SOCIEDAD Y DESARROLLO” DEL 25 AL 28 DE OCTUBRE DE 2006 ORURO-BOLIVIA	<i>SOBOFI</i>	131
<b>D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA</b>		
12 <sup>ava</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA	<i>Bustos R. et al.</i>	135
ENSEÑANZA DE LA FÍSICA MEDIANTE EL USO DE JUGUETES	<i>Ximena Canedo</i>	166

# COMPORTAMIENTO SÍNCRONO DE OSCILADORES DE RELAJACIÓN IDÉNTICOS GLOBALMENTE ACOPLADOS POR PULSOS

G. M. Ramírez Ávila<sup>1</sup>, J.-L. Guisset<sup>2</sup> & J.-L. Deneubourg<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
Casilla 8635. La Paz, Bolivia*

<sup>2</sup>*Centre for Nonlinear Phenomena and Complex Systems  
Université Libre de Bruxelles  
CP231 Campus Plaine, Bld. du Triomphe 1050. Bruselas, Bélgica*

## RESUMEN

Se estudia la sincronización en conjuntos de tres tipos de osciladores de relajación globalmente acoplados por pulsos. El estudio está restringido al caso de osciladores idénticos y se consideran acoplamientos globales con la aproximación de campo medio y del tipo dependiente con la distancia entre osciladores. Las características de los osciladores son tales que se va desde una situación de osciladores fotocontrolados reales y simplificados descritos en [1][2] a osciladores idealizados de integración y disparo [3]. Para el estudio de la sincronización, se utilizan los criterios del período y de la diferencia de fases introducidos en [4][5]. Finalmente, se analizan y comparan las duraciones de los transientes para todos los casos estudiados así como su relación con la probabilidad de sincronización total.

*Descriptor: Sincronización, Acoplamiento Global, Comportamientos Colectivos.*

## 1. INTRODUCCIÓN

La sincronización en conjuntos de osciladores acoplados ha merecido la atención de muchos científicos sobre todo a partir del s. XX. A. Winfree publica en 1967 un artículo en el que hace un análisis de poblaciones de osciladores de relajación generalizados a los cuales los relaciona con ritmos biológicos [6]. En 1975, C. Peskin formula un modelo para el marcapasos cardiaco en base a osciladores inspirados en circuitos RC [7]. R. Mirollo y S. Strogatz publican en 1990 un artículo en el que introducen un modelo simplificado denominado oscilador de integración y disparo (integrate-and-fire oscillator) que se constituye en un paradigma de osciladores que se acoplan y sincronizan por medio de pulsos [3]; este modelo permitió la explicación de la sincronización en sistemas tales como luciérnagas, células cardíacas y neuronas entre otros. Numerosos trabajos han sido consagrados a estudiar acoplamientos globales entre diferentes tipos de osciladores. Así, se pueden citar investigaciones relacionadas con neuronas [8][9], con juntas de Josephson [10][11], con sistemas químicos [12][13] o simplemente con mapas [14][15][16] y osciladores en general [17][18][19]. En el presente artículo nos concentramos en tres tipos de osciladores que parecen tener una gran similitud entre si ya que todos son osciladores de relajación y su dinámica es tal que tienen un comportamiento pulsátil. Son justamente los pulsos que posibilitan el acoplamiento en ensamblajes de cada uno de estos tipos de osciladores. En este artículo, se estudia y caracteriza

el comportamiento síncrono en configuraciones de acoplamiento global con una aproximación de campo medio (Fig. 1(a)) y en la situación más real de una dependencia del acoplamiento con la distancia (Fig. 1(b))<sup>1</sup>. En § 2 se describen los osciladores y se contextualizan los mismos de manera que los resultados obtenidos puedan ser comparables. En § 3 se presentan los resultados relacionados con la sincronización total de los conjuntos de osciladores considerando los criterios de sincronización del período y de la diferencia de fases introducidos en [4][5] y considerando un acoplamiento con la aproximación de campo medio (§ 3.1.1) y otro del tipo dependiente con la distancia (§ 3.2.1). Asimismo, en § 3.1.2 y § 3.2.2 se comparan los transientes (intervalos de tiempo en los que se alcanza la sincronización estable de la población total de osciladores) para las situaciones de acoplamiento mencionadas anteriormente. Finalmente, en § 4 se discuten los resultados y se hace una crítica a los modelos simplificados que en algunas ocasiones pueden conducir a resultados no muy concordantes con la realidad; también se dan las perspectivas de esta investigación.

## 2. OSCILADORES DE RELAJACIÓN PULSÁTILES

Los osciladores de relajación fueron denominados así desde los trabajos pioneros de van der Pol en 1926. La característica esencial de estos osciladores es la de tener dos escalas de tiempo, en las que tienen lugar movimien-

<sup>1</sup>La Fig. 1 fue obtenida utilizando el programa especializado en diagramación de redes ©yEd Graph Editor.

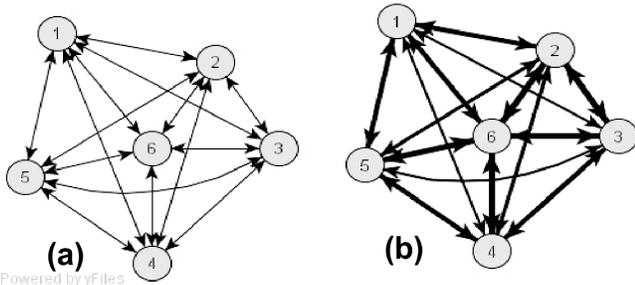


Figura 1. Configuraciones de osciladores globalmente acoplados. (a) Aproximación de campo medio. (b) Dependencia con la distancia entre los osciladores. Los sentidos y el grosor de las flechas indican la direccionalidad del acoplamiento (doble flecha significa acoplamiento mutuo) entre osciladores y la intensidad del acoplamiento respectivamente.

tos rápidos y lentos en el espacio de fases [20]. Por este motivo, la forma de la oscilación es muy lejana a una función senoidal y mas bien es parecida a una secuencia de pulsos [21] o a una onda de tipo diente de sierra [22]. Muchas investigaciones han sido dedicadas a los osciladores de relajación ya sea para describir ciertas propiedades de estos [23] o para aplicarlos en fenómenos biológicos que describen ritmos circadianos, respiración [24], comportamientos neuronales [25]; en sistemas químicos [26]; en circuitos electrónicos [27][28]; para el análisis de ritmos y compases musicales [29]; y principalmente para estudiar la sincronización en diferentes contextos [30][31][32]. En el presente trabajo, analizamos los osciladores fotocontrolados, para los cuales utilizamos la abreviación LCOs (proveniente de Light-Controlled Oscillators) [5] y los osciladores de integración y disparo cuya abreviatura es IFOs (de su nombre en inglés, Integrate-and-Fire Oscillators) [3].

### 2.1. Osciladores fotocontrolados (LCOs)

Estos osciladores fueron introducidos desde el punto de vista experimental en 2001 [28][33] y varios trabajos que analizan su comportamiento síncrono fueron realizados [1][34][2][4][35][5][36]. Los LCOs son osciladores de relajación que emiten pulsos luminosos durante la parte rápida de variación de voltaje, a través de los LEDs que poseen. Están provistos igualmente de fotosensores, lo que permite a los LCOs acoplarse por medio de los destellos que emiten y reciben. Considerando que el acoplamiento  $\beta_{ij}$  entre pares de LCOs  $i$  y  $j$  es simétrico ( $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ ), que el término  $\delta_{ij} = 1$  cuando los LCOs pueden interactuar, y que la variable binaria  $\epsilon_i(t)$  es el estado del oscilador que toma el valor 1 (etapa de carga) ó 0 (etapa de descarga). Las ecuaciones que describen la dinámica de un conjunto de  $N$  LCOs son:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda_i[(V_{Mi} - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma_i V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)], \quad i \neq j, \quad (1)$$

donde  $V_{Mi}$  es el voltaje de la fuente para cada oscilador  $i$  y gracias a un chip basculante LM555 (flip-flop) trabajando en modo astable, se establecen umbrales superior (para  $2V_{Mi}/3$ ) e inferior (para  $V_{Mi}/3$ ), lo que permite la oscilación. Dado que se tienen dos circuitos RC que permiten la carga y la descarga, los coeficientes  $\lambda_i$  y  $\gamma_i$  están en función de los valores de las resistencias  $R_{\lambda i}$ ,  $R_{\gamma i}$  y del condensador  $C_i$  de la forma:

$$\lambda_i = \frac{1}{(R_{\lambda i} + R_{\gamma i})C_i} \quad ; \quad \gamma_i = \frac{1}{R_{\gamma i}C_i} \quad (2)$$

Por otra parte, para un LCO que no recibe la acción de otros, su período natural [34] viene dado por:

$$T_{0i} = (R_{\lambda i} + 2R_{\gamma i})C_i \ln 2. \quad (3)$$

### 2.2. Osciladores de integración y disparo (IFOs)

Como se mencionó anteriormente, estos osciladores fueron introducidos por Peskin en 1975 para tratar de modelizar marcapasos cardíacos [7] y en 1990, Mirollo y Strogatz simplifican el modelo y lo hacen fácilmente tratable, definiendo un umbral superior ( $V_i = 1$ ) hasta el cual ocurre el proceso de carga (“integración”) y una vez que se ha alcanzado éste, el IFO se descarga (“disparo”) instantáneamente hasta la línea de base ( $V_i = 0$ ) [3]. Las ecuaciones que describen los IFOs en su formas más prístina tienen la forma:

$$\frac{dV_i}{dt} = I_i - \eta_i V_i, \quad 0 \leq V_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Los IFOs se acoplan por medio de pulsos y cuando un IFO dispara, todas las otras variables  $V_j$ ,  $j \neq i$ , se incrementan una cantidad  $\beta/N$ . Se hace la división por  $N$ , para tener un comportamiento razonable en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ . Es decir,

$$\text{Si } V_i(t) = 1 \implies V_j(t^+) = \min\left(1, V_j(t) + \frac{\beta}{N}\right), \quad \forall j \neq i. \quad (5)$$

Una integración sencilla de (4) para un IFO, permite hallar su período natural:

$$T_{0i} = \frac{1}{\eta_i} \ln \frac{I_i}{I_i - \eta_i}. \quad (6)$$

Nótese que en la formulación de las ecuaciones (4) y (5), se ha supuesto implícitamente un acoplamiento global de los IFOs, sin que las distancias entre los mismos jueguen algún rol; es decir, todos los IFOs están acoplados a los demás, con un mismo valor de acoplamiento, esto es lo que denominaremos “aproximación de campo medio”. Una primera modificación que se puede hacer a (5) para que se tenga en cuenta acoplamientos que no son los mismos entre pares de IFOs es el considerar

$$\text{Si } V_i(t) = 1 \implies V_j(t^+) = \min\left(1, V_j(t) + \sum_{i=1}^N \beta_{ij} \delta_{ij}\right), \quad \forall j \neq i. \quad (7)$$

Aquí,  $\beta_{ij}$  y  $\delta_{ij}$  tienen el mismo significado que en el caso de los LCOs. Como se pretende hacer una comparación de los LCOs e IFOs, expresaremos las ecuaciones que describen a los IFOs y sus acoplamientos en términos de las mismas variables que los LCOs, lo que da:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda'_i[(V_{Mi} - V_i(t))], \quad i = 1, \dots, N, \quad (8)$$

con

$$\lambda'_i = \frac{1}{(R\lambda_i + 2R_{\gamma i})C_i} = \frac{\lambda_i}{1 + R_{\gamma i}C_i\lambda_i}, \quad (9)$$

siendo el intervalo de variación del voltaje  $\frac{V_{Mi}}{3} \leq V_i \leq \frac{2V_{Mi}}{3}$ . Además, cuando existe acoplamiento entre IFOs, se tendrá:

$$\begin{aligned} \text{Si } V_j(t) = \frac{2V_{Mj}}{3} &\implies \\ V_i(t^+) = \min \left( \frac{2V_{Mi}}{3}, V_i(t) + \sum_{j=1}^N \beta_{ij}\delta_{ij} \right), &\quad \forall i \neq j. \end{aligned} \quad (10)$$

Utilizando (8), se puede calcular el período natural de un IFO de este tipo que coincide con (3), es decir, el de un LCO. Con lo anterior, se pueden comparar los resultados a obtenerse con LCOs e IFOs.

### 3. SINCRONIZACIÓN TOTAL EN LCOS E IFOS

Para nuestros fines, el término sincronización total, se refiere a la situación en la que todos los osciladores de una determinada población llegan a sincronizarse de forma estable. Para el análisis, utilizaremos la probabilidad de sincronización total (*PST*) para cada población de osciladores. La *PST* está en relación al porcentaje de experimentos numéricos en los cuales se alcanza la sincronización total. Para el análisis, se utilizan dos criterios de sincronización cuyos detalles están especificados en [4][5]: el criterio del período (CP) y el criterio de la diferencia de fases (CDF). El CP solamente exige que los períodos de todos los osciladores de un determinado ensamble tengan el mismo período para poder referirnos a la sincronización total, en tanto que el CDF, además de la igualdad de períodos, exige que las diferencias de fase entre los osciladores sea prácticamente nula; es decir, que los osciladores emitan sus pulsos casi simultáneamente. Además, tomamos poblaciones que van de 2 a 25 osciladores idénticos, para las cuales hacemos experimentos numéricos considerando acoplamientos con una aproximación de campo medio y acoplamientos que dependen de la distancia entre los osciladores según la relación expuesta en [34]. Los tipos de osciladores con los cuales trabajamos son: LCOs, LCOs simplificados (considerando que el tiempo de descarga es constante) e IFOs.

#### 3.1. Aproximación de campo medio

En este caso, se considera que todos los osciladores están acoplados de la misma manera y con una intensidad de acoplamiento común para todos  $\frac{\beta_{\text{ref}}}{N}$  y como el acoplamiento es global,  $\delta_{ij} = 1$ . Por otra parte, como se

consideran osciladores idénticos, las cantidades  $\lambda$ ,  $\gamma$  y  $V_M$  son iguales para todos los osciladores y como se tienen  $N$  osciladores, los índices en las ecuaciones  $i, j = 1, \dots, N$  deben ser diferentes  $i \neq j$ . Las ecuaciones para cada uno de los tipos de osciladores con los cuales trabajamos son:

**LCOs.** Las ecuaciones que describen el acoplamiento global entre  $N$  LCOs vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda(V_M - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] \\ + \frac{\beta_{\text{ref}}}{N} \left[ N - 1 - \sum_{j=1}^N \epsilon_j(t) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

donde se hace el cociente entre  $N$  con el fin de tener un comportamiento razonable en el límite termodinámico ( $N \rightarrow \infty$ ).

**LCOs simplificados.** En este caso, se considera que la descarga no se modifica y consecuentemente, el tiempo de descarga será también constante ( $t_\gamma = R_\gamma C \ln 2$ ). Las ecuaciones que describen el acoplamiento global de este tipo de osciladores son:

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda(V_M - V_i(t))\epsilon_i(t) \\ + \left\{ \frac{\beta_{\text{ref}}}{N} \left[ N - 1 - \sum_{j=1}^N \epsilon_j(t) \right] \right\} \epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] \end{aligned} \quad (12)$$

**IFOs.** Para el acoplamiento global de estos osciladores considerando una aproximación de campo medio se tiene:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda'(V_M - V_i(t)), \quad (13)$$

con la condición que

$$\begin{aligned} \text{Si } V_j(t) = \frac{2V_{Mj}}{3} \\ \implies V_i(t^+) = \min \left( \frac{2V_{Mi}}{3}, V_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \right), \\ \forall i \neq j. \end{aligned} \quad (14)$$

Aquí se debe aclarar que el acoplamiento entre IFOs tiene que ser mayor que el acoplamiento  $\beta_{\text{ref}}$  que se ha utilizado para los LCOs en un factor  $t_\gamma = R_\gamma C \ln 2$  que es el tiempo de descarga de un LCO; es decir, el tiempo durante el cual actúa un LCO sobre otro. Así, se tendrá:

$$\begin{aligned} \beta_{ij} = \beta_{\text{ref}} t_\gamma = \beta_{\text{ref}} R_\gamma C \ln 2, \quad \forall i, j \\ \text{y además, } i \neq j. \end{aligned} \quad (15)$$

Los valores utilizados para los parámetros son:  $V_M = 9,0$  V,  $R_\lambda = 100,0$  k $\Omega$ ,  $R_\gamma = 1,6$  k $\Omega$  y  $C = 0,47$   $\mu$ F.

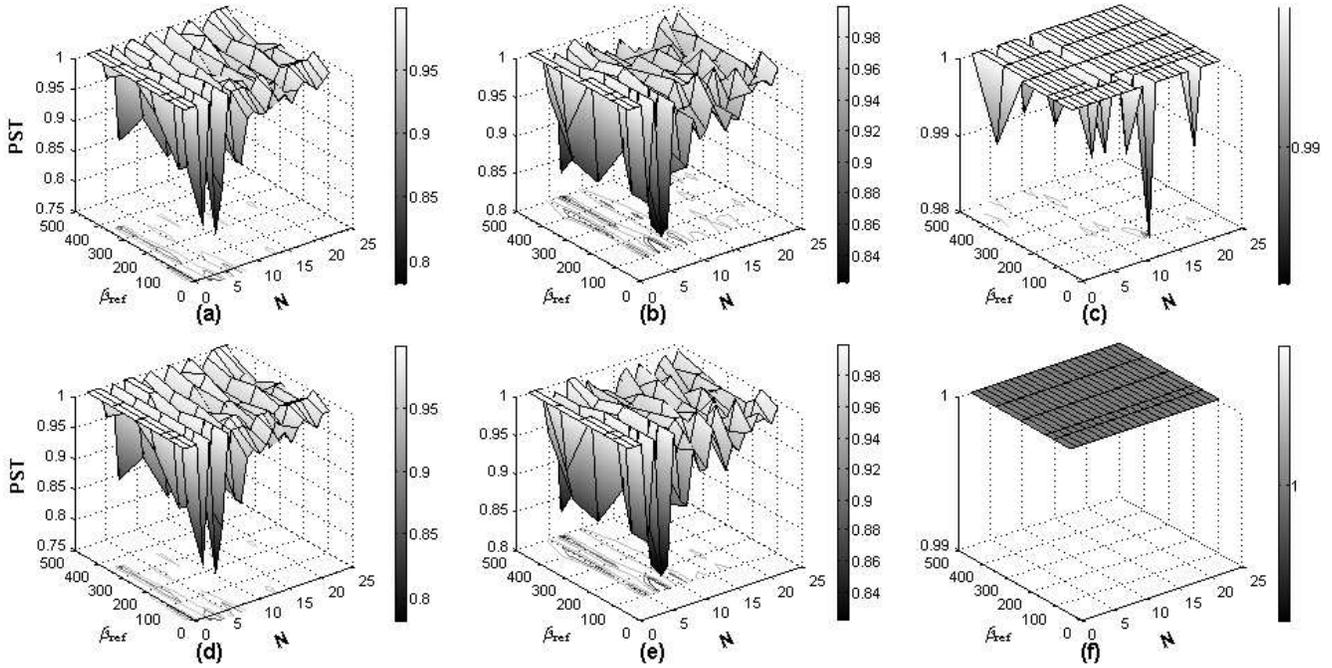


Figura 2.  $PST$  en función de  $\beta_{\text{ref}}$  y  $N$  para LCOs (a) y (d), para LCOs simplificados (b) y (e), y para IFOs (c) y (f); utilizando el CDF (a)–(c) y el CP (d)–(f).

### 3.1.1. Probabilidad de sincronización total ( $PST$ )

Para el estudio de la  $PST$  en la aproximación de campo medio, se consideraron los tres tipos de osciladores y se hicieron 100 experimentos numéricos para números de osciladores ( $N$ ) variando de 2 a 25 y valores de la intensidad de acoplamiento ( $\beta_{\text{ref}}$ ) de 100, 166, 200, 300, 400 y 500. Así mismo, para la caracterización de la  $PST$ , se consideraron los criterios de sincronización de la diferencia de fase (CDF) y del período (CP). Los resultados de los experimentos numéricos se muestran en la Fig. 2

De las Fig. 2(a) y (d), se observa que el comportamiento es muy similar, presentándose sólo pequeñas diferencias y en general, la  $PST$  para el caso del CP es ligeramente mayor en comparación a la correspondiente al CDF. Una situación parecida ocurre cuando se comparan las Fig. 2(b) y (e). Para Estas 4 situaciones, el comportamiento general de la  $PST$  es el de aumentar con  $N$  y  $\beta_{\text{ref}}$ , aunque para los LCOs, este aumento parece ser más uniforme que en el caso de los LCOs simplificados, en los cuales se nota una especie de oscilación en el aumento de la  $PST$  con  $N$ , lo que sugiere que el aumento en la  $PST$  varía dependiendo de la paridad o no en  $N$ . Sin importar  $N$ , los valores de la  $PST$  son grandes, siendo siempre mayores que 0.75 en el caso de los LCOs y mayores a 0.80 en el caso de los LCOs simplificados. Por otra parte, en el caso de los IFOs, se tiene que siempre existe sincronización si se considera el CP (ver Fig. 2(f)), en tanto que considerando el CDF (Fig. 2(c)), la  $PST$  es siempre mayor o igual a 0.98, debiéndose esta pequeña diferencia a situaciones en las cuales puede darse anti-sincronización o la formación de cúmulos de

sincronización que tienen la misma frecuencia pero que “disparan” a tiempos diferentes. Para cuantificar el valor medio de la  $PST$  para cada tipo de oscilador, se toman en cuenta las  $PST$  en función de  $N$  y de  $\beta_{\text{ref}}$  como en [5]; así, la expresión para el valor medio de la  $PST$  viene dado por:

$$\langle PST \rangle = \frac{1}{N_{\text{max}} - N_{\text{min}} + 1} \frac{\langle \Delta \beta_{\text{ref}} \rangle}{\beta_{\text{ref}}^{\text{max}} - \beta_{\text{ref}}^{\text{min}}} \times \sum_{i=N_{\text{min}}}^{N_{\text{max}}} \sum_{j=\beta_{\text{ref}}^{\text{min}}/(\Delta \beta_{\text{ref}})_{\text{max}}}^{\beta_{\text{ref}}^{\text{max}}/(\Delta \beta_{\text{ref}})_{\text{max}}+1} PST_{ij}, \quad (16)$$

donde, en nuestro caso,  $N_{\text{max}} = 25$ ,  $N_{\text{min}} = 2$ ,  $\beta_{\text{ref}}^{\text{max}} = 500$ ,  $\beta_{\text{ref}}^{\text{min}} = 100$ , y como se especificó anteriormente,  $(\Delta \beta_{\text{ref}})_{\text{max}} = 100$  y  $\langle \Delta \beta_{\text{ref}} \rangle = 66,667$ . Considerando que la desviación estándar  $\sigma_i$ ,  $i = N_{\text{min}} \dots N_{\text{max}}$ , constituye la incertidumbre cuando se calcula el valor medio de la  $PST$  para cada configuración con un número de LCOs dado. En consecuencia, se puede estimar la incertidumbre total para la  $PST$  (para todo  $N$  y para todo  $\beta_{\text{ref}}$ ), utilizando:

$$E_{PST} = \sqrt{\sum_{i=N_{\text{min}}}^{N_{\text{max}}} \sigma_i^2}. \quad (17)$$

Los valores y sus respectivas incertidumbres se muestran en la Tab. 1.

De los resultados obtenidos en la Tab. 1, se ve que la  $PST$  para LCOs simplificados es ligeramente menor que la correspondiente a los LCOs reales como resultado de las oscilaciones que presenta la  $PST$  en el caso de los

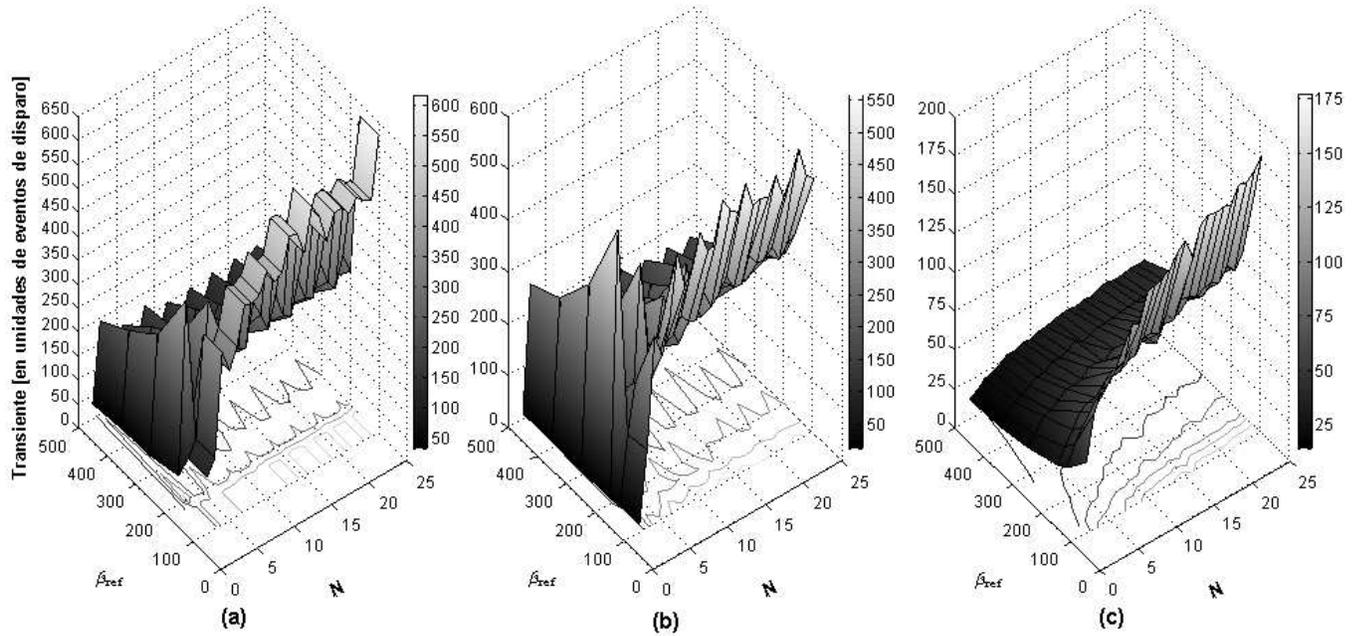


Figura 3. Transiente en función de  $\beta_{\text{ref}}$  y  $N$  para (a) LCOs, (b) LCOs simplificados, y (c) IFOs utilizando el CDF.

TABLA 1

Valores promedio e incertidumbres de las  $PST$ , utilizando todos los valores de  $N$  y  $\beta_{\text{ref}}$  para los tres tipos de osciladores globalmente acoplados utilizando la aproximación de campo medio y tomando como criterio de sincronización la constancia y limitación de las diferencias de fase y la igualdad de períodos respectivamente.

Tipo de oscilador	Criterio de sincronización	
	Diferencia de fase	Período
LCOs	$0,9669 \pm 0,0183$	$0,9681 \pm 0,0185$
LCOs simplificados	$0,9615 \pm 0,0177$	$0,9659 \pm 0,0180$
IFOs	$0,9963 \pm 0,0002$	1,0000

LCOs simplificados. Como un último comentario, destacar que los resultados obtenidos para los IFOs muestran coherencia con otros trabajos en los cuales se utilizan este tipo de osciladores [3][17][31], en el sentido en que la sincronización total es la situación más probable.

### 3.1.2. Transientes

Un aspecto interesante en la sincronización de osciladores acoplados es el estudio del transiente o el tiempo en el cual el sistema llega a la sincronización total. Los transientes para LCOs idénticos y acoplados localmente, se describieron en [5], en tanto que para IFOs localmente acoplados, estos transientes fueron estudiados en [31]. La formulación analítica para la descripción de transientes tanto para osciladores como para mapas acoplados es un problema aún abierto y sólo en algunos casos se han llegado a encontrar fórmulas explícitas para estos tran-

sientes como en el caso de bucles digitales con enganche de fase [37]; por lo que, se privilegia el cálculo numérico [38] o los resultados experimentales [27].

En la Fig. 3 se representan los transientes en unidades de eventos de disparo (eventos de encendido) para los tres tipos de osciladores considerados en función de  $N$  y  $\beta_{\text{ref}}$ , notándose que para todos los casos, la duración del transiente aumenta con  $N$  pero disminuye con  $\beta_{\text{ref}}$ , lo cual se podía intuir a partir de otros trabajos, tales como [31][5]. Sin embargo, se debe destacar que en el caso de los LCOs (reales y simplificados), la duración del transiente aumenta con  $N$  pero de forma oscilatoria, viéndose nuevamente una relación con la paridad en el número de osciladores que componen el sistema (Fig. 3(a),(b)). La situación es diferente en los IFOs, ya que el aumento en la duración del transiente con  $N$  es prácticamente continua y con una tendencia de tipo lo-

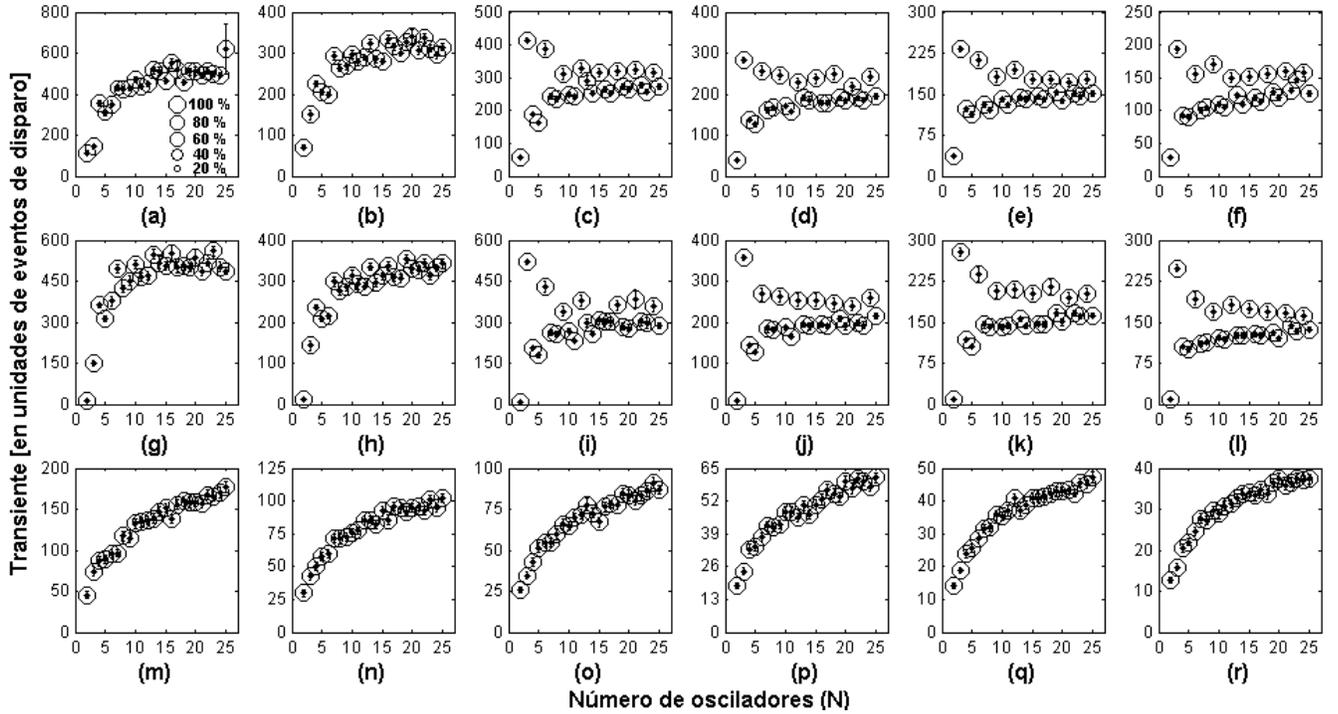


Figura 4. Transiente en función de  $N$  para (a)–(f) LCOs, (g)–(l) LCOs simplificados, y (m)–(r) IFOs utilizando el CDF. Se trabajaron con seis valores para  $\beta_{\text{ref}}$ : (a), (g), (m)  $\beta_{\text{ref}} = 100$ , (b), (h), (n)  $\beta_{\text{ref}} = 166$ , (c), (i), (o)  $\beta_{\text{ref}} = 200$ , (d), (j), (p)  $\beta_{\text{ref}} = 300$ , (e), (k), (q)  $\beta_{\text{ref}} = 400$  y (f), (l), (r)  $\beta_{\text{ref}} = 500$ .

garítmica de la forma  $t_s = a \ln(N - 1) + b$ , como se ve en la Fig. 3(c). Las tendencias citadas anteriormente se corroboran de forma más clara en la Fig. 4, en la cual se nota que para los LCOs y para valores de  $\beta_{\text{ref}}$  pequeños (acoplamiento débil), se hace evidente el ajuste a una función logarítmica de la duración del transiente en función de  $N$  (Fig. 4(a),(b),(g) y (h))

Por otra parte, la duración del transiente en todos los casos parece disminuir según una ley de potencias con  $\beta_{\text{ref}}$  de la forma

$$\langle t_s \rangle = a\beta_{\text{ref}}^{-b} + c,$$

situación que se muestra evidente en la Fig. 5.

### 3.2. Acoplamiento dependiente de la distancia

Se estudió también el caso en el cual el acoplamiento depende de la distancia entre los osciladores. Dado que se trata de un acoplamiento global entre los osciladores, para la investigación numérica, se planteó una “arena cuadrada” de  $50 \times 50$  celdas cuadradas, haciendo un total de 2500 celdas, cada una de las cuales puede ser ocupada por un oscilador. En el caso de los LCOs reales, se determinó experimentalmente que el acoplamiento ( $\beta$ ) varía con la distancia ( $r$ ) entre los osciladores de acuerdo con  $\beta_{ij} \propto \frac{1}{r_{ij}^\alpha}$ , donde se encontró que el exponente  $\alpha$  toma el valor de 2.11 [1]. Se supondrá que esta dependencia es válida también para LCOs simplificados e IFOs. Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de cada uno de los sistemas de osciladores globalmente acoplados son:

**LCOs.**

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} = & \lambda(V_M - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] \\ & + \beta_{\text{ref}} \sum_{j=1}^N [1 - \epsilon_j(t)] \left( \frac{r_{\text{ref}}}{r_{ij}} \right)^\alpha \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (18)$$

**LCOs simplificados.**

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} = & \lambda(V_M - V_i(t))\epsilon_i(t) \\ & + \left[ \beta_{\text{ref}} \sum_{j=1}^N [1 - \epsilon_j(t)] \left( \frac{r_{\text{ref}}}{r_{ij}} \right)^\alpha \delta_{ij} \right] \epsilon_i(t) \\ & - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)]. \end{aligned} \quad (19)$$

**IFOs.**

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda'[(V_M - V_i(t))], \quad (20)$$

con la condición que

$$\text{Si } V_j(t) = \frac{2V_M}{3} \implies$$

$$\begin{aligned} V_i(t^+) = & \min \left( \frac{2V_M}{3}, V_i(t) + \beta_{\text{ref}} \sum_{j=1}^N \left( \frac{r_{\text{ref}}}{r_{ij}} \right)^\alpha \delta_{ij} \right), \\ & \forall i \neq j. \end{aligned} \quad (21)$$

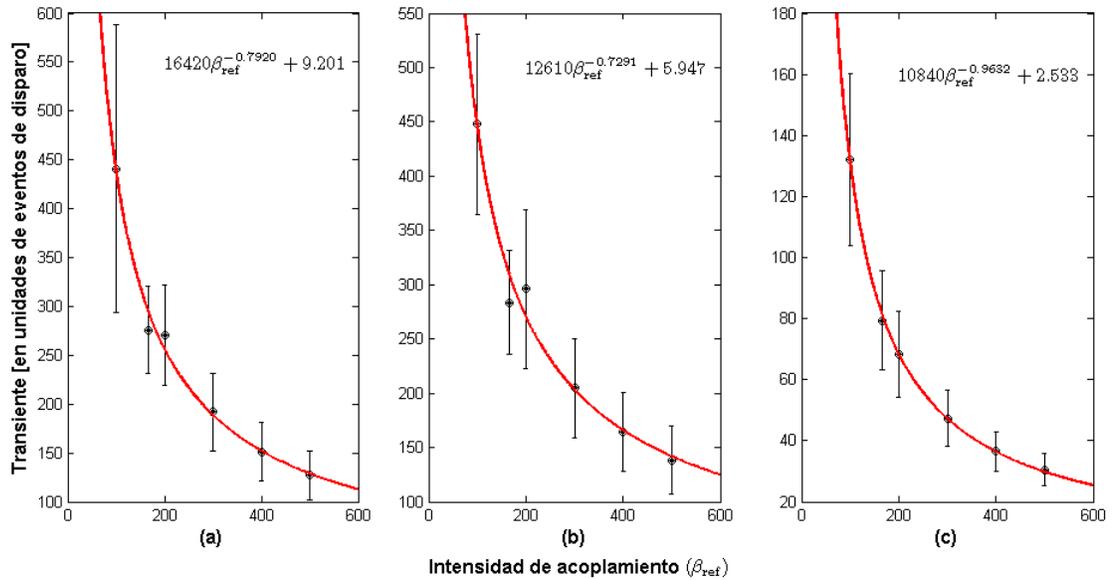


Figura 5. Transiente en función de  $\beta_{\text{ref}}$  para (a) LCOs, (b) LCOs simplificados, y (c) IFOs utilizando el CDF. La ecuación de ajuste se muestra para cada caso y la gráfica de la función correspondiente está representada por la línea continua.

Donde en todos los casos  $i, j = 1, \dots, N$  está en relación con el número de osciladores,  $\beta_{\text{ref}} = 166$  es una intensidad de acoplamiento de referencia y  $r_{\text{ref}} = 4,85$  [cm] es una distancia de referencia que justamente corresponde al valor de intensidad de acoplamiento dado por  $\beta_{\text{ref}}$ ; lo anterior fue obtenido a partir de resultados experimentales [34]. Por otra parte, se consideró también que la mínima distancia entre los osciladores debe ser de 1.8 cm, por lo que la distancia entre dos osciladores  $i, j$  se determina usando la relación:

$$r_{ij} = 1,8 \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad [\text{cm}].$$

Al igual que en el caso del estudio de la aproximación de campo medio § 3.1, para cada uno de los tipos de oscilador se realizaron 100 experimentos numéricos con condiciones iniciales aleatorias y posiciones también aleatorias. Nuevamente, el número de osciladores considerados se varió entre 2 y 25 y se tomaron los criterios de sincronización que se mencionaron al principio de esta sección. Los valores intrínsecos de los osciladores son los mismos que se utilizaron en § 3.1, lo que corresponde a un período natural de los mismos de  $T_0 = 33,62$  ms. Se consideraron también hasta 15000 eventos de disparo.

### 3.2.1. Probabilidad de sincronización total

Para el cálculo de la  $PST$ , se consideraron los tres tipos de osciladores y los criterios de sincronización utilizados anteriormente. Los resultados se muestran en la Fig. 6, de la cual se observa que la tendencia de la  $PST$  es a disminuir exponencialmente con  $N$ , en la forma:

$$PST(N) = PST(2)e^{-k(N-2)}, \quad (22)$$

siendo  $PST(2)$  la probabilidad de sincronización total cuando el sistema está compuesto por 2 osciladores y

$k$ , una constante que depende del tipo de oscilador y del criterio de sincronización que se tome. De la Fig. 6 se observa que la  $PST$  es ligeramente mayor cuando se utiliza el CP que cuando se usa el CDF; esto no es sorprendente puesto que puede ser que toda la población de osciladores tenga el mismo período pero sus eventos de encendido difieran por valores constantes y de esa manera se puedan formar grupos de osciladores que no se enciendan al mismo tiempo. Para los LCOs simplificados, en el caso de la utilización del CP, se tiene una  $PST$  unitaria para grupos de 2 y 3 osciladores (Fig. 6(e)). Otro aspecto interesante a remarcar es el hecho que para los IFOs, cuando sus acoplamientos dependen de la distancia, su  $PST$  es nula para poblaciones mayores a 10 osciladores, situación sorprendente si se recuerda que los IFOs acoplados según una aproximación de campo medio, llegaban a sincronizarse de forma rápida y con una  $PST$  unitaria. Las afirmaciones anteriores pueden ser corroboradas viendo el valor que da el ajuste para el coeficiente  $k$ ; así como la bondad del ajuste a través del coeficiente de correlación  $r^2$  que son mostrados en la Tab. 2. Los valores de  $k$  muestran que para LCOs reales y simplificados, se tiene un decrecimiento más suave cuando se considera el CP; en tanto que para IFOs, con ambos criterios de sincronización se tiene un decrecimiento abrupto.

### 3.2.2. Transientes

Para los osciladores acoplados globalmente con una dependencia en la distancia, se obtuvieron también resultados considerando el CDF para la sincronización. Estos resultados se muestran en la Fig. 7. Se observa que los transientes no tienen un comportamiento regular y por lo tanto resulta difícil el tratar de ajustar una función que relacione transientes con número de osciladores. Para los casos de LCOs y LCOs simplificados, se tienen prome-

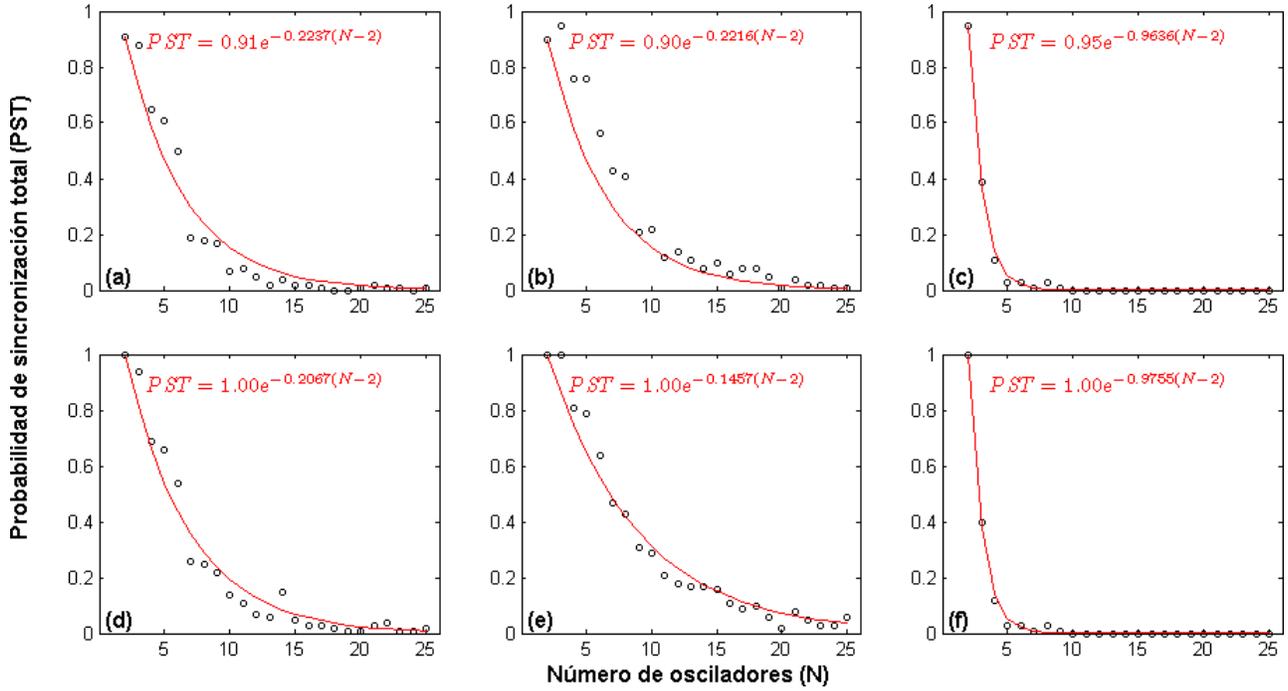


Figura 6. Resultados de la  $PST$  utilizando el CDF (arriba) y el CP (abajo) para LCOs (a) y (d), LCOs simplificados (b) y (e) e IFOs (c) y (f). La ecuación de ajuste se muestra para cada caso y la gráfica de la función correspondiente está representada por la línea continua.

TABLA 2

Valores promedio e incertidumbres del coeficiente  $k$  de (22) y coeficiente de correlación del ajuste  $r^2$  utilizando los dos criterios de sincronización y para los tres tipos de osciladores globalmente acoplados cuyo acoplamiento depende de la distancia entre los osciladores.

Criterio de sincronización	Tipo de oscilador	$k$	$r^2$
Diferencia de fase	LCOs	$0,2237 \pm 0,0314$	0.9493
	LCOs simplificados	$0,2216 \pm 0,0321$	0.9471
	IFOs	$0,9636 \pm 0,0480$	0.9969
Período	LCOs	$0,2067 \pm 0,0215$	0.9672
	LCOs simplificados	$0,1457 \pm 0,0126$	0.9711
	IFOs	$0,9755 \pm 0,0425$	0.9977

dios de transientes que pueden ser elevados, en tanto que para IFOs, los transientes son cortos, pero nuevamente resaltamos el hecho de que es muy difícil la sincronización para conjuntos de IFOs bajo esta configuración de acoplamiento.

#### 4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Los resultados obtenidos nos muestran que cuando se tiene acoplamiento global, el comportamiento de los LCOs y los LCOs simplificados es bastante parecido pero difiere notoriamente del comportamiento de los IFOs. Cuando el acoplamiento es dependiente de la distancia entre osciladores, la  $PST$  es menor que cuando el acoplamiento es de tipo campo medio; esto puede deberse a que la elección aleatoria de posiciones y condiciones iniciales se traduzca en que en algunas situaciones,

se esté en condiciones desfavorables para la sincronización, ya sea por la extrema cercanía entre osciladores o la extrema lejanía de los mismos; ambas situaciones no favorecen la sincronización puesto que en el caso de tenerse dos o más osciladores muy cercanos podría tenderse a una muerte de oscilaciones por ser la intensidad de acoplamiento muy grande. Por otra parte, si las distancias entre osciladores son muy grandes, la intensidad del acoplamiento es muy pequeña y esto se traduce en una probabilidad menor de sincronización tal como se observó en § 3.1.1. Los IFOs sincronizan rápidamente y con una  $PST$  unitaria cuando el acoplamiento es de tipo campo medio; sin embargo, cabe señalar que los IFOs que son tan populares para la modelización de diversos sistemas, presentan un comportamiento fuertemente diferente al de osciladores reales tales como los LCOs.

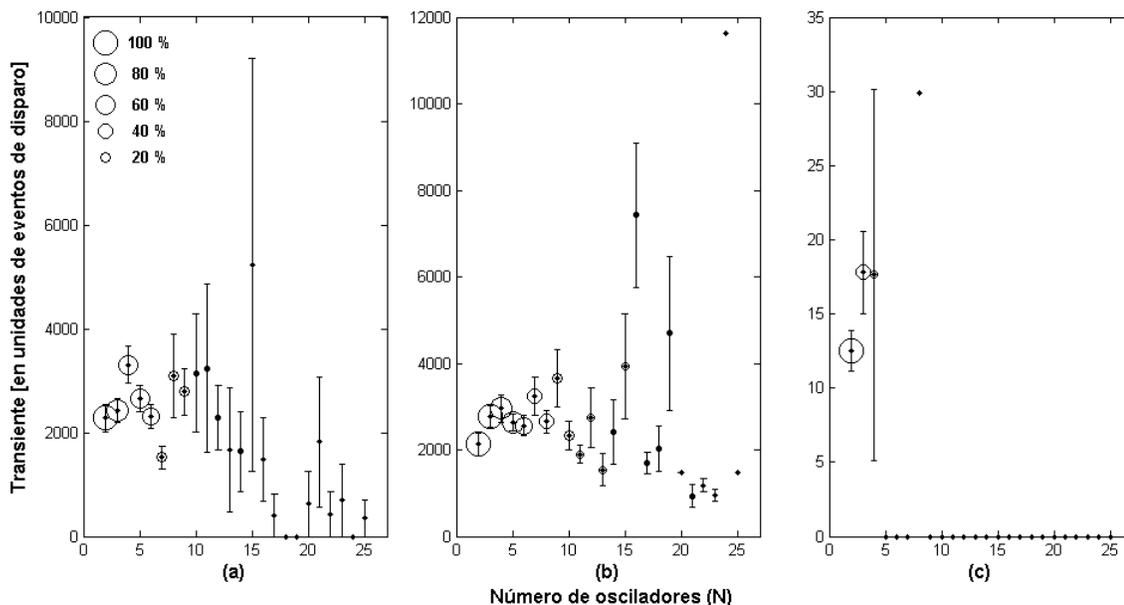


Figura 7. Transientes y  $PST$  (proporcional al tamaño de los círculos) en función del número de osciladores  $N$  para (a) LCOs, (b) LCOs simplificados y (c) IFOs, todos globalmente acoplados con un acoplamiento dependiente de la distancia entre los osciladores.

Como se señaló en § 1, a primera vista, los IFOs y los LCOs parecen ser muy similares pero las pequeñas diferencias conducen en algunos casos a comportamientos totalmente diferentes sobre todo cuando el acoplamiento es dependiente de la distancia entre osciladores. Estos resultados también sugieren la formación de cúmulos de osciladores sincronizados en cada población lo que podría dar lugar a patrones espacio-temporales si se considera que cada evento de encendido corresponde a la emisión de un flash luminoso. Parece existir además una influencia dada por la paridad en el número de osciladores que hace que aparezca una especie de oscilación en el crecimiento del valor de la  $PST$  en función del número de osciladores. El estudio de otras topologías de red se presenta como una perspectiva interesante en el sentido de analizar la influencia de la red en la sincronización de la población de osciladores

### Agradecimientos

Se agradece a los organizadores de la XV Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics (MEDYFINOL'06) por la invitación que permitió que parte de los resultados de este artículo sean comunicados en dicha conferencia que se llevó a cabo en Mar del Plata, Argentina del 4 al 8 de diciembre de 2006.

### REFERENCIAS

- [1] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Synchronization in light-controlled oscillators," *Physica D*, **182**, 3–4, 254–273, 2003.
- [2] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Estudio de la sincronización en un sistema de dos osciladores idénticos controlados por luz," *Rev. Bol. Fis.*, **10**, 1–7, 2004.
- [3] R. E. Mirollo & S. H. Strogatz, "Synchronization of pulse-coupled biological oscillators," *SIAM J. App. Math.*, **50**, 6, 1645–1662, 1990.
- [4] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Synchronization in chains of light-controlled oscillators," *J. of Phys.: CS*, **23**, 252–258, 2005.
- [5] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, "Sincronización y transientes en configuraciones unidimensionales de osciladores fotocontrolados localmente acoplados," *Rev. Bol. Fis.*, **12**, 1–7, 2006.
- [6] A. T. Winfree, "Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators," *J. Theor. Biol.*, **16**, 15–42, 1967.
- [7] C. Peskin, "Mathematical aspects of heart physiology," 1975.
- [8] D. H. Zanette & A. S. Mikhailov, "Mutual synchronization in ensembles of globally coupled neural networks," *Phys. Rev. E*, **58**, 872–875, 1998.
- [9] M. Majtanik, K. Dolan, & P. A. Tass, "Desynchronization in networks of globally coupled neurons with dendritic dynamics," *J. Biol. Physics*, **32**, 3, 307–333, 2006.
- [10] K. Y. Tsang, R. E. Mirollo, S. H. Strogatz, & K. Wiesenfeld, "Dynamics of a globally coupled oscillator array," *Physica D*, **48**, 1, 102–112, 1991.
- [11] J. W. Swift, S. H. Strogatz, & K. Wiesenfeld, "Averaging of globally coupled oscillators," *Physica D*, **55**, 3–4, 239–250, 1992.
- [12] W. Wang, I. Z. Kiss, & J. L. Hudson, "Experiments on arrays of globally coupled chaotic electrochemical oscillators: Synchronization and clustering," *Chaos*, **10**, 1, 248–256, 2000.
- [13] K. Miyakawa & K. Yamada, "Synchronization and clustering in globally coupled salt-water oscillators," *Physica D*, **151**, 2–4, 217–227, 2001.
- [14] A. S. Pikovsky & J. Kurths, "Collective behavior in ensembles of globally coupled maps," *Physica D*, **76**, 4, 411–419, 1994.

- [15] S.-J. Baek & E. Ott, “Onset of synchronization in systems of globally coupled chaotic maps,” *Phys. Rev. E*, **69**, 6, 066210, 2004.
- [16] M.-C. Ho, Y.-C. Hung, & I. M. Jiang, “Phase synchronization in inhomogeneous globally coupled map lattices,” *Phys. Lett. A*, **324**, 5–6, 450–457, 2004.
- [17] S. Bottani, “Synchronization of integrate and fire oscillators with global coupling,” *Phys. Rev. E*, **54**, 3, 2334–2350, 1996.
- [18] H. Hong, H. Park, & M. Y. Choi, “Collective synchronization in spatially extended systems of coupled oscillators with random frequencies,” *Phys. Rev. E*, **72**, 3, 036217–18, 2005.
- [19] J. Rougemont & F. Naef, “Collective synchronization in populations of globally coupled phase oscillators with drifting frequencies,” *Phys. Rev. E*, **73**, 1, 011104–5, 2006.
- [20] T. Kapitaniak & S. R. Bishop, *The Illustrated Dictionary of Nonlinear Dynamics and Chaos*. Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [21] A. Pikovsky, M. Rosenblum, & J. Kurths, *Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences*. New York: Cambridge University Press, 2001.
- [22] M. Beckerman, *Adaptive Cooperative Systems*. Wiley Series on Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications, and Control, New York, NY: John Wiley & Sons, 1997.
- [23] R. Perez Pascual & J. Lomnitz-Adler, “Coupled relaxation oscillators and circle maps,” *Physica D*, **30**, 1-2, 61–82, 1988.
- [24] L. Glass & M. C. Mackey, *From Clocks to Chaos. The Rhythms of Life*. Princeton: Princeton University Press, 1988.
- [25] S. Coombes, “Phase locking in networks of synaptically coupled McKean relaxation oscillators,” *Physica D*, **160**, 3-4, 173–188, 2001.
- [26] I. Z. Kiss, Y. Zhai, & J. L. Hudson, “Emerging coherence in a population of chemical oscillators,” *Science*, **296**, 5573, 1676–1678, 2002.
- [27] A. A. Brailove & P. S. Linsay, “An experimental study of a population of relaxation oscillators with a phase-repelling mean-field coupling,” *Int. J. Bif. & Chaos*, **6**, 7, 1211–1253, 1996.
- [28] J. L. Guisset, G. M. Ramírez Ávila, & J. L. Deneubourg, “Construcción de osciladores controlados por luz y medida de su comportamiento síncrono,” *Rev. Bol. Fis.*, **7**, 102–114, 2001.
- [29] D. Eck, “A network of relaxation oscillators that finds downbeats in rhythms,” in *Artificial Neural Networks-ICANN 2001* (G. Dorffner, ed.), (Berlin), 1239–1247, Springer, 2001.
- [30] T. L. Carroll, J. Heagy, & L. M. Pecora, “Synchronization and desynchronization in pulse coupled relaxation oscillators,” *Phys. Lett. A*, **186**, 3, 225–229, 1994.
- [31] S. R. Campbell, D. L. Wang, & C. Jayaprakash, “Synchrony and desynchrony in integrate-and-fire oscillators,” *Neural Comput.*, **11**, 7, 1595–1619, 1999.
- [32] S. R. Campbell, W. DeLiang, & C. Jayaprakash, “Synchronization rates in classes of relaxation oscillators,” *Neural Networks*, **15**, 5, 1027–1038, 2004.
- [33] J.-L. Guisset, J.-L. Deneubourg, & G. M. Ramírez Ávila, “The phase information associated to synchronized electronic fireflies,” *arXiv.nlin.AO/0206036*, 2002.
- [34] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, “Synchronous behavior in small populations of light-controlled oscillators,” in *11th International IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems* (R. Stoop, ed.), (Scuol/Schuls, Switzerland), 201–204, 2003.
- [35] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, “Influencia del ruido en la sincronización de dos osciladores fotocontrolados,” *Rev. Bol. Fis.*, **11**, 44–51, 2005.
- [36] G. M. Ramírez Ávila, J. L. Guisset, & J. L. Deneubourg, “Influence of uniform noise on two light-controlled oscillators,” *a publicarse en International Journal of Bifurcation and Chaos (December 2007)*, 2007.
- [37] G. Goldsztein & S. H. Strogatz, “Stability of synchronization in networks of digital phase-locked loops,” *Int. J. Bif. & Chaos*, **5**, 4, 983–990, 1995.
- [38] A. Politi, R. Livi, G.-L. Oppo, & R. Kapral, “Unpredictable behaviour in stable systems,” *Europhys. Lett.*, **22**, 571, 1993.

## MEDIDAS DE ALBEDO EN EL SALAR DE UYUNI<sup>1</sup>

Marcos F. Andrade<sup>2</sup>, Francesco Zaratti<sup>3</sup>

*Laboratorio de Física de la Atmósfera  
Instituto de Investigaciones Físicas  
FCPN—UMSA*

### RESUMEN

Se estudió el efecto de superficies altamente reflectantes sobre la irradiancia ultravioleta eritémicamente efectiva. Para este fin se realizaron medidas en el Salar de Uyuni ubicado en la parte sur de Bolivia. El Salar es el más grande del mundo con una superficie aproximada de 12 000 km<sup>2</sup>. La característica más destacable del Salar para este estudio es la homogeneidad óptica de su superficie durante la mayor parte del año. Además, al estar situado a 3800 m snm, el lugar recibe intensidades de UV relativamente altas en condiciones de baja contaminación atmosférica. Las medidas de albedo realizadas por un radiómetro UV para radiación eritémicamente efectiva muestran un valor de  $0.69 \pm 0.02$ . Este valor tiene una dependencia muy débil de la altura del sol lejos de las orillas del Salar lo cual indica la homogeneidad óptica de la superficie del mismo. Sin embargo, cerca de las orillas del Salar el efecto de borde es considerable. Para una elevación del sol del orden de 50° el índice UV, usado como medida de la intensidad UV, muestra que es un 20 % más alto cerca del centro del Salar que cerca de las orillas del mismo. Para valores menores de elevación del sol estos valores son algo menores.

*Descriptores: Radiación UV, Albedo, Ozono.*

### 1. INTRODUCCIÓN

Existe amplia evidencia acerca de los efectos dañinos a la salud humana de la excesiva exposición a la Radiación UV (RUV) solar [1,2]. Gente que vive en los trópicos ve incrementado este riesgo a causa de los niveles naturalmente bajos de ozono [4]. Adicionalmente, debido a que la intensidad de la RUV que llega a la superficie terrestre se incrementa con la altura de la misma [3,4], la población que habita en la región andina se encuentra en especial riesgo. En el caso de Bolivia alrededor de tres millones de personas viven por encima de los 3 000 m snm [10]. Por esta razón es importante caracterizar adecuadamente los parámetros relacionados con la RUV en esta región del planeta. En este sentido, dado su tamaño, altitud, propiedades ópticas y baja contaminación local, el Salar de Uyuni es un laboratorio natural muy interesante.

Estudios teóricos con base en modelos tridimensionales sugieren que las propiedades reflectantes de la superficie, aun a decenas de kilómetros del sitio de medida, influyen de manera significativa en la radiación

UV [6]. Estos estudios, basados en superficies con albedos de 0.03 para vegetación y 0.85 para nieve, han sido realizados para una variedad de condiciones y en áreas del orden de 200 km x 200 km. Los resultados para la región UV indican que el máximo incremento de la irradiancia UV debido a cambios del albedo de la superficie de 0.03 a 0.85 está cerca del 50 % para longitudes de onda cercanas a los 330 nm y alrededor de 35 % para 300 nm. Estos resultados están en excelente concordancia con otros estudios teóricos publicados anteriormente [7]. El radio del área circular alrededor del detector que produce un 80 % del máximo efecto debido al alto albedo de la superficie es del orden de 22.5 km para 330 nm y 6 km para 300 nm. Hasta ahora los estudios experimentales que abordaron el tema de los efectos de albedo sobre la RUV se realizaron en la Antártica [8,9] y las regiones glaciares de los Alpes [10]. Estos estudios, sin embargo, encontraron dificultades relacionadas con las inhomogeneidades del terreno y el acceso a la zona fronteriza entre las regiones de alto y bajo albedo. Estos problemas se reducen al mínimo en el caso del Salar de Uyuni. Aún más, debido al alto albedo reportado en la zona del visible para el Salar [11] y la elevada intensidad UV en el lugar es de esperar que un estudio experimental en esta zona arroje nuevas luces acerca del comportamiento de las RUV. Los datos que se reportan en el presente trabajo fueron obtenidos en una campaña de campo realizada en Mayo del año 2005. Durante el periodo de medida

<sup>1</sup>Este artículo es una adaptación del artículo completo: *Investigations on the effect of high surface albedo on erythemally effective UV irradiance: Result of a campaign at the Salar de Uyuni, Bolivia*. Publicado en el *Journal of Photochemistry and Photobiology B: Biology* 87 (2007) 1-8, cuyos autores son, además de los autores de esta adaptación: Joachim Reuder, Flavio Ghezzi, Eduardo Palenque y René Torrez.

<sup>2</sup>Email: mandrade@atmos.umd.edu.bo

<sup>3</sup>Email: zaratti@fiumsa.edu.bo

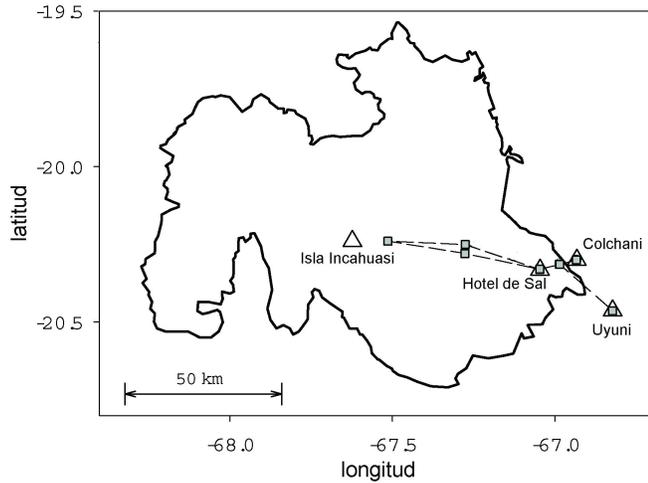


Figura 1. Mapa del Salar de Uyuni con los sitios de medida durante la campaña de Mayo del 2005.

se utilizaron varios radiómetros de banda ancha. Se espera que las irradiancias y albedos medidos puedan contribuir a la validación de modelos de transferencia radiativa así como a la evaluación e interpretación de datos satelitales relacionados.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL SALAR

El Salar de Uyuni está situado en la parte sudoeste del Altiplano boliviano entre  $19.7^\circ$  y  $20.7^\circ$  S y  $66.9^\circ$  y  $68.3^\circ$  O a una altitud media de 3 700 m snm. La extensión aproximada del Salar es de unos 12 000 km<sup>2</sup> con una extensión máxima meridional de 120 km y una zonal máxima de 150 km. El tamaño real del Salar oscila estacionalmente debido a que parte de sus orillas son una mezcla variable de barro, sal y agua. Aunque la mayor parte del año el Salar presenta una superficie relativamente homogénea de sal, en la estación lluviosa (Diciembre-Marzo) una delgada capa de agua entre 5 a 30 cm de altura cubre prácticamente todo el Salar.

Dado que el Salar se encuentra a una altura similar a la del Laboratorio de Física de la Atmósfera ( $16.54^\circ$  S,  $68.07^\circ$  O, 3420 m snm) es razonable utilizar los datos de la columna de ozono medidos por un instrumento Brewer situado en este laboratorio. Otra opción es utilizar los datos medidos por el instrumento TOMS (Total Ozone Mapping Spectrometer por sus siglas en inglés). En ambos casos el valor medio para el mes de Mayo es del orden de 250 DU (Unidades Dobson, 1 DU=1matm cm, o  $2.69 \times 10^{16}$  moléculas cm<sup>-2</sup>). Dada la lejanía del Salar de los grandes centros urbanos (la única población cercana con aproximadamente 10 000 habitantes se encuentra en la orilla oriental del Salar) es de esperar que la contaminación superficial sea baja. Las pocas medidas realizadas en la zona sugieren que la concentración de ozono superficial está en el orden 20 ppbv [17]. En el caso de los aerosoles, medidas realizadas en La Paz con un radiómetro CIMEL que es parte de la red Aeronet muestran que el espesor óptico de los aerosoles (AOD)

es del orden 0.1-0.2 en la ciudad de La Paz para el mes de Mayo (<http://aeronet.gsfc.nasa.gov/>). Es de esperar entonces que en la zona del Salar los valores de AOD sean de ese orden o menores.

## 3. CAMPAÑA E INSTRUMENTACIÓN

La campaña de campo se llevó a cabo del 10 al 16 de mayo del año 2005. La irradiancia efectiva UV, representada por el índice UV, fue medida por tres radiómetros UV de banda ancha. Dos de ellos (un UVS-E-T, fabricado por Kipp & Zonen, número serial 001, y otro SCINTEC, número serial 399) fueron proporcionados por el Instituto de Meteorología de la Universidad de Munich en tanto que el tercero (un UVB-1, Yankee Environmental Systems, número serial 137) fue proporcionado por el Laboratorio de Física de la Atmósfera. Adicionalmente, durante la campaña se contó con un medidor de la columna de ozono Microtops II [13] así como un equipo NOLL para medir el espesor óptico debido a los aerosoles [14].

Para obtener medidas a fin de estudiar tanto el albedo como los efectos de borde del Salar sobre éste, se tomaron datos de forma simultánea a las orillas como en regiones dentro del Salar lejos de su borde. Para calcular el albedo se colectaron datos durante una tarde y una mañana consecutivas colocando un radiómetro apuntando hacia arriba y abajo de manera alternada. Para estimar los efectos de borde se colocó uno de los radiómetros sobre el techo de un “todo terreno” y se manejó el mismo por dos días hacia el centro del Salar y desde allí hacia una orilla. La figura 1 muestra los lugares donde las medidas fueron colectadas.

## 4. MEDIDAS

Las irradiancias UV fueron medidas utilizando los instrumentos detallados en la sección 3. Todos los radiómetros allí descritos han sido diseñados para que su respuesta espectral coincida con el espectro de acción eritémica definido por CIE [15] de tal modo que midan la irradiancia UV eritémicamente efectiva. Dado que el índice UV se calcula a partir de esta irradiancia efectiva [16,19], en el presente trabajo las medidas se reportan en “unidades” IUUV (1 IUUV = 25 mW/m<sup>2</sup> de irradiancia efectiva) como si la misma fuera una unidad física. Ahora bien, debido a que ningún detector responde exactamente igual a la definición CIE mencionada anteriormente, es necesaria una calibración de los instrumentos a fin de obtener datos confiables [21]. En este sentido todos los instrumentos fueron calibrados cuidadosamente. Esto incluyó el trabajo de laboratorio para obtener una matriz de calibración dependiente de la columna total de ozono así como de la altura del sol [17,18].

### 4.1. Intercomparación de radiómetros

A fin de obtener el albedo, se usaron los dos radiómetros del mismo tipo (Kipp & Zonen, números seriales 001 y 399). Ambos detectores colectaron datos lado a lado antes y después de la campaña en diferentes localidades

TABLA 1

Sitios y fechas en los que se tomaron datos, con los instrumentos lado a lado, para fines de intercalibración.

(n\* es el número de días en los que se midió el IUV.)

Estación	Latitud	Longitud	Altitud (m)	t (n*)	Fecha
Munich (MIM)	48.13°N	11.57°E	530	10	23.04.-02.05.2005
La Paz (LFA)	16.54°S	68.07°O	3450	3	07.05.-09.05.2005
Uyuni	20.46°S	66.82°O	3700	1	11.05.2005
Colchani	20.30°S	66.93°O	3690	2	12.05.-13.05.2005
La Paz (LFA)	16.54°S	68.07°O	3450	3	18.05.-20.05.2005

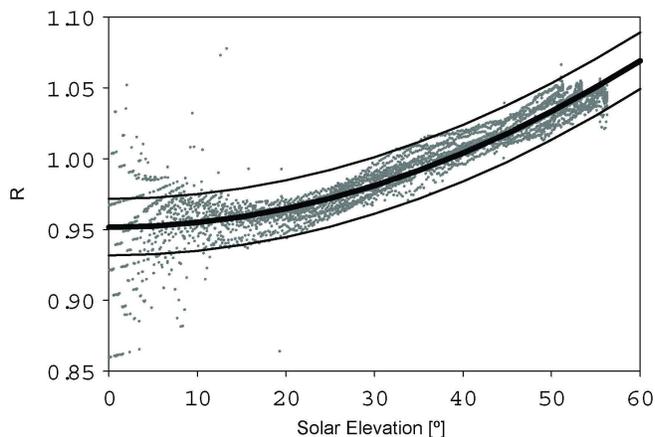


Figura 2. Razón  $R$  entre los IUV medidos por los detectores UV-E-S-T 399 y UV-E-S-T 001. Los datos fueron colectados cada minuto durante 9 días de medidas con los instrumentos lado a lado. La línea gruesa muestra un ajuste cuadrático a los datos mientras que las líneas delgadas indican el intervalo  $\pm 2\%$  alrededor de este ajuste.

a fin de evaluar cualquier diferencia en las medidas entregadas por los mismos. La tabla 1 resume las localidades y tiempos para tal efecto. Las razones  $R$  de todas las medidas de IUV entre los dos instrumentos ( $IUV_{399}/IUV_{001}$ ) están graficadas en la Fig. 2. Se observa que las medidas de ambos instrumentos coinciden razonablemente bien en el orden del 5% que es la precisión esperada para este tipo de radiómetros [20]. Sin embargo  $R$  muestra claramente una dependencia con la elevación del sol. La razón  $R$  está alrededor de 0.95 para elevaciones pequeñas mientras sube a aproximadamente 1.05 para  $55^\circ$  de elevación (máxima elevación durante la campaña). Esta dependencia, atribuible principalmente a la diferente sensibilidad espectral de los instrumentos así como a la diferente respuesta coseno de los mismos debe ser tomada en cuenta a la hora de calcular el albedo. La ventaja de calcular este último es, naturalmente, que el albedo es la razón de las medidas realizadas por los dos instrumentos de forma tal que ajustando un instrumento al otro la dependencia con la elevación deja de ser importante. Para este propósito se realizó un ajuste cuadrático a los datos

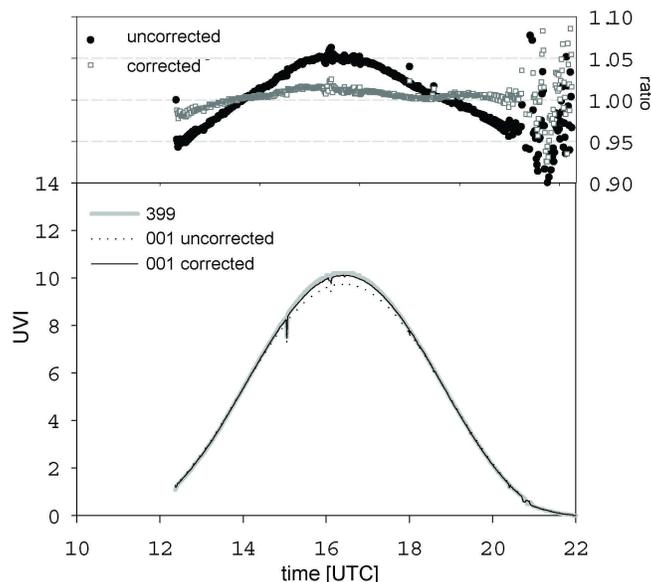


Figura 3. Ilustración del efecto de aplicar la función de corrección entre los instrumentos 001 y 399 para Mayo 11 en Uyuni.

tomados cada minuto. La figura 2 muestra los datos, la curva de ajuste (línea gruesa) así como el intervalo del 2% alrededor de esta curva de ajuste (líneas delgadas). De este modo, para evaluar el albedo, se corrigieron los datos entregados por el instrumento 001 por la curva de ajuste. Los datos así corregidos coinciden mejor que al 2% para ángulos mayores a  $15^\circ$ . La figura 3 muestra los datos originales y los corregidos. Como se observa, la dependencia con la altura desaparece casi por completo una vez que la corrección es realizada. Todos los datos medidos durante la campaña fueron corregidos correspondientemente.

#### 4.2. Albedo

Las medidas de albedo fueron tomadas a  $20.333^\circ\text{S}$  y  $67.046^\circ\text{O}$ , unos 15 km dentro del Salar a aproximadamente 20 kilómetros al este de la población de Colchani. Un radiómetro (número serial 001) y un piranómetro fueron instalados en un soporte a aproximadamente 2 m

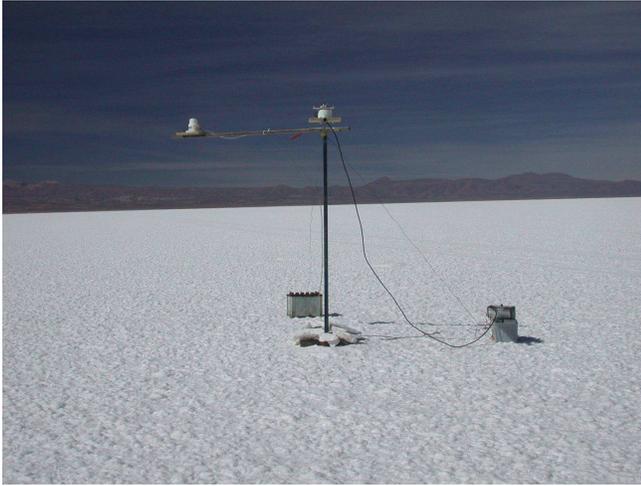


Figura 4. Arreglo experimental para la determinación del albedo en el Salar de Uyuni.

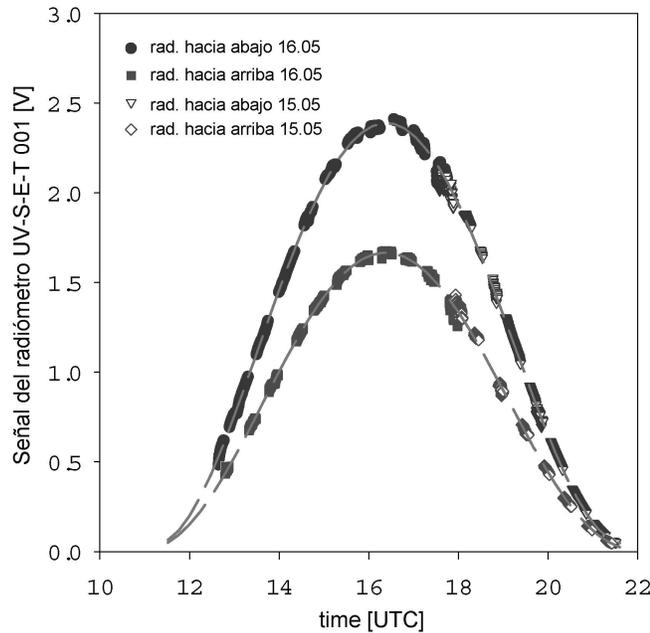


Figura 5. Datos tomados por el instrumento 001 durante la tarde del 15 de mayo y la mañana del 16 de mayo del 2005. Los datos son desplegados de tal forma que indican el comportamiento diario. La dirección de los detectores fue cambiada manualmente cada 10 a 20 min. La línea ploma es un ajuste a los datos para poder calcular el albedo de manera continua.

de la superficie (ver figura 4). Aproximadamente cada 15 min la orientación de ambos fue modificada manualmente girando el brazo en el que los instrumentos estaban instalados. La horizontalidad de ambos instrumentos fue controlada por niveles de burbuja. Las medidas se realizaron la tarde del 15 de Mayo, a partir de las 17:30 UTC (13:30 hora oficial local) y la mañana del 16 de las 12:30 a las 18:00 UTC. Las medidas de ambos días se combinaron para mostrar el comportamiento diario mostrado en la figura 5. Los datos obtenidos durante la transición “arriba-abajo” fueron descartados. El día 15 en la tarde

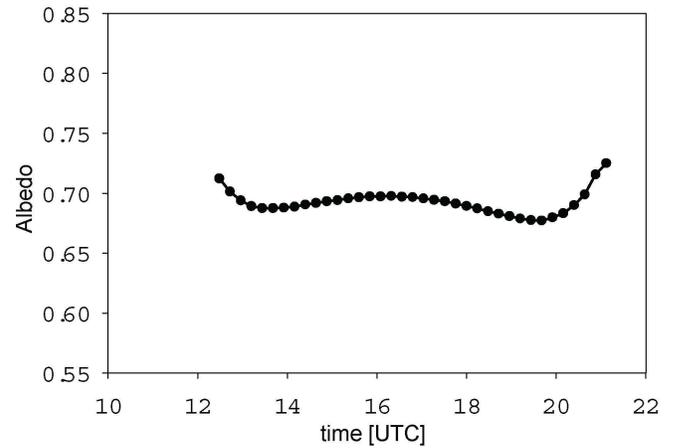


Figura 6. Variación diaria del albedo para irradiancia eritémicamente efectiva derivada de datos colectados el 15 y 16 de mayo del 2005 (vea también la Fig. 5).

aproximadamente dos octavos del cielo estaban cubierto por delgadas nubes cirrus que no afectaron notablemente la radiación UV. En cambio el día 16 en la mañana amaneció con cuatro octavos del cielo cubierto por cirrus. La nubosidad se incrementó hasta seis octavos hacia el mediodía. Más importante, las nubes se tornaron ópticamente mucho más densas hacia el mediodía. Esto se ve reflejado en la mayor la variabilidad de los datos a partir de las 16:00 UTC.

Para obtener una función continua de la irradiancia recibida y reflejada se ajustaron curvas a los datos combinados del día 15 y 16 (figura 5). Estas curvas fueron luego usadas para el cálculo del comportamiento diario del albedo válido para la irradiancia eritémicamente efectiva. El comportamiento temporal del albedo puede ser observado en la figura 6. Entre las 12:30 UTC y las 20:30 UTC (8:30 a las 16:30 hora local), correspondientes a elevaciones mayores a  $15^\circ$ , el albedo es bastante estable con un valor  $0.69 \pm 0.02$ . Las variaciones que se observan para ángulos menores están probablemente relacionadas con la respuesta coseno del detector. Debido a falta de datos de calibración de los instrumentos para la radiación reflejada se decidió usar los datos “crudos” tal como fueron entregados por los detectores. Por tanto, desviaciones de la respuesta ideal coseno de los instrumentos así como la baja sensibilidad de los mismos ante la débil radiación para ángulos bajos pueden contribuir al comportamiento mostrado por el albedo en la figura 6.

#### 4.3. Medidas simultáneas dentro y fuera del Salar

El día 14 de mayo se realizaron medidas simultáneas con el detector UV-S-E-T-399 en Colchani (a aproximadamente 5 km fuera del Salar) y el detector UV-S-E-T-001 en la Isla Incahuasi la cuál se halla cerca del centro del Salar (ver figura 1). Esta isla tiene una extensión aproximada de 0.75 km por 1 km con el punto más elevado a unos 50 m de la superficie del Salar. El radiómetro fue instalado en la parte noreste sobre una roca a unos 20 m de la superficie del Salar. El comportamiento diario y

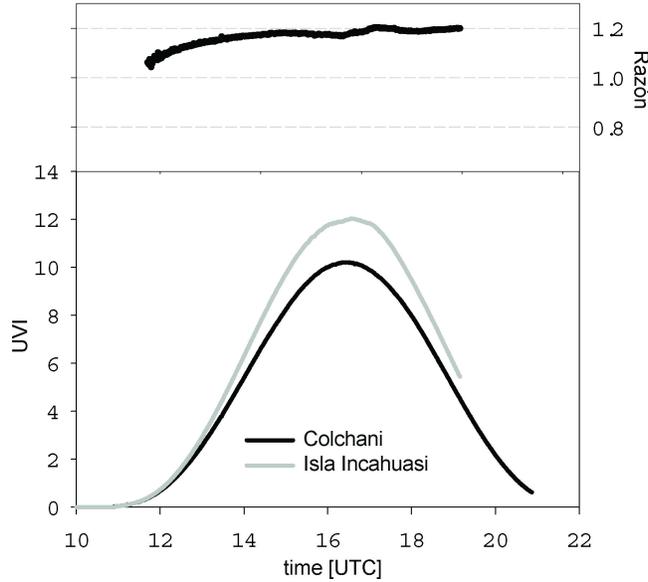


Figura 7. Intercomparación de los IUV medidos en Colchani (instrumento 399), fuera del Salar, y en la Isla Incahuasi (instrumento 001) cerca al centro del Salar de Uyuni en mayo 14, 2005.

la razón de las medidas realizadas por los dos detectores puede observarse en la figura 7. Los datos del detector 001 fueron corregidos de acuerdo al análisis realizado en la sección 2 (ver figura 2). Por esta razón la mayor parte de las desviaciones observadas entre los dos instrumentos puede atribuirse al efecto del albedo sobre la irradiancia eritémicamente efectiva. La mayor parte del día los niveles de radiación UV medidos en la Isla Incahuasi, dentro del Salar, son aproximadamente 20% más altos que los medidos en Colchani. Esta razón, sin embargo, muestra una disminución para ángulos solares bajos en la mañana, comportamiento que puede ser atribuido a una distinta respuesta azimutal de los dos detectores o a variaciones en la respuesta coseno. Además, dada la localización de los sitios de medida, al menos en el caso de Colchani, puede observarse que existe una clara asimetría en la radiación UV entre la tarde y la mañana. Lamentablemente, por razones logísticas, no se pudieron hacer mayores verificaciones de estas hipótesis.

### 5. SIMULACIONES

Simulaciones del efecto del albedo se realizaron con el modelo STAR [22,23]. La figura 8 muestra el resultado de un análisis de sensibilidad del IUV para diferentes alturas solares y características de la superficie típicas del Altiplano boliviano. Las simulaciones se realizaron para una elevación de la superficie de 3 700 m snm y una presión correspondiente de 650 hPa. La columna de ozono se fijó a 250 DU, valor promedio para esa época del año. Basados en las medidas del fotómetro NOLL se decidió usar como dato de entrada al modelo aerosoles tipo “continental limpio” con un espesor óptico de 0.05 a 550 nm [24].

En general el IUV se incrementa fuertemente con la

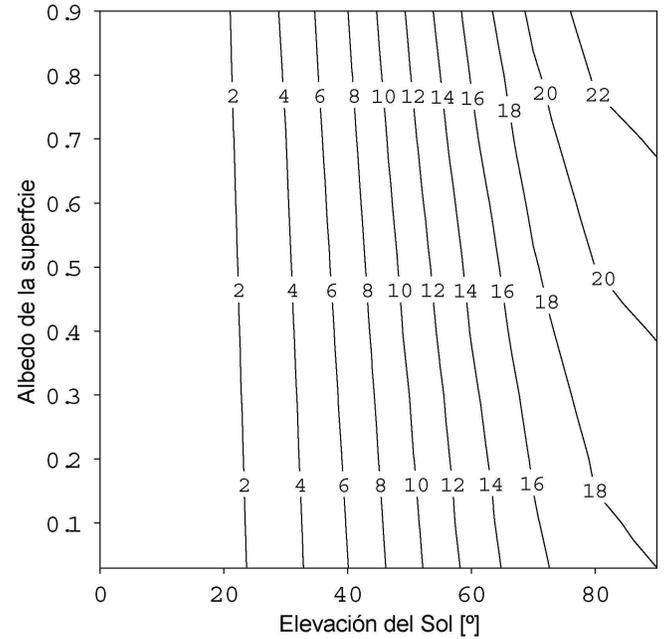


Figura 8. IUV modelado como función de la elevación del sol y el albedo de la superficie. El contenido total de ozono fue fijado en 250 DU; la presión en 650 hPa; la altitud en 3 700 m snm; y el espesor óptico de los aerosoles a 550 nm en 0.05.

elevación del sol debido a la reducción del camino óptico a través de la atmósfera. Hay además un marcado incremento del IUV con la reflectividad de la superficie. Procesos de dispersión múltiple, especialmente por moléculas de aire, redirigen hacia abajo parte de la radiación reflejada por la superficie, reforzando de este modo la radiación que va hacia dicha superficie. La figura 9 presenta el efecto del incremento del albedo de la superficie sobre la irradiancia eritémicamente efectiva medida por el IUV. En esta simulación se incrementó el albedo de la superficie de 0.2 [25,26] a 0.7 [27,28] para simular los valores esperados [29] y medidos de las superficie alrededor y dentro del Salar. La simulación se llevó a cabo para alturas a nivel del mar y 3 700 m snm. El incremento del IUV debido a los cambios de albedo muestra solamente una débil dependencia con altura del sol. Un máximo suave ocurre alrededor de 20°. El efecto del albedo a nivel del mar (símbolos abiertos) es marcadamente más alto que a 3 700 m snm (símbolos llenos) lo que muestra la fuerte dependencia de los procesos de dispersión múltiple con la densidad del aire.

### 6. DISCUSIÓN

Se investigó el efecto que tiene una superficie con alto albedo sobre la irradiancia UV eritémicamente efectiva. Medidas obtenidas a través de una campaña de campo en el Salar de Uyuni, y cálculos a través de modelos fueron empleados para este propósito. La irradiancia UV eritémicamente efectiva fue medida a través de tres radiómetros colocados simultáneamente dentro y fuera del Salar a diferente distancia del borde del mismo. Para poder realizar una adecuada comparación e interpretación

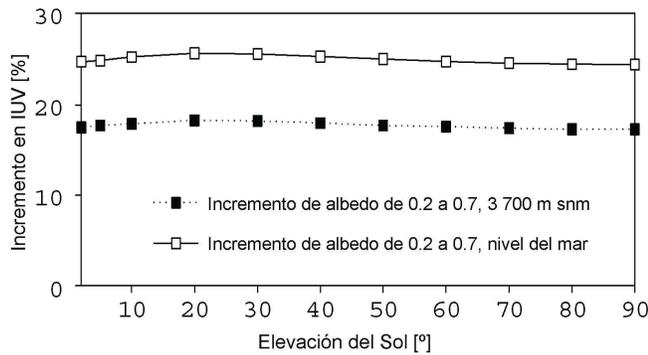


Figura 9. Incremento porcentual en el IUV, derivado de modelos, debido al incremento del albedo de la superficie como función de la elevación del sol. Los parámetros usados son los mismos que los especificados en la Fig. 8.

de los datos, los instrumentos fueron calibrados entre sí. El resultado de esta intercalibración mostró que las respuestas entregadas por los radiómetros tenían una exactitud relativa del 2%, valor que es más alto que el 5% típico para radiómetros del tipo usados en el experimento. Las medidas tomadas dentro del Salar muestran un claro incremento de irradiancia UV eritémicamente efectiva respecto de medidas tomadas donde el albedo no es tan alto (i.e. en las afueras del Salar). Eso muestra la aún importante contribución de procesos de dispersión múltiple por las moléculas de aire a la altura del Salar. Los valores medidos en Isla Incahuasi, casi en el centro del Salar, muestran un incremento de alrededor del 20% comparado con las medidas tomadas en Colchani, a solo 5 km del borde del Salar para una elevación del sol de 50°. Estas medidas muestran también que este valor se reduce para alturas solares menores. A pesar de eso, para alturas que están entre 25° y 50°, máxima altura del sol durante la campaña, existe una excelente correspondencia entre el incremento medido del IUV (usado en este trabajo como medida física de la irradiancia UV eritémicamente efectiva) y los cálculos de transferencia radiativa realizados en una dimensión cuando el albedo se incrementa de 0.2 a 0.7. Sin embargo, en contraposición a lo medido, los cálculos hechos por los modelos predicen un débil máximo para alturas del sol alrededor de 20° y prácticamente ningún efecto debido alturas del sol pequeñas. Esta discrepancia puede deberse a la pérdida de precisión en las medidas UV de los radiómetros para ángulos del sol bajos (debido también a la baja intensidad incidente para dichos ángulos) por lo que cualquier diferencia sistemática entre los radiómetros puede dar una falsa dependencia con la altura del sol. Adicionalmente, es posible que exista una dependencia del medio al albedo local debido a la presencia de asimetrías (rocas, vegetación, tipo de suelo, etc.) en los lugares de medida. Además debe tomarse en cuenta que el albedo medido en un punto está influenciado por las condiciones circundantes las cuales tiene un efecto hasta de decenas de kilómetros. Un estudio detallado de este efecto sólo será posible a través de un estudio más largo

y minucioso en el futuro.

La reflectividad para radiación UV eritémicamente efectiva se determinó que vale  $0.69 \pm 0.02$ . Este valor no muestra prácticamente dependencia con la altura del sol, lo cual sugiere la homogeneidad de la superficie, al menos para esta parte del espectro electromagnético, y propiedades de reflexión prácticamente isotrópicas en el Salar. Estas propiedades ópticas juntamente a condiciones climáticas poco variables, bajo ozono total, poca presencia de aerosoles y baja nubosidad la mayor parte del año, hacen del Salar de Uyuni un lugar ideal para realizar estudios de transferencia radiativa así como para la calibración de instrumentos a bordo de satélites.

## REFERENCIAS

- [1] WHO, Global solar UV Index – A practical guide, A joint recommendation of WHO, WMO, UNEP, and ICNIRP, 2002.
- [2] J. Longstreth, F.R.d. Gruil, M.L. Kripke, S. Abseck, F. Arnold, H.I. Slaper, G. Velders, Y. Takizawa, J.C.v.d. Leun, Health risks, *J. Photochem. Photobiol. B* 46 (1–3) (1998) 20–39.
- [3] M. Pfeifer, P. Koepke, J. Reuder, Effects of altitude and aerosols on UV radiation, *J. Geophys. Res.* 111 (2006) D01203, doi:10.1029/2005JD006444.
- [4] F. Zaratti, R. Forno, J. Garcia-Fuentes, M. Andrade, Erythemally weighted UV variations at two altitude locations, *J. Geophys. Res.* (2003), doi:10.1029/2001JD000918.
- [5] INE, National Institute of Statistics, Bolivian census, 2001.
- [6] M. Deguenther, R. Meerkoetter, A. Albold, G. Seckmeyer, Case study on the influence of inhomogeneous surface albedo on UV irradiance, *Geophys. Res. Lett.* 25 (19) (1998) 3587–3590.
- [7] J. Lenoble, Modeling of the influence of snow reflectance on ultraviolet irradiance for cloudless sky, *Appl. Opt.* 37 (12) (1998) 2441–2447.
- [8] I. Smolskaia, M. Nunez, K. Michael, Measurements of erythemal irradiance near Davies Station, Antarctica: effect of inhomogeneous surface albedo, *Geophys. Res. Lett.* 26 (10) (1999) 1381–1384.
- [9] S. Wuttke, G. Seckmeyer, G. König-Langlo, Measurements of spectral snow albedo at Neumayer, Antarctica, *Ann. Geophys.* 24 (2006) 7–21.
- [10] M. Huber, M. Blumthaler, J. Schreder, B. Schallhart, J. Lenoble, Effect of inhomogeneous surface albedo on diffuse UV sky radiance at a high-altitude site, *J. Geophys. Res.* 109 (2004) D08107, doi:10.1029/2003JD004013.
- [11] R.A.C. Lamparelli, F.J. Ponzoni, J. Zullo Jr., G.Q. Pellegrino, Y. Arnaud, Characterization of the Salar de Uyuni for in-orbit satellite calibration, *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 41 (6) (2003) 1461–1468.
- [12] G. Honninger, N. Pobrowski, E.R. Palenque, R. Torrez, U. Platt, Reactive bromine and sulfur emissions at Salar de Uyuni, Bolivia, *Geophys. Res. Lett.* 31 (2004) L04101.
- [13] M. Morys, F.M. Mims III, S. Hagerup, S. Anderson, A. Baker, J. Kia, T. Walkup, Design, calibration and performance of MICROTUPS II handheld ozone monitor and Sun photometer, *J. Geophys. Res.* 106 (D13) (2001) 14573–14582.
- [14] G.A. d’Almeida, R. Jaenicke, P. Roggendorf, D. Richter,

- New sunphotometer for network operation, *Appl. Opt.* 22 (23) (1983) 3796–3801.
- [15] A. McKinley, B. Diffey, A reference spectrum for ultraviolet induced erythema in human skin, *Commission Int. Eclairage (CIE) 6* (1987) 17–22.
- [16] WMO, Report of the WMO meeting of experts on UV-B measurements, data quality and standardization of UV indices, WMO Technical Report No. 95, 1994.
- [17] A. Oppenrieder, P. Hoeppe, P. Koepke, J. Reuder, J. Schween, J. Schreder, Simplified calibration for broadband solar ultraviolet radiation measurements, *Photochem. Photobiol.* 78 (6) (2003) 603–606.
- [18] B.A. Bodhaine, E.G. Dutton, R.L. McKenzie, P.V. Johnston, Calibrating broadband UV instruments: ozone and solar zenith angle dependence, *J. Atmos. Ocean. Technol.* 15 (1998) 916–926.
- [19] WMO, Report of the WMO–WHO meeting of experts on standardization of UV indices and their dissemination to the public, WMO Technical Report No. 143, 1997.
- [20] WMO, Report of the LAP/COST/WMO intercomparison of erythemat radiometers (Thessaloniki, Greece, 13–23 September 1999), WMO Technical Report No. 141, 2001.
- [21] WMO, Instruments to measure solar ultraviolet radiation, part II: broadband instruments measuring erythemally weighted solar irradiance, WMO-GAW Report No. 164, 2005.
- [22] A. Ruggaber, R. Dlugi, T. Nakajima, Modelling radiation quantities and photolysis frequencies in the troposphere, *J. Atmos. Chem.* 18 (1994) 171–210.
- [23] H. Schwander, P. Koepke, A. Kaifel, G. Seckmeyer, Modification of spectral UV irradiance by clouds, *J. Geophys. Res.* 107 (D16) 4296. doi:10.1029/2001JD001297.
- [24] M. Hess, P. Koepke, I. Schult, Optical properties of aerosols and clouds: the software package OPAC, *Bull. Am. Met. Soc.* 79 (1998) 831–844.
- [25] M. Blunthaler, W. Ambach, Solar UVB-albedo of various surfaces, *Photochem. Photobiol.* 48 (1) (1988) 85–88.
- [26] R.L. McKenzie, M. Kotkamp, Upwelling UV spectral irradiances and surface albedo measurements at Lauder, New Zealand, *Geophys. Res. Lett.* 23 (14) (1996) 1757–1760.
- [27] T.C. Grenfell, S.G. Warren, P.C. Mullen, Reflection of solar radiation by the Antarctic snow surface at ultraviolet, visible, and near infrared wavelength, *J. Geophys. Res.* 99 (1994) 18669–18684.
- [28] S.G. Warren, W.J. Wiscombe, A model for the spectral albedo of snow. II: snow containing atmospheric aerosols, *J. Atmos. Sci.* 37 (1980) 2734–2745.
- [29] P. Koepke, J. Reuder, H. Schwander, Solar UV radiation and its variability due to the atmospheric components, *Recent Res. Devel. Photochem. Photobiol.* 6 (2002) 11–34.

# SONIDOS PULSANTES: SILBATOS DOBLES PREHISPÁNICOS ¿Una estética ancestral reiterativa?

Arnaud Gérard A.<sup>1</sup>

SoundLab—Carrera de Física  
UATF—Potosí

## RESUMEN

Dos silbatos prehispánicos dobles, probablemente de la cultura Inca, están contruidos de tal manera que emiten, en ambos casos, sonidos con pulsaciones o batimiento. Pues cada silbato consta de dos tubos de longitudes levemente desiguales que al ser sopladados simultáneamente emiten sonidos con frecuencias también ligeramente distintas de tal manera que la suma de ambos provoca un sonido de amplitud periódicamente fluctuante. Estos sonidos ancestrales se relacionan estrechamente con los sonidos pulsantes de las tropas actuales de zampoñas y los sonidos multifónicos con redoble de las flautas de Pan prehispánicas con “tubos complejos”<sup>2</sup> y ciertas flautas de pico, étnicas y actuales, del área andina de Bolivia.

*Descriptor:* Acústica, Instrumentos Musicales.

## 1. ANTECEDENTES

### 1.1. PULSACIONES O BATIMIENTO

La interferencia de dos ondas sinusoidales de frecuencias próximas y de misma amplitud da lugar a una onda con amplitud modulada que va de un máximo de dos veces la amplitud de la onda individual (suma constructiva cuando están en fase) hasta una amplitud nula (suma destructiva cuando están desfasadas a 180°) y esta modulación es periódica (véase fig. 1). Si las ondas no tienen la misma amplitud, la amplitud máxima de la interferencia será menor a dos veces la amplitud mayor y la amplitud menor de la interferencia no será nula. Asimismo, a menor diferencia de frecuencia entre las dos ondas, mayor será el periodo de pulsaciones e inversamente. Este fenómeno es conocido como pulsaciones o batimiento y en ondas sonoras se escucha como una vibración pulsante.

Además Leipp (1984) da una relación que permite calcular el número de pulsaciones por segundo o frecuencia de pulsación, a partir de las frecuencias de las ondas que interfieren  $\nu_1$  y  $\nu_2$ :

$$\text{Frecuencia de pulsación} \equiv \phi = \nu_1 - \nu_2 \quad (1)$$

Ahora si la onda no es sinusoidal, la cosa se complica un poco. En el caso de un sonido complejo de serie armónica, para la frecuencia fundamental ocurrirá exactamente igual que para el caso del sonido sinusoidal. Para el segundo armónico, la diferencia entre las frecuencias de las ondas que interfieren va a ser el doble de la diferencia entre sus fundamentales. Esto quiere decir que la frecuencia de pulsación será el doble también. Y así sucesivamente. Es decir que la frecuencia de pulsaciones

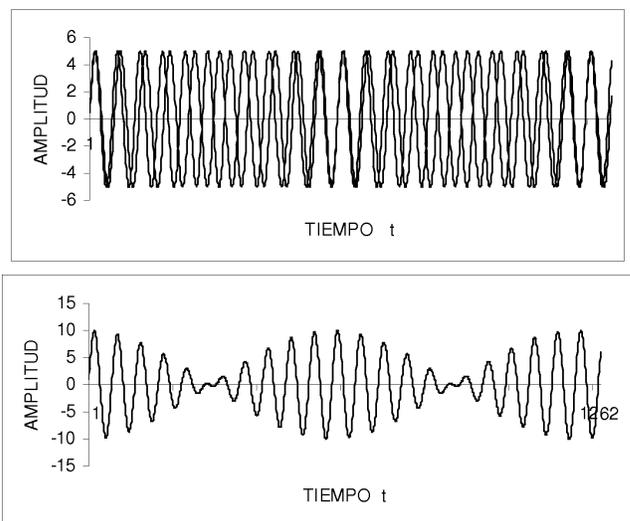


Figura 1. Amplitud como función del tiempo de la interferencia de 2 ondas de misma amplitud con frecuencias ligeramente diferentes (arriba las 2 ondas, abajo la suma con pulsaciones o batimiento).

es proporcional al número del armónico. La forma de la envolvente de la amplitud dependerá mucho de las amplitudes relativas de los diferentes armónicos.

El fenómeno de pulsaciones tiene también mucho que ver con el concepto de consonancia y disonancia. Pues la armonía de dos notas es consonante por la razón de los armónicos que tienen en común (grado de parentesco) que resulta ser el intervalo numérico teórico. Helmholtz (1885) indica que si el intervalo numérico no es exactamente igual al intervalo teórico, el acorde se vuelve duro, y si se aparta demasiado, el acorde pierde su carácter de consonancia. Prácticamente significa esto que si el intervalo numérico no es exactamente igual al intervalo teórico, las frecuencias de los armónicos en común no serán

<sup>1</sup>Email: gerardardenois@yahoo.es

<sup>2</sup>Pérez de Arce, 1993: 474; 1998: 25; 2000: 233.

exactamente iguales y por tanto se presentará batimiento sobre los armónicos en cuestión y que a mayor dureza habrá mayor batimiento (frecuencia mayor de pulsaciones).

### 1.2. LAS TROPAS DE INSTRUMENTOS MUSICALES NATIVOS EN LOS ANDES DE BOLIVIA

Las pulsaciones o batimientos, en el contexto etnomusicológico de los aerófonos andinos de Bolivia, tiene una importancia trascendental. Pues, en el caso particular de las zampoñas<sup>3</sup>, estas se tañen por “tropas”. La “tropa” esta compuesta por lo general de instrumentos del mismo tamaño que tocan al unísono y por instrumentos a la octava baja y a la octava alta que tañen la melodía en octavas paralelas, acompañados por membranófonos (tambores, bombos, cajas, *wanqaras*<sup>4</sup>, etc...). En la tropa puede presentarse también tamaños a dos octavas por debajo o por encima del tamaño mediano así como otros intervalos como la quinta paralela o la cuarta paralela e incluso la tercera y la sexta paralela u otros intervalos más disonantes. En la investigaciones sobre las siringas andinas (Gérard, 1999), lo que se advierte de la totalidad de las mediciones de alturas efectuadas aquella vez, es que los unísonos entre los mismos tamaños en la tropa no están muy igualados (a veces las diferencias son hasta de un tono o más), que las octavas no son exactamente justas, las quintas tampoco, etc. y todo ello con un comportamiento algo caótico. Muchos etnomusicólogos afirmaron que la afinación era tosca, imprecisa o grosera. Y aquí otra anécdota que ocurrió al autor hace años:

“En mi taller experimental de fabricación de aerófonos, un día construí una tropa de sikus afinados a la escala temperada y precisamente igualados entre sí, a la manera occidental o mestiza, a solicitud de un conjunto folklórico urbano. Pero pasaron los días, las semanas y los meses y los clientes no vinieron a recoger su pedido así que me decidí en poner esta tropa de sikus urbanos a la venta. Un día de estos, se aproximó un grupo de *comunarios*<sup>5</sup> que parecían ser de algún pueblo cercano a la ciudad de Potosí y solicitaron poder probar dicha tropa de instrumentos. Tocaron y tocaron largo rato, luego devolvieron los instrumentos sin pedir precio ni nada más y se fueron. Antes de esto les pregunté que les parecían los sikus y me respondieron: están bien, pero están q’ayma<sup>6</sup>. Este comentario también me hizo pensar mucho” (Gérard, 1999: 159).

<sup>3</sup>Zampoña en castellano se refiere a una clase mestizada de flautas de Pan o siringas, generalmente llamadas *siku* en lenguas nativas aymará y quechua.

<sup>4</sup>*Wankara*: es un bombo, un poco plano, que se toca verticalmente.

<sup>5</sup>*Comunario*: es una deformación regional de la palabra comunero.

<sup>6</sup>Q’ayma significa desabrido, insípido (Lara, 1971: 227).

Entonces, una tropa bien igualada, con unísonos casi perfectos y octavas casi justas, que cumple con los requerimientos de los grupos urbanos según reglas occidentalizadas, no suena bien para los *comunarios*. La razón es que en la estética andina se aprecia justamente esta dureza, incluso hasta la pérdida de la consonancia, con pulsaciones o batimiento, pero es más, no con una desigualdad estándar, sino con un comportamiento caótico, que provocaría un efecto desigual, no monótono, de sorpresa. Sin embargo, dentro de cierto margen, ciertas desigualdades pueden corregirse por el campo de libertad de altura con que cuenta el intérprete para modificar la misma según su habilidad.



Figura 2. Una tropa de *ayarichis* de Tarabuco (Chuquisaca); se interpretan en cuasi octavas y cuasi unísonos paralelos.

Estas desigualdades en las frecuencias paralelas de las tropas de aerófonos son sistemáticamente más pronunciadas en los instrumentos que parecen tener un origen más antiguo, como los ayarachis o ayarichis<sup>7</sup> por ejemplo. A modo de muestra se presenta a continuación el análisis de un sonido grabado in situ, de una tropa de ayarichis de Tarabuco-Chuquisaca (véase fig. 2) que tocan en paralelo (casi unísono y casi octava), interpretados por *comunarios* del lugar, donde se advierte claramente una fuerte pulsación (presente además en toda la grabación) tal como puede observarse en los oscilograma y sonograma de la figura 3.

### 1.3. “TUBOS COMPLEJOS” Y SONIDOS PULSANTES EN INSTRUMENTOS PREHISPÁNICOS

Realmente el autor ignora si se trata de una secuencia de continuidad tecnológica o si los dos hechos son algo aislados, pero así como los andinos obtuvieron pulsaciones mediante la emisión simultánea de sonidos paralelos ligeramente desigualdos (esto significa pares de tubos con longitudes también un poco desiguales), también obtuvieron un sonido pulsante mediante el empalme longitudinal de dos tubos de diferentes diámetros, denominado “tubo complejo” por Pérez de Arce (Pérez de Arce, 1993: 474; 1998: 25; 2000: 233), el mismo que se muestra esquemáticamente en la figura 4.

<sup>7</sup>Ayarachis o ayarichis: son siringas o zampoñas indígenas, de 5 a 7 tubos de caña hueca “carrizo”, generalmente gruesas, muy tañidas en la parte centro y Sur andina de Bolivia (Gérard, 1998).

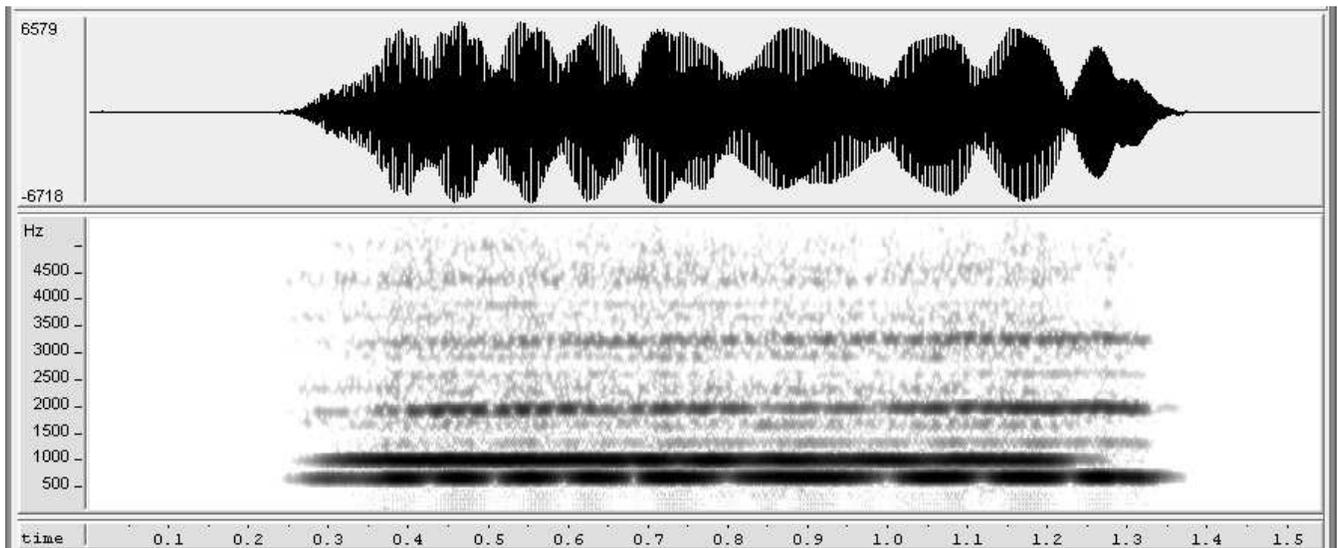


Figura 3. Sonido de una tropa de ayarichis de Tarabuco (Chuquisaca) tocando en paralelo, extraído de una grabación realizada in situ; arriba: forma de la onda (amplitud función del tiempo); abajo: sonograma de banda ancha (frecuencias función del tiempo); se advierte claramente el efecto de pulsación o batimiento, tanto sobre la envolvente de la onda como las interrupciones de las rayas espectrales en el sonograma (nótese que la frecuencia de pulsación es proporcional al número del armónico tal como se señaló en el anterior acápite). (Todos los diagramas de análisis FFT del presente trabajo fueron realizados en el laboratorio personal del autor: IEA (Instituto de Etnomusicología y Acústica).)



Figura 4. Tubos empalmados: son dos cañas de diferente diámetro, Pérez de Arce los llama tubos complejos.

Esta técnica fue luego reproducida en instrumentos monolíticos de madera, cerámica y piedra. Un sólo tubo individual (bordón) es un instrumento musical llamado pifilca que todavía se interpreta por ejemplo en Chile (Pérez de Arce, 1993, 1995, 1998, 2000); si son varios tubos de longitudes crecientes, colocados en línea y atados entre sí, llega a ser una siringa o flauta de Pan, llamada *antara*, *siku* o *ayarachi* en idiomas nativos. Pérez de Arce señala varias culturas prehispánicas, de la costa, lado Pacífico, del Perú y de Chile, que fabricaron e interpretaron “*antaras*” con tubos complejos tal como Paracas, Nazca, Atacama, Aconcagua, Mapuche, etc. (Pérez de Arce, 1993: 483). Este autor indica que estos tubos complejos, particularmente las pifilcas de Chile emiten un sonido llamado “Rajado”.

En los dos artículos “Sonido Rajado” de Pérez de Arce publicados en la “Galpin Society Journal” (1998, 2000) así como en el artículo “Análisis of the Sound of Chilean Pifilca Flutes” de H. A. K. Wright y D. M. Campbell (1998) se encuentra un amplio estudio del sonido “rajado”, definido “como sonido extremadamente fuerte, intenso, y enérgicamente disonante que es característico de las flautas pifilcas”. (Pérez de Arce, 1998:17).

Mi persona tuvo la oportunidad de estudiar una de estas siringas líticas prehispánicas con tubos complejos (véase fig. 5), encontrada en un monumento funerario ubicado cerca de Yura al suroeste de Potosí, el mismo

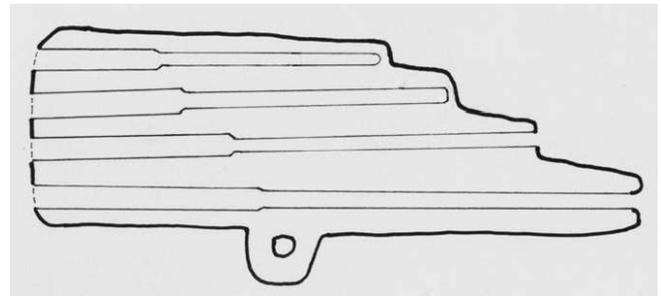


Figura 5. Vista en corte de la siringa de Yura de los Museos Charcas de la ciudad de Sucre; los tubos presentan cambios de diámetro en sus secciones transversales.

que pertenece a la colección de los Museos Charcas de Sucre y cuyos resultados fueron publicados en un anterior trabajo (Gérard, 2004).

En aquella investigación se encontró que algunos de los tubos presentaban efectivamente un sonido **multifónico** tipo “redoble” como lo llama Michèle Castellengo del *Laboratoire d’Acoustique Musicale* (LAM) de la Universidad de Paris VI (Castellengo, 1982; Assayag, Castellengo, Malherbe, 1985) del cual mostramos el sonograma en la figura 6.

La percepción audible de este efecto sonoro es algo parecido al batimiento o pulsación: pues se oye un sonido fuertemente pulsante o vibrante.

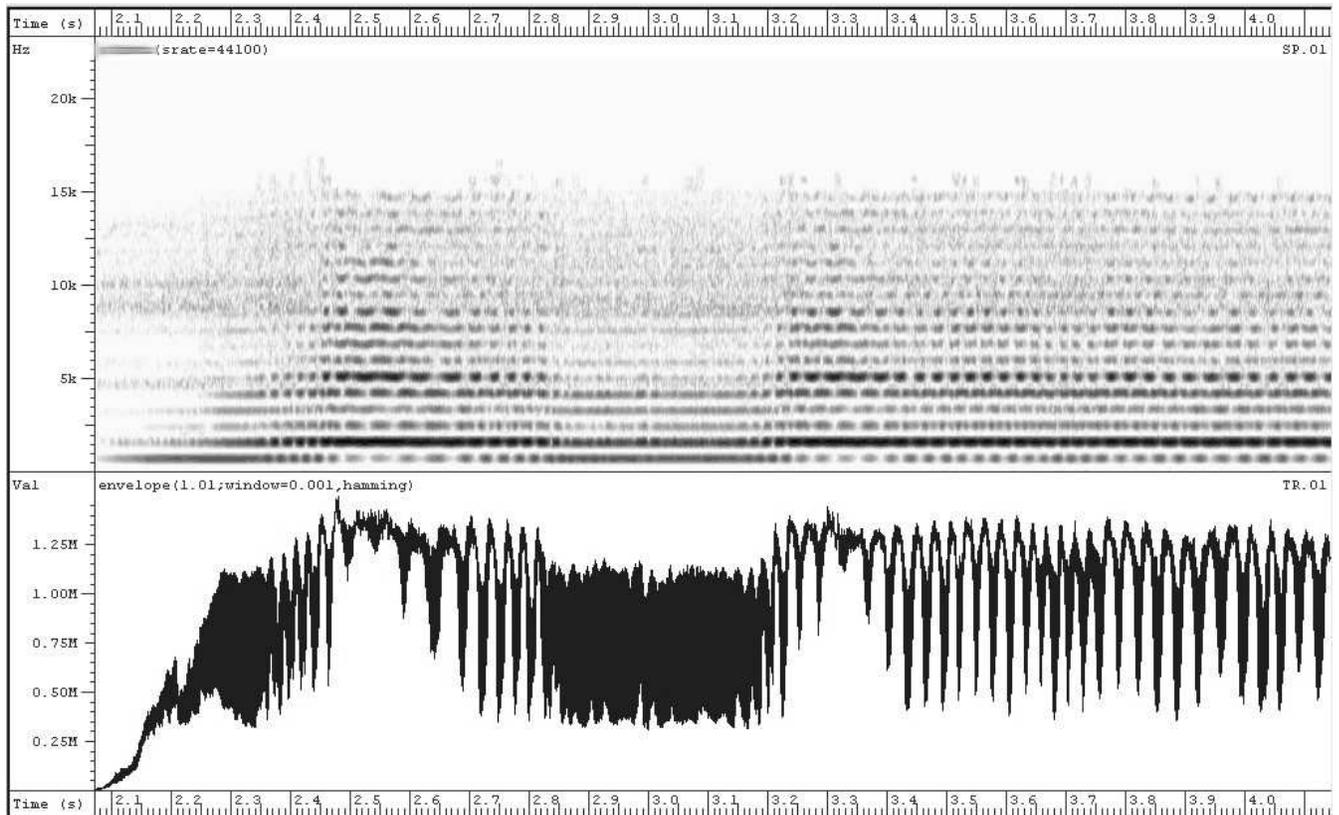


Figura 6. Sonido multifónico tipo “redoble” de la siringa prehispánica de Yura; arriba: sonograma; abajo: envolvente de la onda; se observa claramente una oscilación periódica de la amplitud, así como las interrupciones de las rayas espectrales en el sonograma; aquí la periodicidad de fluctuación es la misma para todos los armónicos en oposición al efecto de pulsación.

#### 1.4. SONIDOS PULSANTES EN PINKILLOS ANDINOS ACTUALES

Toda una gama de *pinkillos*<sup>8</sup> actuales de las zonas andinas rurales de Bolivia, principalmente de tiempo de Carnaval, son tradicionalmente tañidos con este mismo sonido multifónico con “redoble”. Se trata de las *tarkas*, *anatas*, *karnawal pinkillos* del Norte de Potosí, los *lawatos* del centro sur de Potosí (*saripalkas*, *malichus*, *challus*, *onrras*, etc.). Este sonido es denominado por los *comunarios* como *tara* (Stobart, 1996) o *richa* (Borras, en prensa) y se caracteriza por ser gritón, estridente, para retomar las denominaciones de Émile Leipp (Leipp, 1984), pues se trata de un sonido rico en armónicos, pero con armónicos superagudos muy intensos que son discretamente detectable al oído y además con un marcada oscilación de la intensidad, conocido como “redoble” (Castellengo, 1982:7) por lo que se podría calificarlo de “pulsante”. En una anterior publicación, los resultados de un primer trabajo de análisis de estos sonidos fueron ya presentados (Gérard, 1997).

En la figura 8 se presenta el sonograma de un sonido multifónico típico, con redoble, producido por una *tarka*.

Michèle Castellengo señala que los sonidos multifóni-

cos son favorecidos entre otros por discontinuidades del alma que favorezcan parciales inarmónicos (Castellengo, 1982: 3), lo que es justamente el caso de los *pinkillos* con “*tara*” como la *tarka* (véase fig. 7).

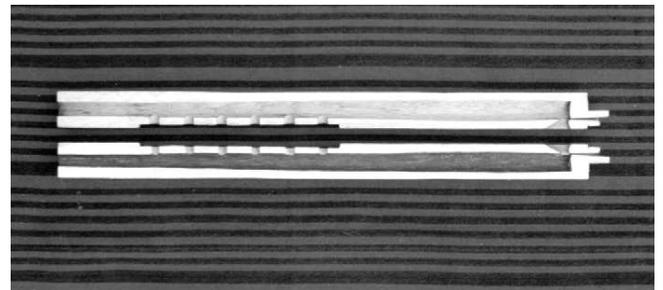


Figura 7. Se trata de la foto de una *tarka* partida en dos de manera longitudinal; se observa claramente el cambio de diámetro del alma.

#### 1.5. NUESTRA ANTERIOR HIPÓTESIS

Hace algunos años, el autor (Gérard, 1997) sostuvo una primera hipótesis de trabajo en cuanto a una posible evolución secuencial de las tecnologías del sonido pulsante (véase fig. 9), que sostenía que tal vez en una primera instancia se hubiese manejado instrumentos ligeramente desiguales que tocan en casi unísonos paralelos, provocándose batimiento; luego por alguna razón se

<sup>8</sup>Pinkillos: son flautas andinas actuales, rectas, de pico, con canal de insuflación, provistas de perforaciones laterales de digitación; no queda claro qué tipo de flautas fueron los pinkillos en la época precolombina.

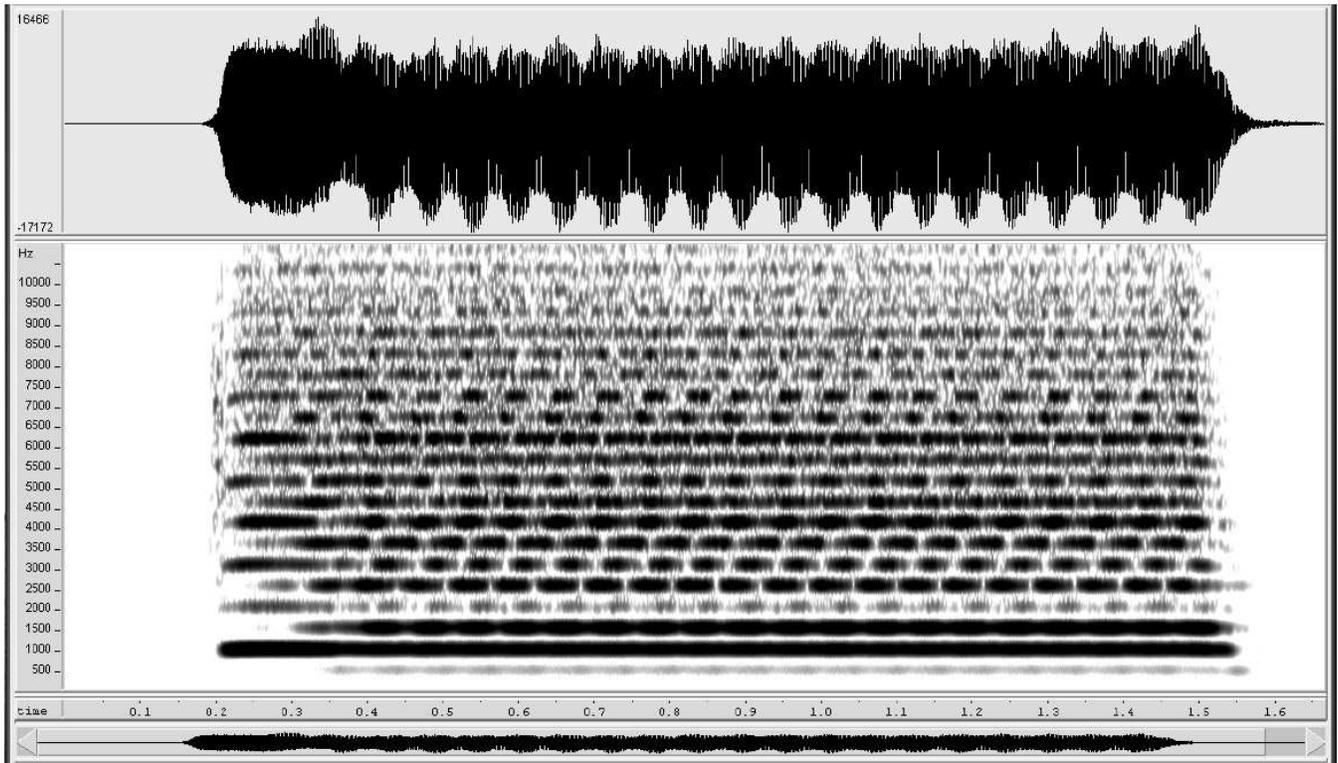


Figura 8. Sonido pulsante “tara” típico producido por una tarka; arriba: forma de la onda; abajo sonograma de banda ancha. Se advierte la oscilación periódica de la amplitud en la envolvente de la forma de la onda y las interrupciones de las líneas espectrales en el sonograma.

empalmaron dos tubos un poco desiguales, obteniéndose otro efecto fenomenológicamente diferente, lográndose un sonido multifónico con redoble, que a la semejanza del anterior es un sonido pulsante. Finalmente, en ciertos *pinkillos* contemporáneos, los *luriris*<sup>9</sup> crean desigualdades en la sección del alma (conducto de la perforación interna), con lo que logran también “redoble” (*tara* o *richa* como se indicó anteriormente). Con la reflexión de los años, quizás se tuviera que cuestionar el orden y la lógica de esta supuesta secuencia, que caería dentro de una teoría evolucionista muy simplificadora y lineal. Pero queda claro que los tres casos estudiados, es decir dos tubos ligeramente desiguales que inducen batimientos, dos tubos empalmados con longitudes y secciones diferentes, y variaciones en la sección del alma de ciertas flautas rectas con redoble, tienen en común dos aspectos de extrema importancia, ya que los tres casos provienen de la combinación de dos cosas a la vez similares, pero también con sutiles diferencias:

- **dos** tubos en paralelo (de longitudes un poco diferentes); **dos** tubos empalmados (de diámetro y longitudes diferentes); **dos** partes del alma (diferencias del diámetro de la sección, estrecho y ancho).
- y por otro lado, los tres casos indicados emiten sonidos pulsantes, oscilantes (fluctuaciones periódicas

o casi periódicas de la intensidad), en el primer caso el fenómeno es batimiento o pulsación mientras que en los segundo y tercer casos se trata de sonidos multifónicos con redoble (Castellengo, 1982; Gérard, 1997).

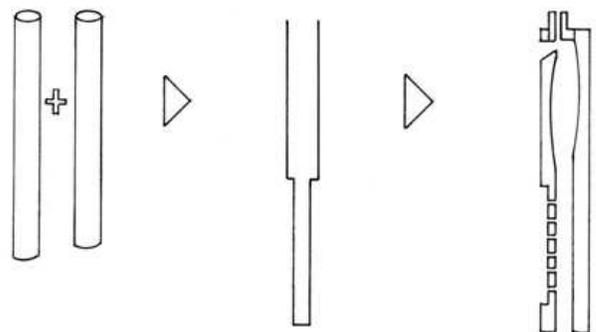


Figura 9. En un anterior artículo se presentó una hipótesis sobre la evolución secuencial de los sonidos pulsantes.

Tal vez la “lógica evolutiva” y el orden secuencial de esta hipótesis no corresponde a lo que ocurrió sino que a lo mejor fueron descubrimientos separados, por grupos humanos diferentes, en espacios distintos, pero poblaciones probablemente interconectadas e interrelacionadas. No debemos soslayar el hecho de que desde los tiempos arqueológicos más remotos existieron constantes con-

<sup>9</sup> *Luriri*: (Aymará) Fabricante nativo, aquí de instrumentos musicales.

xiones, intercambios<sup>10</sup>, viajes, comercio, movimiento y trueque de objetos de diversa índole por ejemplo con las caravanas de llamas (Lecoq, 1984, 1987, 1988), sin hablar de las diferentes conquistas internas por grupos dominantes, que dieron lugar a una cierta expansión con sincretismo de pensamientos, cosmovisiones, idiosincrasias, creencias, tecnologías, técnicas, modos de producción, gustos, estéticas, etc., que sin lugar a dudas condujeron a ciertos universalismos en el comportamiento andino; se quiere insinuar aquí que la idea de que la **yuxtaposición de dos partes a la vez semejantes y a la vez un poco distintas generaría sonidos pulsantes o vibrantes**. Primero deberíamos recordar que simbólicamente el número **2** es trascendental dentro de la cosmovisión y el simbolismo andino, como el *awqa* (pares antagónicos) y *yanantin* (pares semejantes) (Bouysson-Bey, 1987; Platt, 1976) y de igual manera el sonido pulsante parece ser una constante dentro del gusto y de la estética acústica lo que nos fue reiterado por los comunarios (incluyendo la anécdota relatada en el acápite 1.2 de este artículo). Pero además parece existir una relación lógica entre la concepción dual y el sonido pulsante, pues en la estadía de Henry Stobart en el campo de Macha al norte de Potosí le dijeron:

“El sonido tara me fue descrito como “mezclado”, más específicamente tara dijese ser “dos sonidos” o algo que suena con “dos bocas”. Este contraste con q’iwa que se describe como un sonido claro (“se oye bien clarito, eso se llama q’iwa”) y se especifica como solitario y sin doble (“un solo sonido, no tiene doble”). . .”

“... Siempre al hablar del sonido tara, la cualidad vibrante de la “r” sería enfatizada, haciendo un sonido “arr” con la “r” doble...., también Hornberber (1983) da el verbo quechua TARANTACHAY: “Temblar, por ejemplo de espanto. Esto recalca el sonido vibrante, zumbido del pinkillo tara.”

Del mismo modo en el diccionario de aymará (De Lucca, 1987: 154) leemos:

“Tara: Ancho, doble, dicese de las cosas que tienen aspecto de ser dos.”

Sin embargo al escuchar un sonido de *tarka*, o *pinkillo* de carnaval o un *lawato*, se oye un sonido gritón, estridente, rico en armónicos y parciales agudos y, fuertemente vibrante. Por los varios armónicos y parciales audibles se lo califica de multifónico (Castellengo, 1982: 2). Pero no se escucha dos sonidos sino un conjunto de

<sup>10</sup>Olga Gabelmann en excavaciones de horizontes del formativo (1300 A.C. a 200 D.C.) en el Valle Alto de Cochabamba encontró por ejemplo fragmentos de malaquita, artefactos de basalto y oro que no son originarios de esta región, pero también conchas marinas de la familia pectinidae que provienen de la costa del Pacífico lo que muestra intercambios con zonas lejanas en épocas tempranas (Gabelmann, 2004: 69, 70, 77).

sonidos más o menos discretos<sup>11</sup>. Por tanto el autor plantea hipotéticamente que *tara* no se refiere exactamente a dos sonidos, sino que para lograr un sonido vibrante, originalmente se necesitaba de **dos tubos**, ya sean **separados** (batimiento) ya sean **empalmados** (multifonías con redoble), reiterándose parcialmente la anterior hipótesis.

## 2. SILBATOS DOBLES CON PULSACIONES

### 2.1. ANTECEDENTES SOBRE LOS SILBATOS DOBLES

En el catálogo del Museo Chileno de Arte Precolombino se presentan varios silbatos dobles (Museo Chileno de Arte Precolombino, 1982), lo que respaldaría una presencia notoria de esta tipología de instrumento en la región. Luego Isikowitz<sup>12</sup> (1935) ostenta interesantes aportes en cuanto a los silbatos precolombinos (véase fig. 10). Indica que se encontraron ejemplares arqueológicos en la parte este de los Andes, en el Chaco y Amazonas. Muestra varios ejemplares de silbatos dobles de cerámica que guardan gran semejanza con los que se estudiaron en este trabajo. A continuación se reproduce el dibujo de un silbato doble encontrado en Chimbote (Ecuador):

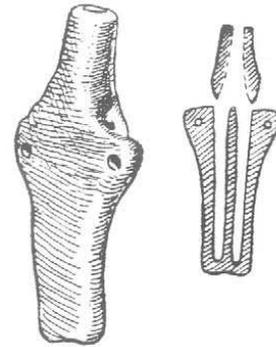


Figura 10. Silbato doble de arcilla, con conductos de aire, originario de Chimbote Colección Baessler (Isikowitz, 1935: 361).

Y más allá agrega:

“This system of doubling the whistles is spread over the entire territory and reaches its height in the valley of Mexico and in Peru” (Isikowitz, 1935: 376).

Finalmente José Pérez de Arce nos envió muy gentilmente la ficha de un silbato doble de cerámica encontrado en Arica-Chile (fig. 11) expuestos en el Museo Chileno de Arte Precolombino con el número de registro MCHAP 2772 y su foto junto a otro instrumento semejante (fig. 12), que se parecen bastante a los que se estudian aquí por lo que se los presenta a continuación. Estos instrumentos no tienen datos de contexto.

<sup>11</sup>Se usa la palabra discreta en el sentido matemático, es decir discernible, separado.

<sup>12</sup>Gentileza de José Pérez de Arce.

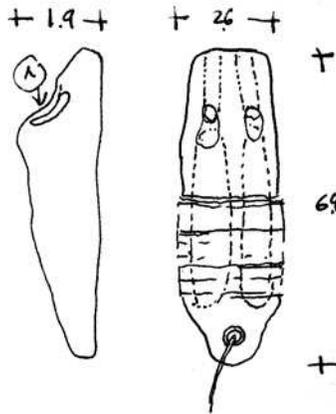


Figura 11. Esquema de un silbato doble encontrado en Arica—Chile muy parecido a los silbatos estudiados en el presente trabajo (gentileza de José Pérez de Arce—Museo Chileno de Arte Precolombino).



Figura 12. El mismo silbato junto a otro, encontrados en Arica—Chile (Gentileza de José Pérez de Arce—Museo Chileno de Arte Precolombino).

## 2.2. LOS INSTRUMENTOS OBJETO DE LA MEDICIÓN

Son dos silbatos que se encuentran en el Museo Taki de la ciudad de Cusco en la república del Perú (véase fig. 13). Fueron comprados por su propietario, nuestro amigo y músico, Kike Pinto, a un huaquero<sup>13</sup> que ofrecía todo tipo de objetos arqueológicos. De tal manera, que muy lamentablemente se trata también de objetos totalmente descontextualizados. Sobre el particular fueron consultados especialistas del “Proyecto Waylla Kepa” de Lima. Waylla Kepa es un proyecto interdisciplinario que trabaja en el registro de la colección de casi 2000 instrumentos musicales del Museo Nacional de Arqueología con la publicación de catálogos y un taller de fabricación de réplicas. A partir de fotos digitales de los silbatos enviadas por el autor, Milano Trejo junto a otros especialistas del proyecto indican que no existe ejemplares similares en la colección del Museo y que por el tipo de pasta, la manufactura y los acabados corresponderían al periodo

<sup>13</sup>Huaquero: viene de la palabra quechua wak'a: . . . , cosa sagrada, ofrenda, . . . , todo lo sobrenatural (Lara, 1971: 306); se trata de los ladrones de tumbas precolombinas que vienen saqueando todas las riquezas arqueológicas, destruyendo a gran velocidad todos los vestigios de las antiguas culturas.



Figura 13. Los dos silbatos dobles del Museo Taki del Cusco.

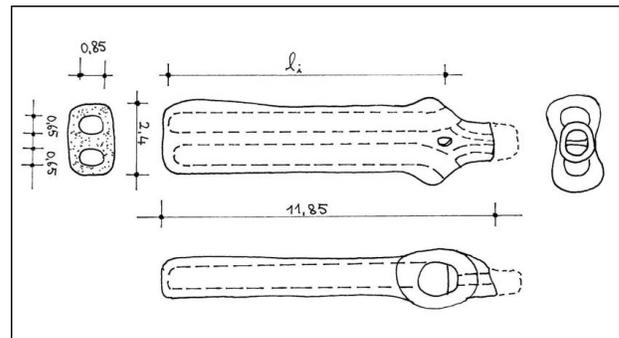


Figura 14. Esquema aproximado del doble silbato mayor.

Inca de ascendencia serrana y a la vez se podría afirmar que fueron ambos silbatos construidos por el mismo alfarero. Los mismos expertos arguyen además, que la temperatura de cocción debió superar los 700 °C, y que la técnica de fabricación fue el modelado con un decorado dicromático (colores blanco y negro) y un pulido anterior al horneado que explica el brillo de la superficie de la pasta.

### 2.2.1. DESCRIPCIÓN

Se trata de dos silbatos tubulares dobles (fig. 13). Pertenecen a los aerófonos de la familia de las flautas, ya que la excitación acústica se produce por oscilación del chorro de aire alrededor de un bisel (en las “ventanas”). Además corresponden a las flautas de pico ya que están provistas de canales de insuflación, tal como las flautas dulces, los *pinkillos* andinos actuales o ciertos tipos de tubos de órgano. Los tubos son “bordones”, es decir cerrados en sus extremos distales y abiertos en sus extremos proximales, sin perforaciones laterales de digitación. Son de cerámica rojiza. Se trata de una pasta muy fina donde el antiplastificante no es visible. Tienen brillo por un pulido anterior a la cocción. Presenta líneas realizadas con engobe blanco y negro. Ambos instrumentos muestran trazas de patinado y grasa por su uso. Los extremos proximales de los picos están quebrados, de tal manera que los instrumentos están parcialmente incompletos, pero esto no altera en absoluto la parte acústica ya que ambos suenan perfectamente bien. Ahora lo ex-

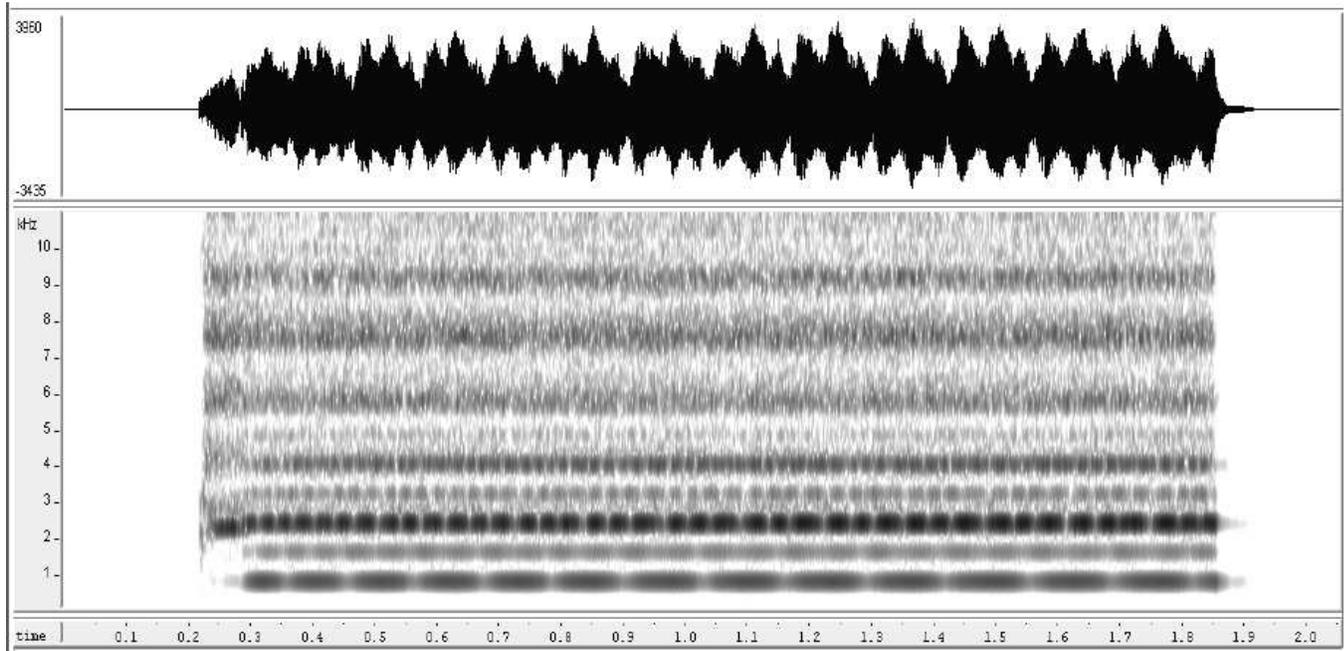


Figura 15. Sonido del silbato doble (mayor); arriba: forma de la onda; abajo: sonograma de banda ancha; se advierte claramente el efecto de batimiento o pulsación (19Hz).

traordinariamente interesante de estos instrumentos es que emiten sonidos con batimiento (pulsaciones), intencionalmente producidos, ya que fueron construidos con pares de tubos muy ligeramente desiguales (en un caso la diferencia es de un milímetro y en el otro caso es de 1,5 milímetro). Es un sonido dulce, suave, agudo y pulsante; el batimiento está presente en ambos instrumentos de tal manera que se trata inexorablemente de un efecto intencional<sup>14</sup>, lo que vendría a respaldar y consolidar todas nuestras hipótesis y observaciones de años sobre los sonidos pulsantes.

### 2.3. MEDICIONES Y RESULTADOS

#### 2.3.1. Silbato mayor

Este instrumento mide aproximadamente 12 cm de largo máximo y 2,5 cm de ancho máximo. Las longitudes acústicas de los tubos  $l_i$  son de **9,80 y 9,90±0,025 cm**, es decir tienen una diferencia de longitud de tan sólo 1 mm mientras que sus secciones son ovaladas con ejes de 0,85 cm y 0,65 cm (véase fig. 14).

Las alturas de sonido medidas por separado con medidor de altura de sonido (de ambos tubos) son: **Sol<sub>+1</sub>+30 cents y Sol<sub>+1</sub>+50 cents** (forman un intervalo aproximado de 20 cents) lo que corresponde a las frecuencias 808 Hz y 817 Hz. Aplicando la fórmula (1) indicada por Leipp se encuentra una frecuencia de pulsaciones de:

$$\phi = \nu_1 - \nu_2 = (817 - 808) \text{ Hz} = 9 \text{ Hz}$$

<sup>14</sup>Por una parte al soplar estos silbatos siempre sale el batimiento; de otra manera: ¿cuál podría ser otra razón para conceptualizar un instrumento que emitiera dos veces el mismo sonido?

En el diagrama de la figura 15 (forma de la onda, sonograma de banda ancha, sonograma de banda estrecha) que corresponde al sonido emitido por el silbato de mayor tamaño se encuentra una frecuencia de pulsación de aproximadamente 8 Hz, de tal manera que existe bastante concordancia.

#### 2.3.2. Silbato menor

Este instrumento mide aproximadamente 9 cm de largo máximo y 3 cm de ancho máximo. Las longitudes acústicas de los tubos  $l_i$  son de **6,85 y 7,00±0,025 cm**, es decir tienen una diferencia de longitud de tan sólo 1,5 mm mientras que sus secciones son casi circulares con un radio de 0,65 cm.

Las alturas de sonido medidas por separado con medidor de altura de sonido (de ambos tubos) son: **Do#<sub>+2</sub>+20 cents y Do#<sub>+2</sub>+50 cents** (formando un intervalo de 30 cents) lo que corresponde a las frecuencias 1122 Hz y 1141 Hz. Aplicando la fórmula (1) indicada por Leipp se encuentra una frecuencia de pulsaciones de:

$$\phi = \nu_1 - \nu_2 = (1141 - 1122) \text{ Hz} = 19 \text{ Hz}$$

En el diagrama de la figura 16 (forma de la onda, sonograma de banda ancha) que corresponde al sonido emitido por el silbato de menor tamaño se encuentra una frecuencia de pulsación de aproximadamente 17 Hz, así que existe también bastante concordancia. La diferencia entre el resultado calculado y el resultado experimental es debido a que al soplar ambos tubos a la vez, ambas frecuencias no conservan exactamente el valor medido por separado (esto es audible). Fue muy complicado medir, ya que la frecuencia de un solo tubo cambia notoriamente con la presión de sople, de tal manera que se

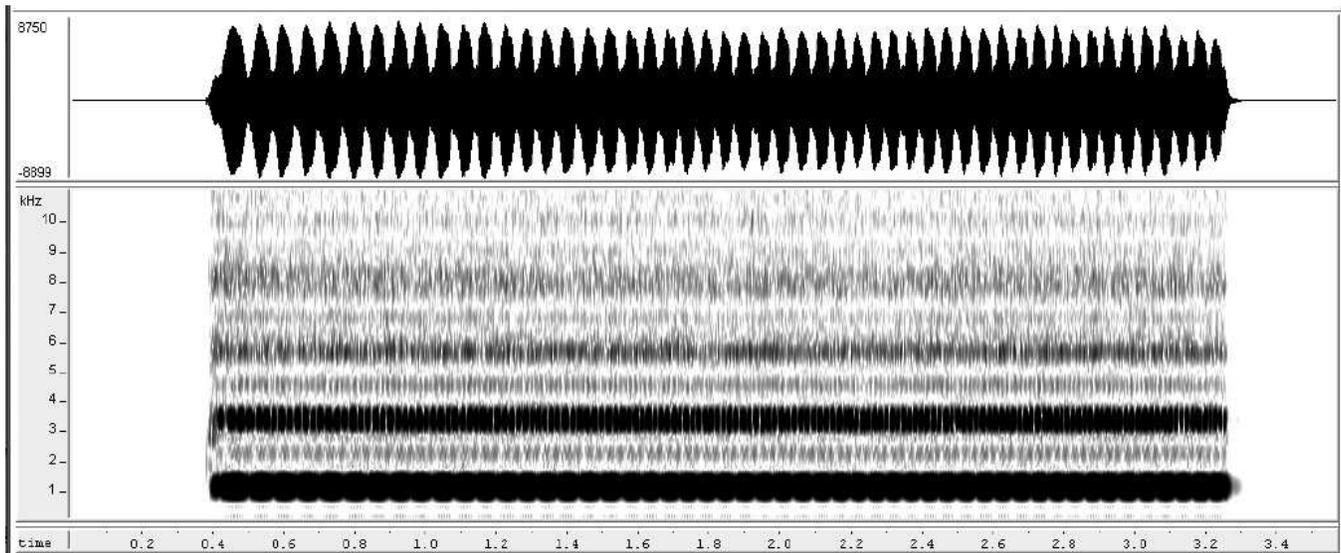


Figura 16. Sonido del silbato doble (menor); arriba: forma de la onda; abajo: sonograma de banda ancha; se advierte claramente el batimiento o pulsación. (17 Hz).

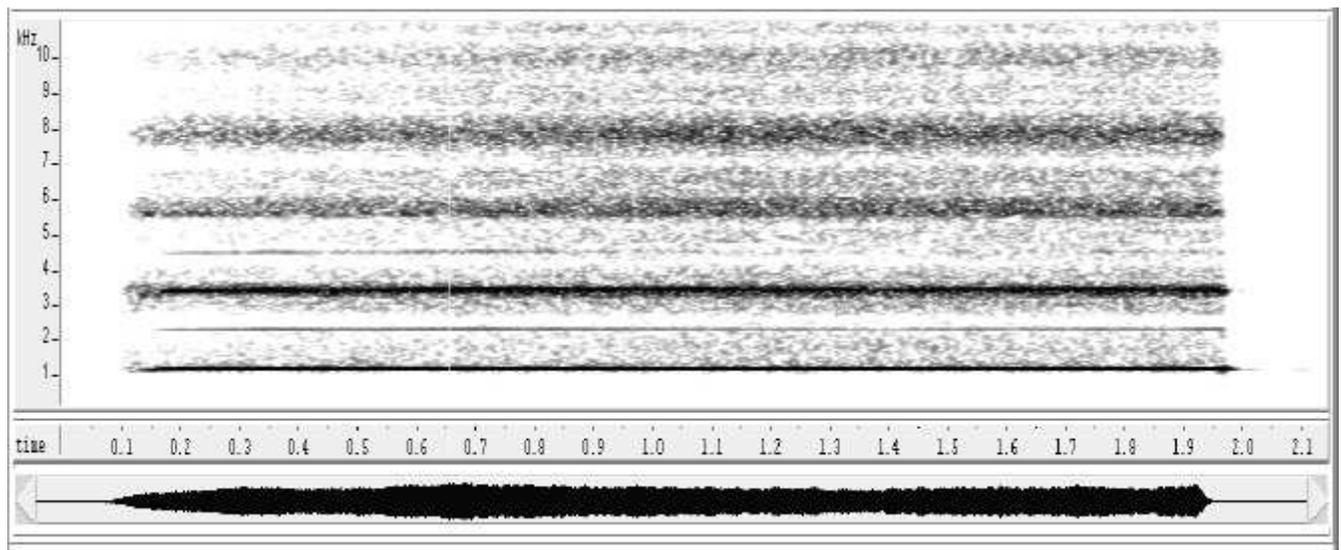


Figura 17. Sonograma de banda estrecha y forma de la onda del sonido de **un sólo tubo** del silbato menor (sin batimiento): la serie es armónica de tendencia impar con presencia de ruido de “viento” (puntitos), principalmente alrededor de los armónicos superiores.

trataría más de una demostración cualitativa que cuantitativa.

En el análisis FFT de la figura 17 (sonograma) del sonido de un solo tubo a la vez, muestra básicamente una serie armónica pobre, de tendencia impar (por ser un tubo bordón, es decir abierto-cerrado), sobre la cual se agrega un notorio ruido de viento “ffff” que se acumula en las cercanías de las resonancias, lo cual corresponde al timbre de un sonido suave, dulce, agudo, con ruido de viento, no muy lejos del sonido de zampoña.

#### 2.4. UNA CONSIDERACIÓN MUSICAL

Desde un principio los dos silbatos venían juntos e incluso el arqueólogo Milano Trejo indica que probable-

mente los dos fueron construidos por un mismo artesano. De tal manera que **parece que estos silbatos forman “un par”**. Si fuese así hipotéticamente, sería interesante comparar las alturas de sonido de ambos (el intervalo musical entre instrumentos) así como las frecuencias de pulsación o batimiento.

**Intervalo entre las alturas medias de ambos silbatos (véase fig. 18):**

$$\text{Sol}_{+1} + 40 \text{ cents a Do}\#_{+2} + 35 \text{ cents} = 595 \text{ cents} \approx 600 \text{ cents}$$

(Equivale a 6 semitonos)

¡Lo que corresponde a una cuarta aumentada! Esto es interesante ya que es justamente el intervalo entre los

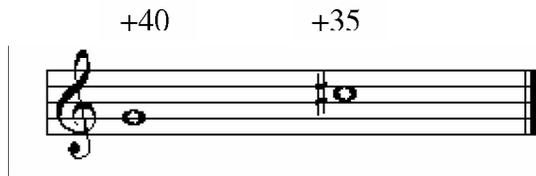


Figura 18. Intervalo entre los dos silbatos.

tamaños “taika” y “mala” de algunas tropas de tarkas<sup>15</sup>, así como de otros *pinkillos* aymaras actuales.

Pero no termina aquí, pues el sonido agudo  $Do\#_{+2}$  tiene un batimiento que es casi el doble (17 Hz) del sonido  $Sol_{+1}$  del otro silbato (8 Hz), y por tanto las pulsaciones de ambos silbatos tocados a la vez encajan perfectamente bien ya que la pulsación del segundo armónico del sonido bajo ( $2 \times 8 \text{ Hz} = 16 \text{ Hz}$ ) es casi igual a la pulsación del sonido agudo (17 Hz). **Así que estos dos silbatos tañidos al mismo tiempo presentan la misma tendencia acústica que algunas tropas actuales de aerófonos andinos quechuas y aymaras, es decir forman un acorde disonante de cuarta aumentada<sup>16</sup> y con pulsaciones proporcionales (1/2), lo que reforzaría nuestra hipótesis de que forman un par.**

### 3. CONCLUSIONES

Los dos silbatos están formados por un par de tubos bordones (cerrados en los extremos distales y abiertos en los extremos proximales), unidos, provistos cada uno de un conducto de aire (boquillas con canales portaviento). El análisis geométrico muestra que los tubos tienen longitudes ligeramente diferentes (diferencias de 1 y 1,5 mm), lo que al ser sopladados ambos a la vez, provoca un efecto de pulsación o batimiento en la onda, que se escucha como una fluctuación o pulsación periódica de la intensidad de sonido (algo así como *wa wa wa...*) y las frecuencias de pulsaciones (8 y 17 Hz) corresponden aproximadamente a lo que se preveía.

Sin lugar a duda, este batimiento no es el efecto del azar, ya que por un lado, construir un silbato con doble nota idéntica no tuviera ningún sentido, ya que al doblar la fuente, no se dobla la percepción de intensidad (nivel sonoro), pues el oído humano escucha el logaritmo de la intensidad, por tanto al doblar la fuente sólo sube el nivel sonoro de  $10 \log 2 = 3 \text{ dB}$  (lo que resulta prácticamente inaudible) y por otro lado, por la misma morfología del instrumento, es prácticamente imposible tocar un solo tubo a la vez<sup>17</sup>.

Por otro lado estos dos silbatos parecen formar un par musical, pues el intervalo entre las dos alturas de sonido es de una cuarta aumentada, lo que concuerda

con la afinación de algunas tropas de pinkillos quechuas y aymarás actuales.

Por tanto, lo que se encontró en este estudio acústico tiene una enorme importancia dentro de la comprensión de la estética andina de la música, pues existe una sorprendente correlación entre el comportamiento acústico de las tropas étnicas modernas y de muchos instrumentos prehispánicos, principalmente con la omnipresente pulsación o fluctuación periódica de la intensidad de sonido, ya sea mediante batimiento, ya sea mediante sonidos multifónicos que incluyen redoble, **los mismos que son producidos por un concepto dual: dos tubos ligeramente desiguales en paralelo o dos tubos ligeramente desiguales empalmados, simbolizados en la palabra quechua-aymará TARA: DOBLE.**

### REFERENCIAS

- [1] Assayag, Castellengo, Malherbe. Nouvelles Techniques Instrumentales. Informe N° 38, Laboratoire d'Acoustique - Université de Paris VI, Paris 1985.
- [2] Bouysse-Cassagne, Harris, Platt, Cereceda. Tres Reflexiones sobre el Pensamiento Andino. Hisbol, La Paz 1987.
- [3] Borrás, Gérard. Organología de la tarka en la zona circumlacustre del Titicaca. En: Anata/Phujllay: Entre pinkillos y saxras". En prensa. Bolivia, 2007.
- [4] Castellengo, Michèle.
  - Contribution à l'Étude Expérimentale des Tuyaux à Bouche. Tesis de doctorado. Université Pierre et Marie Curie. Paris VI, 1976.
  - La Flûte Traversière a une Cléf. Bulletin du GAM N°97, Paris 1978.
  - Paramètres Sensibles d'un Tuyau d'Orgue à Embouchure de Flûte. Bulletin du GAM, N°42. Paris 1969.
  - Sons Multiphoniques aux Instruments à Vent. Rapports IRCAM. N° 34/82, Paris 1982.
- [5] De Lucca, Manuel.
  - Diccionario Aymara-Castellano, Castellano-Aymara. Comisión de Alfabetización y Literatura en Aymara Villamil de Rada, La Paz 1983.
  - Diccionario Práctico Aymara-Castellano. Enciclopedia Boliviana, Ediciones Los Amigos del Libro, Cochabamba 1987.
- [6] Gabelmann, Olga U. Santa Lucía – Producción de cerámica, patrón de asentamientos e intercambio en el periodo formativo del Valle Alto de Cochabamba. En: Jornadas Arqueológicas, pp.51-77 – CIAR. Sucre, 2004.
- [7] Gérard Arnaud.
  - Acústica de las Siringas Andinas de Uso Actual en Bolivia: Método y Conclusiones. En: La Música en Bolivia, de la prehistoria a la actualidad. Fundación Simón I. Patiño, pp. 497-526. Cochabamba, 2002.
  - Interpretación Acústica del Ayarachi “Yura” de los Museos Charcas. En: Jornadas Arqueológicas - Primera Versión, pp. 79-112” CIAR/Universidad San Francisco Xavier de Chuquisaca. Sucre, 2004.
  - Acústica de las Siringas Andinas de uso actual en Bolivia. Tomo 1 y 2. Informe de Investigación U. A. T. F., mimeografiado. Potosí, 1999.
  - Acústica de los ayarachis, una original sucesión de alturas de sonido. En: Revista Boliviana de física N° 4, año 4, Instituto de Investigaciones Físicas UMSA y Sociedad Boliviana de Física, La Paz 1998.

<sup>15</sup>¡Los acordes de quinta y cuarta rara vez son justos.

<sup>16</sup>Por lo general se trata de una quinta un poco corta; tenemos también ejemplos de tarkas donde la quinta es un poco mayor con tendencia a una quinta aumentada.

<sup>17</sup>Nosotros para lograr esto, hemos tenido que tapar una de las ventanas de las boquillas para volverlo mudo.

- La Acústica del Sonido Tara. En: Anales de la X Reunión de Etnología, MUSEF, La Paz 1997.
- Multifonías en Aerófonos Andinos de Bolivia. En: Revista Boliviana de Física, UMSA, N° 3, año 3, julio, pp. 40-59, La Paz 1997.
- Primera Aproximación a la acústica de la Tarka. En: Revista Boliviana de Física, N° 8, pp. 42 - 50. Instituto de Investigaciones Físicas UMSA y Sociedad Boliviana de Física. La Paz, 2002.
- [8] Helmholtz, Hermann L. F. On the sensation of Tone. Dover. New York 1954 (1885).
- [9] Isikowitz, Karl Gustav. Musical and other Sound Instruments of the South American Indians - A Comparative Ethnographical Study. Goeteborgs Kungl. Ventenskap-Och-Vitterhets-Samhaelles Handlingar. Goeteborg 1935.
- [10] Lara, Jesús. Diccionario Qheshwa-Castellano. Enciclopedia Boliviana, Los Amigos del Libro. La Paz 1971.
- [11] Lecoq, Patrice.
  - Caravanes de Lamas, Sel et Échanges dans une Communauté de Potosí, en Bolivie. En : Bulletin de l'Institut Français d'Études Andines, T XVI, N°3-4, pp. 1-38, Lima, 1987.
  - Una ruta de la sal en el sud boliviano. Un informe de trueque anual de una caravana de llamas. En: Revista del Museo Nacional de Etnografía y Folklore, año 1, N° 1/2, pp. 163 a 216. La Paz, 1984-1988.
- [12] Leipp, Emile. Acoustique et Musique. Masson, París 1984.
- [13] Museo Chileno de Arte Precolombino. La música en el Arte Precolombino. Museo Chileno de Arte Precolombino. Santiago 1982.
- [14] Pérez de Arce, José.
  - Música en la Piedra - Música Prehispánica y sus Ecos en Chile Actual. Museo Chileno de Arte Precolombino. Santiago 1995.
  - Siku. En: Revista Andina, año 11, N° 2, diciembre, pp. 473-486, editor: Centro "Bartolomé de las Casas", Cusco 1993.
  - Sonido Rajado: The Sacred Sound of Chilean Pifilca Flutes. En: The Galpin Society Journal, julio de 1998, Londres 1998.
  - Sonido Rajado II: En: The Galpin Society Journal, abril de 2000, Londres 2000.
- [15] Platt, Tristan. Espejos y Maíz. CIPCA , La Paz 1976.
- [16] Stobart, Henry. Tara and Q'iwa - Worlds of Sounds and Meaning (primera versión inédita en 1992). En: Cosmología y Música en los Andes, Edit. : Max Peter Baumann - International Institute for Traditional Music, Vervuert Iberoamericana, pp. 67 - 81, Berlin 1996.
- [17] Wright, Campbell. Analysis of the Sound of Chilean Pifilca Flutes. En: The Galpin Society Journal, LI, pp. 51-63, Julio de 1998, Londres 1998.

# OBSERVACIÓN SIMULTÁNEA DE NEUTRONES SOLARES EN ASOCIACIÓN CON UNA FULGURACIÓN SOLAR DEL 7 DE SEPTIEMBRE DE 2005

E. Ricaldi<sup>1</sup>, P. Miranda<sup>1</sup>, R. Bustos<sup>1</sup>, R. Ticona<sup>1</sup>, O. Burgoa<sup>3</sup>, D. López<sup>3</sup>, Y. Matsubara<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz—Bolivia*

<sup>2</sup>*Solar Terrestrial Environment Laboratory, Nagoya University, Nagoya—Japan*

<sup>3</sup>*Carrera de Física, U.M.S.A., La Paz—Bolivia*

## RESUMEN

El 7 de Septiembre de 2005 a las 17:36:40 (GMT) se produjo una fulguración solar registrada por el Telescopio de Neutrones Solares (TNS) y el Monitor de Neutrones (12NM-64) a las 17:40 (GMT), que fué verificado por el satélite GOES[1]. Se observa una correlación del evento entre los datos del experimento de Chacaltaya y los del Observatorio Geomagnético de Patacamaya, ambos del Instituto de Investigaciones Físicas de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA).

*Descriptor: Neutrones Solares, Crochets Magnéticos.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Las partículas energéticas son generadas y aceleradas por fenómenos astronómicos conocidos, tales como: supernovas, estrellas de neutrones, núcleos galácticos activos, fulguraciones solares, etc.

El Sol es una estrella típica y como es difícil observar otras estrellas en detalle, el estudio del Sol es una de las tareas más importantes de la astrofísica. La siguiente estrella más próxima está a 4.3 años luz de distancia, unas  $10^5$  veces la distancia de la Tierra al Sol, por lo que el entendimiento del Sol nos puede decir mucho acerca de la estructura y actividad de otras estrellas en el Universo.

El Sol tiene una estructura dinámica compleja. Sus principales características son mostradas en la Tabla 1.

TABLA 1  
Características del Sol

Radio	$6.96(7) \times 10^{10}$ cm
Volumen	$1.41 \times 10^{33}$ cm <sup>3</sup>
Masa	$1.99(2) \times 10^{33}$ g
Densidad Media	1.41 g/cm <sup>3</sup>
Luminosidad	$3.80 \times 10^{33}$ erg/s
Temperatura media (sup)	5770 K
Cromósfera	2000 km
Rango de temperatura de la cromósfera	(4500 - 20000) K
Campo Magnético	1000 gauss

El Sol produce explosiones conocidas como fulguraciones solares, las cuales están físicamente relacionadas con las manchas solares. La observación sistemática de las fulguraciones solares con espectro-Heliógrafos permiten la observación de fulguraciones en el rango  $H_{\alpha}$ . Los

satélites que observan rayos X concretaron que las fulguraciones solares generan ondas electromagnéticas a lo ancho de todo el espectro, desde ondas de Radio hasta frecuencias de rayos  $\gamma$ .

Las partículas aceleradas en una fulguración solar pueden emitir ondas electromagnéticas (OEM) y partículas secundarias las cuales interactúan con la atmósfera solar. Las OEM son producidas por emisión sincrotrónica en el intenso campo magnético de la corona solar, mientras que los rayos X son producidos por la interacción de electrones acelerados con la atmósfera solar mediante el fenómeno de bremsstrahlung. De manera similar los rayos  $\gamma$  y los neutrones son producidos por la interacción de iones acelerados con la atmósfera solar.

No está bien entendido como las partículas de la fulguración solar son aceleradas sin embargo los neutrones solares y los rayos  $\gamma$  producidos en una fulguración solar son inmunes a los campos magnéticos por lo tanto ellos retienen información sobre la posición de su origen y el tiempo de aceleración permitiéndonos entender mejor los mecanismos de aceleración.

## 2. ORGANIZACIÓN EXPERIMENTAL

### 2.1. Detector de Neutrones Solares

El detector de neutrones solares está ubicado en el Monte Chacaltaya (68°O, 16.2° S, 5250 m s.n.m.) y está en funcionamiento desde el 21 de Septiembre de 1992. Consiste de cuatro contadores de centelleo plástico de 1 m<sup>2</sup> de área y 40 cm de espesor además de un anti-contador para vetar partículas cargadas (ver figura 1).

El anti-contador consiste de 17 centelladores, cada uno de 220 cm × 46 cm de área y 1 cm de espesor. El tamaño de los fotomultiplicadores (PMT) usados en los contadores de centelleo es de 12.7 cm, modelo R877, y de 5.1 cm, modelo R329 para el anti-contador. Las energías de los protones de retroceso son discriminadas dentro de

<sup>1</sup>Email: ericaldi@fiumsa.edu.bo

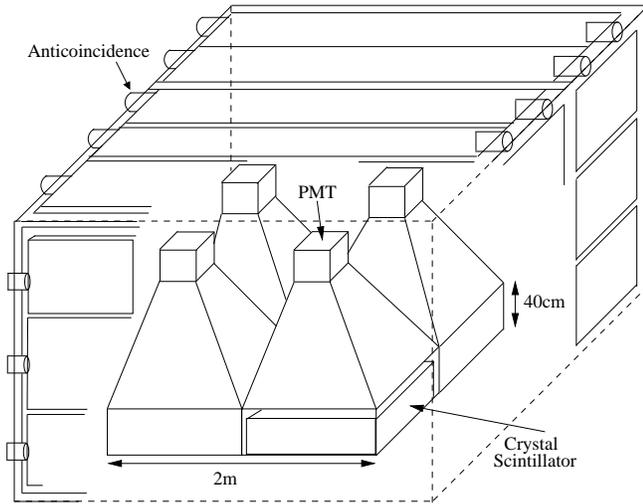


Figura 1. Vista esquemática del Detector de Neutrones Solares.

cuatro niveles:  $> 40 \text{ MeV}$ ,  $> 80 \text{ MeV}$ ,  $> 160 \text{ MeV}$  y  $> 240 \text{ MeV}$ , medidas mediante la altura de pulso generado a la salida del fotomultiplicador.

### 2.2. Observatorio Geomagnético de Patacamaya

Está ubicado en la localidad de Patacamaya distante a 110 km de la Ciudad de La Paz, sus coordenadas son  $17^{\circ}15'57''\text{S}$ ,  $67^{\circ}57'07''\text{O}$ , a 3789 m s.n.m., opera desde 1983. En este laboratorio se cuenta con un variómetro, un teodolito magnético y un magnetómetro de protones. El variómetro toma los datos de las variaciones diarias de los elementos H, D, Z, del campo magnético terrestre, siendo la más sensible la componente H.

## 3. RESULTADOS

En la figura 2 se muestran los contejes registrados por el Detector de Neutrones Solares y el Monitor de Neutrones 12-NM64. La figura 3 muestra una anomalía notable (crochet) en la componente H del campo magnético de la Tierra que correlaciona perfectamente con el evento registrado por el TNS y el 12NM-64 de Chacaltaya. Además incluye el registro correspondiente al paso por la Tierra de la nube de plasma emitida por el Sol, el día 9 de septiembre de 2005.

La figura 4 muestra el incremento del flujo de rayos X detectado por el satélite GOES[1].

La Tabla 2 incluye algunos de los datos principales que se pueden leer de los registros.

## 4. CONCLUSIONES

Como se indicó en la introducción las fulguraciones solares pueden acelerar iones a altas energías, los cuales al interactuar con la atmósfera solar producen rayos x y rayos gamma como también neutrones secundarios vía diferentes interacciones nucleares. Un neutrón libre (es decir no unido al núcleo) tiene una vida de decaimiento de 886 segundos (14min y 45s) que es comparable al

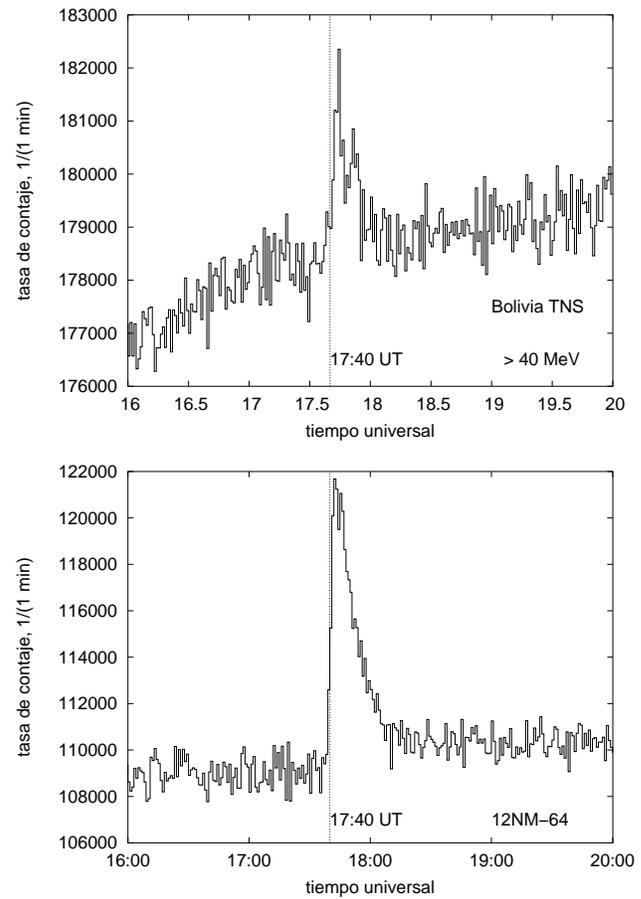


Figura 2. Registro del evento del 7 de Septiembre de 2005 mediante el Detector de Neutrones Solares TNS (arriba) y el Monitor de Neutrones 12-NM64 (abajo), horas 17:40 tiempo universal.

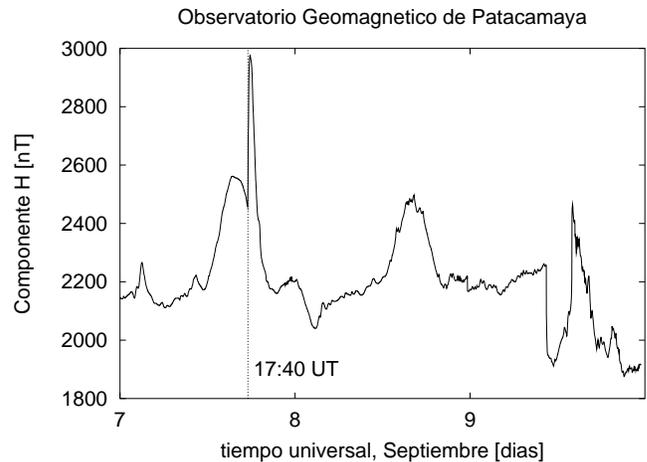


Figura 3. Variación de la componente horizontal del Campo Magnético de la Tierra en el Observatorio de Patacamaya.

tiempo de viaje de la luz del Sol hasta la Tierra 499 segundos (8min y 20s), entonces solamente los neutrones más rápidos (los que se mueven con velocidades relativistas) podrán alcanzar la Tierra antes de decaer en protones y electrones.

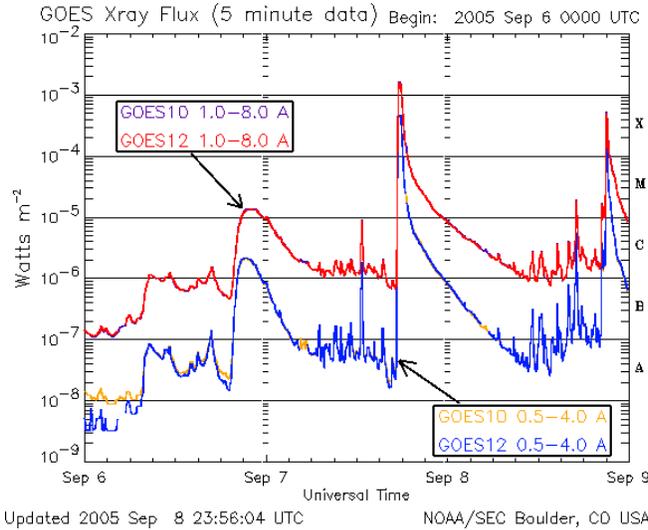


Figura 4. Incremento del Flujo de Rayos X detectado por el satélite GOES [1].

Debido a que los neutrones no son afectados por los campos magnéticos del Sol éstos mostrarían directamente el espectro de energías de los iones acelerados y también podrían ayudar a determinar el tiempo de producción de los neutrones, el cual sería el mismo que el tiempo de aceleración de los iones.

La energía de los neutrones solares fué estimada mediante el tiempo de vuelo y estaban entre 25 y 400 MeV debido a que fue una fulguración intensa de larga duración de emisión de neutrones. El tiempo de vuelo de los neutrones solares más energéticos fue estimado en 11min 40s con una velocidad de 214300 km/s.

El momento en que se produce la fulguración solar, el Sol apuntaba directamente sobre Bolivia entonces el laboratorio de Chacaltaya y Patacamaya estaban en muy buena posición para observar los neutrones solares.

Los protones y electrones producto del decaimiento de los neutrones solares interactúan con el campo magnético de la Tierra (efecto de la fulguración solar sobre los elementos del campo magnético terrestre) produciendo un sistema de corriente eléctrica de enganche que resulta siendo una desviación del sistema de corriente ionosférica que produce la variación magnética denominada variación diaria solar,  $S_q$ .

La corriente eléctrica de enganche produce la anomalía magnética denominada: anomalía de enganche (*geomagnetic crochet*) que es una variación magnética rápida con características similares al comportamiento de los neutrones registrados en el TNS y 12NM-64 de Chacaltaya.

Como las velocidades de viaje de los neutrones son relativistas, éstos pueden penetrar profundamente en la magnetósfera hasta la superficie de la Tierra, pero los protones y electrones producto de su decaimiento interactúan con los átomos e iones de la ionósfera que seguramente ofrecen buenas condiciones para que sucedan las colisiones rápidas necesarias para producir la deno-

minada corriente eléctrica de enganche, lo que a su vez crean campos magnéticos adicionales que observamos en el registro.

La fulguración solar desprendió una nube de plasma que tardó 1d 17h y 27min en llegar a la Tierra, lo hizo a una velocidad de cerca de 1005 km/s y tuvo una extensión de 12964500 km, produjo una disminución en la intensidad de la componente  $H$  del campo magnético de la Tierra por un intervalo de tiempo de 3 horas 35 minutos en el Observatorio de Patacamaya (baja latitud, laboratorio casi ecuatorial) en horas de la madrugada local (es decir cuando el observatorio no daba de frente a la nube de plasma solar).

TABLA 2

Parámetros obtenidos de los registros y constantes utilizadas.

Tiempo de emisión de la fulguración solar	17.472 horas
Tiempo de llegada de la radiación electromagnética	17.611 horas
Tiempo de llegada de los neutrones	17.667 horas
Tiempo de viaje de la radiación EM	500 s
Tiempo de viaje de los neutrones	700 s
Velocidad de propagación de la radiación EM	$3 \times 10^6$ km/s
Velocidad de propagación de los neutrones	214286 km/s
Tiempo de llegada de la nube de plasma solar	10.917 horas
Tiempo de finalización del paso de la nube de plasma solar	14.50 horas
Tiempo que tarda la nube de plasma solar en pasar por la Tierra	3.583 horas
Tiempo de viaje de la nube de plasma solar	1.727 días (149220 s)
Velocidad de propagación de la nube de plasma solar	1005 km/s
Espesor de la nube de plasma solar	12964500 km
Duración de la señal de neutrones	~20 minutos
Duración de la señal magnética (crochet)	~20 minutos
Intensidad de campo magnético del crochet	~ 400 nT

En la actualidad se está revisando la base de datos (anterior), para verificar la existencia de este tipo de eventos (crochet) que se producirían por efecto de las fulguraciones solares.

#### REFERENCIAS

- [1] Space Environment Center-N.O.A.A.  
<http://www.sec.noaa.gov/today.html#xray>
- [2] <http://www.fiumsa.edu.bo/iif/geomag.htm>
- [3] Watanabe K, *Solar Neutron Events associated with Solar Flares, PhD Thesis, 2005*
- [4] Watanabe K., *Highly Significant detection of Solar Neutrons, RHESSI Science Nuggets.*
- [5] Sako T. et al., *Long Lived Solar Neutron Emission in Comparison with electron-produced radiation in the 2005 september 7th, Solar Flare*, Astrophysical Journal, 2006 November 1.
- [6] R. G. Rastogi, *Effect of Solar Disturbances on the Geomagnetic H, Y and Z Fields in American Ecuatorial Electrojet Stations, Solar Flare effects*, J. Ind. Geophysical Union (2003) Vol.7, Number 2, pp.43-51.

## PRIMERA APROXIMACIÓN A LA ACÚSTICA DE LA “TARKA”

Arnaud Gérard A.<sup>1</sup>

SoundLab—Carrera de Física  
UATF—Potosí

### RESUMEN

La tarka es una flauta recta andina con canal portaviento de insuflación, de sonido ronco, gritón y temblante que se toca por “tropas” desde Todo Santos hasta Carnaval. En las tropas, por lo general se mezclan dos tamaños, la taika (grande) y la mala (pequeña), afinadas con un intervalo de quinta casi justa en el caso estudiado.

Se han medido las alturas de sonido sucesivas de una decena de tarkas “ullara”, que forman una “tropa” y se ha podido evidenciar que por lo general las melodías son pentatónicas en modo “b” menor según D’Harcourt [D’Harcourt, 1925, 1959].

Existe bastante dispersión entre las alturas paralelas de los diferentes instrumentos de un mismo tamaño, esta discrepancia varía de **45 a 80 cents** para las taikas. Estas “desigualdades” provocarán pulsaciones (batimientos) al tocar los instrumentos en paralelo. Sin embargo si se compara el comportamiento promedio de las taikas y de las malas se observa una gran similitud. El intervalo entre las dos primeras notas es mayor que el tono bien temperado, es de 231 cents en las taikas y 225 cents en las malas (en promedio). Los intervalos entre las digitaciones 2 y 4 por una parte y 5 y 7 por otra parte son de tercera menor y fluctúan entre 297 y 330 cents. Las notas intermedias tradicionalmente no utilizadas (digitación 3 y 6), si es que formarían con las demás una escala diatónica mayor, deberían encontrarse a 100 cents de la nota superior (un semitono) y 200 cents de la nota inferior, pero no es el caso, los intervalos superiores e inferiores con estas notas fluctúan entre 133 y 187 cents, lo que parece indicar que estas estarían aproximadamente al medio de este intervalo de tercera formando intervalos estadísticamente próximos a 150 cents. Las demás segundas mayores fluctúan entre 174 y 200 cents.

Estos resultados no permiten todavía presentar un modelo de escala (sucesión de alturas de sonido).

*Descriptor:* Acústica, Instrumentos Musicales.

### 1. INTRODUCCIÓN

#### 1.1. DEFINICIÓN

La tarka es un instrumento musical clasificado en los aerófonos, instrumentos de viento propiamente dichos, donde el aire está confinado dentro del mismo instrumento, instrumentos de bisel o flautas, flautas con ducto portaviento interno (de la boquilla), es decir, incluido dentro del mismo instrumento, de un sólo tubo recto, con los extremos abiertos y perforaciones laterales para la digitación. Hornbostel y Sachs le dan el número de clasificación 421.221.12 (de [Sachs, von Hornbostel, 1985]). El sonido proviene de la oscilación del chorro de viento sobre el bisel asociado al campo acústico del tubo cuya longitud efectiva es cambiada mediante la apertura u oclusión por los dedos de los orificios laterales.

#### 1.2. DESCRIPCIÓN

La tarka es entonces un flauta recta, de pico. Principalmente circulan dos tipos: las que vienen de Walata

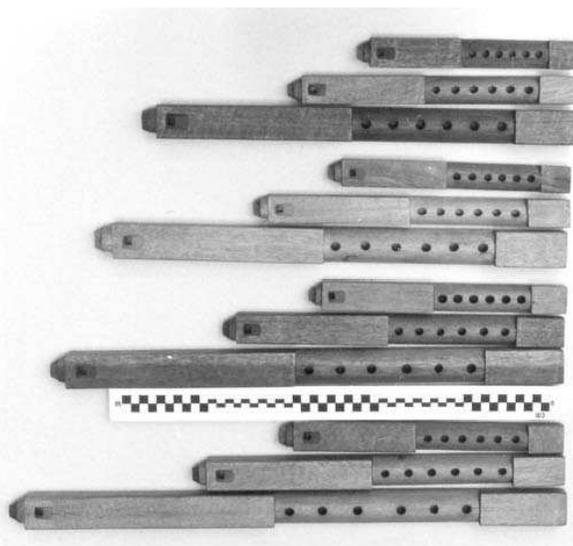


Figura 1. Las diferentes “tropas” de tarkas: Ullara (arriba), Kurawara, Salinas y Potosiña (abajo). Cada vez se muestra el tiple (no considerado en este trabajo), la mala y la taika.

<sup>1</sup>Email: gerardardenois@yahoo.es

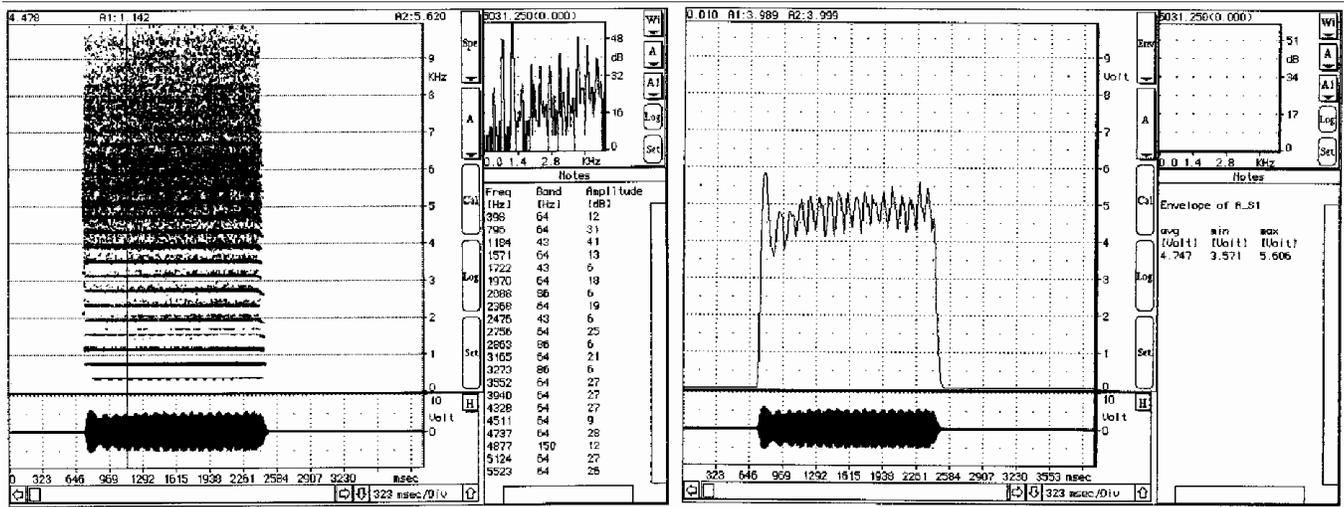


Figura 2. Sonograma e Intensidad del sonido “tara” de una tarka taika ullara con digitación 2, es la nota  $Sol_0+26$  cents (398 Hz) se nota el redoble sobre los armónicos 1, 4 y siguientes.

Grande (prov. Omasuyos de La Paz) y las que son fabricadas en Pampa Aullagas (prov. Ladislao Cabrera del departamento de Oruro). Las que provienen de Walata Grande (véase fig. 1) son talladas en una gruesa madera de mara de sección externa rectangular, mientras que las que son de Pampa Aullagas son de madera blanca tarko (jarka), más gruesa todavía y de sección transversal un poco ovalada.

Una “tropa” de tarkas es generalmente una docena de instrumentos que son interpretadas por los músicos de la comunidad junto a un bombo tipo banda y un tambor. En el Departamento de La Paz, a menudo la tropa está compuesta por doce taikas (instrumento grande) y dos malas (instrumento pequeño) que tocan a la quinta justa paralela (con digitaciones idénticas en los dos tamaños). La mala (la pequeña) tiene una longitud acústica que vale  $2/3$  de la longitud de la taika, lo que da lugar a una escala paralela que se ubica aproximadamente a la quinta justa ascendente de la taika (es decir frecuencias que valen  $3/2$  de las frecuencias de la taika). Se utilizaba también un tercer tamaño más pequeño todavía llamado tiple (o ch’ili), mayormente en las tropas de medida grande.

En Potosí, por lo general solo se tañen entre tres y seis tarkas de un único tamaño (taikas) acompañadas sólo por un bombo (no hay mala en la tropa).

Existen varios tipos de tropas diferentes (diferentes afinaciones). Cada región o comunidad tiene sus preferencias, usar tal o cual tipo de tropa es una manera de distinguirse étnicamente de las demás regiones o comunidades. Las tropas más conocidas, ordenadas desde el tamaño menor hacia el tamaño mayor, son las tropas Ullara, Kurawara, Salinas, Potosiña y Wallpara (esta última en desuso).

### 1.3. ALGUNOS DATOS ETNOMUSICOLÓGICOS

La tarka se toca por tropa, a la vez se canta y se baila, generalmente en épocas de carnaval (anata en aymará,

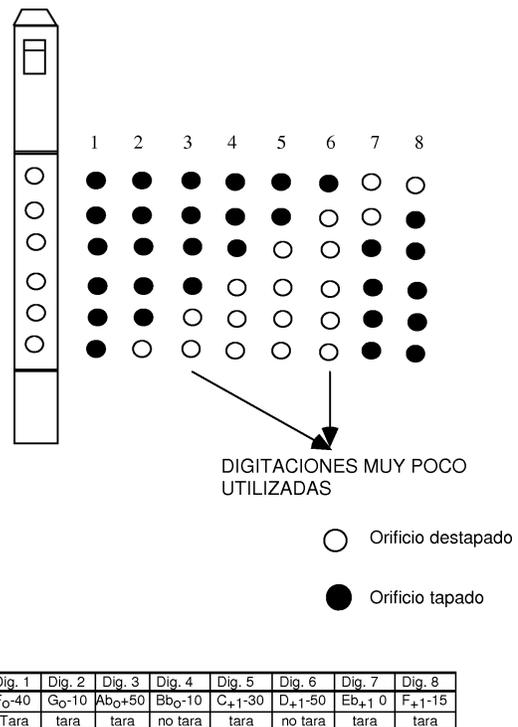


Figura 3. Alturas promedio aproximadas que corresponden a las digitaciones indicadas el esquema y señalización de la “tara” de una tropa de tarkas Ullara.

pujllay en quechua). Por esta razón se la suele denominar también **anata**. La danza o género generalmente tiene la denominación de **tarkeada**. Como todas las flautas de pico (pinkillos, rollanos, etc. . .) es un instrumento de tiempo de lluvia (“para mit’a”) que está relacionado con las “almas” que conviven con los vivos desde Todos Santos hasta el carnaval y por esta razón se la interpreta también en Todosantos, momento en que se reciben a las almas de los difuntos que vienen a visitar nuestro mundo **kaypacha**. Algunos “comunarios” (comunero an-

	Tarka Taika 1	Tarka Taika 2	Tarka Taika 3	Tarka Taika 4	Tarka Taika 5	Tarka Taika 6	Tarka Taika 7	Tarka Taika 8	Tarka Mala 1	Tarka Mala 2
<b>Fig. 1</b>	F <sub>+1</sub> +15	F <sub>0</sub> -40	F <sub>0</sub> -50	F <sub>+1</sub> -25	F <sub>0</sub> -48	F <sub>0</sub> -50	F <sub>0</sub> -65	F <sub>0</sub> -40	C <sub>+1</sub> -18	C <sub>+2</sub> -15
Frc/Hz	692	341	339	688	339.5	339	336	341	517.6	1037
Timbre	tara	s. mult.	tara	tara						
<b>Fig. 2</b>	G <sub>0</sub> +10	G <sub>0</sub> +20	G <sub>0</sub> +15	G <sub>0</sub> -15	G <sub>0</sub> +15	G <sub>0</sub> -12	G <sub>0</sub> -40	G <sub>0</sub> -50	D <sub>+1</sub> +25	D <sub>+1</sub> -7
Frc/Hz	394.3	396.6	395.4	388.6	395.4	389.3	383.0	380.8	596.6	585.6
Timbre	tara	s. mult.	tara	tara						
<b>Fig. 3</b>	Ab <sub>0</sub> +50	Ab <sub>0</sub> +80	Ab <sub>0</sub> +75	Ab <sub>0</sub> +45	Ab <sub>0</sub> +75	Ab <sub>0</sub> +30	Ab <sub>0</sub> +10	Ab <sub>0</sub> +40	Eb <sub>+1</sub> +70	Eb <sub>+1</sub> +38
Frc/Hz	427.5	434.9	433.7	426.2	433.7	422.6	417.7	425.0	647.7	635.8
Timbre	tara	tara mal	tara	tara						
<b>Fig. 4</b>	Bb <sub>0</sub> 0	Bb <sub>0</sub> +30	Bb <sub>0</sub> -5	Bb <sub>0</sub> -20	Bb <sub>0</sub> -20	Bb <sub>0</sub> -10	Bb <sub>0</sub> -45	Bb <sub>0</sub> -10	F <sub>+1</sub> +22	F <sub>+1</sub> +5
Frc/Hz	466.0	474.1	464.7	460.6	460.6	463.3	454.0	463.3	706.9	700.0
Timbre	no tara	no tara	no tara	t. lenta	no tara	t. lenta	no tara	no tara	no tara	no tara
<b>Fig. 5</b>	C <sub>+1</sub> -30	C <sub>+1</sub> +5	C <sub>+1</sub> -15	C <sub>+1</sub> -30	C <sub>+1</sub> -20	C <sub>+1</sub> -55	C <sub>+1</sub> -50	C <sub>+1</sub> -18	G <sub>+1</sub> 0	G <sub>+1</sub> -25
Frc/Hz	514.0	521.5	518.5	514.0	517.0	506.6	508.1	517.6	784.0	772.8
Timbre	tara	tara	tara	tara						
<b>Fig. 6</b>	D <sub>+1</sub> -25	D <sub>+1</sub> -20	D <sub>+1</sub> -55	D <sub>+1</sub> -55	D <sub>+1</sub> -55	D <sub>+1</sub> -65	D <sub>+1</sub> -60	D <sub>+1</sub> -55	A <sub>+1</sub> -25	A <sub>+1</sub> -25
Frc/Hz	579.6	581.2	569.6	569.6	569.6	566.3	568.0	569.6	867.4	867.4
Timbre	no tara	no tara	no tara	no tara						
<b>Fig. 7</b>	Eb <sub>+1</sub> +20	Eb <sub>+1</sub> +30	Eb <sub>+1</sub> +25	Eb <sub>+1</sub> -18	Eb <sub>+1</sub> +35	Eb <sub>+1</sub> -50	Eb <sub>+1</sub> -15	Eb <sub>+1</sub> 0	Bb <sub>+1</sub> +30	Bb <sub>+1</sub> -15
Frc/Hz	629.2	632.9	631.0	615.6	634.7	604.3	616.6	622.0	948.3	924.0
Timbre	tara	tara	tara	tara	tara	no tara	tara	tara	no tara	no tara
<b>Fig. 8</b>	F <sub>+1</sub> -10	F <sub>+1</sub> 0	F <sub>+1</sub> +20	F <sub>+1</sub> -20	F <sub>+1</sub> -5	F <sub>+1</sub> -15	F <sub>+1</sub> -50	F <sub>+2</sub> -28	C <sub>+3</sub> +15	C <sub>+2</sub> 0
Frc/Hz	694.0	698.0	706.1	690.0	696.0	692.0	678.1	686.8	2074.9	1046.0
Timbre	tara	no tara	no tara	no tara						

Figura 4. Alturas de sonido (en cents) , frecuencias correspondientes (en Hz) y apreciación auditiva de la tara de la tropa de tarkas ullara medidas.

dino) opinan que el sonido mantiene alejado al “sajra” (ente extrahumano de tipo diabólico) de la comunidad mientras se realiza la fiesta, para que no tiente a la gente y no realice sus fechorías y maleficios [van den Berg, 1990].

En todo el Norte de Potosí, una parte de Cochabamba y de Chuquisaca, todavía sobrevive un pinkillo que creemos podría ser el ancestro de la tarka. Su tropa está compuesta de varios tamaños llamados: **machu tara**, **q’ewa**, **tara**, **q’ewita** y **tarita**, que de igual manera se interpretan de Todosantos a carnaval (incluyendo a la Navidad) y cuyo sonido se aproxima mucho al de la tarka. Henry Stobart [Stobart, 1992] encontró una significación interesante a la palabra tara. Tara define a las cosas que son dobles, gemelas: dos papas atadas, dos cerros contiguos, recipientes dobles, etc. . . y en el caso del pinkillo se refiere al sonido que sería **doble**.

Es de recalcar que tanto los pinkillos de Carnaval (“tara” y “q’ewa”) como las tarkas tienen un sonido por demás particular: es ronco, gritón, pulsante, estridente y sin lugar a duda este sonido pertenece a la estética genuina de los pueblos centro-andinos!

Ahora véase la transmutación semántica :

**TARA** (doble: sonido de pinkillos de madera del Norte Potosí) → **TARAKA** (nombre a veces utilizado para la tarka según Jesús Lara [Lara, 1971]) → **TARKA** (nombre actual del instrumento moderno).

Se ha podido verificar en múltiples oportunidades que los comuneros al probar los instrumentos cuando los compran, averiguan si tienen **tara** o no, refiriéndose a este sonido peculiar, y sólo comprarán los que tienen este sonido pulsante-vibrante bien marcado. La palabra **tara** entonces se refiere precisamente ¡al tipo de sonido!

En un anterior trabajo se ha presentado ya un primer

TAIKAS	DIG. 1	DIG. 2	DIG. 3	DIG. 4	DIG. 5	DIG. 6	DIG. 7	DIG. 8
Altura media Cents	F <sub>0</sub> -38	G <sub>0</sub> -7	Ab <sub>0</sub> +51	Bb <sub>0</sub> -10	C <sub>+1</sub> -27	D <sub>+1</sub> -49	Eb <sub>+1</sub> +3	F <sub>+1</sub> -14
$\sigma$ Cents	$\pm 24$	$\pm 27$	$\pm 25$	$\pm 21$	$\pm 19$	$\pm 17$	$\pm 30$	$\pm 21$
$\Delta_{MAX}$ cents	80	70	70	75	60	45	85	70
Altura rectific.	F <sub>0</sub> -27	G <sub>0</sub> +4	Ab <sub>0</sub> +72	Bb <sub>0</sub> +1	C <sub>+1</sub> -16	D <sub>+1</sub> -38	Eb <sub>+1</sub> +14	F <sub>+1</sub> -3

Figura 5. Alturas medias, desviación estándar y discrepancia máxima (recorrido).

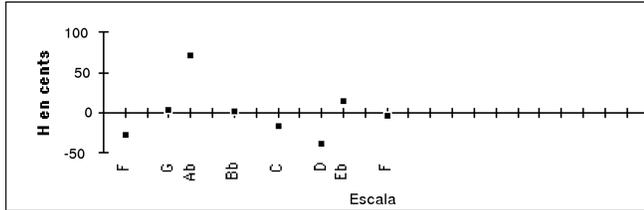


Figura 6. Comportamiento promedio de la escala de las tarkas taika relativamente a la escala bien temperada con diapason rectificado.  $\langle H \rangle = -11$  cents es la desviación media de altura de sonido.

Intervalo	F - G	G - Ab	Ab - Bb	Bb - C	C - D	D - Eb	Eb - F
cents	231	158	139	183	178	152	183

Figura 7. Intervalos sucesivos promedio de las tarkas taikas.

análisis acústico de este sonido peculiar [Gérard, 1997], se mostró entonces que se trata de una multifonía en forma de redoble [Castellengo, 1982] sobre los armónicos 1, 4, 5, y siguientes que se escucha como un sonido estridente, con varios parciales audibles y de intensidad periódicamente fluctuante tal como se puede observar en el sonograma y la intensidad versus tiempo de la figura 2.

## 2. ALTURAS DE SONIDO – DIGITACIONES

No obstante, esta vez lo que más nos interesa es la sucesión de alturas de sonidos relativos (diferencia de los logaritmos de las frecuencias) correspondientes a las digitaciones tradicionales del instrumento (véase fig. 3).

Para la nomenclatura véase el anexo.

En el cuadro de la figura 4 se muestra el resultado de las mediciones de las alturas de sonido de una tropa (10 instrumentos aquí) de tarkas **ullara** realizado con el tuner. La tropa ha sido fabricada por un artesano desconocido de Walata Grande (provincia Omasuyos de La Paz).

Las mediciones fueron realizadas con una temperatura medio ambiente de 20°C.

Los siguientes cuadros muestran las alturas promediadas para cada digitación dentro de la tropa (figs. 5 y 8), el comportamiento de las escalas relativamente a las escalas bien temperadas (figs. 6 y 9) y los intervalos medios sucesivos (fig. 7 y 10).

## 3. CONCLUSIONES

Es de remarcar que como en casi todas las tropas de instrumentos de los Andes bolivianos se deja cier-

MALAS	DIG. 1	DIG. 2	DIG. 3	DIG. 4	DIG. 5	DIG. 6	DIG. 7	DIG. 8
Altura media Cents	C <sub>+1</sub> -16	D <sub>+1</sub> +9	Eb <sub>+1</sub> +54	F <sub>+1</sub> +14	G <sub>+1</sub> -12	A <sub>+1</sub> -25	Bb <sub>+1</sub> +8	C <sub>+2</sub> +8
$\sigma$ Cents	$\pm 2$	$\pm 23$	$\pm 23$	$\pm 14$	$\pm 18$	0	$\pm 32$	$\pm 11$
$\Delta_{MAX}$ cents	3	32	32	17	25	0	45	15
Altura rectific. Cents	C <sub>+1</sub> -21	D <sub>+1</sub> +4	Eb <sub>+1</sub> +49	F <sub>+1</sub> +9	G <sub>+1</sub> -17	A <sub>+1</sub> -30	Bb <sub>+1</sub> +3	C <sub>+2</sub> +3

Figura 8. Alturas medias, desviación estándar y discrepancia máxima (recorrido).

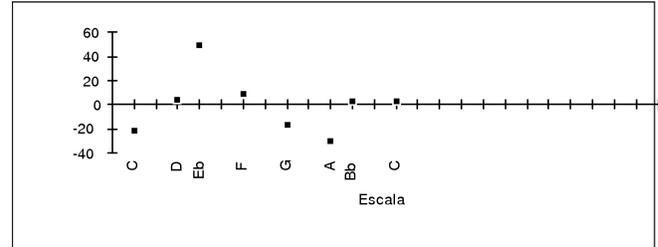


Figura 9. Comportamiento promedio de la escala de las tarkas malas relativamente a la escala bien temperada con diapason rectificado.  $\langle H \rangle = +5$  cents es la desviación media de altura de sonido.

Intervalo	C - D	D - Eb	Eb - F	F - G	G - A	A - Bb	Bb - C
cents	225	145	160	174	187	133	200

Figura 10. Intervalos sucesivos promedio de las tarkas malas.

tas desigualdades en las alturas de sonido (frecuencias) paralelas. Este hecho está cuantificado mediante la discrepancia máxima (recorrido) simbolizada por  $\Delta_{MAX}$ . Notamos que esta discrepancia varía de **45 a 80 cents** para las taikas. Estas "desigualdades" a su vez provocarán pulsaciones (batimientos) al tocar los instrumentos en paralelo. Este hecho lo constatamos ya en las diferentes flautas andinas bolivianas [Gérard, 1999].

La escala de las taikas es de Mi b mayor, sin embargo se toca sobre su relativa menor, es decir Do menor, pero en el modo pentatónico, "b" menor según D'Harcourt [D'Harcourt, 1925 y 1959]. Lo que explica la no utilización de las notas que corresponden a las digitaciones 3 y 6, es decir, las notas La b y Re. Para las "malas" la escala es de Si b mayor pero se toca sobre el modo relativo menor pentatónico ("b" menor) (Sol menor) con la misma observación que las taikas, pues las digitaciones 3 y 6 que corresponden a las notas Mi b y La no se utilizan. La taika y la mala están aproximadamente afinadas a la quinta ascendente paralela con una diferencia promedio de (5 - (-11)) cents = 16 cents.

Entonces las escalas son, respectivamente, de Do menor (modo "b" menor según D'Harcourt) para la taika y Sol menor (modo "b" menor) para la mala (véase fig. 11). Las 2 notas que raramente se tocan (las notas que están entre paréntesis) y que no pertenecen a la escala pentatónica, deberían formar semitonos en la escala temperada; sin embargo, hacen un intervalo mucho mayor al semitono bien temperado (100 cents), ya sea un intervalo

TAIKA:



MALA:

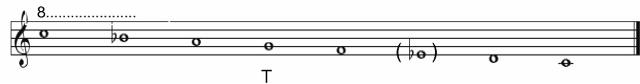


Figura 11. Pentagramas que muestran las escalas aproximadas de los dos tamaños de la tarka ullara: “taika” (grande) y “mala” (pequeña).

que varía al azar entre 133 y 158 cents. Pareciese que esta nota estaría estadísticamente al medio, es decir, distante 150 cents (en promedio) con las notas vecinas superior e inferior (la mitad de 300 cents que corresponde a una tercera menor). También se advierte que el intervalo entre las dos primeras alturas (digitaciones 1 y 2) es mayor a una segunda mayor temperada (200 cents): 231 cents en las taikas y 225 cents en las malas (en promedio). Los otros intervalos de segunda son de 183 y 182 cents en la taikas y 174 y 200 cents en las malas **con una marcada tendencia a ser menor** que el tono temperado de 200 cents.

Los intervalos de tercera menor, que provienen de un salto sobre dos orificios (es el caso de las digitaciones no utilizadas 3 y 6 que son representadas con notas entre paréntesis), son de:  $158 + 139 = 297$  cents;  $178 + 152 = 330$  cents;  $160 + 145 = 305$  cents;  $187 + 133 = 320$  cents, donde la segunda tercera parece algo mayor que la primera.

En las representaciones gráficas de las comparaciones de las escalas nativas de las tarkas con la escala bien temperada (figuras 1 y 2) ¡se nota que los dos comportamientos de escala son absolutamente similares!

Quizás se trate de algo parecido al caso del suri-siku [Gérard, 2000], es decir, nuevamente una tendencia hacia un intervalo único de 171,4 cents en los promedios. En lo que sigue del trabajo (que recién se está iniciando) se tendría que medir y analizar un gran número de tropas para comprobar si esta fluctuación es estocástica o no. Pero de todas maneras ya se puede afirmar que el semitono encontrado es mayor que el semitono bien temperado y el tono es menor (en promedio) que su similar temperado. Es todavía muy temprano para lanzar un modelo de comportamiento de las sucesiones de alturas de sonido en el caso de este instrumento.

Por otro lado, la tarka se caracteriza por su peculiar sonido llamado “tara” por los comuneros. El análisis de este sonido nos ha mostrado las siguientes particularidades: es un sonido rico, con una serie armónica numerosa (24 armónicos discernibles), contiene además sobretonos anarmónicos (parciales) y todos ellos de intensidades casi iguales, pero también una fuerte zona de ruido de escurrecimiento ubicada entre 4 y 10 KHz. El tercer armónico es el de mayor intensidad, lo que provoca un sonido a la

quinta. Es un sonido multifónico que además muestra el efecto de redoble sobre los armónicos 1, 4 y siguientes. [Gérard, 1997; Castellengo, 1982].

## REFERENCIAS

- [1] Borrás Gérard. Les Aerophones Traditionnels Aymaras dans le Département de La Paz (Bolivie). Tesis de doctorado - Universidad de Toulouse - le - Mirail, Toulouse 1995.
- [2] De Lucca, Manuel. Diccionario Práctico Aymara - Castellano. Enciclopedia Boliviana, Ediciones Los Amigos del Libro, Cochabamba 1987.
- [3] González Holguín, Diego. Vocabulario de la lengua general de todo el Perú llamada lengua Qquichua o del Inca. Edit. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima 1989.
- [4] van den Berg, Hans. La Tierra no da así no más - Los Ritos Agrícolas en la Región de los Aymaras. HISBOL-UCB/ISET, La Paz 1990.
- [5] Bertonio, Ludovico. Vocabulario de la Lengua Aymará. Manuscrito 1612. Transcripción y edición “Radio San Gabriel”, Biblioteca del Pueblo Aymará, La Paz 1993.
- [6] Bouasse, H. Instruments à Vent (tomos I y II). Albert Blanchard, Paris 1986.
- [7] Bouasse, H. Tuyaux et Résonateurs. Albert Blanchard, Paris 1986.
- [8] Castellengo, Michèle. Sons Multiphoniques aux Instruments à Vent. Rapports IRCAM. N° 34/82, Paris 1982.
- [9] Cavour A., Ernesto. Instrumentos Musicales de Bolivia. Producciones CIMA, La Paz 1994.
- [10] D’Harcourt, Raoul y Marguerite. La Musique des Aymaras sur les Hauts Plateaux Boliviens. Société des Américanistes, nouvelle série, Tomo XLVIII, pp. 5-133, Paris 1959.
- [11] D’Harcourt, Raoul y Marguerite. La Musique des Incas et ses Survivances. Librairie Orientaliste Paul Geuthner, Paris 1925.
- [12] Gérard, Arnaud. Acústica de las Siringas Andinas de uso actual en Bolivia. Tomos 1 y 2. Informe de Investigación U.A.T.F., mimeografiado. Potosí, 1999.
- [13] Gérard, Arnaud. Acústica de los ayarachis, una original sucesión de alturas de sonido. En: Revista Boliviana de Física N° 4, año 4, Instituto de Investigaciones Físicas UMSA y Sociedad Boliviana de Física, La Paz 1998.
- [14] Gérard, Arnaud. Acústica del suri-siku. Una genial acomodación de alturas de sonido que permite una multipentafonía. En: Revista Boliviana de Física, N° 6, septiembre 2000, pp. 68-78, Instituto de Investigaciones Físicas UMSA y Sociedad Boliviana de Física. La Paz, 2000.
- [15] Gérard, Arnaud. Multifonías en Aerófonos Andinos de Bolivia. En: Revista Boliviana de Física, UMSA, N° 3, año 3, julio, pp. 40-59, La Paz 1997.
- [16] Kinsler, Frey, Coppens, Sanders. Fundamentals of Acoustics. John Wiley & Sons, Nueva York 1982.
- [17] Lara, Jesús. Diccionario Qheshwa-Castellano. Enciclopedia Boliviana, Ed. Los Amigos del Libro. La Paz 1971.
- [18] Leipp, Emile. Acoustique et Musique. Masson, París 1984.
- [19] Matras, Jean-Jacques. Le Son. PUF, Francia 1977.
- [20] Sachs, von Hornbostel. Ensayo de una Clasificación Sistemática de los Instrumentos Musicales. Traducción de “Systematik der Musikinstrumente” por Egberto Bermudez en: Revista Colombiana de Investigación Musical, Vol.1, N°1, enero-junio, Colombia 1985.
- [21] Stobart, Henry. Tara and Q’iwa - Worlds of Sounds

and Meaning. En: *Cosmología y Música en los Andes*, Edit.: Max Peter Baumann-International Institute for Traditional Music, Vervuert Iberoamericana, pp.67-81, Berlin 1996.

#### **ANEXO: LA NOMENCLATURA UTILIZADA**

Para las alturas de sonido se ha escogido la denominación sajona, es decir:

C = Do; D = Re; E = Mi; F = Fa; G = Sol; A = La;  
B = Si.

El subíndice se refiere a la octava, donde 0 es la octava central La = 440Hz. El número que sigue con signo + o - es el número de cents por encima o por debajo de la altura fija indicada en que 100 cents equivalen a 1 semitono bien temperado.

# EMISIÓN NEUTRÓNICA SOLAR DE LARGA DURACIÓN COMPARADA CON LA RADIACIÓN PRODUCIDA POR ELECTRONES EN LA FULGURACIÓN SOLAR DEL 7 DE SEPTIEMBRE DE 2005

T.Sako,<sup>1</sup> K.Watanabe,<sup>1</sup> Y.Muraki,<sup>1</sup> Y.Matsubara,<sup>1</sup> H.Tsujihara,<sup>1</sup> M.Yamashita,<sup>1</sup> T.Sakai,<sup>2</sup> S.Shibata,<sup>3</sup> J.F.Valdés-Galicia,<sup>4</sup> L.X.González,<sup>4</sup> A.Hurtado,<sup>4</sup> O.Musalem,<sup>4</sup> P.Miranda,<sup>5</sup> N.Martinic,<sup>5</sup> R.Ticona,<sup>5</sup> A.Velarde,<sup>5</sup> F.Kakimoto,<sup>6</sup> S.Ogio,<sup>7</sup> Y.Tsunesada,<sup>6</sup> H.Tokuno,<sup>6</sup> Y.T.Tanaka,<sup>8</sup> I.Yoshikawa,<sup>8</sup> T.Terasawa,<sup>8</sup> Y.Saito,<sup>9</sup> T.Mukai,<sup>9</sup> y M.Gros<sup>10</sup>

<sup>1</sup> Solar-Terrestrial Environment Laboratory, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8601, Japan.

<sup>2</sup> College of Industrial Technologies, Nihon University, 2-11-1 Shinei, Narashino, Chiba 275-0005, Japan.

<sup>3</sup> College of Engineering, Chubu University, Kasugai, Aichi 487-8501, Japan.

<sup>4</sup> Instituto de Geofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Coyoacan DF 04510, México.

<sup>5</sup> Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia.

<sup>6</sup> Department of Physics, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo 152-8551, Japan.

<sup>7</sup> Graduate School of Science, Osaka City University, Osaka 558-8585, Japan.

<sup>8</sup> Department of Earth and Planetary Science, University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan.

<sup>9</sup> ISAS/JAXA, Sagami-hara 229-8510, Japan.

<sup>10</sup> DSM/DAPNIA/SAP, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France.

## RESUMEN

El 7 de septiembre de 2005 se detectaron señales intensas de emisiones neutrónicas asociadas con la fulguración solar que ocurrió en esa fecha. Dichas señales fueron producidas por iones y electrones relativistas. En particular, se observaron neutrones relativistas con los telescopios de neutrones solares (SNT) ubicados en el monte Chacaltaya en Bolivia y en el monte Sierra Negra en México, y con monitores de neutrones (NM) en Chacaltaya y Ciudad de México; estas observaciones tuvieron altas significaciones estadísticas. Al mismo tiempo los satélites *Geotail* e *INTEGRAL* detectaron rayos X (RX) duros y rayos gamma ( $R\gamma$ ), emitidos predominantemente por electrones de alta energía. Encontramos que un modelo para la emisión impulsiva de neutrones durante el pico de RX y  $R\gamma$  puede explicar los picos principales de todas las señales detectadas de neutrones, pero falla al tratar de explicar la larga cola de la fase de decaimiento. Un modelo alternativo en el que la emisión neutrónica sigue el perfil de emisión de RX y  $R\gamma$ , falló asimismo para explicar la larga cola. Estos resultados indican que la aceleración de los iones comenzó al mismo tiempo que la de los electrones, pero que los iones fueron continuamente acelerados o atrapados durante un mayor tiempo en el sitio de la emisión. Demostramos asimismo que los datos de los neutrones observados por los canales multienergéticos de los SNT imponen restricciones sobre el espectro neutrónico.

*Descriptor:* Aceleración de Partículas, Rayos Cósmicos, Mecanismos Radiativos: No Térmicos, Sol: Fulguraciones, Sol: Emisión de Partículas, Sol: Rayos X, Rayos Gamma.

## 1. INTRODUCCIÓN

El Sol es el único acelerador robusto de iones al que tenemos acceso directo; por lo tanto es un laboratorio importante para estudiar la aceleración de partículas. En algunas ocasiones el Sol acelera iones a energías relativistas ( $\sim 1$  GeV). La capacidad para producir imágenes de las radiaciones emitidas por electrones permitió estudios detallados de la aceleración de electrones (ver, e.g., Masuda *et al.* 1994), pero éste no es el caso de la aceleración de iones. Aunque *RHESSI* inauguró una era nueva en la imagenología de las aceleraciones de iones (Hurford *et al.* 2003), aún las observaciones son limitadas. A fin de

trasladar la rica información sobre la aceleración de electrones al dominio de la aceleración de iones, es todavía importante comparar los tiempos de emisión de electrones y de iones, o bien, de las partículas secundarias que de éstos resultan. Para estos estudios se aplican varios métodos, y cada uno de ellos tiene ventajas y desventajas, como se resume más adelante.

A fin de evitar la complejidad debida al campo magnético, se considerará las observaciones de partículas secundarias neutras y/o radiaciones. Las radiaciones debidas a electrones (radio emisión de sincrotrón, bremsstrahlung, RX duros,  $R\gamma$ ) se registran con exce-

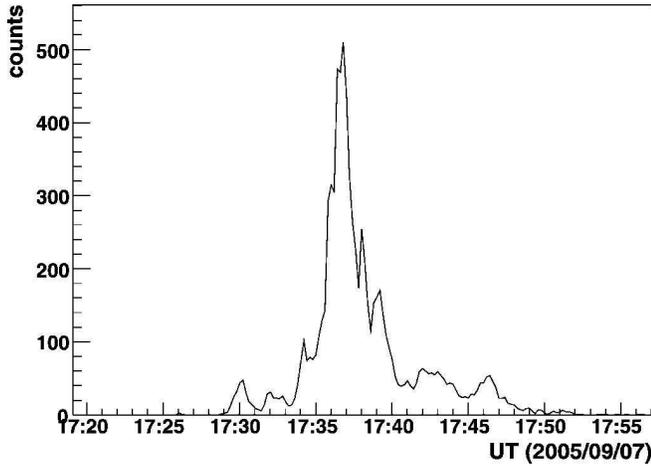


Figura 1. Perfil temporal de RX duros observados por el satélite *Geotail* el 7 de septiembre de 2005.

lente resolución espacial y temporal. Por otra parte, las observaciones de  $R\gamma$  nucleares o  $R\gamma$  emitidos en el decaimiento del  $\pi^0$  ( $\pi^0$ - $R\gamma$ ), así como neutrones emitidos por interacciones de iones, tienen sus méritos y deméritos. Aprovechando la excelente resolución temporal de las observaciones de rayos gamma nucleares, Forrest & Chupp (1983) concluyeron que en la fulguración del 7 y 21 de junio de 1980 los electrones y los iones fueron acelerados simultáneamente dentro del orden de un segundo. Sin embargo, Watanabe *et al.* (2006) demostraron que en la fulguración del 28 de octubre de 2003 hubo un retraso en estas aceleraciones del orden del minuto. Debido a que las partículas primarias (padres) de los  $R\gamma$  nucleares tienen energías menores a 100 MeV, las observaciones de estos rayos no son suficientes para tener acceso a energías relativistas; los  $\pi^0$ - $R\gamma$  se emiten de iones con energías relativistas. Tal como se encontró en Debrunner *et al.* (1993) y en Kanbach *et al.* (1993), existen observaciones en las que los  $\pi^0$ - $R\gamma$  se emiten continuamente durante un cierto lapso (20 minutos y 8 horas, respectivamente). No obstante, Debrunner *et al.* (1993) señalaron que en el evento del 24 de mayo de 1990, es difícil discriminar entre los  $\pi^0$ - $R\gamma$  emitidos por bremsstrahlung y los  $R\gamma$  emitidos por neutrones.

Suponiendo que la cola continua está formada por  $\pi^0$ - $R\gamma$  y que los neutrones de alta energía (1100 MeV) se emitieron simultáneamente, Debrunner *et al.* (1993) explicaron el perfil observado de la señal en el nivel base del NM. Aquí, los neutrones solares se emiten a través de la interacción entre los iones acelerados y la atmósfera solar. Estos neutrones pueden tener energías comparables a las de los iones generadores. Las observaciones en el nivel base de iones y neutrones son sensibles sólo a energías por encima de los 100 MeV y libres de la contaminación de radiación de electrones. En contraste a la conclusión de Debrunner *et al.* (1993), Muraki & Shibata (1996) concluyeron que los neutrones fueron emitidos dentro del lapso de un minuto para el mismo evento. Ellos desarrollaron un código Monte Carlo so-

fisticado (Shibata 1994) para simular el transporte de neutrones en la atmósfera terrestre y encontraron que la señal retrasada puede explicarse por neutrones de baja energía ( $\sim 100$  MeV). Picos agudos encontrados en los RX y  $R\gamma$  apoyan el escenario sencillo en el que tanto los iones como los electrones habrían sido acelerados en el rango del minuto.

En este artículo presentamos los resultados de un evento reciente de neutrones solares en el nivel base observados con una alta estadística. Comparamos perfiles temporales de RX duros y neutrones el 7 de septiembre de 2005 y concluimos que los neutrones fueron emitidos durante un periodo más largo que los RX. Aunque las condiciones de las observaciones fueron similares a las del caso del 24 de mayo de 1990, la relación entre la producción de neutrones y RX fue muy diferente en los dos eventos. Además de las observaciones con alta estadística, detectamos eventos con dos tipos diferentes de detectores (dos SNT y dos NM) ubicados en tres estaciones diferentes. Esto nos permitió estudiar el espectro de neutrones y el perfil temporal en mayor detalle. En este artículo nos proponemos presentar un reporte sobre el análisis de tal evento. Después de la descripción de las observaciones, trataremos de explicar los perfiles observados de los neutrones a través de dos modelos: emisión impulsiva, o bien, el perfil muestra de los RX y  $R\gamma$ .

## 2. OBSERVACIONES

Una fulguración solar intensa ocurrió el 7 de septiembre de 2005. La emisión blanda de los RX observados por el satélite *GOES* comenzó a incrementarse a las 17:17 UT, alcanzó su máximo a las 17:40 UT y decayó a la mitad de su valor máximo a las 18:03 UT. El pico del flujo de RX fue clasificado como X17.0. Esta fulguración ocurrió en AR 10808, que estuvo localizada en las coordenadas S06°, E89°, en el instante del comienzo de la fulguración. Así, la fulguración se clasifica como una “fulguración troncal (*limb*) Este”. Tal como se espera para tales eventos, el satélite *GOES* no detectó ningún incremento de partículas cargadas ( $<0.1$  partículas  $s^{-1} cm^{-2} sr^{-1}$  encima de los 100 MeV). (Un evento de protones solares ocurrió entre 3 y 4 horas después del comienzo de la fulguración.) Los datos tomados en Mauna Loa muestran una eyección masiva desde la corona que se asocia a esta fulguración.<sup>1</sup> Obtuvimos datos de *Geotail* de RX duros que indican una emisión de RX de  $>50$  keV (Terasawa *et al.* 2005) cuyo pico ocurrió a las 17:36:40 UT, tal como se muestra en la Fig.1. El detector *INTEGRAL* SPI también registró RX y  $R\gamma$  de 1150 keV cubriendo el rango de energías de las emisiones nucleares, cuyo perfil fue casi idéntico al registrado por *Geotail*. Ya que no hubo una evidencia clara de líneas nucleares, se considera que la radiación de alta energía indica la trayectoria de los electrones de alta energía. La energía de la radiación puede alcanzar la del electrón generador.

<sup>1</sup>Los datos de Mauna Loa en Septiembre de 2005 pueden ser obtenidos de [http://mlso.hao.ucar.edu/cgi-bin/mlso\\_datasum.cgi?2005&9&7&ACOS](http://mlso.hao.ucar.edu/cgi-bin/mlso_datasum.cgi?2005&9&7&ACOS), cortesía de *the High Altitude Observatory, National Center for Atmospheric Research*.

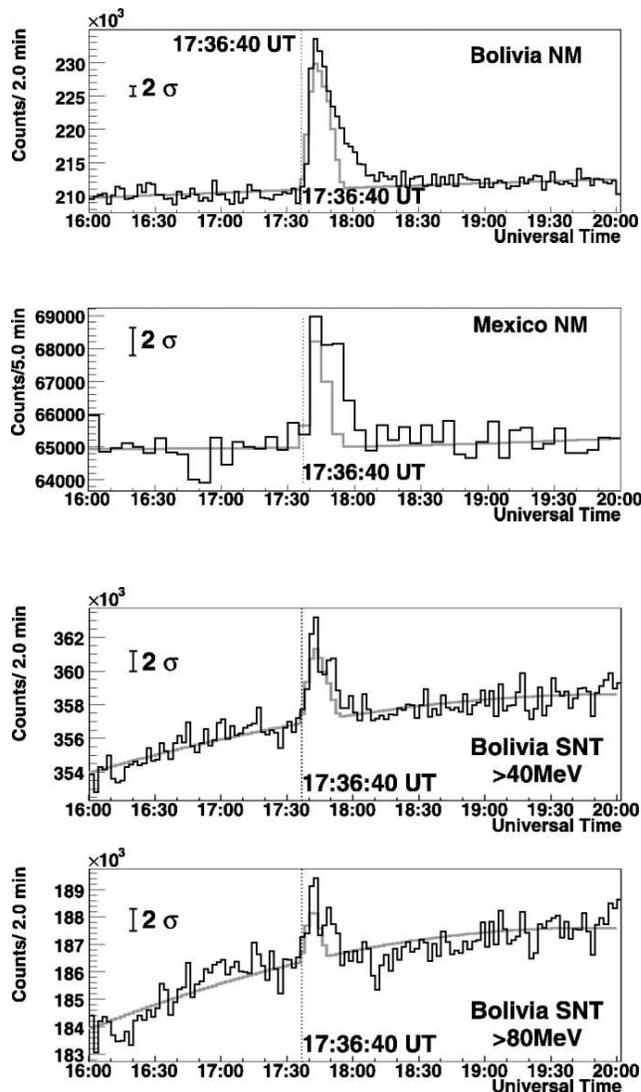


Figura 2. De arriba hacia abajo, tasa de conteo de 2 minutos del NM de Bolivia (primer panel), tasa de conteo de 5 minutos del NM de Ciudad de México (segundo panel), tasas de conteo de 2 minutos en diferentes canales del SNT de Bolivia (>40 MeV, tercer panel; >80 MeV, abajo). La fluctuación de fondo de  $2\sigma$  se indica en la esquina superior izquierda de cada panel. El tiempo pico de los RX duros detectados por *Geotail* es 17:36:40 UT. Las curvas grises indican los conteos esperados suponiendo un flujo de neutrones derivado de los datos del NM de Bolivia. El fondo se estimó a través de un ajuste polinomial de 3er orden excluyendo el lapso 17:30–18:30 UT.

En el instante en que GOES detectó el pico de RX de la fulguración (17:40 UT), México y Bolivia eran los lugares adecuados para observar neutrones solares en la red de SNT (Tsuchiya *et al.*, 2001; Valdés-Galicia *et al.*, 2004). En Sierra Negra, México (E262. 7°, N19.0°; 4580 m sobre el nivel del mar [snm]), donde un SNT está instalado, el ángulo cenital solar fue 17. 5°, y la masa de aire en la línea de vision al Sol era de 603 g cm<sup>-2</sup>. En la ciudad de México (E260.8°, N19.3°; 2274 m snm), donde se localiza un NM, el ángulo cenital y la masa de aire fueron 18.9° y 825 g cm<sup>-2</sup>, respectivamente. En el

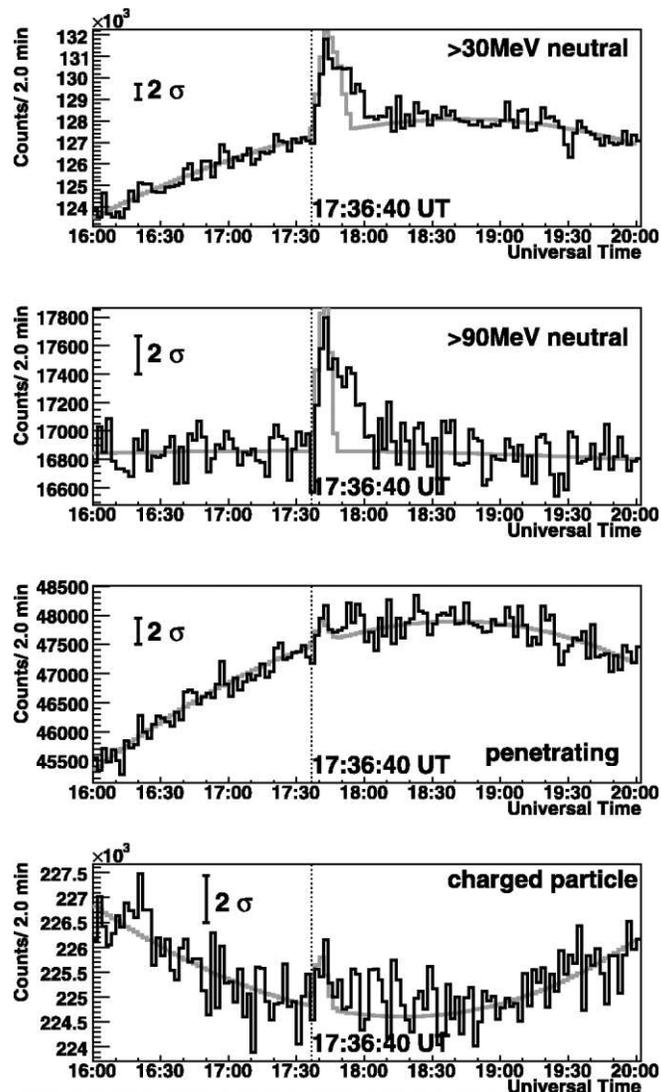


Figura 3. Tasas de conteo de 2 minutos de canales diferentes en el SNT de México (>30 MeV neutral, >90 MeV neutral, neutral penetrante y partículas cargadas). La fluctuación de fondo de  $2\sigma$  se indica en la esquina superior izquierda de cada panel. El tiempo pico de los RX duros detectados por *Geotail* es 17:36:40 UT. Las curvas grises indican los conteos esperados suponiendo un flujo de neutrones derivado de los datos del NM de Bolivia con fondo. El fondo se estimó a través de un ajuste polinomial de 3er orden excluyendo el lapso 17:30–18:30 UT.

monte Chacaltaya en Bolivia (E292. 0°, S16. 2°, 5250 m snm), donde están ubicados un SNT y un NM, el ángulo cenital y la masa de aire fueron 28.0° y 612 g cm<sup>-2</sup>, respectivamente. El SNT de México tiene centelladores de plástico de 4 m<sup>2</sup> de área y 30 cm de grosor, cubiertos por recipientes de contadores proporcionales que funcionan como anticontadores. Para convertir  $R\gamma$  en pares de electrones, los contadores proporcionales están cubiertos por plomo y hierro con grosor de una unidad de radiación. Una señal de los centelladores que no tiene coincidencia con la señal del anticontador, se considera como generada por partículas neutras. La señal coincidente del anticontador

tador y el centellador se debe a partículas cargadas. Las señales de los centelladores se discriminan en 4 rangos diferentes de energía correspondientes a  $>30$ ,  $>60$ ,  $>90$  y  $>120$  MeV. Debajo de los centelladores hay 4 capas de contadores proporcionales que están alineados y miden la dirección y energía de las partículas que rebotan. Los detalles del detector y su funcionamiento están descritos en Valdés-Galicia *et al.* (2004). El SNT que está en Bolivia es más sencillo. Consiste de centelladores de 4 m<sup>2</sup> de área y 40 cm de grosor cubiertos por centelladores y anticentelladores de plástico de 1 cm de grosor (Matsubara *et al.*, 1993, 1995). Sin embargo, en el momento relevante estos anticentelladores no estaban funcionando, así que sólo podemos considerar los centelladores centrales. Se registraron cuentas en 4 rangos diferentes de energía:  $>40$ ,  $>80$ ,  $>160$  y  $>240$  MeV. El NM de México es 6NM64 y el NM de Bolivia es 12NM64. Ya que uno de los contadores de Bolivia no era funcional en el momento de la fulguración, el área efectiva se redujo en un 8%. Los detectores registran ritmos de conteo con 10 s de intervalo, excepto el de México, que tiene un intervalo de 5 min. El tiempo absoluto se registra con antenas GPS con una precisión de 1 s. Los perfiles temporales observados en todos los detectores se muestran en la Fig.2 (el NM de Bolivia, el NM de México y el SNT de Bolivia) y en la Fig.3 (el SNT de México). Excesos claros se registraron por todos los detectores después del instante del pico de RX duros (17:36:40 UT) en el satélite *Geotail*. Algunos saltos menos significativos en los canales de la partícula penetrante y la partícula cargada del SNT de México son importantes para restringir las energías primarias.

### 3. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

Antes de atribuir las señales observadas a neutrones, primero investigamos la posibilidad de tener un evento protónico. Ya que la fulguración ocurrió en la rama solar Este, los protones se deben mover difusivamente a través del campo magnético antes de llegar a la Tierra. Entonces es poco probable que el incremento agudo observado en la Fig.2 se deba a protones. Las rigideces de corte en Chacaltaya y ciudad de México son de 12.5 y 8.6 GV respectivamente. Por otra parte, en la estación de Apatity<sup>2</sup>, donde la rigidez de corte es de 0.57 GV, no se encontró un exceso significativo. Ya que el punto subsolar en el instante de la fulguración estaba entre México y Bolivia, es natural concluir que la señal fue provocada por neutrones. Es más: cuando graficamos el incremento relativo en el NM de Bolivia (11%) y del NM de México (6%) con respecto a la masa de aire en la línea de visión (Fig.3 de Shea *et al.*, 1991), el gráfico se ubica justamente entre los dos eventos históricos de neutrones solares del 24 de mayo de 1990 y del 3 de junio de 1982. Todos estos resultados indican que la señal observada se debe a neutrones solares. Las significancias estadísticas del exceso en el intervalo 17:40–17:45 UT se calcularon para cada detector. Dichas significancias se definen en

unidades de la desviación estándar del promedio de datos entre las 4:30 y 16:30 UT. Los resultados para el NM de Bolivia, el NM de México, el SNT de Bolivia ( $>140$  MeV) y el SNT de México ( $>30$  MeV neutral) son  $40\sigma$ ,  $9\sigma$ ,  $12\sigma$  y  $16\sigma$  respectivamente.

El flujo de neutrones se calcula usando el método de Monte Carlo. Para este cálculo usamos los datos del NM de Bolivia, ya que ésta es la señal más significativa. Ya que el NM es sensible a una amplio rango de energía de neutrones, el perfil de la emisión se convoluciona con una distribución amplia de tiempo de vuelo, y no se mide directamente. Así pues realizamos la hipótesis de dos modelos para el tiempo de emisión. En la primera hipótesis se supone que los neutrones fueron emitidos impulsivamente cuando ocurrió el pico de la emisión de los RX duros. Considerando los 500 s de tiempo de vuelo de los RX desde el Sol hasta la Tierra, el pico de la emisión ocurrió por las 17:28:20 UT. Con esta suposición, la energía de los neutrones correspondiente al incremento abrupto de las 17:40:00 UT en los datos del NM de Bolivia es de 400 MeV. Del perfil temporal de los neutrones, hemos calculado el espectro energético de los neutrones solares usando el programa Shibata para atenuación atmosférica (Shibata, 1994) y la eficiencia del NM calculada por Clem & Dorman (2000). Usando el método descrito por Watanabe *et al.* (2003, 2006), el espectro energético de los neutrones en el Sol se ajustó por una ley de potencias como  $6.1 \times 10^{27} (E/100 \text{ MeV})^{-3.8} \text{ MeV}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ . Ya que todos los datos no se pudieron ajustar por una simple ley de potencias, entonces sólo ajustamos los datos entre las 17:40 y las 17:47 UT, que corresponden al intervalo de neutrones de 100–400 MeV. De manera interesante, de acuerdo a un análisis independiente usando un modelo de atenuación diferente (Dorman *et al.* 1999) y un cálculo diferente de eficiencia (Valdés-Galicia *et al.* 2004), los datos del SNT de México dan un resultado consistente de  $5.3 \times 10^{27} (E/100 \text{ MeV})^{-4.0} \text{ MeV}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ . Esta diferencia es una buena estimación de la incertidumbre sistemática del método de análisis, ya que en este caso, el error estadístico es prácticamente despreciable.

A partir de esta intensidad, calculamos la respuesta de todos los detectores y canales usando el método de Monte Carlo. Para el cálculo de la respuesta de los SNT, usamos el paquete GEANT3. Los perfiles simulados están sobrepuestos en las curvas grises en las Figs. 2 y 3. Podemos encontrar un acuerdo razonable en la amplitud observada (debemos notar aquí que aún queda una incertidumbre sistemática en la respuesta del detector en el nivel de  $\pm 10\%$  que puede cambiar la normalización de cada detector). Sin embargo, está claro que las colas largas de los perfiles observados no están bien ajustadas. Probamos varios índices de ley de potencias y tiempos de emisión pero no pudimos encontrar algún parámetro que nos permita ajustar satisfactoriamente el perfil observado. A fin de mantener el modelo de emisión impulsiva, debemos suponer una suavización del espectro debajo de los 60 MeV. Con los neutrones de menor energía (que tienen menor velocidad) se puede explicar

<sup>2</sup>Los datos del monitor de neutrones Apatity pueden ser obtenidos de <http://pgi.kolasc.net.ru/CosmicRay>.

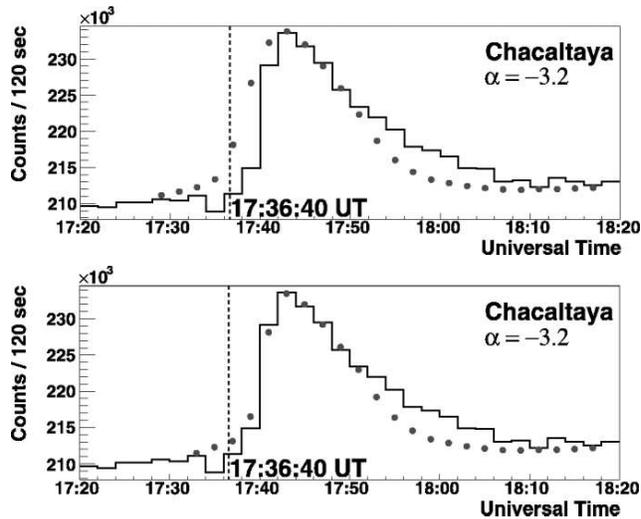


Figura 4. Perfiles de tiempo simulado (puntos) y observado (histograma) del NM de Bolivia. En estos cálculos se supuso que la emisión de neutrones sigue el perfil de los RX duros. Arriba: caso en el que no se incluye energía de corte. El mejor índice de potencia que se encontró es  $-3.2$ , pero se observa discrepancias aparentes en las fases de ascenso y decaimiento. Abajo: el mismo espectro, pero donde se supuso un corte agudo en 400 MeV. La parte ascendente está bien explicada, no obstante aún se encuentra una gran discrepancia en la fase de decaimiento.

la señal atrasada. Pero esto no es consistente con los resultados de los SNT que muestran largas colas para los perfiles de  $>80$  y  $>90$  MeV. Tal restricción fue imposible sólo a partir de los datos de los NM.

Como un segundo modelo del perfil de la emisión, hemos supuesto que los neutrones fueron emitidos con el mismo perfil que los RX duros y los  $R\gamma$ . El resultado del mejor ajuste con una ley simple de potencias con índice  $-3.2$  se muestra en el panel superior de la Fig. 4. Hay una discrepancia obvia entre los datos y la simulación de Monte Carlo. A fin de compensar la diferencia en la fase ascendente, intentamos con el mismo espectro pero con un corte agudo en los 400 MeV. El resultado se muestra en el panel inferior de la Fig. 4. En este caso, el perfil justo hasta después del pico, está bien ajustado. Esto indica que la aceleración de los iones comenzó al mismo tiempo que la de los electrones. Sin embargo, la discrepancia en las colas, que no pudimos ajustar con ningún conjunto de parámetros, sugiere que los iones fueron acelerados de manera continua o bien fueron atrapados por un periodo mayor que los electrones.

En las observaciones de la fulguración del 24 de mayo de 1990, se pensó que los iones relativistas eran acelerados junto con los electrones dentro del lapso de un minuto. Los resultados publicados de un análisis realizado para los eventos del 21 de junio de 1980 y del 23 de julio de 2002, sugieren asimismo una aceleración casi simultánea de iones y electrones (Chupp 1990; Lin *et al.* 2003; Hurford *et al.* 2003). Por otra parte, para la fulguración del 11 de junio de 1991 se reportó una vida media larga de los iones relativistas (Kanbach *et al.* 1993). Ellos

observaron también diferentes tiempos de vida de iones y electrones, pero nada pudieron decir acerca del comienzo de la aceleración debido a la saturación. En Chupp (1990) también se encontró emisiones extendidas de protones (pero no así de electrones) en las fulguraciones del 3 de junio de 1982 y del 24 de abril de 1984. Las nuevas observaciones de la fulguración del 7 de septiembre de 2005 presentadas aquí están situadas entre estos dos extremos. Se ha cubierto toda la historia de la fulguración y se encontró analogías y diferencias en el comportamiento de los iones y electrones altamente energéticos, por medio de una alta estadística. Es más: las observaciones de base están libres de contaminación por radiaciones producidas por electrones. Estas observaciones de base de alta calidad restringen tanto el ámbito de aceleración como el sitio de emisión de partículas relativistas. Las otras formas del espectro energético y los perfiles de emisión extendidos independientes de RX y  $R\gamma$  deberían ser puestos a prueba a fin de explicar de manera consistente todos los resultados obtenidos para el evento.

Los autores de este artículo agradecen el trabajo de nuestros colegas que manejan y mantienen los telescopios de neutrones solares. Asimismo agradecemos al equipo de *INTEGRAL* por su apoyo a la misión y por su orientación en el análisis de los datos del satélite *INTEGRAL*. El trabajo de K. Watanabe fue apoyado por el programa *Grant-in-Aid* de la *Japan Society for the Promotion of Science Fellows*. Este trabajo fue apoyado por una *Grant-in-Aid for Scientific Research on Priority Area* (11203204) del Ministerio de Educación, Cultura, Deporte, Ciencia y Tecnología del Japón, y por una *Grant-in-Aid for Scientific Research* (16540242) de la Sociedad Japonesa para la Promoción de la Ciencia. Esta investigación fue parcialmente apoyada por la *Nihon University Multidisciplinary Global Research Grant* para 2001 y 2002, y por una *DGAPA UNAM Grant* 115303. Finalmente, los autores agradecen al árbitro anónimo por sus valiosos comentarios que ayudaron a mejorar nuestro manuscrito.

## REFERENCIAS

- [1] Chupp, E. L. 1990, *ApJS*, 73, 213.
- [2] Clem, J. M., & Dorman, L. I. 2000, *Space Sci. Rev.*, 93, 335.
- [3] Debrunner, H., *et al.* 1993, *ApJ*, 409, 822.
- [4] Dorman, L. I., Valdés-Galicia, J. F., & Dorman, I. V. 1999, *J. Geophys. Res.*, 104, 22417.
- [5] Forrest, D. J., & Chupp, E. L. 1983, *Nature*, 305, 291.
- [6] Hurford, G. J., *et al.* 2003, *ApJ*, 595, L77.
- [7] Kanbach, G., *et al.* 1993, *A&AS*, 97, 349.
- [8] Lin, R. P., *et al.* 2003, *ApJ*, 595, L69.
- [9] Masuda, S., *et al.* 1994, *Nature*, 371, 495.
- [10] Matsubara, Y., *et al.* 1993, in *Proc. 23rd Int. Cosmic Ray Conf. (Calgary)*, 139.
- [11] Matsubara, Y., *et al.* 1995, in *Proc. 24th Int. Cosmic Ray Conf. (Roma)*, 1312.
- [12] Muraki, Y., & Shibata, S. 1996, in *AIP Conf. Proc. 374, High Energy Solar Physics*, ed. R. Ramaty, N. Mandzhavidze, & X.-M. Hua (Woodbury: AIP), 256.

- [13] Shea, M. A., Smart, D. F., & Pyle, K. R. 1991, *Geophys. Res. Lett.*, 18, 1655.
- [14] Shibata, S. 1994, *J. Geophys. Res.*, 99, 6651.
- [15] Terasawa, T., *et al.* 2005, *Nature*, 434, 1110.
- [16] Tsuchiya, H., *et al.* 2001, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, 463, 183.
- [17] Valdés-Galicia, J. F., *et al.* 2004, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*, 535, 656.
- [18] Watanabe, K., *et al.* 2003, *ApJ*, 592, 590  
———. 2006, *ApJ*, 636, 1135.

# CIRCULACIÓN ATMOSFÉRICA SOBRE TERRITORIO BOLIVIANO DURANTE LA FASE ACTIVA Y PASIVA DEL MONZÓN SUDAMERICANO

Andrés W. Burgoa Mariaca

*Instituto de Investigaciones Físicas, FCPN  
La Paz—Bolivia*

## RESUMEN

Haciendo uso de los datos climatológicos generados por modelo de acoplamiento océano-atmósfera iROAM con una resolución espacial de  $0,5^\circ \times 0,5^\circ$  en latitud y longitud para el período comprendido entre los años 1998 - 2003 y los aportados por NCEP-Reanálisis, se estudió la circulación meridional del viento, vertical y perfiles verticales durante la fase activa y pasiva del monzón sudamericano. El carácter estacional de los vientos en los niveles bajos de la troposfera se hace evidente y la surgencia de una vorticalidad anticiclónica o alta boliviana ( $20^\circ S - 65^\circ W$ ) en los niveles altos se hace patente en el altiplano boliviano.

Cortes transversales longitudinales centrados en  $12,5^\circ S$  y  $15,0^\circ S$  para el verano Austral evidencia la existencia de Corrientes en Chorro en los Niveles Bajos (CCBS) de la Troposfera situado en la ladera oriental de los Andes Centrales ( $800 - 900 hPa$ ) y una intensidad de  $5 \left[ \frac{m}{s} \right]$  dirigido hacia el Sur del continente sudamericano. En el invierno Austral se puede evidenciar el cambio en el sentido de movimiento de la CCBS hacia el norte del hemisferio sur, su intensidad aumenta a  $8 \left[ \frac{m}{s} \right]$  y se ubica en los  $700 hPa$  muy pegado a la ladera oriental de los Andes Centrales.

Cortes transversales latitudinales en  $25,0^\circ S - 0^\circ$  centrado en  $68,0^\circ W$  muestran para el verano Austral movimientos de masas de aire ascendentes forzados por la presencia de la orografía andina, estos movimientos se amplifican hasta los niveles altos de la Troposfera en donde divergen horizontalmente, su origen en los niveles bajos (Ixiamas-Bolivia) se extiende hasta los grandes salares ubicados en la altiplanicie boliviana, movimientos estos cargados de fuerte humedad y actividad convectiva. En el invierno y primavera Austral se evidencia subsidencia de masas de aire a lo largo del corte longitudinal, este está asociado a buen tiempo y soleado (puna de Atacama - Iquique - Chaco Boreal - Salares en Bolivia).

La condición de Baroclinicidad de la CCBS parece no estar patente cuando se analiza la estructura termodinámica en el núcleo de la CCBS y su presencia coadyuva a la formación de sistemas complejos de mesoescala en la región.

La presencia de la Alta Boliviana da el carácter estacional de las precipitaciones en suelo boliviano, éstas se concentran en el norte del departamento de La Paz y Pando, extendiéndose hacia la amazonía boliviana, la intensidad de esta ésta en los  $300 \left[ \frac{mm}{mes} \right]$ .

*Descriptores: Circulación Atmosférica, Monzón Sudamericano.*

## 1. INTRODUCCIÓN

La palabra “monson” proviene del Arabe “Mausim” que significa estación y con él los navegantes del Indico denominaron la gigantesca inversión de vientos que, con carácter estacional, se registra en dicho océano y que, históricamente, fue aprovechada para la navegación entre las costas de África y la India: en verano rumbo hacia el noroeste (monzón de verano o monzón de las lluvias) y en invierno hacia el suroeste (monzón de invierno o monzón seco).

Tradicionalmente se vio al continente sudamericano con características de un régimen no-monzónico. Sin embargo, Zhou y Lau (1998) se encargaron de demostrar

que las principales características de la inversión estacional de los vientos alisios a gran escala sobre el continente sudamericano se parece en mucho a los sistemas monzónicos existentes en Asia el África y el norte de Australia, solo para citar algunos. A su vez, observaciones previas nos dan referencia a que sudamérica posee ciertas características semejantes a los monzones ya existentes a nivel global. Horel et al. (1989) muestran que la alta boliviana se intensifica muy rápidamente a medida que este se va asentando sobre el territorio boliviano. Li y Fu (2002) también evidencian características muy similares al monzón asiático durante la estación húmeda para el monson sudamericano.

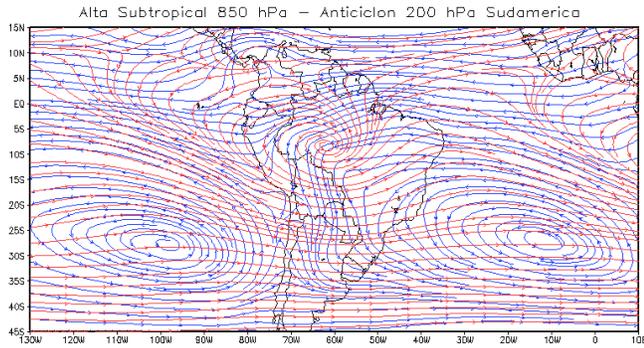


Figura 1. Se muestra la climatología tanto de la Alta subtropical como del anticiclón en el Hemisferio Sur.

Holton y Krishnamurti coinciden en explicar los mecanismos hidrodinámicos que rigen la circulación monzónica en la estación de verano; en particular, cuando una columna de aire se extiende hacia la troposfera, en los niveles bajos de esta se genera un remolino de energía potencial que luego se manifiesta en los niveles altos de la troposfera como energía cinética divergente, el acoplamiento de tal energía con la rotación de los vientos se manifiesta como energía cinética de rotación, en tal sentido, el continente sudamericano y en especial en la altiplanicie boliviana se genera una vorticalidad anticiclónica ( $\zeta > 0$ ). Los estudios a gran escala o global, han caracterizado la transición de los condiciones térmicas y dinámicas para el inicio de tales anticiclones, sin embargo la pregunta que aun queda flotante es conocer el mecanismo de disparo que inicia las condiciones para tal génesis. Sin embargo, Silva Dias y otros (1983) muestra mediante un modelo lineal baroclinico que la alta boliviana o vorticalidad anticiclónica se debe esencialmente a las ondas de Rosby ecuatoriales como una respuesta al forzamiento transiente del calor en el Amazonas al cual acompaña fuertes tormentas eléctricas en el altiplano boliviano.

A nivel global, la circulación de vientos en los niveles bajos de la troposfera sobre los océanos subtropicales esta caracterizado por la presencia de altas subtropicales, las cuales son permanentes durante todo el año. Mientras que los monsoones asiáticos, africano y el de las américas son estacionales que siguen la migración estacional latitudinal del Sol. En tal sentido, tanto anticiclones subtropicales como monsoones juegan un rol fundamental en la circulación global tanto en la atmósfera como en los océanos. Se atribuye la existencia de los anticiclones subtropicales a la Célula de circulación de Hadley. Heald y Hou (1980) muestran como los conceptos físicos de conservación del momento angular, el balance en el viento térmico y el equilibrio radiativo-convectivo pueden explicar la estructura media zonal y anual de la circulación de Hadley. Los estudios relativos a los sistemas monsonicos a nivel global confluyen a una relación directa entre las altas subtropicales, los monsoones y la célula de circulación de Hadley. Por lo tanto, la motivación para el presente estudio es mostrar la circulación atmosférica

sobre territorio boliviano durante la fase activa y pasiva del monson sudamericano.

## 2. DATOS

Los datos utilizados en el presente estudio consisten en datos diarios del Centro Nacional para la Predicción del Medio Ambiente (del ingles NCEP) tomados cuatro veces al día a 0000, 0600, 1200 y 1800 UTC para un período de nueve años (1998-2006) con una resolución espacial en longitud-latitud de  $2,5 \times 2,5$  a 17 niveles de presión estandar, con dichos datos se construyo la climatología para el período 1998 al 2003. A su vez, se hizo uso de los datos climatológicos del modelo climático regional Oceano-Atmósfera denominado IPRC ROAM (iROAM) con una resolución de  $0,5 \times 0,5$  en longitud-latitud a 20 niveles de presión estandar para el período 1998 al 2003.

## 3. EL SISTEMA MONZÓNICO EN SUDAMERICA

La Figura 1 ilustra la circulación de los vientos en los niveles bajos y altos de la troposfera para la Climatología anual del período 1998-2003 en el Hemisferio Sur, en esta es posible apreciar las vorticidades anticiclónicas situadas frente a las costas del Pacífico Chileno y las costas del Atlántico Brasileño (850 hPa), a su vez en pleno continente sudamericano se situa un anticiclón permanente en los límites territoriales de Brasil y Bolivia durante todo un año (200 hPa). En los niveles bajos se puede evidenciar la intensidad de los vientos alisios (vientos del sureste) en el océano Atlántico como en el Pacífico tropical. Dichos vientos bordean las costas chilenas como las brasileñas y uruguayas. En las proximidades del límite ecuatorial, los vientos alisios se acoplan a aquellos provenientes del Hemisferio Norte (vientos del noreste) para dar a lugar a la Zona de Convergencia Intertropical (ZCIT).

La cadena montañosa que se extiende a lo largo del continente, impide que los vientos alisios del Pacífico penetren hacia el interior de éste, mientras que los alisios del Atlántico logran ingresar vía cuenca amazónica hacia territorio boliviano y seguir su curso hacia las pampas argentinas, a estos niveles no es posible hablar de un régimen monzónico ya que no se evidencia la inversión estacional de los vientos en el Hemisferio Sur. En los niveles altos de la troposfera, la vorticalidad anticiclónica en ubica en los  $9^{\circ}S - 63^{\circ}W$  durante todo un año calendario. Sin embargo, si extraemos la componente anual y fijamos la atención en los picos tanto del verano como del invierno Austral, entonces se puede evidenciar la estacionalidad en la circulación de los vientos tanto en los niveles bajos como altos de la troposfera.

La Figura 2 muestra por separado tanto en los niveles altos como bajos la estación del verano e invierno Austral, en esta se puede evidenciar la vorticalidad anticiclónica ( $\zeta > 0$ ) en la planicie altiplanica de Bolivia ( $20^{\circ}S - 65^{\circ}W$ ); dicha vorticalidad se trata de un anticiclón cálido, es decir, dicho anticiclón está constituido por una masa de aire más cálida de que la existe a su alrededor, trátese pues de un núcleo cálido en donde los gradientes de presión y temperatura tienen la misma dirección

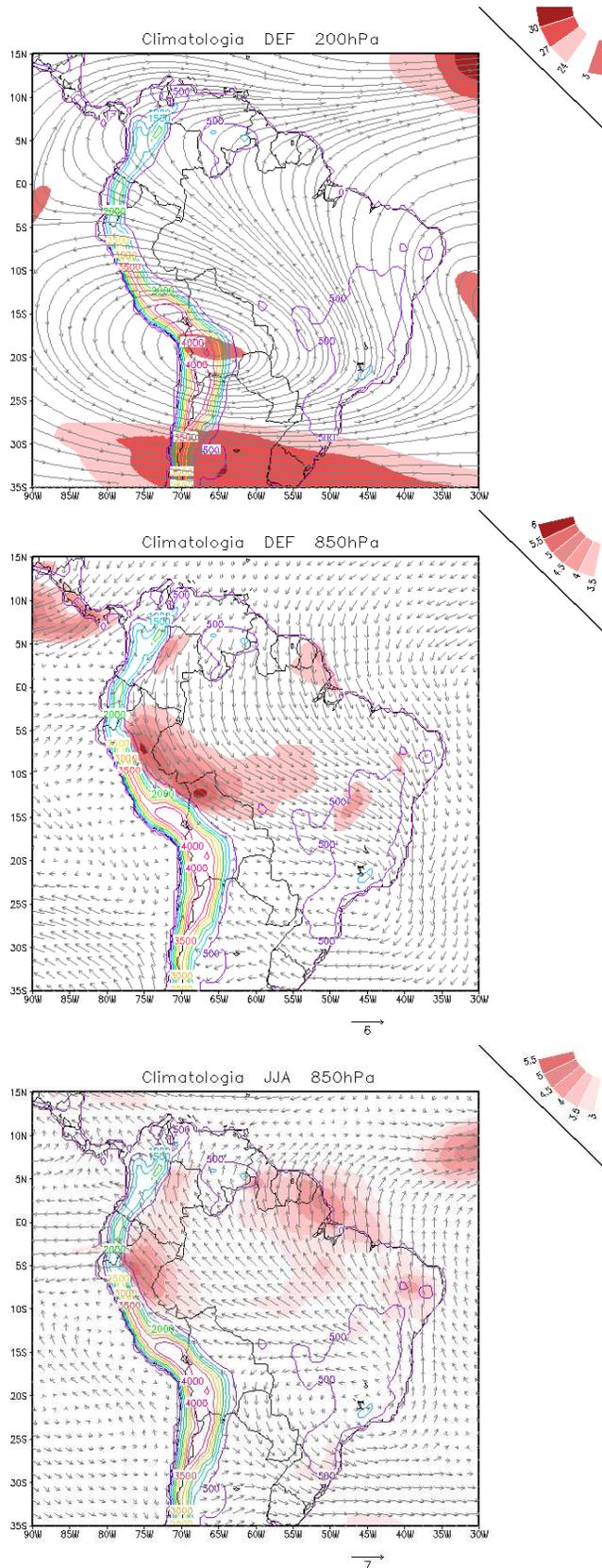


Figura 2. Se muestra de arriba para abajo la circulación de los vientos en los niveles altos y bajos de la tropósfera para el verano e invierno Austral. Las sombras indican la magnitud del viento a los niveles referidos.

y son máximos ambos, esto implica que las superficies isobáricas se organizan en forma de campana con lo que la pendiente de estas se acrecienta con la altura. Los mecanismos que preceden a la formación de estos campos de presión se deben básicamente a procesos dinámicos, así en el anticiclón cálido la superficie isobárica genera una alta presión en el núcleo del anticiclón que esta ligado hidrostáticamente con el aire frío de los alrededores que es relativamente más denso. La estructura de estos anticiclones permite explicar las diferencias tan notorias de tiempo atmosférico de una estación a otra, así estos se caracterizan por fuertes ascensos de masa de aire que da a lugar a un enfriamiento adiabático del mismo. Este enfriamiento puede llevar a la saturación y condensación del aire, lo que genera abundante nubosidad que puede estar acompañada de precipitaciones, de ahí que se asocie al anticiclón con tiempo nublado y lluvioso. Dicho proceso hace que el volumen de aire en la columna de aire vertical conserve la ecuación de continuidad y un gradiente térmico vertical muy inestable como consecuencia de la superposición de aire frío en las capas altas y cálido en la superficie.

La Figura 2 gráfico segundo de arriba hacia abajo muestra la circulación de vientos en los niveles bajos,  $850hPa$ , en esta es de particular importancia el desarrollo de las denominadas Corriente de aire en los Niveles Bajos (CNB) que se ha venido a denominar la Corriente en Chorro de los niveles Bajos en Sudamerica (CCBS), estos CCBS juegan un papel fundamental en el clima regional del Hemisferio Sur y típicamente se localizan hacia el costado oriental de la cadena montañosa de los Andes centrales o como en el caso del monson indio el gran contraste térmico entre el continente indio y los adyacentes al océano Indico generan chorros o corrientes de aire en los niveles bajos de la atmósfera, sea en el continente asiático o las américas, la presencia de esta es estacional, es decir, sigue la migración latitudinal del Sol. La importancia de estos CCBS es que estan estrechamente vinculados a la formación de complejos convectivos de mesoescala y convergencia de vapor de agua por debajo de estos CCBS. La figura mencionada nos ilustra la climatología de la estacionalidad de los vientos alisios para el verano Austral (DEF), tal como puede evidenciarse, los vientos provenientes de la cuenca del Sahel africano cruzan la línea ecuatorial e incursionan al continente sudamericano vía cuenca amazónica bordeando la cordillera de los Andes y girar ciclónicamente para dirigirse hacia el Gran Chaco, se ve notoriamente en este movimiento de masas de aire que la CNB ingresa por el norte del departamento de Pando e incursiona hacia las llanuras benianas y el escudo chiquitano. Su incursión va más allá, es decir, se observa una vorticidad ciclónica ( $\zeta < 0$ ) en las grandes urbes de Sao Paulo y Rio de Janeiro. A su vez, la climatología para la estación del invierno Austral (JJA) (ver Figura 2 gráfico tercero de arriba hacia abajo) muestra una vorticidad anticiclónica ( $\zeta > 0$ ) en las ciudades brasileñas anteriormente mencionadas para adentrarse hacia el continente e iniciar su retorno a la

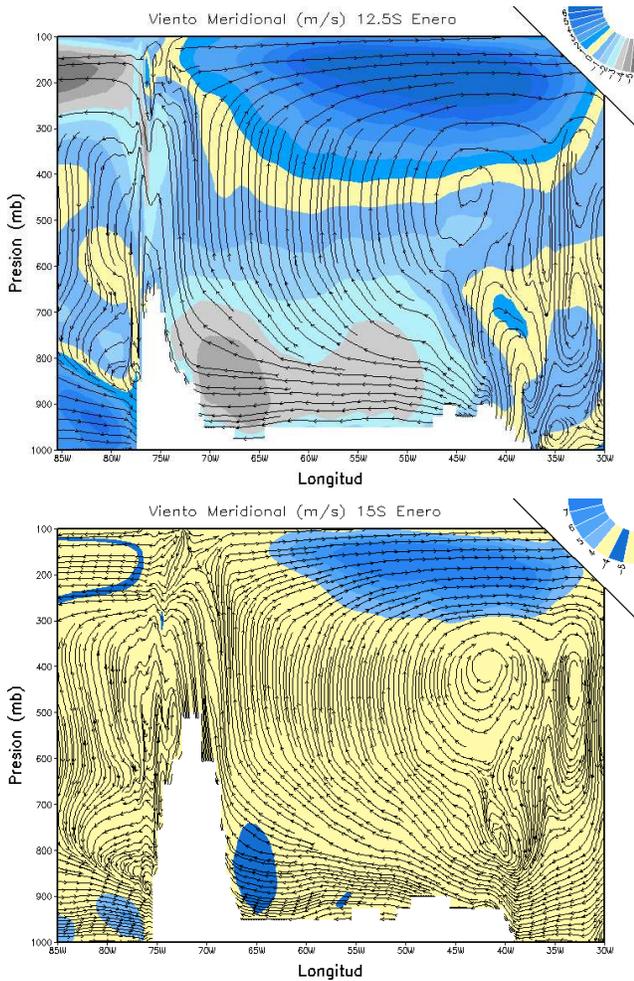


Figura 3. La Figura muestra un corte transversal longitudinal a diferentes latitudes en el continente sudamericano, en ésta se puede evidenciar el movimiento, orientación e intensidad de la Corriente en Chorro de los Niveles Bajos ( $850hPa$ ).

cuenca del Sahel africano, este giro estacional de los vientos para los meses DEF y JJA da el carácter monzónico a Sudamérica y trátase pues de un monzón semejante al monzón indio con un tiempo de duración de dos meses y medio, el suficiente para aportar la cantidad necesaria de lluvias en la región, ya que los monzones se caracterizan por la presencia de precipitaciones durante su estadio en el continente.

### 3.1. CCBS (longitudinal) para la estación del verano Austral

La Figura 3 muestra los cortes transversales longitudinales a  $12,5^{\circ}S$  y  $15,0^{\circ}S$  para la climatología de los vientos meridionales durante la estación del verano Austral, en ésta se ve la orientación de la CCBS en el continente sudamericano dirigido hacia el polo Sur. La CCBS está orientada hacia la ladera oriental de la cordillera andina y ubicada entre los  $800 - 900 hPa$ , se observa claramente el papel que juega la orografía y su carácter de forzamiento para la génesis de la CCBS, a su vez, en la ladera occidental peruana (Lima-Perú) se puede evi-

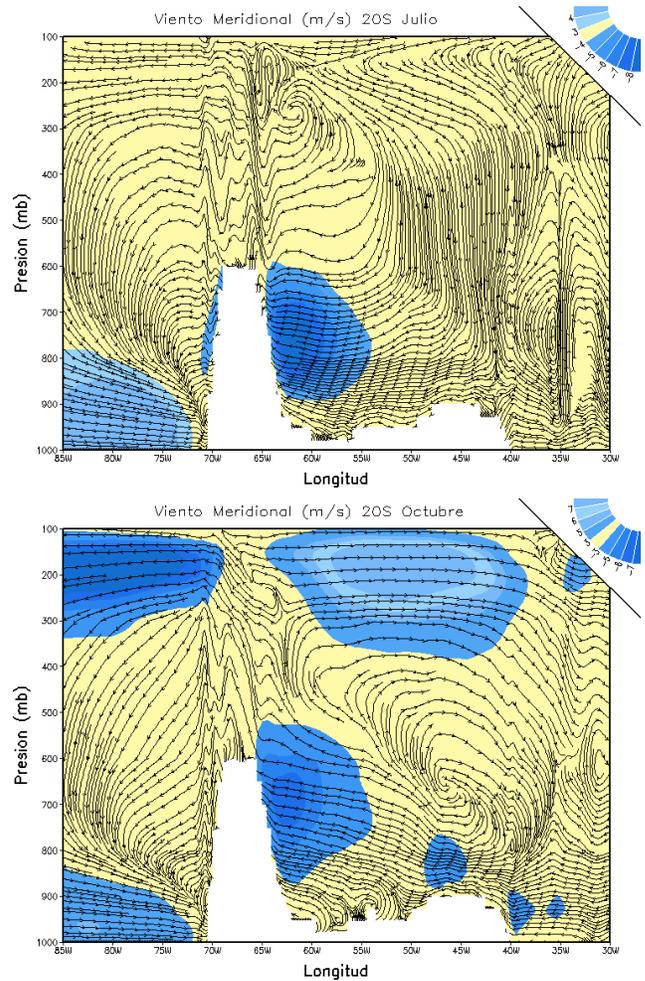


Figura 4. Se puede evidenciar en la Figura el corte transversal longitudinal a  $20,0^{\circ}S$  para la estación del invierno y la primavera Austral en el continente sudamericano.

denciar una chorro de niveles bajos en sentido ecuatorial, su ubicación se centra entre los  $900 - 1000 hPa$  y como contraparte a estas corrientes en los niveles bajos se establece en los niveles altos de la troposfera otros chorros de mayor intensidad en sentido ecuatorial. En la Figura también se acopla el movimiento vertical que experimentan los vientos en presencia de la vortical anticiclónica en la altiplanicie boliviana, se puede evidenciar el intenso movimiento ascendente de las masas de aire hacia los niveles altos ( $200hPa$ ), en especial a los  $12,5^{\circ}S$  de latitud se puede observar movimientos verticales tanto en el norte de La Paz y las llanuras benianas para luego cerrar la célula de circulación con movimientos descendentes frente a las costas de el Salvador en el Brasil, además se puede ver que se genera una pequeña célula de circulación entre la cordillera de Carabaya y Huanta en el Perú. Mientras que en los  $15,0^{\circ}S$  de latitud se evidencia movimientos ascensos intensos que se originan en las proximidades de la llanura de moxos en el Beni, siguiendo hacia el nudo de Apolobamba en los límites fronterizos de Perú y Bolivia, esta rama ascendente se cierra con otra descendente frente al Salvador en el Brasil; a su

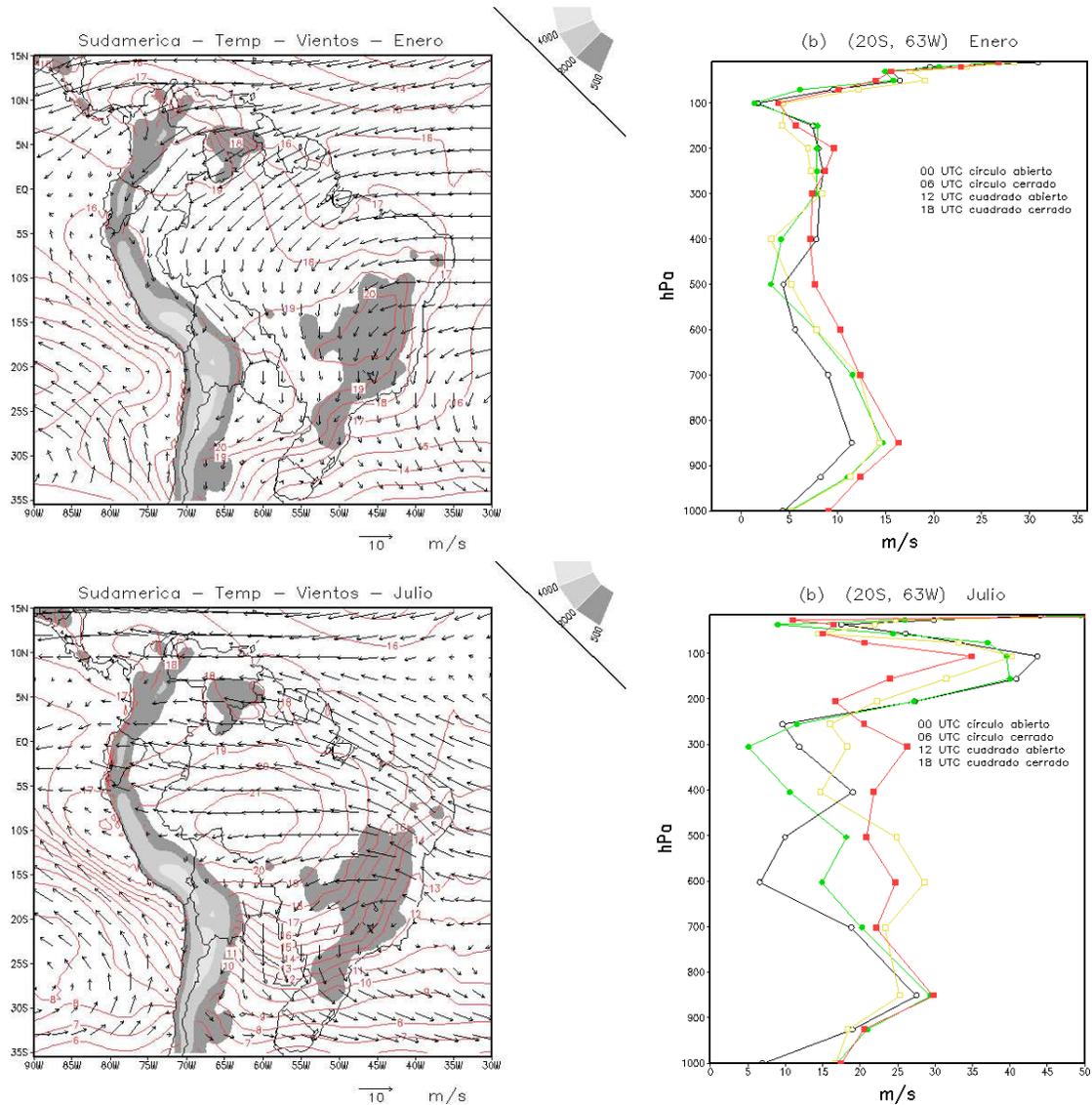


Figura 5. La Figura nos muestra la temperatura en contornos a 925 hPa y vientos en vectores a 850 hPa para las estaciones del verano e invierno Austral, acompaña a estas perfiles verticales del viento a 20,0°S – 63,0°W.

vez, otra circulación de menor intensidad se genera entre la cordillera de Carabaya y la cordillera de Chilca en el Perú.

### 3.2. CCBS (longitudinal) para la estación del invierno Austral

La Figura 4 nos muestra la CCBS tanto para el invierno y la primavera Austral en el continente sudamericano, en plena estación invernal se evidencia que la CCBS se localiza en los niveles de presión de 700 – 800 hPa muy próxima a la ladera oriental de los Andes Centrales, en el costado occidental se muestra un ligero chorro a los mismos niveles que su contraparte oriental, es interesante notar el sentido de la CCBS en sentido ecuatorial. En la ladera occidental y frente a las costas del Pacífico chileno un chorro de niveles bajos se dirige hacia el polo sur. A su vez, los movimientos verticales en ambos flancos de la cordillera andina evidencia una

célula de circulación que abarca una rama descendente al interior del continente y el costado oriental de los Andes Centrales y otra rama descendente hacia el interior del océano Pacífico; en tal sentido, dichos movimientos tienen que ver con la subsidencia de las masas de aire hacia los niveles bajos, dichos movimientos calientan adiabáticamente a las masas de aire y las alejan del punto de saturación y con ello determina la aparición de tiempo seco, despejado y soleado. En las inmediaciones de los niveles bajos la orografía afecta fuertemente estos movimientos descendentes, de ahí que en el Chaco Boreal, el salar de Uyuni e Iquique, este último frente a las costas chilenas evidencian condiciones semidesérticas.

Por otro lado, en el pico de la estación de Primavera, se puede evidenciar la CCBS al nivel de 700 hPa en dirección ecuatorial, este se ubica aproximadamente entre los departamentos de La Paz y Cochabamba, mientras que su contraparte en el flanco occidental se ubica en

pleno océano Pacífico en dirección hacia el polo sur; en los niveles altos se observa dos chorros que se dirigen hacia la línea ecuatorial y el otro hacia el polo sur. En el pico de la estación primaveral se puede notar nuevamente movimientos ascendentes desde el Chaco Boreal, Serranía los Milagros y la cordillera Mandinga, estos últimos ubicados en el departamento de Chuquisaca, por otro lado la subsidencia prevalece en la ciudad de Iquique Chile y movimientos de ascendentes entorno a los Salares de Coipasa y Uyuni.

### 3.3. Procesos dinámicos en la CCBS

La Figura 5 ilustra la composición del campo de temperaturas en contornos a  $925\text{ hPa}$  y el campo de vientos en vectores a  $850\text{ hPa}$  para la estación tanto del verano como el invierno Austral, también acompaña a estas los perfiles de vientos a  $20,0^{\circ}\text{S} - 63,0^{\circ}\text{W}$ . La estructura termodinámica de tales configuraciones nos muestra que el viento no sopla de forma paralela al gradiente de temperaturas horizontal, es decir, el viento térmico está íntimamente relacionado con la cortante vertical del viento y esta a su vez con el concepto de una atmósfera Baroclínica; sin embargo los resultados expuestos aun en el caso de un forzamiento geostrófico no sería el responsable de producir la CCBS. Los perfiles que acompañan a estas ponen de manifiesto que en el invierno Austral es donde la CCBS posee la mayor intensidad, dichos perfiles nos muestran la relación estrecha con la actividad convectiva y la formación de complejos convectivos de mesoescala, en especial durante el verano Austral en las inmediaciones de las 18UTC (actividad diurna).

### 3.4. Actividad convectiva latitudinal en la presencia de vorticidad anticiclónica

La Figura 6 pone de manifiesto la actividad convectiva latitudinal para las estaciones del verano e invierno Austral. El corte transversal latitudinal  $25,0^{\circ}\text{S} - 0^{\circ}$  centrado en  $68,0^{\circ}\text{W}$  para el verano Austral nos indica que los movimientos ascendentes de las masas de aire que incursionan vía línea ecuatorial son forzados a subir hacia los niveles altos de la troposfera, sitio donde estos divergen. Las localidades que experimentan estos movimientos verticales van desde Ixiamas, Serranía Huayra Pata, Zongo y Calamarca, mientras que el extremo sur evidencia un canal ascendente entorno al Salar de Uyuni y la puna de Atacama, este último en Chile. Se muestra también un giro ciclónico al nivel de  $500\text{ hPa}$  y de dirección hacia la cuenca del océano Pacífico, a la altura de la Cordillera del Condor en el Ecuador.

El corte transversal latitudinal  $25,0^{\circ}\text{S} - 0^{\circ}$  centrado en  $68,0^{\circ}\text{W}$  para el invierno Austral pone de manifiesto una célula de circulación con su rama descendente hasta los  $15,0^{\circ}\text{S}$ , lo que implica que las masas de aire se calientan en su descenso y se alejan del punto de saturación, lo que muestra las condiciones de buen tiempo en gran parte de la región.

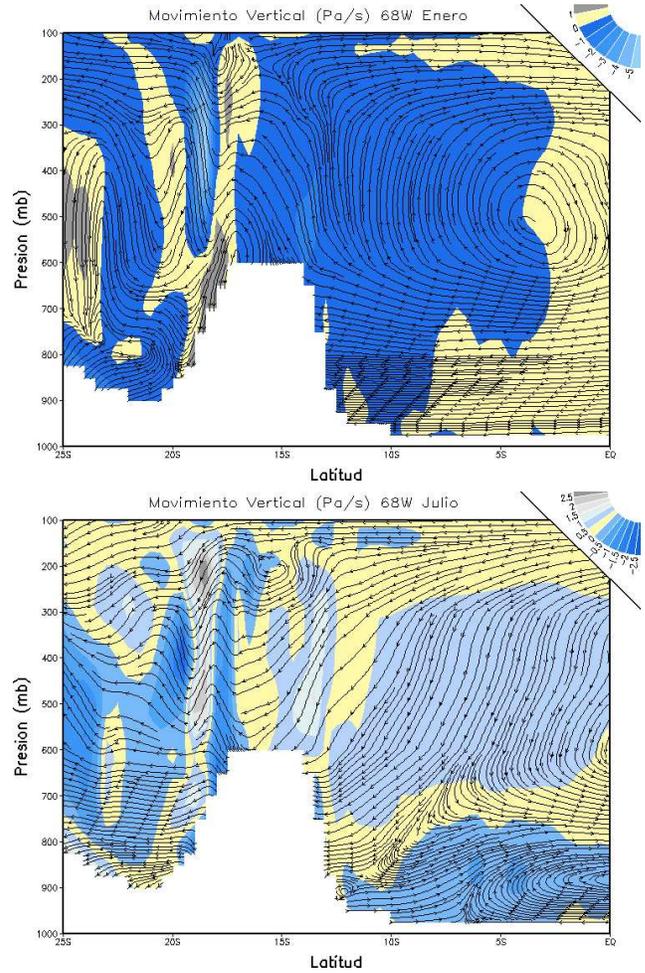


Figura 6. La Figura ilustra el corte latitudinal  $25,0^{\circ}\text{S} - 0^{\circ}$  centrado en  $68,0^{\circ}\text{W}$  para las estaciones del verano e invierno Austral, en esta se evidencia los movimientos tanto ascendentes como descendentes de las masas de aire que incursionan al continente sudamericano, en un caso esta asociado con tiempo húmedo, actividad convectiva y precipitaciones, mientras que en el otro caso se nota buen tiempo y seco, las lluvias están ausentes para este caso.

### 3.5. Variación estacional de las precipitaciones en sudamerica

La Figura 7 ilustra la variación estacional de las precipitaciones en el continente sudamericano durante la fase activa y pasiva del monzón en sudamerica. El inicio de la estación húmeda se inicia al norte de la línea ecuatorial, centrandose su máximo en  $40\left[\frac{\text{mm}}{\text{dia}}\right]$  en las costas del Pacífico colombiano y disminuyendo hacia el norte peruano con  $10\left[\frac{\text{mm}}{\text{dia}}\right]$ . En el pico de la actividad monzónica, las precipitaciones se concentran en los Andes Centrales con  $10\left[\frac{\text{mm}}{\text{dia}}\right]$  o  $300\left[\frac{\text{mm}}{\text{mes}}\right]$  extendiéndose hacia el interior de la Cuenca Amazónica brasileña, estas precipitaciones son necesarias para mantener todo un ecosistema que depende de él y por ende la actividad agrícola en gran parte de la región y la generación de energía eléctrica en la represa de Itaipu (Paraguay, Brasil). De entrada a la estación del invierno Austral la migración estacional de las precipitaciones se mueven en dirección ecuatorial hacia

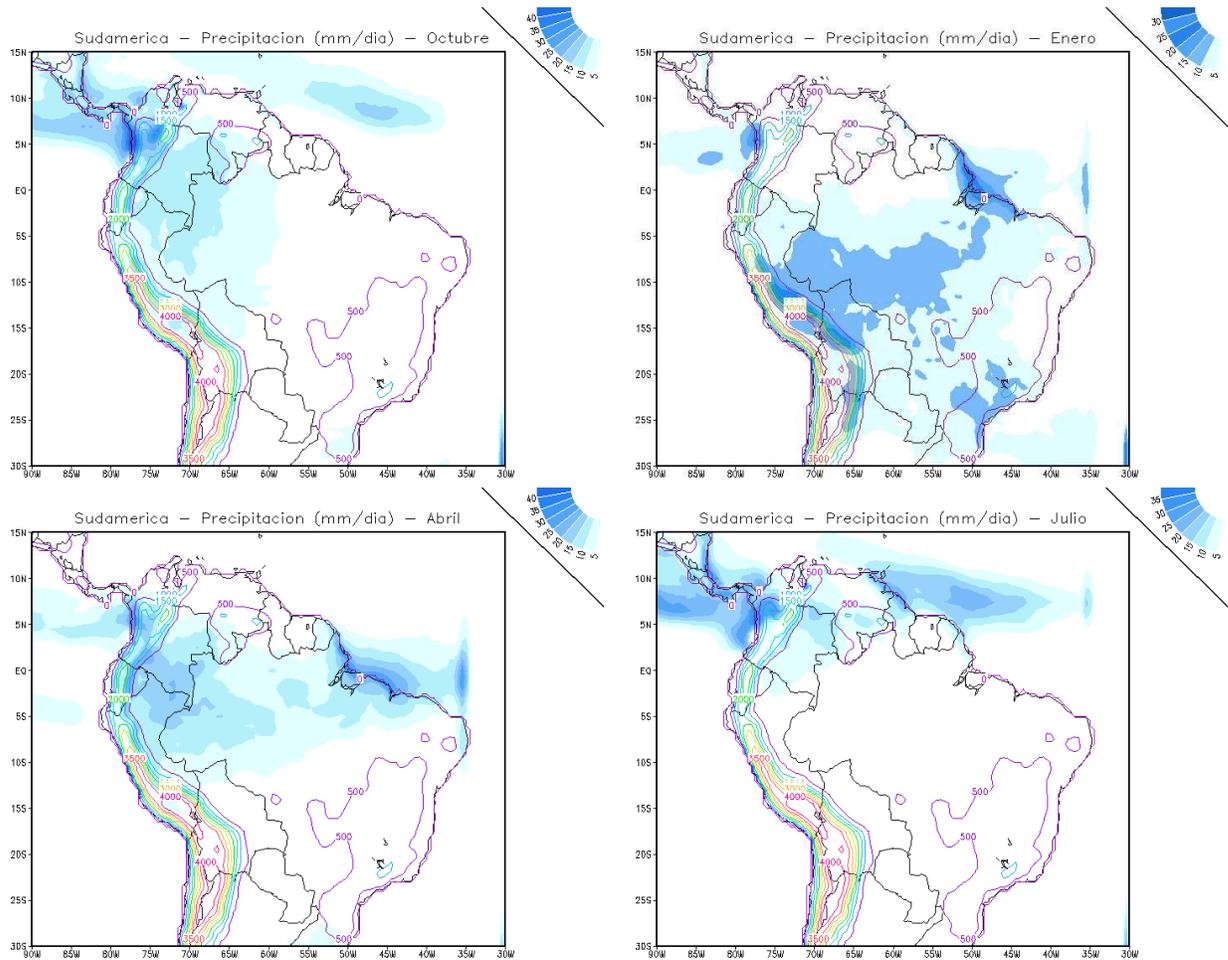


Figura 7. La Figura muestra la migración estacional de las precipitaciones durante la fase activa y pasiva del monzón sudamericano. Su fase de inicio comienza en la franja centroamericana y concentrada en el Pacífico colombiano, dos meses después se centra en los Andes Centrales y la Cuenca Amazónica del Brasil, dos meses después el movimiento se dirige hacia el flanco oriental de los países del Ecuador y Colombia para finalmente arribar en Centro América.

el flanco oriental de la cordillera andina en los países del Ecuador y de Colombia con  $25 \left[ \frac{mm}{dia} \right]$ . En pleno invierno Austral la ausencia de precipitaciones se hace muy notoria y las lluvias se concentran entorno a Centro America con  $30 \left[ \frac{mm}{dia} \right]$ . Puede decirse que durante la fase activa del monzón, las precipitaciones siguen la migración estacional del Sol en el continente sudamericano y la vorticidad anticiclónica que se observa en la altiplanicie boliviana coadyuva a su intensificación, mientras que en la fase pasiva, la dilusión de la alta boliviana se hace patente y con ello las precipitaciones. A estas alturas, la Zona de Convergencia Intertropical juega un papel de sintonizador con el movimiento estacional de las masas de aire en los niveles bajos.

#### 4. CONCLUSIONES

Con base a los datos generados por el modelo océano-atmósfera iROAM y los aportados por NCEP-Reanálisis, se procedió a extraer la componente anual de dichos datos y elaborar la climatología correspondiente, en ese sentido se puede observar la estacionalidad de los vientos en los niveles bajos de la troposfera que virtualmente nos

da el caracter monzónico en el continente sudamericano. En los niveles bajos se puede evidenciar la presencia de Chorros de masas de Aire que se aceleran debido a la presencia de la cordillera andina, en especial en la parte central donde estos Chorros o corrientes cobran fundamental importancia por su aporte de humedad y precipitaciones a la región. La incursión de estos Chorros en el continente tiene que ver el clima en la región y la formación de sistemas de complejos convectivos de mesoescala durante la fase activa del monzón. Por otro lado, cobra vital importancia la presencia en los niveles altos de la troposfera la formación de una vorticidad anticiclónica ( $\zeta > 0$ ) en pleno altiplano boliviano ( $20^{\circ}S - 65^{\circ}W$ ) que se vino a denominar en la comunidad meteorológica de la Alta boliviana, su presencia tiene que ver con la estación lluviosa en gran parte de la cuenca endorreica y la amazonía boliviana, su presencia en suelo boliviano dura aproximadamente dos meses y medio e inclusive dependiendo de la variabilidad interanual que presente éste puede extenderse los tres meses y medio.

El corte transversal longitudinal a los  $12,5^{\circ}S$  y  $15,0^{\circ}S$  de latitud nos muestra la presencia de la Corriente en

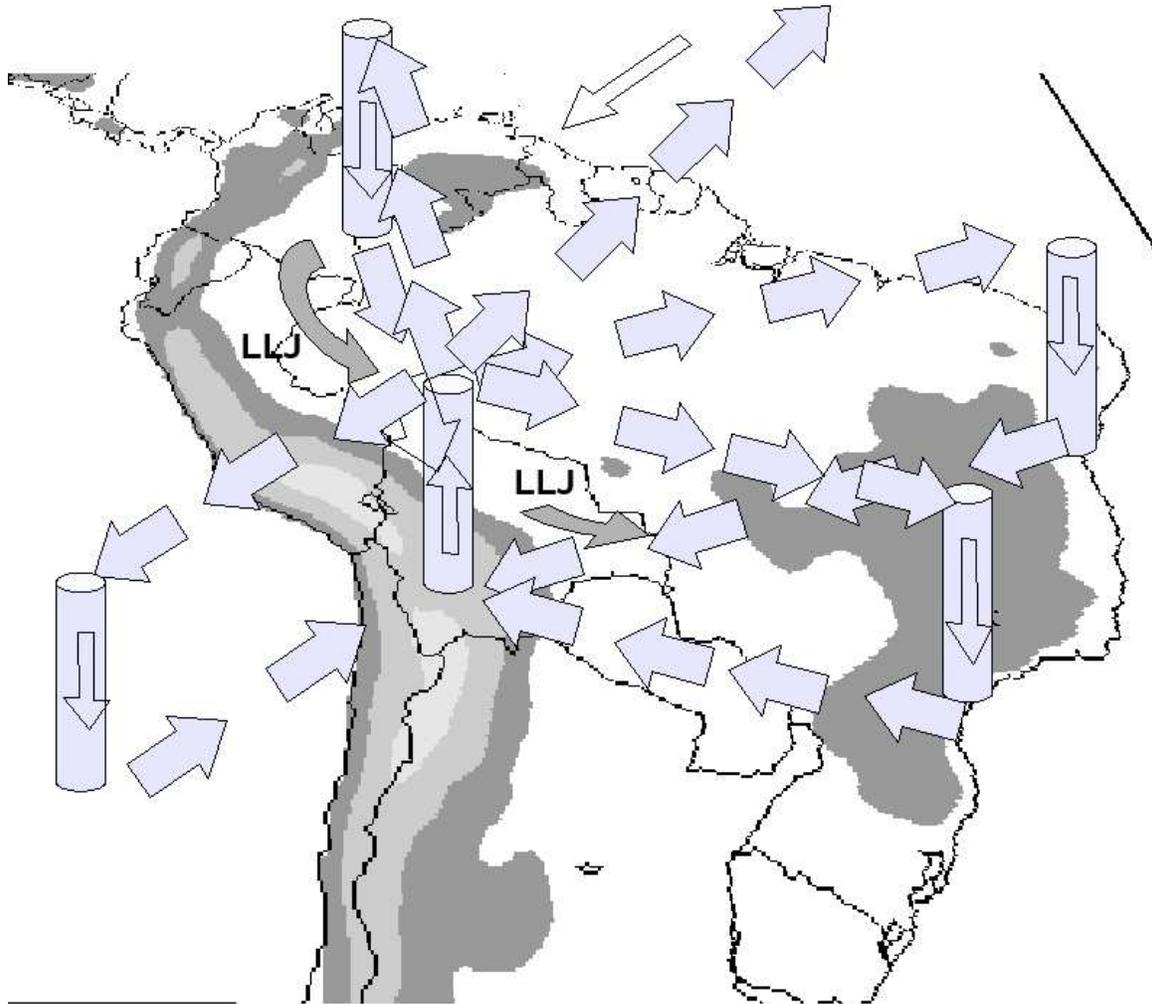


Figura 8. Se muestra el modelo conceptual para la circulación atmosférica sobre territorio boliviano durante la fase activa del monzón sudamericano con base a los datos aportados por el modelo IROAM.

Chorro de los niveles Bajos (CCBS) para la estación del verano austral, su intensidad y ubicación en la ladera oriental de los Andes Centrales versa los  $800 - 900 hPa$  con  $5 \left[ \frac{m}{s} \right]$ , lo que garantiza el aporte de humedad en la región y con ello las precipitaciones que acompañan a ésta, acompañan a ésta corrientes de aire intenso en los niveles altos, el sentido de movimiento de esta Corriente en los niveles bajos se orienta hacia el polo sur. En el invierno Austral, el corte vertical longitudinal a los  $20,0^{\circ}S$  muestra la Corriente en Chorro pegada a la ladera oriental de la cordillera andina con una magnitud de  $8 \left[ \frac{m}{s} \right]$ , ubicándose en torno los  $700 - 800 hPa$ . El mismo corte pero entrada la estación de primavera vuelve a evidenciar la presencia de esta Corriente en los  $700 hPa$  con una magnitud de  $6 \left[ \frac{m}{s} \right]$ , a estas alturas de ambas estaciones se puede evidenciar la inversión en el sentido de movimiento de esta Corriente en Chorro, tanto en el invierno como primavera Austral, dicha Corriente va dirigida hacia el norte del continente sudamericano.

La estructura termodinámica de estas Corrientes en Chorro de niveles Bajos parece no evidenciar la condición de baroclinicidad en el núcleo de estos y con ello la

génesis que les precede, sin embargo los cortes verticales  $20,0^{\circ}S - 63,0^{\circ}W$  muestran una cortante de viento en los 18 UTC como signo de actividad y formación de sistemas de complejos convectivos de mesoescala, que están bien documentados vía imágenes de satélite.

Los cortes latitudinales a  $25,0^{\circ}S - 0^{\circ}$  centrado en  $68,0^{\circ}W$  evidencian el forzamiento ascensional de las masas de aire hacia los niveles altos de la troposfera, en donde se evidencia la divergencia horizontal de los vientos a esa altura, claramente se ve la influencia del carácter orográfico que ejerce los Andes Centrales. Para el verano Austral se puede observar movimientos de masas de aire ascendente en el extremo norte y sur de Bolivia (Ixiamas - Salar de Coipasa-Uyuni). En el invierno Austral es notorio ver la subsidencia de masas de aire a casi todo el largo latitudinal, sinónimo de buen tiempo y soleado.

La presencia del monzón en sudamerica acompaña la migración estacional de las precipitaciones, su fase de inicio se originan en la línea ecuatorial y migra hacia la región muy pegada a la ladera oriental de la cordillera andina y amplificándose hacia la cuenca de la amazonía boliviana y brasileña, su máximo de aporte es de los  $300 \left[ \frac{mm}{mes} \right]$ .

La figura 8 ilustra un modelo conceptual relativo a la circulación monzónica sobre territorio boliviano. En ésta se puede evidenciar cómo la alta boliviana o vorticalidad anticiclónica se distribuye hacia lo largo y ancho del continente sudamericano. Su presencia en suelo boliviano, en especial en la altiplanicie de éste, muestra la fuerte actividad convectiva hacia los niveles altos de la tropósfera, tal como se evidencia en la figura 7 durante la fase activa del monzón sudamericano.

#### REFERENCIAS

- [1] Douglas, M. W., Peña, M., and Villalpando, R.: Special Observations on the low level flow over eastern Bolivia during the 1999 atmospheric mesoscale campaign, Extended Abstracts of the 6th Inter.Conf. on the Southern Hemisphere Meteorology and Oceanography, 3-7 April 2000, Santiago, Chile, 157/58, 2000.
- [2] Horel, J.D., A. N. Hahmann, and J. E. Geisler, 1989: An Investigation of the cycle of convection activity over the tropical Americas, *Journal Climate*. 2, 1388-1403.
- [3] Li, W., and R. Fu. 2003: Transition of the large-scale atmospheric and land surface conditions from dry to the wet season over Amazonia as diagnosed by the ECMWF Re-analysis. *Journal Climate*, in press.
- [4] Kalnay, E., and Coauthors, 1996: The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 77, 437-471.
- [5] Xie, S.P., and Coauthors, 2006: A Regional Ocean-Atmosphere Model for Eastern Pacific Climate: Toward Reducing Tropical Biases. *Journal of Climate* 20: 1504-1522.
- [6] Zhou J. lau K-M. 1998. Does a monsoon climate exist over South America? *Journal of Climate* 11: 1020-1040.

## DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN LÁSER SÓLIDO PULSADO DEL TIPO YAG: ND<sup>+++</sup>

Omar Alberto Ormachea Muñoz, Ph.D.

Universidad Privada Boliviana  
Av. Capitán Victor Ustariz. km 6.5, Campus UPB  
Cochabamba, Bolivia

### RESUMEN

Se diseñó y construyó un láser sólido pulsado del tipo YAG:Nd<sup>+++</sup> excitado ópticamente por una lámpara *flash* (medio gaseoso = Xenón), con picos intensos de emisión en longitudes de onda cercanas a las bandas de absorción de los iones de Nd<sup>+++</sup>. La longitud de onda de generación corresponde al infrarrojo  $\lambda = 1,064\mu\text{m}$ , armónica principal, con la posibilidad de doblar la frecuencia de emisión con el uso de un cristal de LiNbO<sub>3</sub>,  $\lambda = 0,532\mu\text{m}$ , segunda armónica del láser correspondiente al diapason visible.

*Descriptores:* Óptica, Láseres, Diseño de Instrumentos.

### 1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, es prácticamente imposible imaginar el campo de investigación sin el uso de la óptica del láser (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, Amplificación de Luz por Emisión Estimulada de Radiación), utilizado de manera abrumadora en el desarrollo tecnológico actual, acompañado de repercusiones económicas, sociales e incluso políticas.

En 1916, Albert Einstein estableció los fundamentos para el desarrollo de los láseres y de sus predecesores los máseres, utilizando la ley de radiación de Max Planck, basándose en los conceptos de emisión espontánea e inducida de radiación [1]. El primer láser construido en el diapason óptico fue diseñado por T. H. Maiman en el Hughes Research Laboratories en 1960 [2,3], los centros activos usados fueron los iones de Cr<sup>+++</sup> que se presentan como impurezas en el cristal de Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, “láser de rubí”. Después del descubrimiento del láser de rubí, Sorokin y Stevenson [4] y Kaiser y Garret [5], crearon el láser sólido de cuatro niveles energéticos, donde el medio activo usado fue el cristal CaF<sub>2</sub> activado por iones de elementos de tierras raras. El siguiente paso importante en esta dirección fue dado por Snitser [6] quien en 1961 disparó el primer láser activado con iones de Nd<sup>+++</sup>. La importancia del láser sólido pulsado del tipo YAG está no sólo en su extensa aplicación científica, sino también en sus aplicaciones directas en medicina, cosmetología y otros campos.

### 2. PRINCIPIOS DE FUNCIONAMIENTO DEL LÁSER

Existen cuatro procesos básicos en la generación de la emisión láser: el bombeo, la emisión espontánea de radiación, la emisión estimulada de radiación y la absorción:

*Bombeo:* Se realiza mediante una fuente de radiación (una lámpara). El paso de una corriente eléctrica o el uso de cualquier otro tipo de fuente energética que dan lugar a la transición energética de los electrones de los átomos o moléculas a un estado de excitación.

*Emisión espontánea de radiación:* Durante este proceso, los electrones vuelven al estado fundamental emitiendo fotones. Es un proceso aleatorio y la radiación resultante está formada por fotones que se desplazan en distintas direcciones y con fases distintas, generándose una radiación monocromática incoherente.

*Emisión estimulada de radiación:* La emisión estimulada, base de la generación de radiación de un láser, se produce cuando un átomo en estado excitado recibe un estímulo externo que lo lleva a emitir fotones y así retornar a un estado de menor energía. El estímulo en cuestión, proviene de la llegada de un fotón con energía similar a la diferencia de energía entre los dos estados. Los fotones así emitidos poseen fase, energía y dirección similares a las del fotón externo que les dio origen. La emisión estimulada es la raíz de muchas de las características de la luz láser. No sólo produce luz coherente y monocroma sino, también, “amplifica” la emisión de luz ya que, por cada fotón que incide sobre un átomo excitado, se genera otro fotón.

*Absorción:* Proceso mediante el cual un átomo o molécula absorbe un fotón. El sistema atómico se excita a un estado de energía más alto, pasando un electrón al estado metaestable. Este fenómeno compete con la emisión estimulada de radiación

La estructura principal de un láser [7,9], consta del medio activo, los espejos que forman el resonador láser y

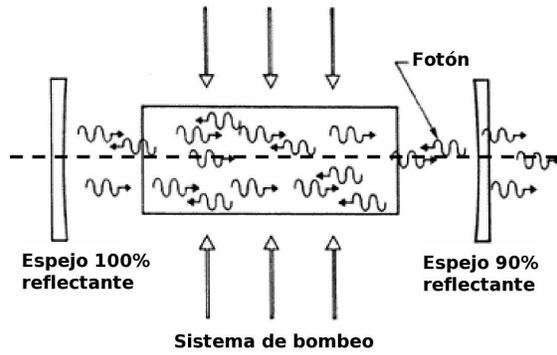


Figura 1. Componentes principales del láser.

el sistema de bombeo. En la fig. 1 se muestra la cavidad amplificadora con un sistema de bombeo y un par de espejos planos (o ligeramente cóncavos) en sus extremos, la línea punteada indica el eje óptico del sistema.

El par de espejos paralelos recibe el nombre de resonador óptico. Uno de los espejos del resonador es casi 100% reflectante y el otro tiene una reflectancia típica de alrededor del 90%.

Para comprender la función del resonador óptico, en la fig. 1 se muestra al oscilador óptico inmediatamente después de que el sistema de bombeo fue disparado. Cualquier fotón que sea emitido en una dirección diferente de la definida por el eje óptico del resonador óptico se perderá, mientras que cualquier fotón emitido a lo largo del eje óptico del oscilador será amplificado por el proceso de emisión estimulada e inmediatamente se generará un enorme flujo de fotones confinados por el resonador óptico que se propaga a lo largo del eje óptico. Si el resonador óptico no estuviera presente, después de disparar el sistema de bombeo, los átomos o moléculas que fueron excitados pasarían a su estado base debido al proceso de emisión espontánea, emitiendo fotones en todas direcciones y perdiendo la energía recibida por el sistema de bombeo.

El resonador óptico permite extraer en forma eficiente la energía que el sistema de bombeo deposita en los átomos o moléculas contenidos en la cavidad amplificadora. Debido a que uno de los espejos del resonador tiene una reflectancia del 90%, el 10% de los fotones que incidan en él son transmitidos fuera del resonador óptico, formando un haz de luz muy intenso, monocromático (formado por fotones de idéntica energía), coherente (todos sus fotones están en fase ya que fueron producidos por el proceso de emisión estimulada) y altamente direccional. Éstas son las propiedades fundamentales de la luz láser generada por todo oscilador óptico.

### 3. DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN YAG:ND<sup>+++</sup> LÁSER

Un láser sólido pulsado del tipo YAG:Nd<sup>+++</sup> consta esquemáticamente de tres partes: El sistema electrónico y de bombeo óptico, la parte opto-mecánica y el sistema de enfriamiento.

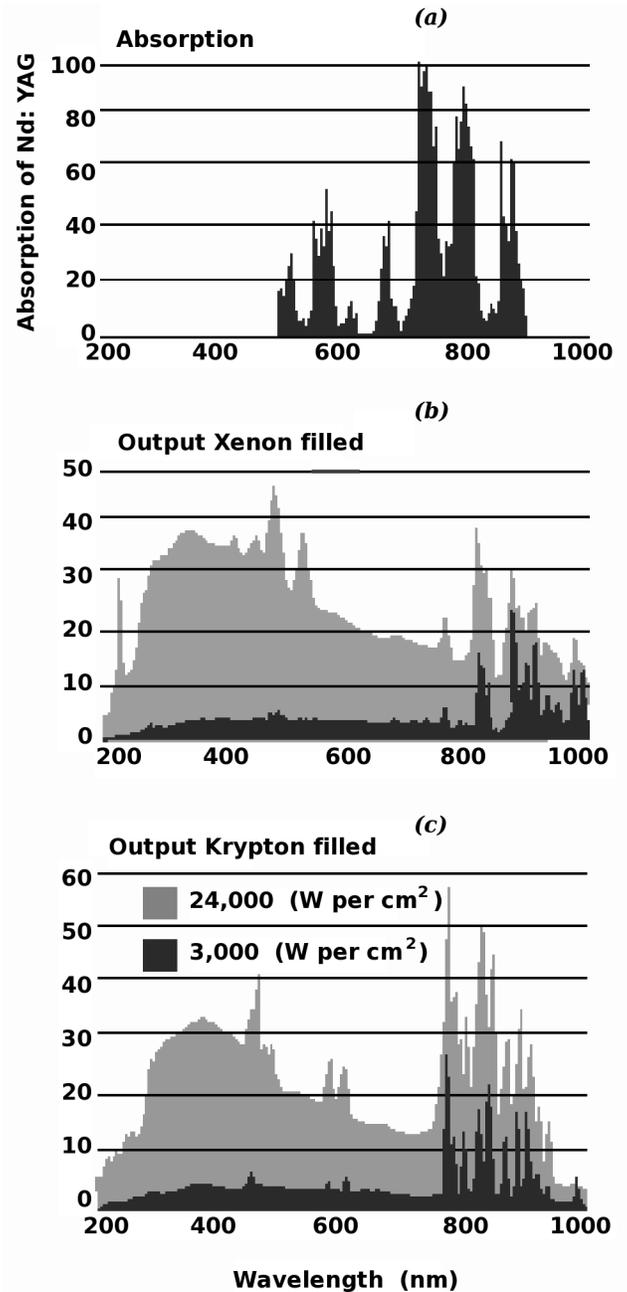


Figura 2. Espectros de absorción del cristal YAG:Nd<sup>+++</sup> (a) y emisión de lámparas *flash* de Xenón (b), Kriptón (c).

La eficiencia de conversión de energía eléctrica en energía óptica de bombeo del medio activo, que a su vez se transforma en energía de emisión láser, es muy baja (del orden del 3-7%), gran parte de la energía eléctrica se convierte en calor y surge la necesidad de incorporar un sistema de enfriamiento del sistema de bombeo óptico y del medio activo.

El bombeo óptico del sistema está compuesto por una lámpara *flash* (medio gaseoso: Xenón). Podrían usarse lámparas *flash* con Kriptón, ya que el espectro de emisión de ambos gases tienen picos muy cercanos a los picos de absorción del cristal YAG:Nd<sup>+++</sup>, fig. 2.

La salida espectral de las lámparas *flash* está deter-

minada especialmente por la densidad de corriente  $i$  que fluye por unidad de área seccional de la lámpara [10],

$$i = \frac{4I}{\pi d^2} \quad (1)$$

donde  $d$  es el diámetro de la lámpara e  $I$  es la corriente que fluye a través de ella. La unidad de la densidad de corriente es Amperio sobre centímetros al cuadrado ( $A\text{ cm}^{-2}$ ).

En una lámpara pulsada, la cantidad de flujo de corriente varía con el tiempo, incrementándose desde cero hasta un máximo y después decreciendo, la salida espectral también varía entonces con el tiempo. La representación gráfica de esta variación es usualmente un ploteo tiempo-integral de la salida de la lámpara. La variación temporal es llamada la relación “ $E_0 : TA$ ”. Las unidades de medición de esta relación son Vatios sobre centímetro al cuadrado ( $W/\text{cm}^2$ ) que es la medida de la densidad de potencia relacionada a la densidad de corriente.  $E_0$  es la energía del pulso en Joules ( $J$ ),  $T$  es el ancho del pulso en segundos ( $s$ ) y  $A$  se refiere a la superficie interna de la lámpara en la región de descarga (aproximadamente  $\pi d L_A$ , donde  $L_A$  es la longitud de arco de la lámpara).

Las líneas espectrales en el infrarrojo cercano son dominantes en bajas densidades de potencia de alrededor de  $2500\text{ W}/\text{cm}^2$ , figs. 2b y 2c. La comparación de la salida espectral de las lámparas de Xenón con las de Kriptón muestra, al analizar las dependencias, que las lámparas de Kriptón son generalmente escogidas para densidades de potencias bajas (magnitudes típicas alrededor de los  $16000\text{ W}/\text{cm}^2$ ). A densidades de potencia mayores a los  $16000\text{ W}/\text{cm}^2$ , las lámparas de Xenón resultan más eficientes como fuentes de bombeo óptico para los cristales del tipo YAG:Nd<sup>+++</sup>, debido a que éstas tienen una mayor eficiencia de conversión a altas densidades de potencia en relación a las de Kriptón.

Respecto a la parte electrónica, en la fig. 3 se muestra el circuito básico electrónico [11] que se usa para disparar la lámpara *flash*. Está conformado por la fuente de alta tensión  $F_{AT}$ , la fuente del *trigger*  $F_T$ , el *trigger*, el sistema de almacenaje de energía eléctrica compuesto por condensadores  $C$  y la lámpara *flash*.

La fuente de alta tensión fue diseñada para dar los siguientes parámetros: Potencia =  $1\text{ kW}$  de potencia y  $400$  voltios en AC, que posteriormente se rectifica a una tensión de  $U = 560\text{ V}$  en DC. La fuente del *trigger* a su vez proporciona una tensión de  $U = 300\text{ V}$ , que a su vez se transforman por el secundario del *trigger* a  $U = 9\text{ kV}$  de pico. Los condensadores fueron agrupados de tal manera que poseen una capacitancia total de  $8400\text{ }\mu\text{f}$  y una tensión de  $U = 500\text{ V}$ .

La energía almacenada en el sistema está dada por la siguiente relación [10]:

$$E = \frac{1}{2} C U^2 \quad (2)$$

A partir de esta relación, se calcula directamente la energía empleada en el sistema y se tiene  $E = 1050\text{ J}$ .

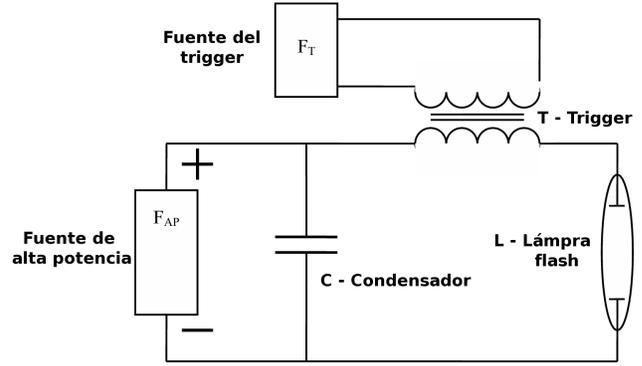


Figura 3. Circuito electrónico básico.

Este valor sugiere que el sistema de bombeo óptico desprende una gran cantidad de calor, de donde surge la necesidad de un sistema de enfriamiento forzado por circulación de un flujo continuo de agua destilada.

El proceso de funcionamiento es el siguiente: La  $F_{AT}$  carga los condensadores hasta su máximo valor en capacitancia y voltaje, esa tensión no es suficiente para que se realice la descarga a través de la lámpara *flash* y es necesario conectar posteriormente el *trigger*, cuya tarea es la de abrir el canal de descarga en la lámpara *flash* introduciendo un voltaje de pico de alrededor de  $9\text{ kV}$ , eso se logra con la fuente  $F_T$  que introduce una tensión de alrededor de  $300\text{ V}$  al primario y el secundario, que tiene calculado un factor de 30, proporciona la tensión necesaria, de esta manera se produce una descarga rápida acompañada de toda la corriente almacenada en los condensadores.

Este proceso requirió el diseño y experimentación de una decena de transformadores de la  $F_{AT}$  y del *trigger*. Se resolvieron varios problemas relacionados con el arranque de la lámpara *flash*, se optimizaron los parámetros de tensión, de voltaje de la  $F_{AT}$  y de voltaje de pico del *trigger*. Uno de los parámetros más importantes del sistema *trigger* es su impedancia que debe ser menor o igual a la impedancia interna de la lámpara *flash*, eso se consiguió incrementando el diámetro del cable de cobre usado en el transformador de la  $F_T$ , obteniendo un valor de  $R = 0,3\text{ }\Omega$ . Este valor de la impedancia asegura que toda la corriente almacenada en los capacitores circule con la menor resistencia posible a través del sistema *trigger*.

Los parámetros de potencia de la fuente de alta tensión no fueron optimizados, para cargar los condensadores a su máxima expresión se necesitaban alrededor de tres minutos.

La parte opto-mecánica fue realizada según la descripción realizada en la parte 2 de este artículo. Para la construcción del resonador óptico se usaron dos espejos dieléctricos planos, de reflectancias  $R_1 = 99,9\%$  y  $R_2 = 20\%$  para la longitud de onda  $\lambda = 1,064\text{ }\mu\text{m}$ , correspondiente al infrarrojo. El resonador y los montadores ópticos fueron fabricados con material reciclado de aluminio, de mayor facilidad de manejo que metales más

duros como el hierro o acero.

Una de las partes más complejas del sistema optomecánico fue la construcción del *quantron*, el elemento que envuelve la lámpara *flash* y el medio activo. En su interior se encuentra una pieza de vidrio sólido con una película reflectante metálica que permite usar al máximo y de manera más efectiva el bombeo óptico producido por la lámpara. Este elemento es hermético ya que en su interior circula el agua destilada que permite controlar la temperatura de los elementos ópticos.

El sistema de enfriamiento consta de una bomba de agua de mediana potencia, que sirve para hacer circular al agua destilada en el *quantron* y un sistema de sensores de temperatura que dispara automáticamente los ventiladores del sistema de disipación cuando el líquido excede la temperatura de  $T = 25^{\circ}C$ .

Una vez reunidos todos los componentes esenciales y producida la generación láser, a una longitud de onda  $\lambda = 1,064 \mu m$ , correspondiente al infrarrojo (denominada armónica principal), se introdujo un cristal a la salida del resonador óptico ( $LiNbO_3$ ), el cual tiene la propiedad de doblar la frecuencia de la luz láser emitida, obteniendo radiación en el diapasón visible  $\lambda = 0,532 \mu m$ , (denominada segunda harmónica del láser).

#### 4. CONCLUSIONES

En fecha 09.02.2007 fue arrancado por primera vez un prototipo funcional (láser sólido pulsado del tipo YAG:Nd<sup>+++</sup>), diseñado y construido completamente en Bolivia, el cual puede trabajar en las longitudes de onda de  $\lambda = 1,064 \mu m$  y  $\lambda = 0,532 \mu m$ .

Todo el proceso de desarrollo y construcción del prototipo fueron realizados de forma prácticamente artesanal, con costos inferiores en un factor de por lo menos 2,5 respecto a los costos de construcción de equipos análogos europeos y americanos.

#### 5. AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento a mi señor padre, Ing. Carlos Ormachea Prieto, por su dedicación y ayuda en los principales esquemas electrónicos, el diseño y montaje de la parte mecánica. También quiero agradecer a Iván Rivero (estudiante de Ingeniería eléctrica de la UMSA) por su colaboración en la construcción de las fuentes de poder del láser y del *trigger*.

#### REFERENCIAS

- [1] Einstein A., Zs. Phys., 18, 21 (1917).
- [2] Maiman T.H., Phys. Rev. Letters, 4, 564 (1960).
- [3] Maiman T.H., Phys. Rev., 123, 1145 (1961).
- [4] Sorokin P.P., Stevenson M.J., Phys. Rev. Letters, 5, 557 (1960).
- [5] Kaiser W., Garret C.G.B., Wood D.L., Phys. Rev. Letters, 123, 766 (1961).
- [6] Snitser E., Phys. Rev. Letters, 7, 444 (1961).
- [7] O. Zvelto, Principles of lasers, Springer, 1988.
- [8] L.V. Tarasov, Fisica de los procesos en los generadores de emisión óptica coherente, MIR, 1981., en ruso.
- [9] F. Kaczmarek, Introducción a la física de laseres, MIR, 1981., en ruso.
- [10] <http://www.heraeus-noblelight.com/en/laser-lamps/>... (The lamp book - technical reference book for arc and flash lamp).
- [11] J.T. Verdeyen, Laser electronics, PH, 1995.

## ESTUDIO DE DOS CIRCUITOS CAÓTICOS

G. Conde S., G. M. Ramírez A.

*Carrera de Física—U.M.S.A.  
La Paz—Bolivia*

### RESUMEN

Se describe el proceso para caracterizar numéricamente un circuito autónomo tipo Chua (compuesto por dos capacitores, una bobina, una resistencia y el diodo de Chua), seguido de una verificación experimental y una comparación cualitativa con un circuito no autónomo R-L-diodo. Manteniendo el parámetro de control  $\alpha = C_2/C_1$  fijo y aumentando los valores de  $\beta = R^2C_2/L$  y  $\gamma = Rr_0C_2/L$ , según el modelo de Chua, el sistema presenta estados en el siguiente orden: divergencia (inestabilidad), caos (con ventanas periódicas) y finalmente periodicidad con tendencia a un punto fijo. En el laboratorio, el comportamiento es similar, sólo que en vez de divergencia se tiene un ciclo límite de primer orden, luego la región caótica a veces contiene ventanas periódicas y finalmente se presentan ciclos límite de segundo y primer orden terminando en un punto fijo. Experimentalmente, el parámetro de control fue la resistencia y los componentes más importantes para obtener caos fueron:  $C_1 = 10$  pF y  $L=1$  mH ( $r_0 = 21.4 \Omega$ );  $C_2$  podía tomar valores desde 1.5 nF hasta 47 nF, y  $R$  desde  $0 \Omega$  hasta 2 k $\Omega$ . A pesar de no haberse obtenido la correspondencia esperada entre resultados experimentales y numéricos, se obtuvo el mismo comportamiento y atractores extraños característicos del sistema. Por otro lado, se trabajó con un circuito no autónomo compuesto por  $R = 51.2 \Omega$ ,  $L=470 \mu\text{H}$  y un diodo normal. Este sistema presentó desdoblamiento de periodo y ventanas periódicas. Los parámetros de control fueron: la amplitud del voltaje y la frecuencia de la fuente, con ellas se calculó la primera constante de Feigenbaum. Para la segunda constante, se encontró mayor dificultad debido a la precisión con la que fueron medidos los valores del voltaje en el diodo. Se concluye que los atractores de ambos circuitos dependen de la forma de la función característica del elemento no lineal y presentan bifurcaciones según la variación de la amplitud a una frecuencia crítica. Un estudio más completo puede realizarse utilizando una interfase y analizando el espectro de potencias de las señales de ambos circuitos, además de implementar un modelo teórico en el último. Se ha visto que estos circuitos son de fácil construcción de modo que pueden ser introducidos como herramientas didácticas para el estudio de fenómenos no lineales.

*Descriptor:* Circuitos Electrónicos, Caos, Atractores Extraños.

### 1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los fenómenos no lineales en nuestro medio ha tomado un aspecto teórico en su mayoría, y poco a poco ha crecido el interés por servirse de sus herramientas y aplicarlas en una variedad de áreas. En especial, los atractores extraños son considerados como abstracciones que solamente se observan en libros o en simulaciones y el caos, da la impresión de presentarse solamente en sistemas muy grandes como los sociales o biológicos. Sin embargo, estos fenómenos pueden observarse en sistemas de fácil construcción y manejo. Una forma de llegar a este propósito es mediante la electrónica, que desde principios del siglo pasado, ha reportado circuitos con comportamientos “inusuales” y desde entonces se han realizado varios estudios rigurosos e investigaciones, desarrollándose aplicaciones en la tecnología de comunicaciones y proponiéndose nuevas aplicaciones incluso en la medicina. Existen varios circuitos electrónicos que al

contener un elemento no lineal presentan comportamientos irregulares, uno de ellos es el circuito autónomo tipo Chua, planteado por el ingeniero electrónico chino León Chua en 1971. Si bien fue planteado en ese año, la primera evidencia de caos en este circuito fue en 1983 por simulación, realizado por T. Matsumoto [1] y la primera evidencia experimental de caos fue realizado por Zhong y Ayron en 1984 [2], posteriormente, se presentó un trabajo con pruebas rigurosas de la familia entera de atractores caóticos de este circuito [3]. Finalmente, el circuito ha formado parte de la base para investigaciones en sincronización caótica y otras variedades incluyendo aplicaciones en la encriptación de señales [4], [5], [6].

Por otra parte, un circuito RLC con un capacitor variable como elemento no lineal y una fuente de voltaje sinusoidal fue descrito por Paul Linsay en 1981, encontrando que el sistema experimental daba resultados concordantes con la teoría de sistemas no lineales [7].

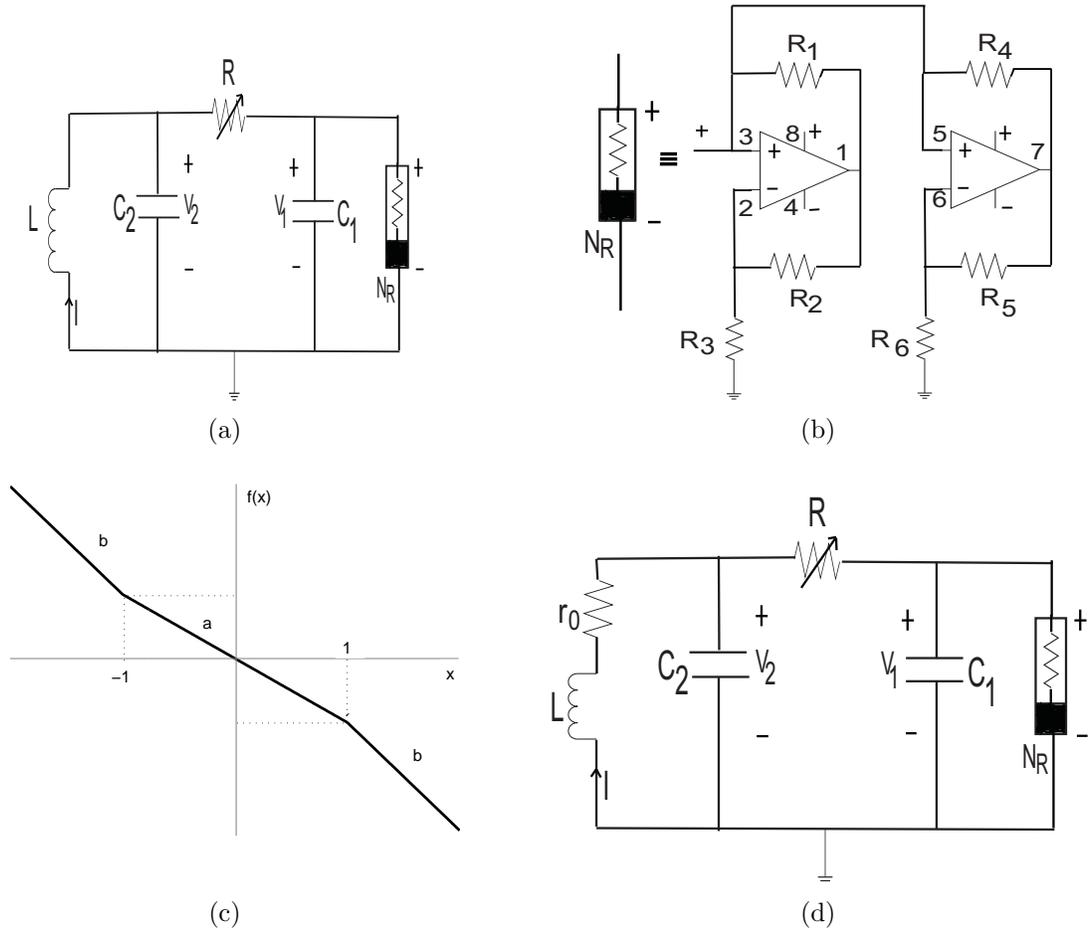


Figura 1. (a) El circuito de Chua con dos parámetros:  $\alpha = C_2/C_1$ ,  $\beta = R^2C_2/L$ . (b) El diodo de Chua compuesto de dos amplificadores operacionales y resistencias  $R_1 = R_2 = 220 \Omega$ ,  $R_3 = 1.8 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = R_5 = 22 \text{ k}\Omega$ ,  $R_6 = 3.3 \text{ k}\Omega$ . (c) Función característica adimensional del diodo de Chua con pendientes  $a = -1.22$  y  $b = -0.728$ . (d) El circuito de Chua considerando la resistencia interna de la bobina tiene tres parámetros:  $\alpha = C_2/C_1$ ,  $\beta = R^2C_2/L$ ,  $\gamma = r_0RC_2/L$ .

Desde entonces se realizaron modificaciones y estudios de este sistema, buscando las verdaderas causas de la no linealidad, mas aplicaciones específicas aún no se han encontrado.

Debido al interés por estudiar y observar fenómenos no lineales como el caos y la ruta que nos lleva hacia él, se pretende caracterizar numéricamente el circuito tipo Chua y realizar observaciones en el osciloscopio a manera de una verificación experimental. Por otro lado, se pretende realizar una comparación cualitativa, con un circuito no autónomo compuesto por una fuente de voltaje alterna, una resistencia, una bobina y un diodo normal.

## 2. EL CIRCUITO TIPO CHUA

Este circuito se caracteriza principalmente por dos aspectos: primero, es autónomo, es decir, no está alimentado por fuentes de corriente alterna y segundo, está compuesto por dos partes: una parte que presenta un comportamiento típico de un oscilador amortiguado (dos condensadores, una resistencia y una bobina) y la otra parte que constituye el único elemento no lineal denominado *diodo de Chua*. Este elemento causante de la no linealidad actúa como la fuente de energía de todo

el circuito, se ocupa de retroalimentarlo y lo mantiene oscilando (ver figura 1a).

El circuito tipo Chua se describe mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$C_1 \frac{dV_1}{dt} = \frac{V_2 - V_1}{R} - f(V_1)$$

$$C_2 \frac{dV_2}{dt} = \frac{V_1 - V_2}{R} + I$$

$$L \frac{dI}{dt} = -V_2, \quad (1)$$

donde la función del diodo de Chua:  $f(V_1) = m_b V_1 + \frac{1}{2}(m_a - m_b)[|V_1 + B| - |V_1 - B|]$  tiene pendientes negativas  $m_a, m_b$  y un punto de ruptura dependiente del voltaje de saturación del amplificador operacional  $B$ . Estas expresiones están en función de los valores de componentes en el circuito del modo siguiente:

$$m_a = -\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_6}, \quad m_b = -\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}, \quad B = \frac{R_5 E_{sat}}{R_5 + R_6}.$$

El diodo de Chua, básicamente, contiene dos amplificadores operacionales con un juego de seis resistencias, el

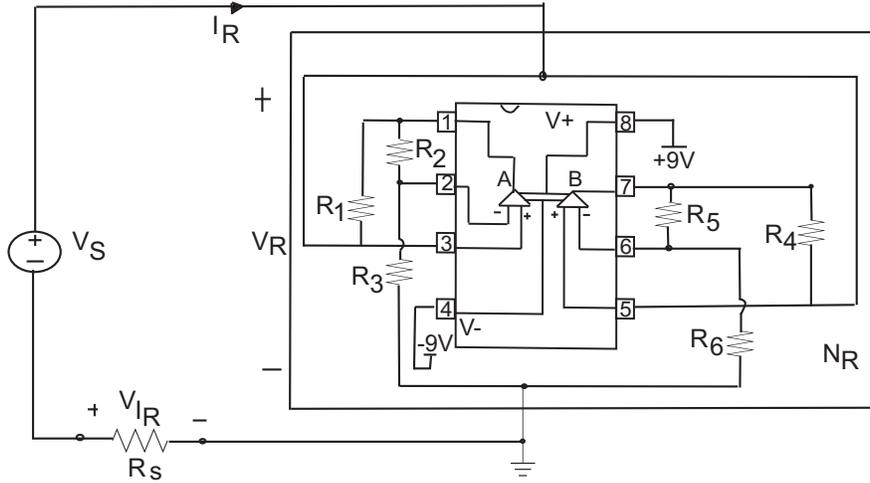


Figura 2. Arreglo experimental para medir la curva característica del diodo de Chua. Se aplica un voltaje  $V_S$  de una función sinusoidal al circuito en serie compuesto por la resistencia sensible  $R_s$  y el diodo  $N_R$ . El TL082 fue alimentado por  $\pm 15$  V.

arreglo se observa en la figura 1b. Los valores adecuados para presentar no linealidad fueron determinados en [8] y son una variación de los valores propuestos inicialmente por J. M. Kennedy [9]. La función  $f(V_1)$  de este diodo se caracteriza por una curva V-I no lineal compuesta por tres rectas con pendiente negativa y un arreglo experimental para su obtención se sugiere en [10].

El modelo de Chua se presenta en forma adimensional introduciendo los términos siguientes:

$$x = \frac{V_1}{B}, y = \frac{V_2}{B}, z = \frac{R}{B}I, a = m_a R, \\ \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{R^2}{L}C_2, \tau = \frac{t}{RC_2}, b = m_b R. \quad (2)$$

Entonces, se tiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales que en principio depende de dos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . Pero, considerando la resistencia intrínseca  $r_0$  de la bobina (ver figura 1d), se introduce un tercer parámetro  $\gamma = \frac{r_0}{L}RC_2$  al sistema de ecuaciones (3).

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y - x - f(x)) \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = -\beta y - \gamma z. \quad (3)$$

La forma adimensional de la función del diodo de Chua es  $f(x) = bx + \frac{1}{2}(a-b)(|x+1| - |x-1|)$ , la cual se muestra en la figura 1c. Se utilizaron los valores sugeridos para  $a = -1,22$  y  $b = -0,728$  [8].

### 2.1. Obtención Experimental de la Función Característica del Diodo de Chua

Se construyó el arreglo experimental que se observa en la Fig. 2 en el que el diodo de Chua compuesto por el amplificador operacional doble TL082 conectado a sus correspondientes seis resistencias:  $R_1 = R_2 = 220 \Omega$ ,

$R_3 = 1.8 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = R_5 = 22 \text{ k}\Omega$ ,  $R_6 = 3.3 \text{ k}\Omega$ , se encuentra en serie con una resistencia sensible  $R_s = 1 \text{ k}\Omega$ . El sistema fue alimentado por el voltaje  $V_S$  de un generador de funciones GFG-8016G y el TL082 por una fuente simétrica de 15 V. Se realizaron pruebas con baterías de 9 V y con fuentes de 12 V y de 10 V, en especial esta última porque inicialmente se había trabajado con ella y se habían encontrado aparentes atractores extraños. Todas las observaciones se realizaron con un osciloscopio digital Jimatsu SS-8421.

La resistencia sensible  $R_s$  fue utilizada para medir la corriente  $I_R$  que fluye por el diodo cuando se aplica un voltaje  $V_R$  a sus terminales. Por comodidad se escogió el valor de  $R_s = 1 \text{ k}\Omega$  pues  $V_{I_R} = -I_R$  e  $I_R$  está dado en [mA].

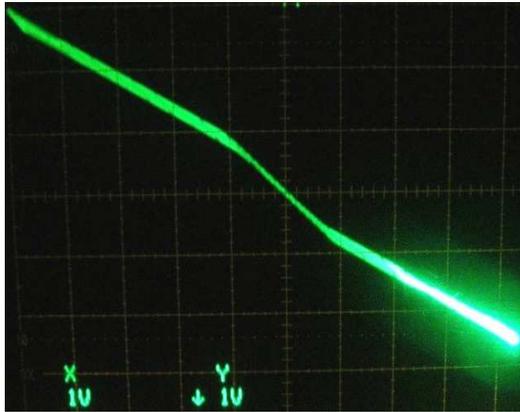
Se obtuvo la curva característica del diodo aplicando el voltaje de fuente  $V_S$ , conectando  $V_{I_R}$  al canal Y del osciloscopio y  $V_R$  al canal X y observando en el modo X-Y. Como sabemos que  $V_{I_R} \propto -I_R$ , entonces, para obtener la curva exacta:  $I_R$  vs.  $V_R$ , se invirtió la entrada de Y.

Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 3 Se observa la curva característica de tres segmentos para 31 Hz de frecuencia, 3.480 V de amplitud de voltaje de la fuente y  $\pm 15$  V de voltaje de alimentación para los amplificadores del diodo. Además, se probó que la fuente de 10 V, tenía mucho ruido, y fue descartada junto con la fuente de 12 V porque también era ruidosa. Al final, se decidió realizar el trabajo experimental con la fuente de 15 V y observar cómo afectaban las baterías de 9 V.

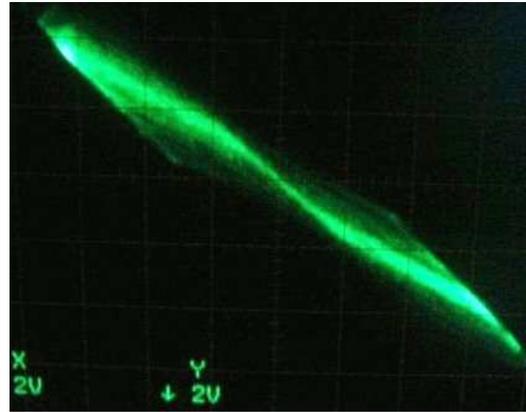
## 3. ESTUDIO CUALITATIVO DEL CIRCUITO

### 3.1. Atractores periódicos y caóticos

El sistema no lineal de Chua, presenta cambios de estado según varíe el conjunto de parámetros  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  y las condiciones iniciales  $\{x_0, y_0, z_0\}$ . A las representaciones gráficas de estos resultados en el espacio de fases las llamamos trayectorias y se pueden tener los siguientes casos:



(a) Fuente de 15 V.



(b) Fuente de 10 V.

Figura 3. Curvas características I vs. V del diodo de Chua. Se observa que la fuente de 10 V es muy ruidosa.

- *Puntos fijos*. Es el caso más sencillo que representa un estado estacionario del sistema. En la serie temporal se presenta una función continua.
- *Ciclos límite*. O puntos periódicos representan un estado oscilatorio del sistema y todas las trayectorias pasan una y otra vez por su propio valor inicial trazando una curva cerrada. En la serie temporal se observa una función periódica.
- *Casi-periodicidades*. Representan la superposición de estados oscilatorios con periodos distintos y el espacio más apropiado para trazar estas trayectorias es el toroide. En la serie temporal se presenta como una función modulada.

Hasta este punto los casos vistos se denominan periodicidades.

- *Atractores Extraños*. Este es otro caso posible que corresponde a estados aperiódicos. Una de las características de un atractor extraño es que en el espacio de fases existe un proceso llamado “stretching and folding” (estirar y doblar), lo que significa que en las trayectorias se produce una especie de estiramiento y luego un plegado sin que ellas se intersecten. Los atractores extraños son las representaciones en el espacio de fases de sistemas caóticos.

De este modo, un sistema podría sufrir cambios de acuerdo a los parámetros que se utilicen. Estos cambios cualitativos se denominan *bifurcaciones* y los puntos donde ocurren estos cambios se denominan *puntos de bifurcación*. Estas bifurcaciones podrían desembocar en comportamientos caóticos, los cuales se definen como comportamientos irregulares de un sistema determinista muy sensible a las condiciones iniciales [11].

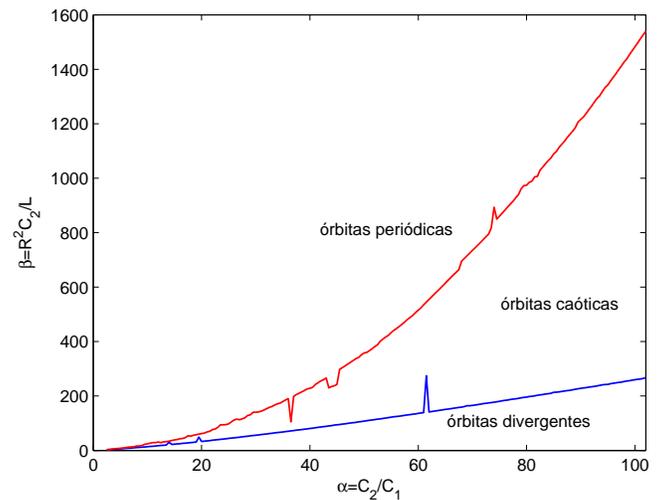


Figura 4. Caracterización del circuito tipo Chua con dos parámetros.

### 3.2. Metodología y Resultados para la Caracterización del Circuito Tipo Chua Considerando Dos Parámetros

Se comenzó resolviendo numéricamente el sistema de Chua mediante un programa en Matlab, en el cual los valores a ser introducidos fueron las condiciones iniciales:  $[x_0, y_0, z_0] = [0.1, 0.15, 0.01]$ , el tiempo de integración:  $t = 1500$ , los valores de las pendientes:  $a = -1,22$ ,  $b = -0,728$  y en principio, los parámetros:  $\alpha$  y  $\beta$ , los cuales son variados.

Se realizó un estudio cualitativo del sistema, esto significa que se observaron las trayectorias en el espacio de fases. Lo primero que se hizo fue elegir un valor de  $\alpha$  y variar el valor de  $\beta$ . De este modo se encontraron los límites de  $\beta$ , observando si la representación en el espacio de fases era un atractor extraño para el  $\alpha$  elegido. Luego,

TABLA 1

Límites caóticos para la caracterización del sistema de Chua con dos parámetros.

$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
2.5	2.6-3	23	39.7-84.8	43.5	89.9-229.8	64	147.6-594.6	84.5	210.1-1074.9
3	3.2-3.9	23.5	40.8-94	44	91.2-235	64.5	149.1-604.4	85	213.7-1089.2
3.5	3.9-4.7	24	42-94.4	44.5	93-237.5	65	150.9-614.8	85.5	214-1098.1
4	4.5-6.5	24.5	42.9-94.6	45	94.1-242.1	65.5	152.1-624.8	86	215.3-1113.3
4.5	5.2-6.9	25	44.2-97.9	45.5	95.4-297.6	66	153.6-634.7	86.5	217-1124.4
5	5.9-8.1	25.5	45.4-105	46	96.8-304.5	66.5	154.9-644.9	87	218.2-1135.6
5.5	6.6-9.2	26	46.4-111.8	46.5	98.1-310.7	67	156.5-654.8	87.5	219.9-1149
6	7.3-10.5	26.5	47.7-114.8	47	99.5-317.6	67.5	158.1-664.2	88	221.2-1161.5
6.5	8.1-12.2	27	48.6-112.8	47.5	100.8-323.9	68	159.3-695	88.5	223.1-1172.9
7	8.8-12.6	27.5	49.9-115.9	48	102.3-330.6	68.5	161-705.1	89	224.9-1186.1
7.5	9.6-13.9	28	51.2-119.6	48.5	103.3-337.5	69	164.2-715	89.5	226.6-1206
8	10.4-16.6	28.5	52.3-128.5	49	105.2-341.6	69.5	164.2-724.6	90	228.1-1215.8
8.5	11.2-16.5	29	53.6-131	49.5	106.2-351.2	70	165.5-734.6	90.5	229.9-1224.9
9	12.1-17.7	29.5	54.8-140.1	50	107.7-358.3	70.5	167-744.5	91	230.6-1237.1
9.5	12.9-22.5	30	55.8-140.4	50.5	109.4-360	71	168.4-754.4	91.5	232.7-1252.1
10	13.7-24	30.5	57.1-141.3	51	110.8-366.9	71.5	170.2-764.4	92	233.8-1264.8
10.5	14.6-26.6	31	58.2-144.1	51.5	112.1-373.8	72	171.9-774.5	92.5	235.5-1279.1
11	15.5-28.7	31.5	59.4-148.4	52	113.6-382.2	72.5	173.4-784.8	93	237.2-1292.6
11.5	16.4-29	32	60.6-153.7	52.5	114.8-388	73	174.8-795	93.5	238.9-1302.5
12	17.3-30.7	32.5	62.2-158	53	116.1-401.8	73.5	176-817.6	94	241.1-1318.4
12.5	18.2-28.9	33	63.1-162	53.5	117.7-409.7	74	177.6-893.7	94.5	242.1-1332.9
13	19.1-31.4	33.5	64.4-166.7	54	119.4-416.8	74.5	179-849.6	95	242.9-1342.9
13.5	20.1-32.6	34	65.5-171	54.5	120.6-423.1	75	180.4-860.6	95.5	245.2-1357.1
14	30.4-34.1	34.5	66.9-173.6	55	122.1-432.7	75.5	182.3-871.5	96	246.8-1370.5
14.5	22-36.5	35	68-179.3	55.5	123.9-441.3	76	184.1-882.6	96.5	248.5-1383.9
15	23-38.7	35.5	69.2-185.5	56	124.9-448	76.5	185.3-893.9	97	249.9-1398.2
15.5	23.9-40.5	36	70.3-190.1	56.5	126-455.7	77	187.1-904.8	97.5	251.3-1412
16	24.9-43	36.5	71.7-195.2	57	127.4-463.7	77.5	188.7-915.9	98	253.4-1426.5
16.5	26-44	37	73-198.7	57.5	129.1-471.9	78	189.9-928.3	98.5	255.1-1438.4
17	27-47.1	37.5	74.3-205.5	58	130.6-481.1	78.5	191.2-939.5	99	256.1-1454.1
17.5	27.9-54	38	75.4-210.2	58.5	131.7-488.6	79	193.3-961	99.5	258.3-1468.1
18	28.9-52.8	38.5	76.7-215.4	59	133.2-496.4	79.5	194.9-972.9	100	259.7-1482.5
18.5	29.9-55.6	39	78.1-220.6	59.5	134.2-506	80	196.1-974	100.5	261.6-1496.5
19	31-58	39.5	79.4-226	60	136.1-515.6	80.5	197.9-985.1	101	262.3-1511.2
19.5	48.9-60	40	80.7-228	60.5	137.8-523.9	81	199.3-989.7	101.5	264.8-1525.5
20	33.1-62	40.5	81.9-231.8	61	138.8-535	81.5	200.9-1005	102	267-1539.9
20.5	34.2-63.6	41	83.3-242.3	61.5	274.3-544.9	82	202.8-1006.5		
21	35.2-67.8	41.5	84.7-248.5	62	141.6-554.9	82.5	204.5-1029.3		
21.5	36.3-70.2	42	86-255.1	62.5	143.2-564.9	83	205.6-1041.1		
22	37.4-76.4	42.5	87.3-260.1	63	144.6-574.7	83.5	207.3-1053		
22.5	38.6-78.9	43	88.6-266.3	63.5	146.2-584.6	84	208.5-1064.1		

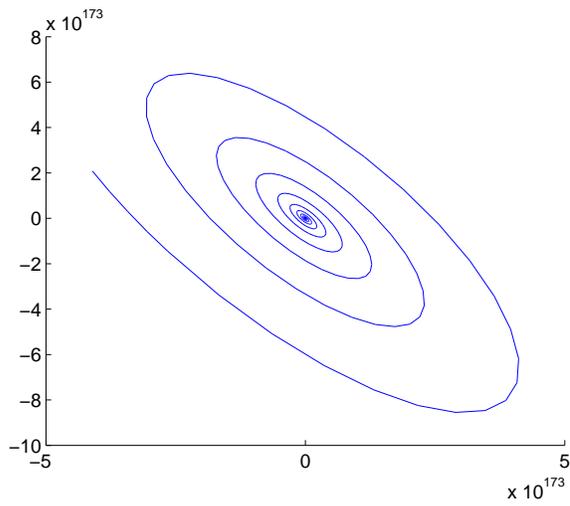
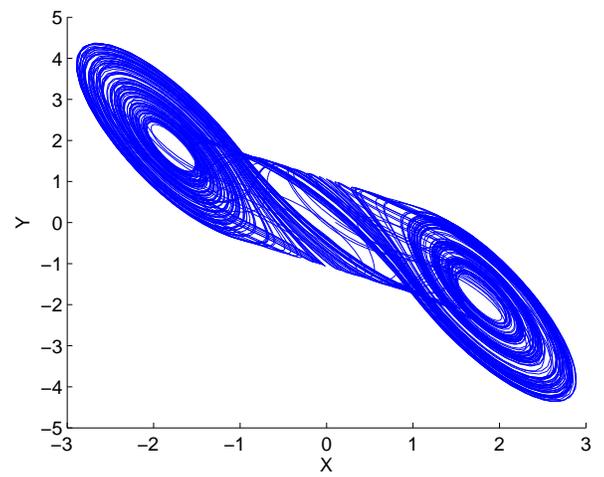
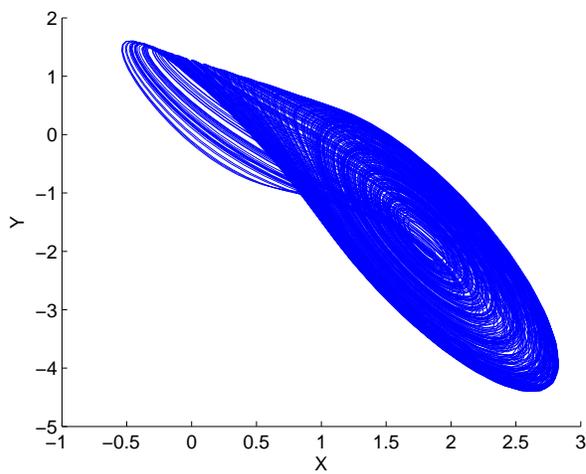
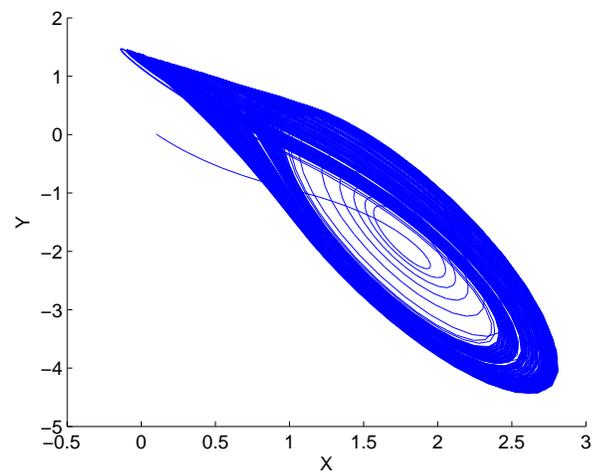
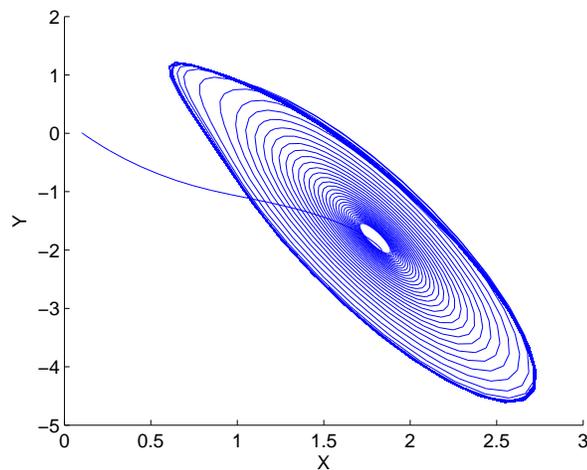
(a) Divergencia hasta  $\beta = 13.6$ (b) Atractor tipo "double scroll" en  $\beta = 16.7$ (c) Atractor tipo "screw" en  $\beta = 18.8$ (d) Atractor tipo "espiral" en  $\beta = 19.5$ (e) Ciclo límite con tendencia a punto fijo en  $\beta = 24.1$ 

Figura 5. Para  $\alpha = 10$ , se tiene la bifurcación según el parámetro  $\beta$ . Dentro la región caótica  $\beta \in [13.7, 24]$  se encuentran variedades de atractores extraños.

TABLA 2

Límites caóticos para la caracterización del sistema de Chua con tres parámetros.

$\alpha$	$\gamma$	$\beta$	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$
5	0.01	5.8-8.4	55	0.01	121.1-289.2
	0.3	4.4-6		1.9	28.7-30.6
10	0.01	13.7-25.8	60	0.01	135.1-348.9
	0.86	6.2-6.6		1.9	34.4-39.3
15	0.01	22.8-38	65	0.01	149.8-452.9
	1	10.1-12.1		1.9	39.4-49.5
20	0.01	33-60.9	70	0.01	164.5-519.7
	1.3	11.1-12.3		2.0	38.3-40.9
25	0.01	43.9-93.4	75	0.01	180-587.7
	1.4	14.6-17.5		2.0	43.6-50.2
30	0.01	55.5-140	80	0.01	195.2-649.9
	1.5	17.6-20.5		2.0	48.5-60.5
35	0.01	67.6-131	85	0.01	210.8-718.4
	1.6	20.2-23.7		2.0	53.9-70.9
40	0.01	80.4-164.3	90	0.01	227.4-790.4
	1.7	22.3-25.2		2.0	58.9-82.9
45	0.01	93.6-203	95	0.01	242-878.7
	1.7	27.5-34.1		2.1	55.6-63.7
50	0.01	107-241.8	100	0.01	259.4-1007.8
	1.8	28.8-33.7		2.1	60.9-73.7

se cambió el valor de  $\alpha$  y se encontró su correspondiente intervalo de  $\beta$ . Para todas las ejecuciones se utilizó el mismo tiempo de integración y las mismas condiciones iniciales.

Con los datos de la tabla 1 se obtuvieron las regiones de caos y periodicidades representadas en la Fig. 4.

Se observó que a partir de  $\alpha = 2.5$ , se encuentran atractores caóticos en un amplio rango de  $\beta$ . Cuando este parámetro aumenta de valor, el sistema en general presenta atractores en el orden siguiente: divergencia en el modelo, lo que implica un estado inestable. Luego, el sistema presenta atractores caóticos, y finalmente atractores periódicos (con tendencia a un punto fijo).

Ha sido interesante notar que también existe un rango de condiciones iniciales para el cual se tiene un atractor. Este rango va creciendo a medida que  $\alpha$  aumenta. La condición inicial para  $x_0$  es la que tenía el rango más amplio, luego  $y_0$  y finalmente  $z_0$  tiene un rango más restringido. Por ejemplo, para  $\alpha = 10$  y  $\beta = 13.7$ , se obtiene un atractor extraño y su rango de condiciones iniciales va desde  $[0.1, 0.15, 0.01]$  hasta  $[1.3, 0.19, 0.01]$ . Quizás esto no es tan sorprendente debido a que es la característica principal de un sistema caótico.

Posteriormente, se observó que la región de caos va creciendo con  $\alpha$  y  $\beta$ . En la tabla 1 se presentan datos hasta  $\alpha = 102$ , esto no significa que ahí termina la región, de hecho el rango continúa creciendo. Sin embargo

determinar los límites hasta este valor fue suficiente para los propósitos de este trabajo.

Es importante mencionar que cada valor límite de  $\beta$  para todo  $\alpha$ , ha sido verificado con el *exponente de Lyapunov*. Como se verá más adelante, el exponente de Lyapunov es una herramienta cuantitativa que ayuda a verificar la presencia de caos en un sistema.

Dentro de la región caótica, existe una variedad de formas de atractores extraños que, en estudios previos, cada uno de ellos ha sido bautizado con algún nombre, como por ejemplo: “double scroll” (Fig. 5(b)), “screw type” (Fig. 5(c)), “spiral” (Fig. 5(d)). Como ya se había mencionado, cuando  $\beta$  aumenta, antes de ingresar a la región caótica, se tiene una divergencia y luego una tendencia a un ciclo límite y finalmente a un punto fijo (ver Figs. 5(a) y (e)). Estas regiones no están determinadas en detalle, esto significa que dentro de la región caótica es posible encontrar ventanas periódicas y dentro de la región periódica es posible encontrar atractores casi-periódicos.

### 3.3. Metodología y Resultados para la Caracterización del Circuito Tipo Chua Considerando Tres Parámetros

Hasta cierto punto los pasos fueron los mismos que en la anterior caracterización.

Se empezó resolviendo numéricamente el sistema de Chua mediante el mismo programa en Matlab, excepto que esta vez se consideró un tercer parámetro  $\gamma$ .

Al principio, el estudio realizado fue cualitativo. Primero, se eligió un  $\alpha$  para que quede fijo, luego se buscó el rango de  $\beta$  para un  $\gamma$  mínimo y lo mismo se buscó para un  $\gamma$  máximo. Luego, se escogió otro valor de  $\alpha$  y se encontraron sus correspondientes intervalos de  $\beta$  y  $\gamma$ . En todos los casos se utilizó el mismo tiempo de integración  $t$ , las mismas condiciones iniciales ( $x_0, y_0, z_0$ ) al igual que las pendientes  $a$  y  $b$ .

La caracterización de la región caótica, se presenta en la tabla 2, en el cual se observan los valores límites de  $\beta$  para el máximo y mínimo valor de  $\gamma$  correspondiente a cada valor de  $\alpha$ . La región caótica delimitada por los tres parámetros se muestra en la Fig. 6, en ella, se tiene el plano  $\alpha$ - $\beta$  para el  $\gamma$  mínimo, en el cual se observa que la región caótica crece proporcionalmente, tal como lo que se obtuvo en la Fig. 4. Para el  $\gamma$  máximo, la región caótica también aumenta, pero es mucho más angosta. En el plano  $\alpha$ - $\gamma$  se observa también un aumento proporcional de la región caótica. Cuando el parámetro  $\gamma$  toma valores como por ejemplo: 0.01, para  $\alpha = 100$ , el intervalo de  $\beta$  es más amplio:  $[259.4, 1007.8]$  que para un valor mayor, por ejemplo:  $\gamma = 2.1$ , en el que el intervalo de  $\beta$  es más angosto:  $[60.9, 73.7]$ . Esto se observa en el plano  $\gamma$ - $\beta$ .

## 4. ESTUDIO CUANTITATIVO DEL CIRCUITO

### 4.1. El Exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov es una herramienta muy útil para determinar si un sistema dinámico es o no caótico.

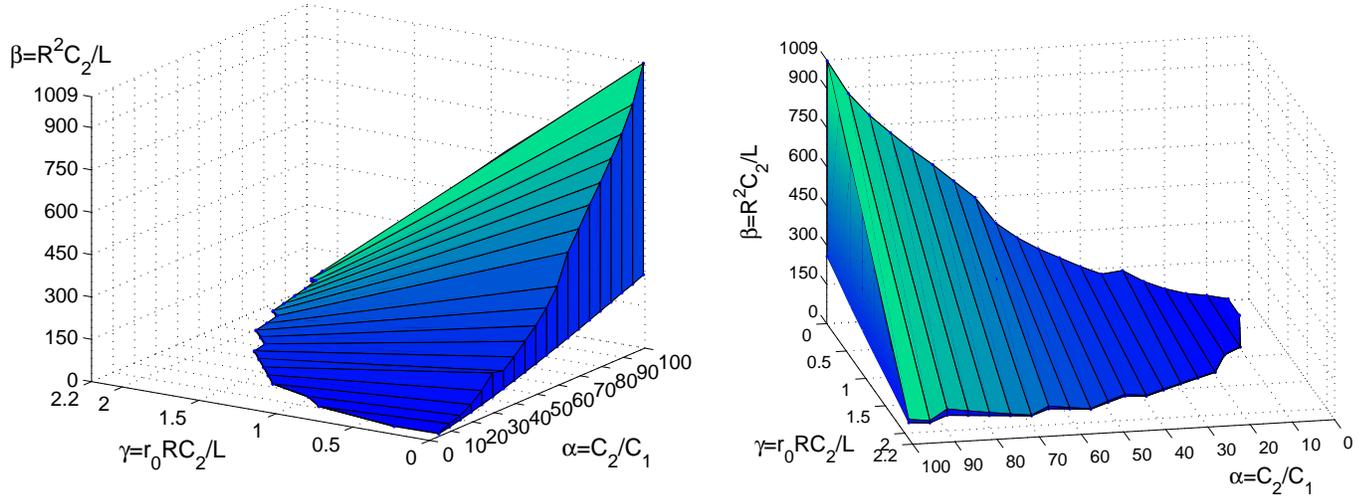


Figura 6. Caracterización del circuito tipo Chua con tres parámetros. Se muestran dos vistas de la región caótica. Esta región podría contener huecos debido a las ventanas periódicas.

Si al sistema de Chua se le asigna una condición inicial  $[x(0), y(0), z(0)]$ , la integración numérica proporciona una serie temporal para cada una de las coordenadas. Si la misma condición inicial es modificada ligeramente, entonces se tiene una serie temporal que al principio recorre la misma trayectoria anterior pero después de un tiempo ésta se va separando exponencialmente. Este fenómeno es una característica de un sistema caótico ya que el comportamiento de las trayectorias depende de las condiciones iniciales y precisamente explica porqué estos sistemas son difíciles de predecir a largo plazo (ver Fig. 7).

El exponente de Lyapunov se representa por  $\lambda$  y es una cuantificación del crecimiento exponencial de la distancia entre dos puntos de dos series temporales con condiciones iniciales ligeramente distintas de un sistema dinámico determinista. El número de exponentes de Lyapunov depende del número de variables de estado que tiene el sistema. Pero basta con determinar uno de ellos.

Observando la figura 7, se considera un punto cualquiera  $x_t$  en el momento  $t$ , el cual es perturbado una distancia  $\varepsilon_t$  y se obtiene otro punto  $x_t + \varepsilon_t$ . En los sistemas caóticos la perturbación crece exponencialmente  $|\varepsilon_t| \approx |\varepsilon_0|e^{\lambda t}$ , lo que es equivalente a  $\ln \frac{|\varepsilon_t|}{|\varepsilon_0|} \approx \lambda t$  y la perturbación en el instante  $t = 0$  es siempre muy pequeña. Finalmente, el exponente de Lyapunov está definido por:

$$\lambda \approx \frac{1}{t} \ln \frac{|\varepsilon_t|}{|\varepsilon_0|}. \quad (4)$$

Como las trayectorias van separándose con el tiempo, el exponente de Lyapunov debe cumplir con la condición de ser positivo  $\lambda > 0$ . Además, si se grafica:

$$t \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{|\varepsilon_t|}{|\varepsilon_0|} \quad (5)$$

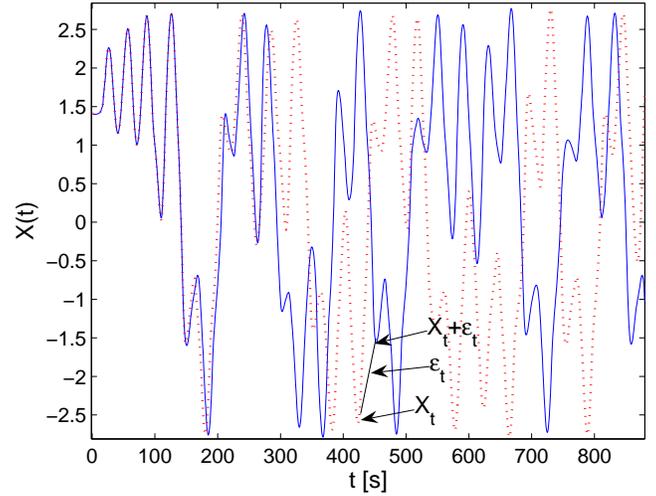
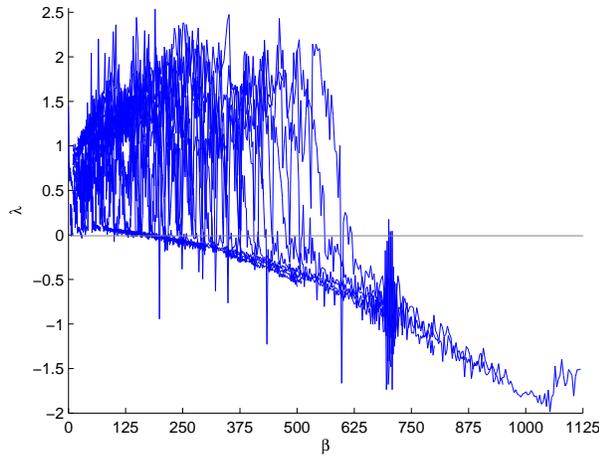
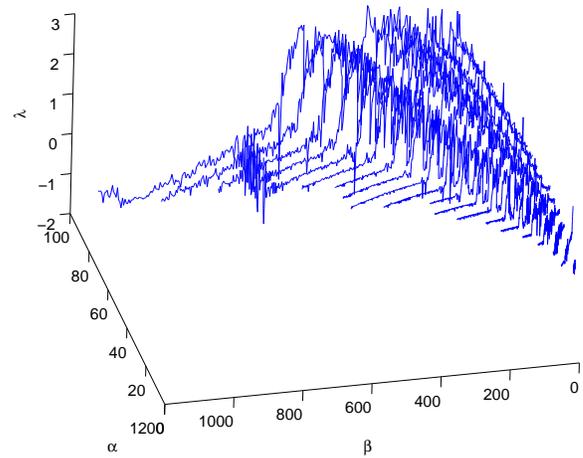
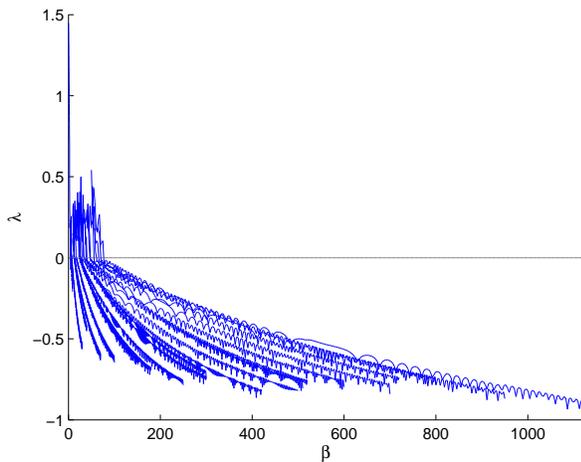
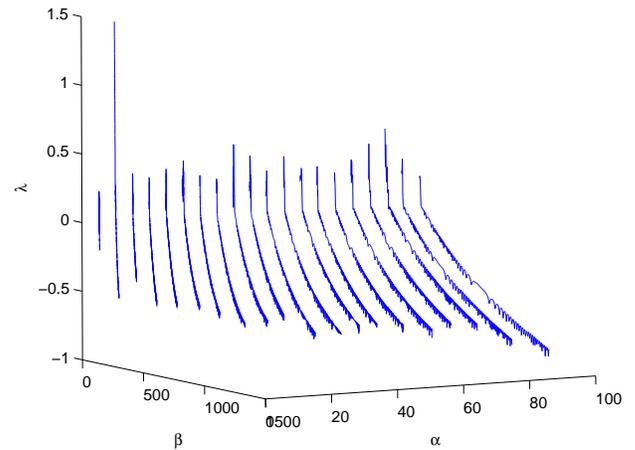


Figura 7. Sensibilidad a las condiciones iniciales en el sistema de Chua con  $\alpha = 100$ ,  $\beta = 418$ . La serie temporal sólida tiene una condición inicial (1.4,0.19,0.01) y la punteada (1.41,0.19,0.01).

considerando el tiempo  $t$  y el  $\ln \frac{|\varepsilon_t|}{|\varepsilon_0|}$  se tiene una curva cuya pendiente es positiva.

En general, el exponente de Lyapunov puede calcularse numéricamente con la rutina computacional *Lyapunov* que corresponde al software TISEAN [12]. El resultado de esta rutina es un conjunto de datos que vienen a ser los logaritmos naturales, por lo tanto, estos deben ser graficados y ajustados a una recta para obtener la pendiente  $\lambda$ .

Como el sistema tiene tres variables, existen también tres exponentes, pero sólo basta con que un de ellos sea positivo para considerar una región como caótica. Sin embargo, para tener una información más completa sobre las periodicidades, es importante tener en cuenta el resto de los exponentes.

(a) Exponente de Lyapunov vs.  $\beta$ .(b) Exponente de Lyapunov vs.  $\alpha$  y  $\beta$ .Figura 8. Espectros de Lyapunov para  $\gamma$  mínimo, la región caótica es amplia. Caos se encuentra cuando  $\lambda > 0$ .(a) Exponente de Lyapunov vs.  $\beta$ .(b) Exponente de Lyapunov vs.  $\alpha$  y  $\beta$ .Figura 9. Espectros de Lyapunov para  $\gamma$  máximo, la región caótica es angosta.

#### 4.2. Metodología y Resultados Para Obtener el Exponente y el Espectro de Lyapunov

Para comprobar las regiones caóticas del sistema de Chua considerando dos parámetros, se guardaron los datos proporcionados por la integración numérica para un  $\alpha$  y un  $\beta$  (ya sea el mínimo o el máximo) en un archivo \*.dat y se consideró solamente el 80% de estos datos con el fin de descartar los transientes.

A continuación, se introdujo el archivo \*.dat en la rutina (*Lyap-k*) del software TISEAN y se hizo correr según las instrucciones que se indican en la bibliografía [12].

Se graficó el nuevo archivo de datos que proporciona *Lyap-k*, se obtuvo la pendiente de la curva y se verificó que los exponentes eran positivos.

Considerando el tercer parámetro, se prosiguió de la misma manera que en la anterior caracterización y se comprobó que el exponente era positivo en cada límite.

Además, se obtuvo el espectro de Lyapunov, esta vez se utilizó una rutina que proporcionaba todos los exponentes de Lyapunov para varios valores de  $\beta$ . Es decir, para un  $\alpha$  y un  $\gamma$  (ya sea mínimo o máximo), se hizo correr el valor de  $\beta$  en pasos pequeños, luego se tomó cada serie temporal de la variable  $X$  y para cada una de ellas se calculó el exponente de Lyapunov utilizando la ecuación (4).

Este procedimiento se ha realizado para todos los valores de  $\alpha$  que varía en pasos de 5 a partir de 5 hasta 100.

Estos espectros dan una idea más general de la región caótica y sirven para corroborar los resultados de la caracterización con dos parámetros.

Se encontró el espectro de Lyapunov respecto de  $\alpha$  y  $\beta$  para el  $\gamma$  mínimo y para el  $\gamma$  máximo. Se observa que para el  $\gamma$  mínimo, el espectro informa que existen regiones caóticas para todo valor de  $\alpha$  y una amplia región de

TABLA 3

Para las figuras (a)-(j) se tienen los datos de los componentes con los cuales se obtuvieron los atractores en laboratorio y los correspondientes valores de parámetros para el modelo. Para las figuras (1)-(10) se tienen los valores de los parámetros más adecuados para obtener los mismos atractores con el modelo.

Fig.	Atractor	$C_2$ [nF]	R [ $\Omega$ ]	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$		Fig.	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
a	Ciclo límite primer orden	1.5	1200	150	2.16	0.0434		1	150	2.16	0.053
b	Caótico no fractal	1.5	1325	150	2.63	0.0479		2	2.7	2.7	0.038
c	Doble hélice	1.5	1377	150	2.84	0.0498		3	2.7	2.8	0.01
d	Ventana periódica 2-2	1.5	1388	150	2.88	0.0502		4	2.7	2.9	0.01
e	Transición de la ventana al caos	1.5	1392	150	2.90	0.0503		5	2.7	2.9	0.02
f	Ventana periódica 3-3	1.5	1424	150	3.04	0.0515		6	2.7	3.0	0.01
g	Espiral	1.5	1487	150	3.31	0.0538		7	2.7	3.1	0.05
h	Doble hélice	2.7	1562	270	6.58	0.1016		8	10	17	0.08
i	Doble gancho	6.8	1568	680	16.71	0.2570		9	10	14	0.01
j	Doble hélice	47	1364	4700	87.44	1.5450		10	50	54	1.63

$\beta$ , con varias ventanas periódicas. Para este  $\gamma$ , se tiene el espectro de Lyapunov con respecto a  $\beta$  (ver Fig. 8(a)), en él se observa una región caótica para  $\beta \in [0, 725]$ , con ventanas periódicas en varios puntos, y el paso a la periodicidad a partir de  $\beta = 726$ . Luego, el espectro de Lyapunov con respecto a los dos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  se presenta en la figura 8(b), en la cual se tiene una región caótica ya a partir de  $\alpha = 0$ , y lo mismo para  $\beta = 0$ , posteriormente, cuando  $\alpha = 30$ , comienzan a aparecer las ventanas periódicas y a partir de  $\beta = 200$ , sucede lo mismo. La región caótica va creciendo a medida que  $\alpha$  y  $\beta$  aumentan. Este resultado va en aceptable concordancia con las regiones de la figura 6 y de igual modo con la figura 4.

En cambio, para el  $\gamma$  máximo, el espectro indica que las regiones caóticas se tienen para todo valor de  $\alpha$  pero con regiones muy angostas de  $\beta$  (ver Fig. 9(a)). Esto implica que cuando  $\gamma$  va llegando a su máximo valor y  $\beta$  toma valores grandes, entonces la tendencia del sistema es hacia la periodicidad. Una vista global se observa en la Fig. 9(b).

Estos espectros ayudan a completar la información obtenida para el sistema con dos parámetros, además el espectro del exponente de Lyapunov nos da una información global del comportamiento del sistema cuando sus parámetros varían.

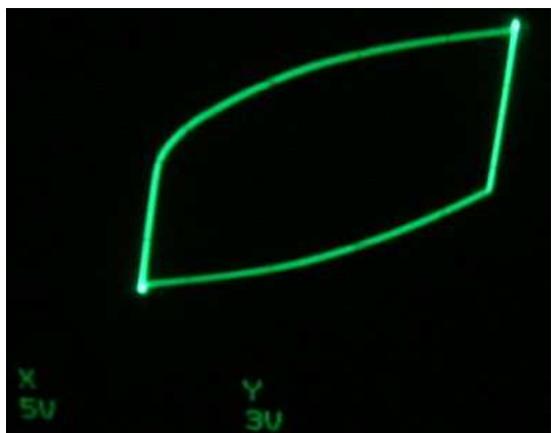
Experimentalmente, se observó que cuando  $\alpha = 150$  se formaban variedades de atractores con una región caótica amplia y con ventanas periódicas, en cambio para  $\alpha = 4700$  se obtuvo menor variedad de atractores y no fue posible observar ventanas periódicas. Al aumentar el valor del potenciómetro,  $\gamma$  y  $\beta$  también aumentan, por lo tanto, sí fue posible observar que el sistema tendía a ciclos límite y puntos fijos cuando la resistencia llegaba a los 2 k $\Omega$ , tal cual describe el espectro de Lyapunov para el  $\gamma$  máximo.

## 5. ALGUNAS OBSERVACIONES EXPERIMENTALES

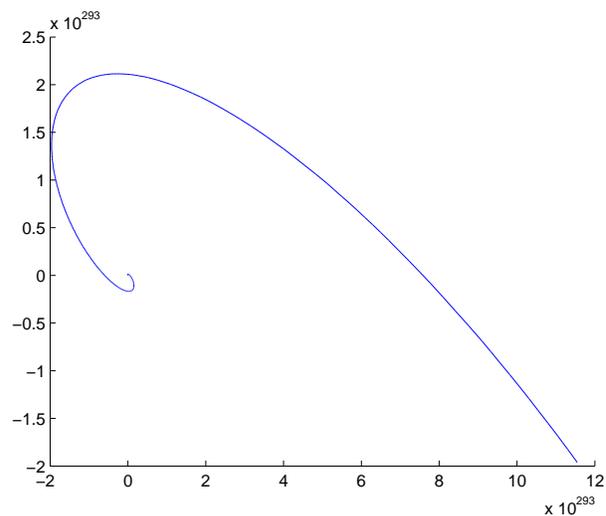
Experimentalmente, los siguientes componentes:  $C_1 = 10$  pF y  $L=1$  mH ( $r_0 = 24.1 \Omega$ ) fueron las piezas clave para encontrar caos.  $C_2$  pudo adquirir valores desde los 1.5 nF hasta los 47 nF y R desde 0  $\Omega$  hasta los 2 k $\Omega$ . A continuación se presentan algunos resultados experimentales y sus parámetros adimensionales equivalentes en la tabla 3. En el mismo, se muestran los valores de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  más adecuados y que introducidos en el modelo se obtuvieron los mismos atractores del laboratorio. Se observa que no existe una coincidencia entre los parámetros del modelo con los del laboratorio, por ejemplo: según el modelo, para  $\alpha = 150$ , la región caótica comenzaba recién en  $\beta = 435$  y  $\gamma = 0.01$ . Para  $\alpha = 270$ , se tenía caos a partir de  $\beta = 898$  y  $\gamma = 0.01$ , para  $\alpha = 680$ , el caos empezaba a partir de  $\beta = 2781$  y  $\gamma = 0.01$ . Mayor concordancia se obtuvo en los valores experimentales y numéricos de  $\gamma$ , un tanto de  $\beta$  y mayores problemas se obtuvieron en los valores de  $\alpha$ . A pesar de no haber obtenido la correspondencia esperada entre resultados experimentales con la tabla de caracterización numérica, se obtuvieron los atractores característicos del sistema, entre los cuales están el atractor de doble hélice, el atractor espiral, el atractor de doble gancho, ventanas periódicas 2-2, 3-3 y ciclos límite de primer y segundo orden (ver Figs. 10—13). Es importante mencionar que en el modelo, se mantuvieron constantes  $a$  y  $b$ , las cuales dependen de la resistencia. Por lo tanto, según el modelo lo que variaba al cambiar  $\beta$  y  $\gamma$  era en realidad la inductancia. Sin embargo, en el experimento, el componente variable fue la resistencia puesto que una inductancia variable es más difícil de conseguir. Al parecer, este detalle influye en la concordancia entre resultados experimentales y numéricos.

## 6. ESTUDIO DEL CIRCUITO RL-DIODO

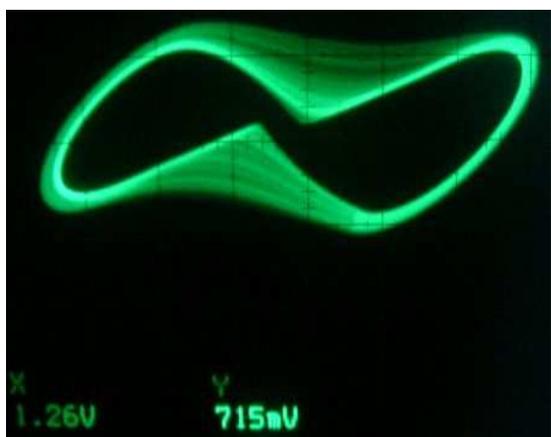
En general, se dice que para observar comportamientos caóticos, es necesario que el sistema sea de tercer



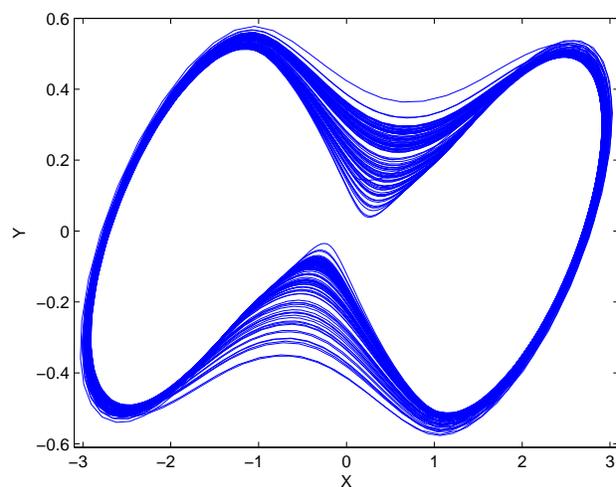
(a)



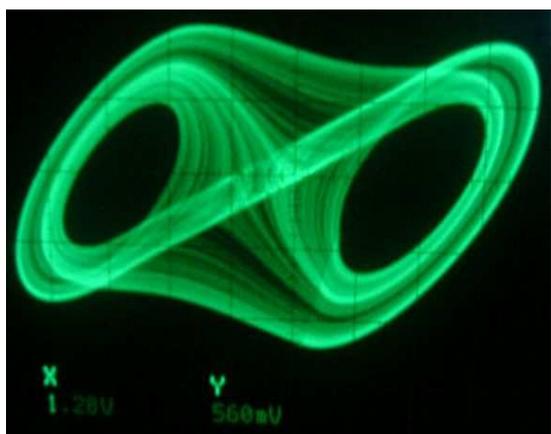
(1)



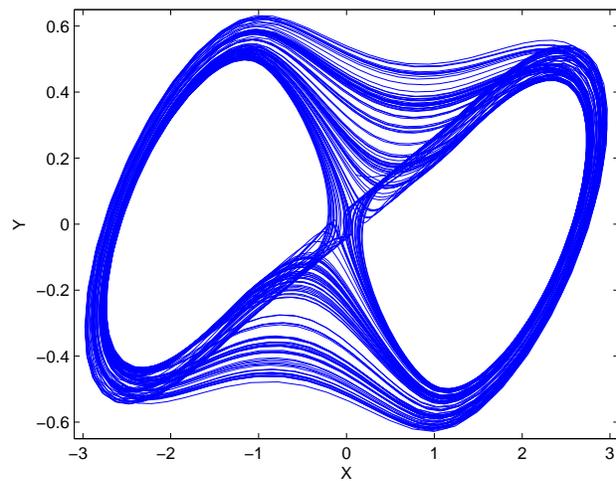
(b)



(2)

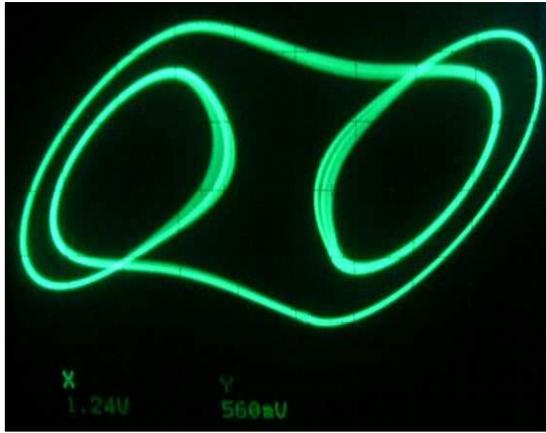


(c)

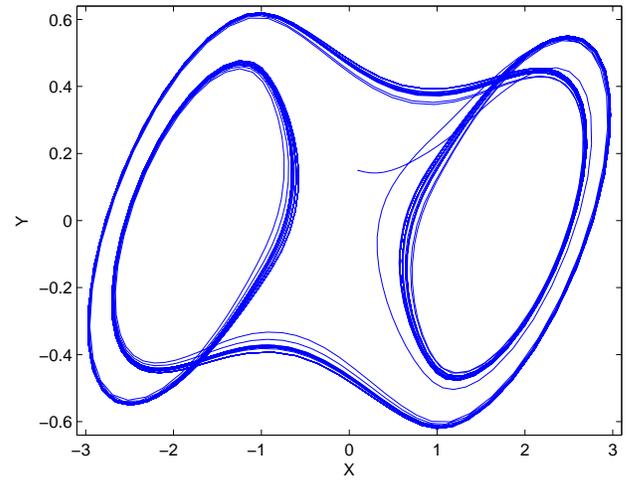


(3)

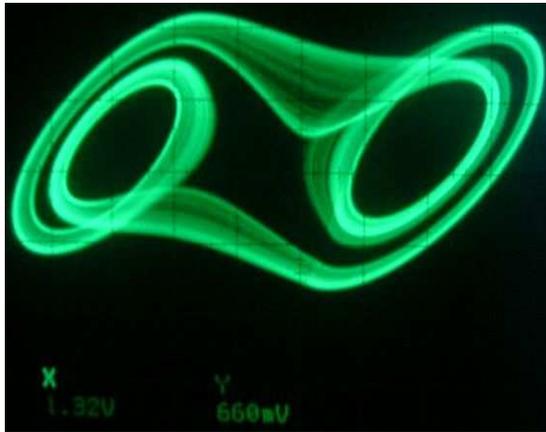
Figura 10. Las imágenes (a)-(c) corresponden a los atractores obtenidos en laboratorio y las imágenes (1)-(3) corresponden a los obtenidos con el modelo. X y Y se miden en voltios en laboratorio.



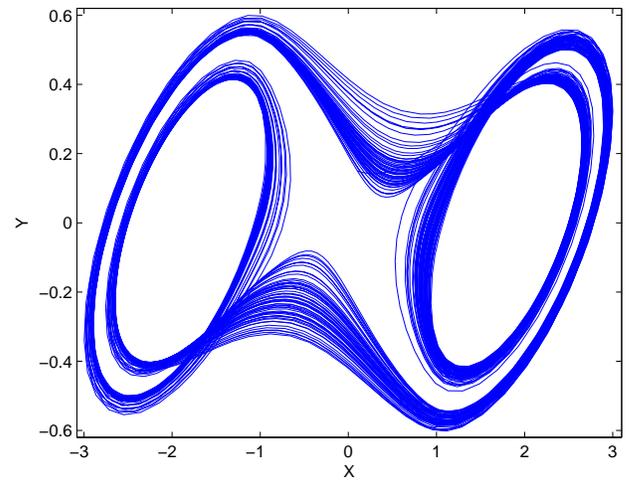
(d)



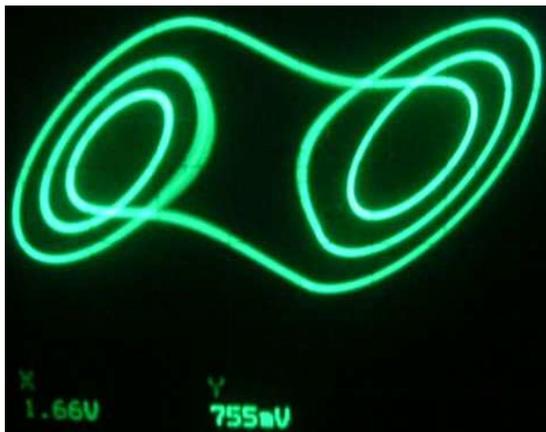
(4)



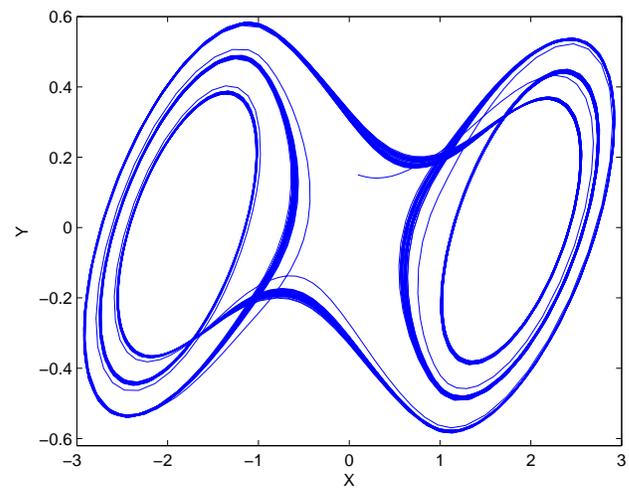
(e)



(5)

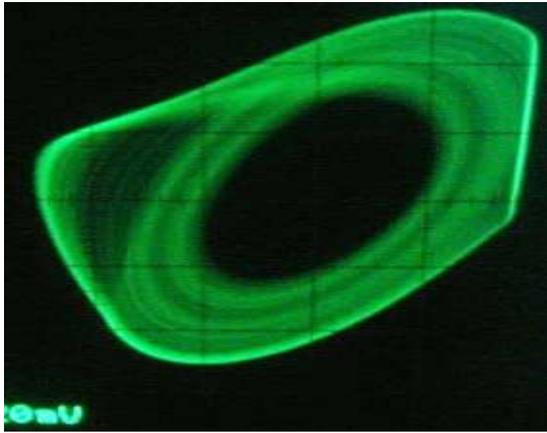


(f)

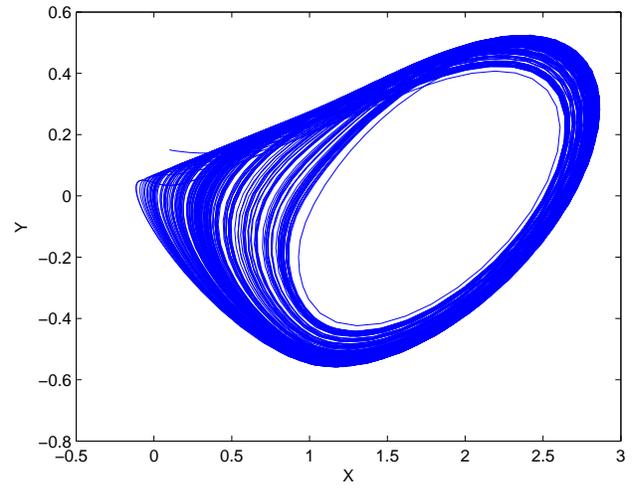


(6)

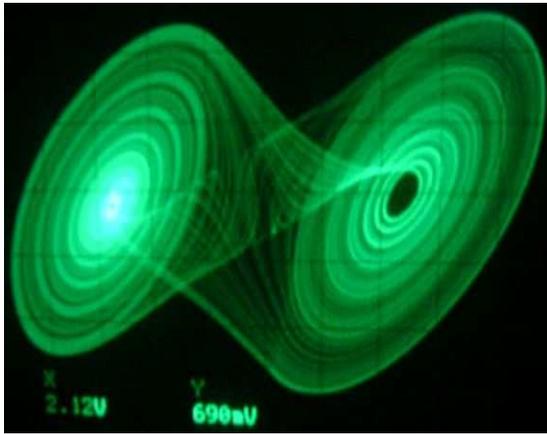
Figura 11. Las imágenes (d)-(f) corresponden a los atractores obtenidos en laboratorio y las imágenes (4)-(6) corresponden a los obtenidos con el modelo. X y Y se miden en voltios en laboratorio.



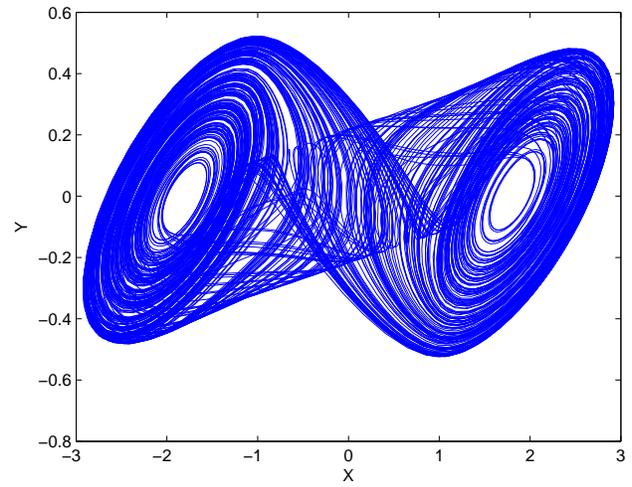
(g)



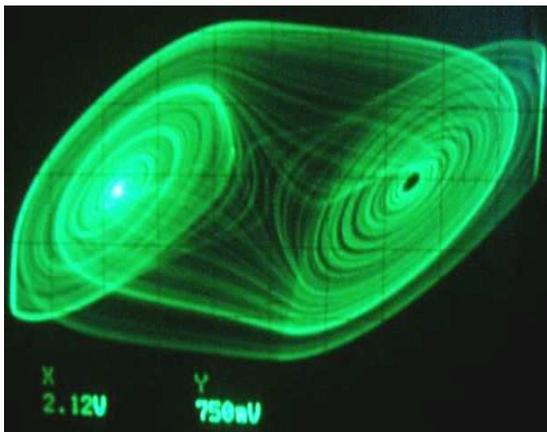
(7)



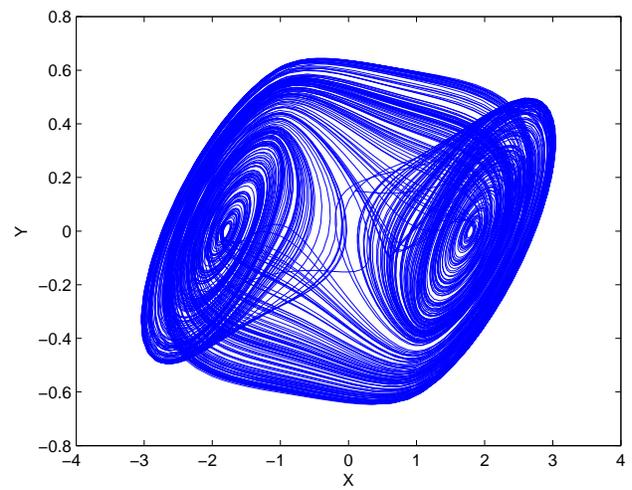
(h)



(8)

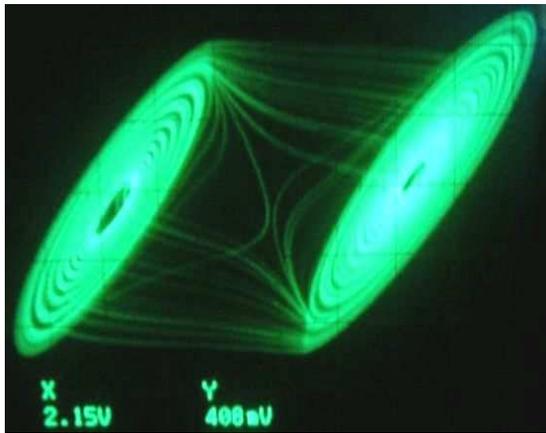


(i)

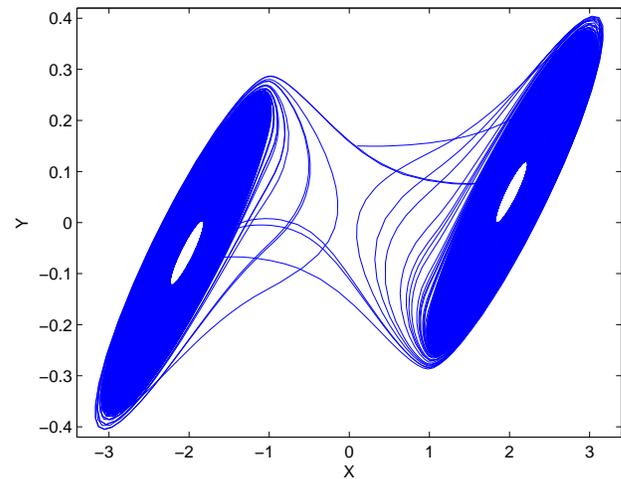


(9)

Figura 12. Las imágenes (g)-(i) corresponden a los atractores obtenidos en laboratorio y las imágenes (7)-(9) corresponden a los obtenidos con el modelo. X y Y se miden en voltios en laboratorio.



(j)



(10)

Figura 13. La imagen (j) corresponde al atractor obtenido en laboratorio y la imagen (10) corresponde al obtenido con el modelo. X y Y se miden en voltios en laboratorio.

orden o mayor. En el caso de los circuitos autónomos, se necesita que el sistema se componga de un elemento no lineal y por lo menos tres elementos lineales que almacenen energía (inductor, resistencia, capacitor), como se ha visto con el circuito de Chua, es autónomo porque no necesita de fuentes de energía alterna ya que es el mismo circuito el que transforma la señal continua proveniente del diodo en alterna, además el diodo de Chua es la pieza clave para el comportamiento no lineal de todo el circuito. No obstante, ésta regla no es definitiva puesto que puede existir caos en un sistema más sencillo compuesto por una resistencia lineal, un inductor lineal, un diodo normal y una fuente de voltaje. El circuito RL-Diodo, al contrario tiene una fuente de energía alterna, por lo que se lo denomina *no autónomo*, y tres elementos que bajo ciertos parámetros de frecuencia y amplitud, se generan señales aperiódicas mediante el desdoblamiento de periodo de la tensión en el diodo.

Entonces, a un circuito RLC se reemplaza el condensador por un diodo normal (ver Fig. 14), el cual al ser un elemento no lineal, es el causante de las aperiodicidades. En este circuito se asume que el voltaje de la fuente tiene la forma  $V_a = V_0 \cos \omega t$  y cuando el voltaje es positivo, el diodo conduce y se produce una caída de voltaje  $V_b = -V_f$ . En el estado no conductor, el diodo se comporta como un capacitor, el cual presenta una corriente de carga y el voltaje sigue la frecuencia de la fuente.

La amplitud del voltaje de fuente  $\lambda = V_0$  es el parámetro de control. Esta amplitud no necesariamente es igual para cada ciclo porque cuando la corriente llega a cero, el diodo continúa conduciendo con un tiempo  $\tau_r = \tau_m(1 - e^{-|I_m|/I_c})$ , donde  $|I_m|$  es la corriente máxima durante ese ciclo,  $\tau_m$  el tiempo máximo constante,  $\tau_r$  el tiempo de recuperación e  $I_c$  es constante. Por lo tanto, dependiendo del parámetro  $V_0$ , el voltaje en el diodo  $V_b$  se repite con un periodo y se va desdoblamiento hasta llegar

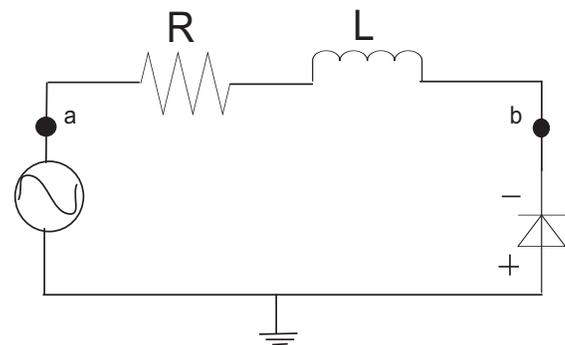


Figura 14. El circuito RL-Diodo.

al caos. Como el voltaje en el diodo depende del voltaje de la fuente y éste depende también de la frecuencia  $f = \omega/2\pi$ , se espera un comportamiento similar con su variación [13].

Uno de los caminos más comunes para llegar a un comportamiento caótico es el *desdoblamiento de periodo* en el que las bifurcaciones mediante éste fenómeno ocurren solamente con soluciones periódicas o trayectorias que bajo un punto de bifurcación tienen periodo T y bajo otro punto de bifurcación sufren un cambio ligero presentando un periodo 2T. En el espacio de fases se observaría un ciclo límite (un lazo) que bajo cierto parámetro se convertiría en un ciclo límite de segundo orden (dos lazos) y así sucesivamente los lazos continuarían desdoblándose al igual que las soluciones con un periodo  $T_k = 2^k T_0$  donde  $k = 0, \dots, n$ . Si se observa este proceso es muy probable que el sistema llegue a ser caótico [14].

Una característica del desdoblamiento de periodo es que los puntos de bifurcación (parámetros de control)  $\lambda_k$  convergen geoméricamente al llegar a la región caótica. Este valor llegó a ser universal por presentarse en varios

sistemas caóticos y se denomina la primera constante de Feigenbaum:

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = 4.669201... \quad (6)$$

Existe también otro comportamiento universal en las soluciones  $X(t)$  de un sistema, o  $Vb$  en este caso, definido por:

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{d_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Vb_k^{(1)} - Vb_k^{(2)}}{Vb_{k+1}^{(1)} - Vb_{k+1}^{(2)}} = 2.502907... \quad (7)$$

Siendo  $Vb_k^{(1)}$  y  $Vb_k^{(2)}$  dos soluciones de una ramificación en un punto de bifurcación  $\lambda_k$ .

### 6.1. Metodología y Resultados Para Estudiar el Circuito R-L-Diodo

Primero, se armó el sistema según el diagrama de la Fig. 14 mostrada en la sección anterior. En un canal del osciloscopio se mostró el voltaje de entrada  $V_0$  y en el otro canal se mostró el voltaje en el diodo  $V_b$ .

Luego, se encontró la frecuencia en la cual al variar la amplitud, el sistema presentaba bifurcaciones y caos. A esta frecuencia, se hizo variar la amplitud del voltaje de fuente y se observó el cambio de periodo en la señal del diodo hasta encontrar el valor de voltaje de fuente en el que ocurren los comportamientos caóticos. Se anotaron los valores  $V_0$  y se procedió a calcular la primera constante de Feigenbaum  $\delta$ . Además se hizo el intento de medir los valores de voltaje en el diodo correspondientes a cada punto de bifurcación y calcular la segunda constante  $\alpha$ . Posteriormente, estos puntos fueron graficados.

Por otra parte, se observó el comportamiento del sistema cuando el voltaje queda fijo y la frecuencia varía.

El comportamiento del diodo se ve afectado sobre todo a frecuencias altas (1 MHz-3 MHz) y/o a amplitudes altas. Se encontró que a partir de  $f=195.3$  kHz se observan bifurcaciones que llegan a regiones caóticas cuando el valor del voltaje de fuente  $V_0$  cambia. Esta frecuencia no es la misma para todos los diodos, a pesar de que todos sean de la misma serie 1N4007.

Este sistema permite apreciar con claridad el proceso de bifurcación, en el que la ruta hacia el caos es el desdoblamiento de periodo de la tensión en el diodo. Al principio, se presentan ciclos límite de primer orden, luego el orden aumenta y se ingresa a una región caótica bastante angosta, a continuación el sistema pasa a una ventana periódica. Posteriormente, ingresa otra vez a otra región caótica, luego se presenta otra ventana periódica más angosta que la primera y finalmente el sistema permanece en una región caótica. Fotografías de los estados de este proceso se observan en Fig. 15.

A continuación, se calcula la constante de Feigenbaum para la primera región caótica. Los valores que dan el mejor valor de la constante son: 1315 mV, 1415 mV, 1540 mV, 1610 mV y 1630 mV.

$$\delta = \frac{1415 - 1315}{1540 - 1415} = 0.80,$$

$$\delta = \frac{1540 - 1415}{1610 - 1540} = 1.786,$$

$$\delta = \frac{1610 - 1540}{1630 - 1610} = 3.50.$$

Para la segunda región caótica, se consideran los siguientes valores: 10850 mV, 11750 mV, 12550 mV, 13300 mV, 14400 mV, 14750 mV, 14830 mV. La constante da:

$$\delta = \frac{11750 - 10850}{12550 - 11750} = 1.1250,$$

$$\delta = \frac{12550 - 11750}{13300 - 12550} = 1.0667,$$

$$\delta = \frac{13300 - 12550}{14400 - 13300} = 0.6818,$$

$$\delta = \frac{14400 - 13300}{14750 - 14400} = 3.1429,$$

$$\delta = \frac{14750 - 14400}{14830 - 14750} = 4.3750.$$

Para la segunda constante de Feigenbaum, se obtiene una aproximación con los valores:

$$\alpha = \frac{675 - 285}{965 - 805} = 2.43.$$

Las constantes obtenidas cerca de las regiones caóticas no concuerdan con los valores teóricos porque  $V_b$  debe ser medido con mayor precisión y además debe ser elegido adecuadamente.

Por otro lado, se estudió el comportamiento del sistema manteniendo fijo el valor de la amplitud y variando la frecuencia. Se encontró que el comportamiento caótico ocurre a partir de  $V_0 = 3.700$  V. Se observan similares bifurcaciones en las siguientes frecuencias: 477.8 kHz, 482.2 kHz, 573.4 kHz, 585.9 kHz, 609.6 kHz, 619.8 kHz, 622.3 kHz) y en 677.7 kHz el sistema ingresa a la región caótica (ver Fig. 16), manteniéndose en ese estado hasta que en la frecuencia máxima de 1003.8 kHz el sistema pasa a una ventana periódica y permanece en esa situación. El atractor en esta región es un ciclo límite, el cual luego sufre un desdoblamiento. La frecuencia máxima a la cual se pudo llegar fue 2044.5 kHz, por lo que se ha visto, a frecuencias altas el diodo se comporta de forma totalmente distinta a la conocida.

Con estos resultados se obtuvo la constante de Feigenbaum:

$$\delta = \frac{609.6 - 585.9}{619.8 - 609.6} = 2.323, \quad \delta = \frac{619.8 - 609.6}{622.4 - 619.8} = 3.923.$$

Estos resultados llevan a pensar que el sistema se encuentra en una región caótica, de todos modos, es necesario mayor precisión en las medidas. Debe tenerse en cuenta que tanto la frecuencia como el voltaje eran variables durante el experimento, lo que también puede introducir error en los datos. Utilizando una interfase experimento-computadora y analizando el espectro de potencias de las señales se obtendrían resultados con menor error.

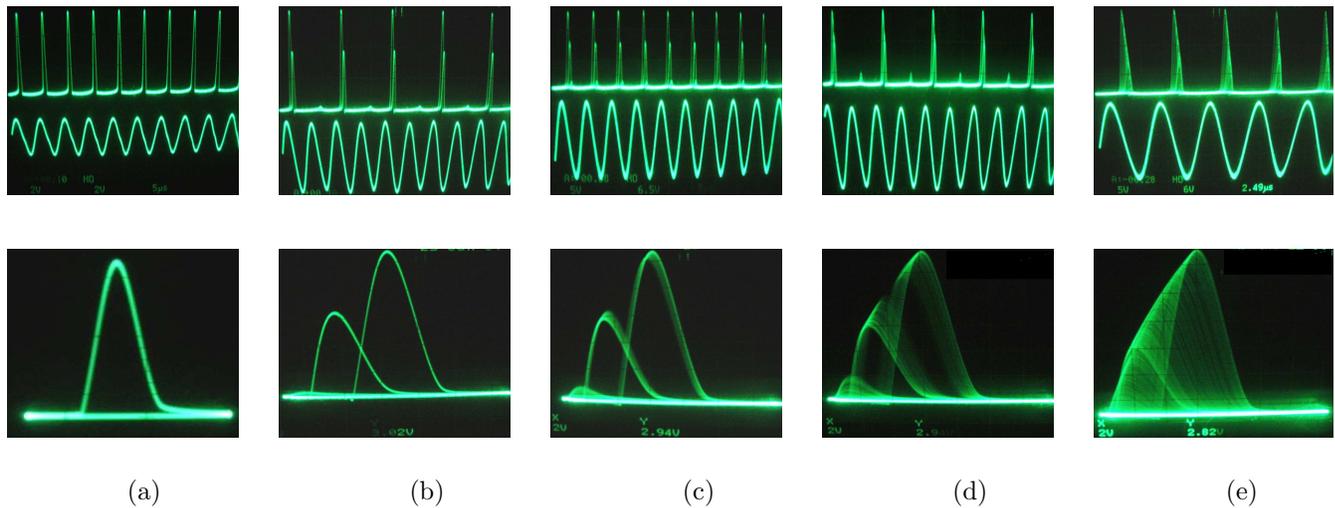


Figura 15. La ruta hacia el caos en el sistema es el desdoblamiento de periodo. (a) Primera bifurcación en  $V_0 = 10850$  mV, (b) Segunda bifurcación en  $V_0 = 11750$  mV, (c) Tercera bifurcación en  $V_0 = 13300$  mV, (d) Una cuarta bifurcación de orden difícil de distinguir en  $V_0 = 14400$  mV, (e) Finalmente el sistema permanece en la región caótica a partir de  $V_0 = 15200$  mV.

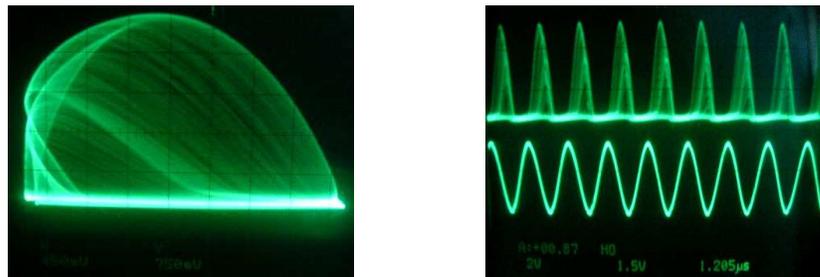


Figura 16. El sistema funcionó a la amplitud  $V_0 = 3.700$  V. Izquierda: El atractor caótico en  $f=677.7$  kHz en modo XY. Derecha: La correspondiente serie temporal.

## 7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

La caracterización numérica del circuito tipo Chua dió como resultado una región caótica bastante amplia que crece proporcionalmente con los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , además queda mejor definida si se toma en cuenta el tercer parámetro  $\gamma$ . Todos los límites caóticos fueron comprobados mediante el exponente de Lyapunov. Con el tercer parámetro, fue posible construir el espectro de Lyapunov, el cual mostró que la región caótica contiene varias ventanas periódicas. Se observó que para los valores mínimos de  $\gamma$  en especial, las regiones caóticas son más amplias y con varias ventanas periódicas. Los estados característicos del sistema al aumentar  $\beta$  y  $\gamma$  para un  $\alpha$  fijo en el modelo, se presentan en el orden siguiente: divergencia, que indica un estado inestable, una amplia región de caos y finalmente, periodicidad con tendencia a un punto fijo. Los parámetros adimensionales del modelo están relacionados con los valores de los componentes del circuito, entonces, escogiendo adecuadamente estos valores, se dejó un solo componente como el parámetro de control. En este caso, el parámetro experimental fue el potenciómetro que al aumentar de valor, el circuito presenta, a grandes rasgos, los siguientes estados: perio-

dicidad (ciclo límite de primer orden), caos (con algunas ventanas periódicas) y nuevamente periodicidad (ciclos límite y punto fijo), muy similar a lo que se obtuvo con el modelo. A pesar de que los valores experimentales de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  no concuerdan exactamente con los resultados numéricos, se satisfacen las expectativas pues los comportamientos y los atractores característicos del sistema obtenidos en laboratorio y con el modelo, son bastante similares. Posibles causas de esta discordancia podrían ser el hecho de que en el modelo, el componente que realmente variaba era la inductancia, en cambio en el experimento lo que variaba era la resistencia; además de la precisión en la medición y errores de redondeo en el modelo.

El estudio cualitativo del circuito RL-Diodo ha permitido observar satisfactoriamente y con detalle uno de los caminos más comunes hacia el caos: el desdoblamiento de periodo. El parámetro de control fue la amplitud del voltaje de fuente a una frecuencia crítica, pero también se observó lo que ocurría cuando el parámetro de control era la frecuencia a una amplitud crítica. Al aumentar el valor de parámetro, en ambos casos, el comportamiento del sistema es el siguiente: un estado periódico

seguido de un amplio estado caótico con varias ventanas periódicas. Midiendo los puntos de bifurcación en la amplitud y la frecuencia, se calcularon las respectivas constantes de Feigenbaum. Los valores de  $\alpha$  presentaron mayor discordancia por la falta de precisión y la dificultad de elegir los valores más adecuados para calcularla.

Se observó que la forma de los atractores dependen de la forma de la curva característica. Por ejemplo, la función del diodo de Chua está compuesta por tres regiones y los atractores se forman sobre ellas para la mayoría de los valores de parámetros, excepto en ciertos casos en los que los atractores se forman sobre una de las regiones (e.g. el atractor “espiral”). En un diodo normal, se tiene una parte de conducción y una parte de no conducción, que conforman dos regiones asimétricas, de modo que el atractor queda delimitado por esta forma. Otro aspecto interesante fue que en el circuito tipo Chua, el cambio de la resistencia causa cambios en la amplitud de las oscilaciones llegando a ser irregulares y terminando en un punto fijo a valores altos de resistencia. De modo similar, en el circuito RL-Diodo los cambios en la amplitud del voltaje de fuente causan cambios en el comportamiento del sistema conduciéndolo a un estado caótico, pero el hecho de terminar en un estado caótico o un estado periódico a amplitudes altas, dependía de la frecuencia del voltaje de entrada. De modo que existe un valor crítico para la frecuencia a partir del cual el sistema termina siempre en una región caótica. Es muy posible que esto haya ocurrido en el circuito tipo Chua, al cambiar los componentes de 10 pF y 1 mH, seguramente se llegó a la frecuencia crítica en la cual el sistema comenzaba a tener comportamientos irregulares. Sin embargo, en este circuito, no ha sido posible observar en detalle el camino hacia el caos, los cambios eran bruscos debido a la resistencia variable. Queda pendiente mejorar la forma de adquisición de datos, por ejemplo, sería recomendable analizar el espectro de potencias de ambos circuitos, además de implementar un modelo teórico para el circuito RL-Diodo. Finalmente, se podría dar inicio a trabajos de investigación sobre otros circuitos no lineales y buscar aplicaciones.

## REFERENCIAS

- [1] T. Matsumoto. *A Chaotic Attractor from Chua's Circuit*, IEEE Trans. Circuits Syst, vol. **CAS-31**. No. **12**, (1984), 1055–1058.
- [2] L. O. Chua, Chai Wah Wu, A. Huang, and Guo-Qun Zhong. *A Universal Circuit for Studying and Generating Chaos-Part I: Routes to Chaos*, IEEE Trans. Circuits Syst, vol. **40**. No. **10**, (1993), 732–744.
- [3] L. O. Chua, M. Komuro and T. Matsumoto. *The Double Scroll Family, Parts I and II*, IEEE Trans. Circuits Syst, vol. **CAS-33**, No. **11**, (1986), 1072–1119.
- [4] E. Günay, M. Alçi and R. Kiliç. *A Chaos Synchronization Study: Continuous & Impulsive Synchronization Between SC-CNN-Based and Chua's Circuit*, NDES, (2003), 97–100.
- [5] P. Kumar. Roy, S. Chakraborty and S. Kumar Dana. *Transition From Complete to Phase Synchronization in Coupled Nonidentical Chua's Oscillators*, NDES, (2003), 209–210.
- [6] K. Murali, K. Thamilmaran and M. Lakshmanan. *Rich Variety of Bifurcations and Chaos in a Variant of Murali-Lakshmanan-Chua Circuit*, (2000).
- [7] Paul S. Linsay. *Period Doubling and Chaotic Behavior in a Driven Anharmonic Oscillator*, Physical Review Letters. **47**. No. **19** (1981), 1349–1352.
- [8] J. H. Rivera, E. Duque C., L. E. Avendaño. *Síntesis de Redes No Lineales: El Oscilador de Chua*, Scientia et Technica **24** (2004), 103–106.
- [9] Michael Peter Kennedy. *Experimental Chaos from Autonomous Electronic Circuits.*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. **353**. No. **1701** (1995), 13–32.
- [10] Michael Peter Kennedy. *Three Steps to Chaos – Part II: A Chua's Circuit Primer.*, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications. **40**. No. **10** (1993), 657–673.
- [11] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, 1994.
- [12] R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber. *Practical Implementation of Nonlinear Time Series Methods: The TISEAN Package*, Chaos, **9**, (1999), 413.
- [13] A. C. Melissinos, J. Napolitano. *Experiments in Modern Physics*, Academic Press, (2003).
- [14] M. J. Ogorzalek. *Chaos and Complexity in Nonlinear Electronics Circuits*, World Scientific, (1997).

## LA ATMÓSFERA DE LA PAZ EN LA NOCHE DE SAN JUAN

Marcos F. Andrade<sup>1</sup>, Francesco Zaratti<sup>2</sup>

*Laboratorio de Física de la Atmósfera  
Instituto de Investigaciones Físicas, UMSA*

### RESUMEN

En Bolivia existe la tradición de quemar madera y otros trastes viejos en la noche de San Juan, razón por la cual se emiten a la atmósfera, en cantidades anómalas, tres clases principales de contaminantes: aerosoles (humo y cenizas), dióxido de carbono y sustancias químicas derivadas de la combustión de fuegos pirotécnicos.

Este año (2007) se han realizado mediciones variadas de dióxido de carbono, ozono superficial y radiación ultravioleta principalmente, con el fin de evaluar el impacto ambiental de esa tradición.

Los resultados muestran un peligroso desplazamiento de los agentes contaminantes, de los aerosoles y dióxido de carbono al incremento de ozono superficial, producto de los fuegos pirotécnicos masivos.

*Descriptores: Ozono Superficial, Contaminación Urbana.*

### 1. INTRODUCCIÓN

Una popular tradición, que mezcla elementos indígenas con costumbres traídas desde Europa, se realiza en la noche de San Juan en Bolivia, cuando las familias suelen encender fogatas para quemar madera y otros trastes viejos, con el fin, según el origen de la tradición, de espantar el frío del solsticio de invierno, despertar al sol para que no siga alejándose hacia el norte o anunciar el nacimiento de Juan el Bautista.

Si bien las fogatas han sido prohibidas en áreas urbanas debido a consideraciones ambientales, la tradición de reunirse, quemar algo y trasnocharse en familia sigue vigente, con el añadido de que muchas familias han reemplazado el encendido del fuego por la quema de fuegos pirotécnicos que se venden en abundancia y variedades.

Este año el Laboratorio de Física de la Atmósfera (LFA), perteneciente al Instituto de Investigaciones Físicas de la Universidad Mayor de San Andrés, ha realizado un seguimiento, con sus principales instrumentos, y una evaluación del comportamiento de algunos gases atmosféricos afectados por la tradición de la noche de San Juan.

### 2. INSTRUMENTOS

Los principales instrumentos utilizados en el estudio han sido:

- a. El espectrofotómetro Brewer 056, que es parte de la Red de Ozono y UV del Instituto de Pesquisas Espaciais del Brasil (INPE), para mediciones de la columna de ozono y la intensidad de la radiación ultravioleta, instalado en el LFA en Cota Cota (3420 m snm).

- b. Dos monitores de dióxido de carbono (CO<sub>2</sub>) marca LI-COR modelo LI-820, el primero colocado en el LFA y el otro en el monte Chacaltaya (5200 m snm) con el fin de comparación.
- c. Dos analizadores de ozono superficial, uno marca Thermo Environmental Instruments, Modelo TEI 49, ubicado en el LFA y el otro marca API Teledyne, Modelo M-400-E, en operación en el centro de la esta ciudad.
- d. Un medidor de aerosoles CIMEL, que es parte de la Red AERONET de la NASA.

Los instrumentos, oportunamente calibrados, estuvieron funcionando desde varios días antes y después de la noche de San Juan, pero, para fines del presente estudio sólo se tomaron en cuenta los datos significativos del evento.

Adicionalmente, se utilizaron imágenes satelitales (MODIS) de los días anteriores y posteriores para tener una visión de conjunto de la evolución de la atmósfera sobre la región de La Paz.

### 3. ANÁLISIS, RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación se analizan, de manera preliminar, los datos obtenidos de cada instrumento, se interpretan algunos resultados y se discuten sus alcances.

- 3.1. La Figura 1 muestra imágenes satelitales tomadas por el instrumento MODIS a bordo del satélite Terra de la NASA de la región cercana a la ciudad de La Paz para los días 16 de junio del 2007 (izquierda) y del 24 de junio del mismo año (derecha). El día 16 (izquierda) muestra un día despejado donde el Lago Titicaca y la ciudad de La Paz pueden verse

<sup>1</sup>Email: mandrade@atmos.umd.edu.bo

<sup>2</sup>Email: zaratti@fiumsa.edu.bo

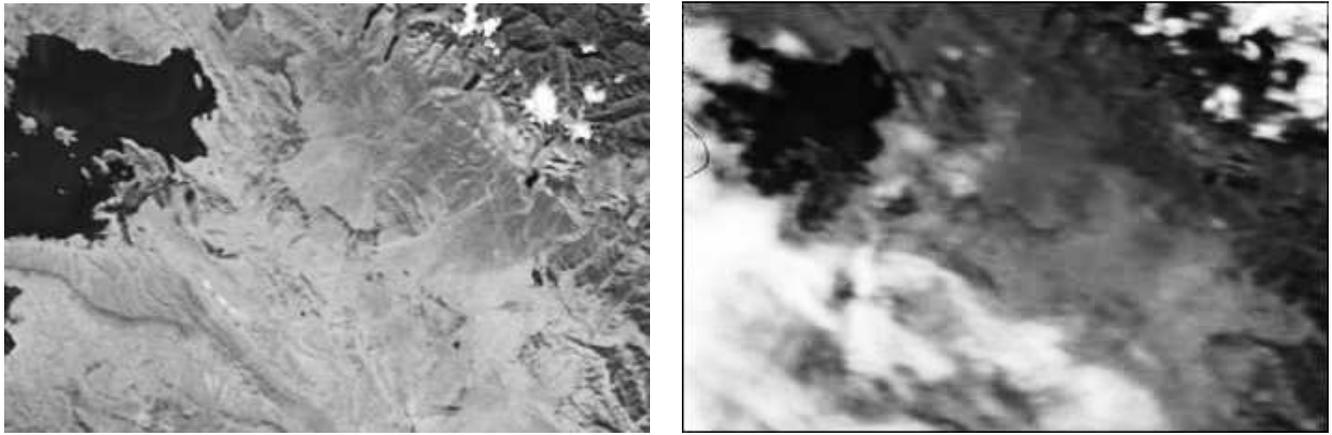


Figura 1.

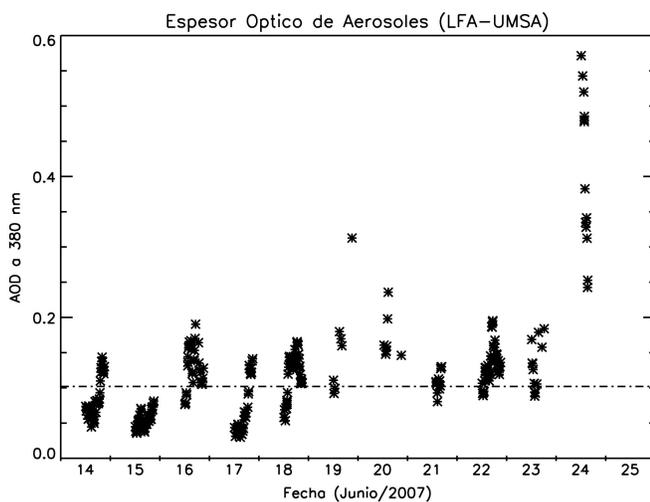


Figura 2.

claramente. En cambio el día 24 presenta nubosidad aunque la zona sobre la ciudad se muestra libre de nubes. A pesar de eso, el área se ve gris indicando la presencia de abundante humo sobre la ciudad. Los instrumentos en tierra confirman la presencia de esta humareda.

Sin embargo es importante señalar que, gracias a la topografía peculiar de la ciudad de La Paz, que se extiende en altitud desde 4000 m snm hasta 2800 m snm, los gradientes de temperatura y presión entre la zona alta y la baja tienden a despejar rápidamente la contaminación cercana a la superficie de la ciudad, aspecto confirmado por la medidas en superficie.

3.2 La Figura 2 muestra los datos recolectados por un radiómetro espectral CIMEL instalado en los predios de la Carrera de Física de la UMSA en el campus universitario de Cota Cota. El equipo permite medir el espesor óptico de las partículas en suspensión en la atmósfera (básicamente humo y cenizas en nuestro caso). A más grande este espesor mayor

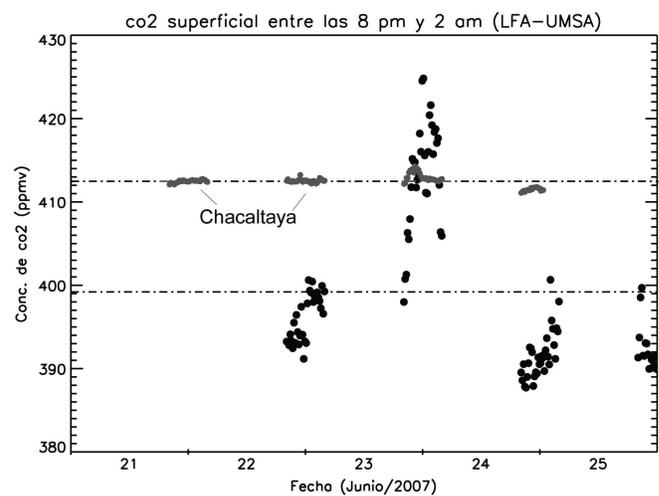


Figura 3.

la cantidad de partículas que flotan en el aire. Como se ve en la figura, existe un fuerte incremento de la cantidad de dichas partículas el día 24 de junio del presente año. Debido a que las medidas sólo pueden ser realizadas de día, puesto que el instrumento usa la luz del sol para este propósito, los puntos corresponden a datos tomados desde las 8 am hasta las 5 pm aproximadamente. La línea punteada muestra el promedio de estas medidas para los días previos al 24 de junio.

3.3 En cuanto al dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) superficial, en la Figura 3 siguiente se aprecian los valores medidos en Cota Cota (rojo) y Chacaltaya (azul). En ambos lugares el  $\text{CO}_2$  tuvo un pico en la noche de San Juan por efecto de la quema de leña, pero el incremento fue de 30 unidades en Cota Cota (8%) y de sólo dos unidades en Chacaltaya (0.5%). Ese resultado indica que, en lo que respecta al  $\text{CO}_2$ , el efecto de las quemadas es local y, además, desaparece rápidamente, como se explicó líneas arriba.

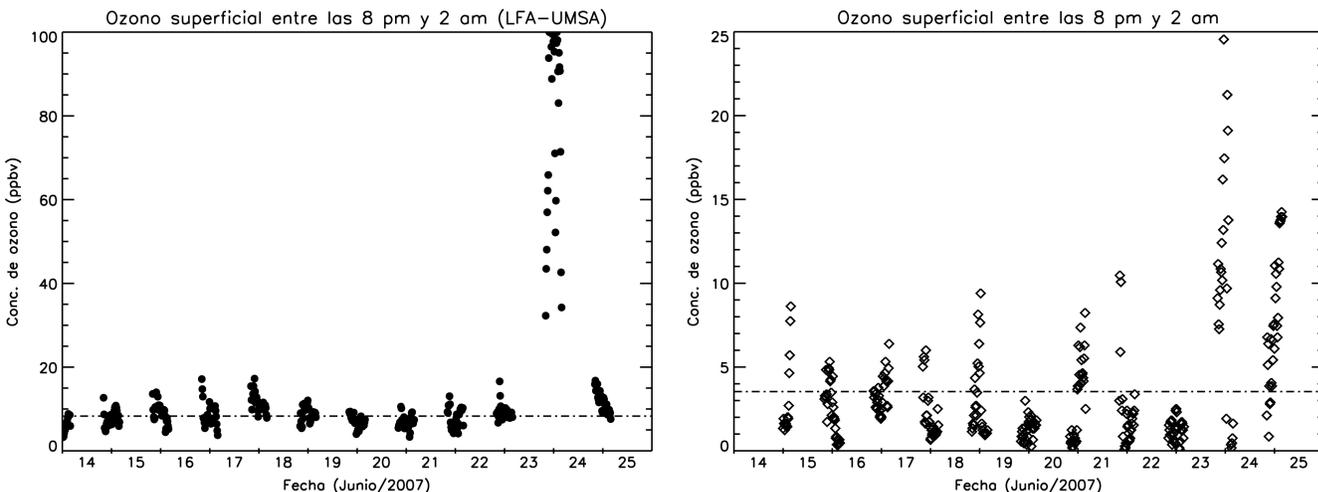


Figura 4.

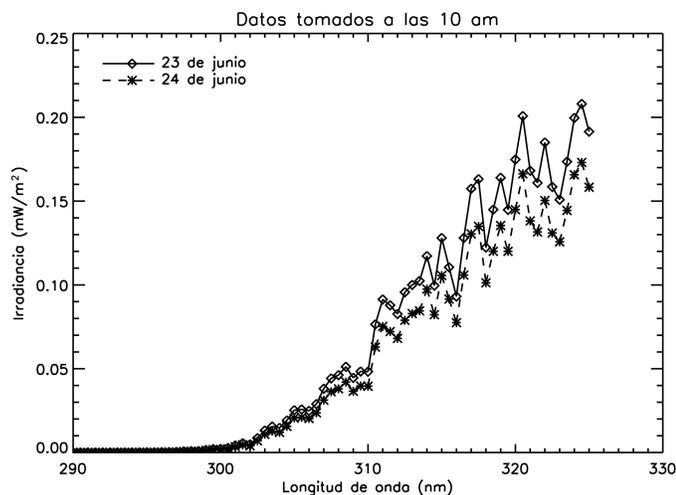


Figura 5.

3.4 El ozono superficial ( $O_3$ ), a diferencia del ozono estratosférico, es un gas dañino para la salud y es producido por el efecto de la luz ultravioleta solar sobre los gases contaminantes emitidos por los coches y las industrias. Los monitores de ozono ubicados en el centro de la ciudad (frente a la HAM, ver Figura 4 a la derecha) y en Cota Cota (a la izquierda) muestran un incremento importante de ese gas en la noche de San Juan (nótese las diferentes escalas usadas). Debido a la ausencia de luz solar, la explicación más probable es que la luz ultravioleta de los fuegos pirotécnicos sea responsable del pico de  $O_3$  que en Cota Cota superó inclusive el máximo que mide el instrumento (100 partes por billón) a diferencia del centro de la ciudad donde la subida fue menos espectacular. Ese hecho confirma indirectamente la explicación anterior, debido a la mayor cantidad de fuegos artificiales quemados en la zona Sur, y debería alertar a las autoridades sobre las consecuencias de la tendencia a reemplazar a la leña tradicional con fuegos pirotécnicos, tanto más que el

efecto nocivo del  $O_3$  persiste hasta entrado el día 24.

3.5 La intensidad de la radiación ultravioleta medida por el espectrofotómetro Brewer y los radiómetros UVB-1 marca YES es consistente con la mayor presencia de aerosoles y otros contaminantes en la atmósfera y, además, es afectada por la nubosidad del día. Más interesante es la comparación de intensidades espectrales en días consecutivos (Fig. 5), bajo similares condiciones de nubosidad para apreciar como la atmósfera se ha ido “ensuciando” en torno a la noche de San Juan.

#### 4. CONCLUSIONES

El monitoreo del dióxido de carbono realizado en la ciudad de La Paz muestra que la concentración de ese gas se incrementó 8% del valor de los días anteriores. El incremento es local y muy poco se siente, por ejemplo, en Chacaltaya (5200 m snm), debido a la altura. Esto sugiere además que la capa límite se encontraba por debajo o muy cerca de Chacaltaya.

La capa de humo, que durante toda la mañana del día 24 de junio ha estado presente en el aire de La Paz, es señal de la presencia abundante de aerosoles. El incremento medido (5 veces el valor normal) ha producido la disminución de la intensidad de la radiación solar y, en particular, de la Radiación Ultravioleta (- 12 %) a lo largo de la mañana del día 24 de junio.

Los fuegos pirotécnicos, a su vez, son los causantes del fuerte incremento de la concentración del Ozono superficial (que es dañino para la salud). El monitor de Cota Cota llegó a saturarse, o sea llegó a su máximo valor medible, y el del centro de la ciudad mostró un pico pronunciado y valores elevados persistentes hasta la mañana del día 24.

Por tanto, si bien la topografía de la ciudad de La Paz ayuda a mitigar rápidamente los efectos de las quemas, las autoridades deberían prestar mayor atención al abuso de fuegos pirotécnicos, quien sabe organizando un único gran espectáculo para toda la ciudadanía en reemplazo de los miles de pequeños fuegos artificiales que se realizan en las casas.

### **Agradecimientos**

El presente estudio es preliminar y ha contado con la valiosa colaboración de los colegas del LFA-UMSA Juan García Fuentes, Eduardo Palenque y René Gutiérrez, y del Ing. Pablo Aldunate de la Oficialía Mayor Técnica del Gobierno Municipal de La Paz.

Los autores agradecen la preciosa colaboración técnica del Sr. Gonzalo Gutiérrez y la cooperación, a través de los instrumentos, de:

- \* Programa Nacional de Cambios Climáticos – MPD.
- \* Dirección de Calidad Ambiental - Oficialía Mayor Técnica – Gobierno Municipal de La Paz.
- \* Swiss Contact, Proyecto Aire Limpio.
- \* Red Aeronet – NASA, USA.
- \* Departamento. de Meteorología, Universidad de Maryland, USA.
- \* Instituto Nacional de Pesquisas Espaciales del Brasil.

## UNA DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE ONDAS PLANAS PARA EL CÁLCULO DE BANDAS FOTÓNICAS

R. Archuleta-García<sup>1</sup>, M. B. Manzanares-Martínez<sup>2</sup>, J. Manzanares-Martínez<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Programa de Posgrado en Ciencias (Física) de la Universidad de Sonora  
Apartado Postal 5-088, Hermosillo, Sonora 83190, México

<sup>2</sup>Unidad Regional Sur de la Universidad de Sonora  
Boulevard Lázaro Cárdenas No. 100, Navojoa, Sonora 85880, México

<sup>3</sup>Centro de Investigación en Física de la Universidad de Sonora  
Apartado Postal 5-088, Hermosillo, Sonora 83190, México

### RESUMEN

Se presenta una descripción detallada del Método de Ondas Planas para el cálculo de estructuras de banda fotónicas. El sistema a estudiar es un medio infinito en donde la función dieléctrica y el campo electromagnético son periódicos en una dimensión. Por medio de series de Fourier, hacemos expansiones de la función dieléctrica y del campo electromagnético. Estas expansiones sirven para plantear a la ecuación de onda como una ecuación de valores propios. Mostramos explícitamente los elementos de matriz de la ecuación de eigenvalores y proponemos un sencillo programa en *Matlab* que calcula bandas fotónicas.

*Descriptor:* Banda Fotónica, Cristal Fotónico.

### 1. INTRODUCCIÓN

Es conocido que en sólidos cristalinos la periodicidad atómica impide la propagación de los electrones que tienen una energía situada en la llamada brecha de energías prohibidas. La existencia de zonas de conducción prohibidas o permitidas determina las propiedades de los llamados semiconductores. Para el entendimiento de las características físicas de estos cristales atómicos se han desarrollado diversos métodos de cálculo.

En 1987 E. Yablonovitch [1] propuso inhibir la propagación de luz mediante la fabricación de materiales dieléctricos. La idea es construir de forma artificial estructuras que tengan una periodicidad similar a los cristales atómicos, pero en una escala diferente. La nueva estructura cristalina es unas 1000 veces más grande que un cristal atómico. Esta estructura difracta a los fotones (luz) de la misma forma que los cristales atómicos difractan electrones. Por esta razón, se les ha llamado Cristales Fotónicos (CF) y asimismo nació el concepto de Brecha de Energía Prohibida (BEP) para fotones. Los CF abren vías de investigación muy prometedoras para la manipulación de fotones en la industria de las telecomunicaciones. En particular es de gran relevancia la integración de dispositivos fotónicos y electrónicos.

El estudio de las propiedades tecnológicamente más importantes para CF probablemente estará ligado al estudio de heteroestructuras, es decir, la superposición de dos diferentes redes cristalinas que den lugar a fenómenos de interés tecnológico. La idea de juntar dos diferentes redes cristalinas ha probado ser una vía exitosa en cristales atómicos, en donde la conjunción de diferen-

tes redes cristalinas dió lugar al invento del transistor, génesis de la revolución electrónica.

En la perspectiva de nuestro interés en las heteroestructuras de cristal fotónico hemos desarrollado un estudio sistemático del método de ondas planas (MOP) [2]. A pesar de la popularidad del MOP para CF, cuando el investigador o estudiante desea implementar este método de cálculo tiene que recurrir a los artículos originales [3-7] en donde no se ilustran en detalle diversos aspectos matemáticos importantes. Este trabajo nace con la idea de servir de guía, paso a paso, para el estudiante interesado en iniciarse en el cálculo con el MOP.

Después de que en 1987 los cristales fotónicos fueron propuestos, comenzaron los primeros estudios experimentales sobre cristales fotónicos [3]. Los primeros cálculos de bandas fotónicas fueron realizados por los especialistas en bandas de energía electrónica los cuales utilizaron por primera vez el método de ondas planas [4-6]. Sin embargo, estos primeros resultados no estaban en concordancia con los resultados experimentales, ya que los cálculos predecían BEP en lugares en donde el experimento no las detectaba [3]. El problema venía de la utilización de una teoría de campo escalar. Los cálculos imitaban el caso de BEP electrónicas, en donde se busca los eigenvalores de la ecuación de onda de Schrödinger [4-6]. Pero utilizar una teoría escalar no es el procedimiento correcto. Para BEP fotónicas es necesario resolver las ecuaciones de Maxwell. El cálculo de bandas fotónicas necesita ser planteado como la solución vectorial del campo electromagnético para obtener resultados correctos [7-9].

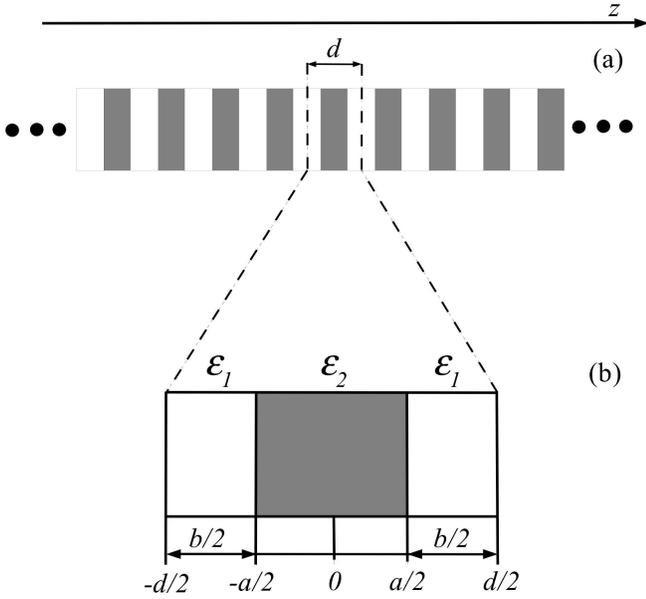


Figura 1. (a) Cristal fotónico con periodicidad unidimensional;  $d$  corresponde al ancho de la celda unitaria. (b) Celda unitaria conformada por dos materiales de constantes dieléctricas  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ .

En este trabajo vamos a detallar el MOP analizando el caso más sencillo que es un cristal unidimensional (1D). En este sistema la transformada de Fourier se calcula analíticamente. Se muestra en forma explícita los elementos de matriz de la ecuación de eigenvalores. Finalmente proponemos un sencillo programa en *Matlab*, el cual permite calcular una banda fotónica 1D.

## 2. LA SERIE DE FOURIER PARA LA FUNCION DIELECTRICA

Comenzamos nuestro análisis planteando la ecuación de onda 1D

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E(z, \omega) + \varepsilon(z) \frac{\omega^2}{c^2} E(z, \omega) = 0. \quad (1)$$

En esta ecuación consideramos que la función dieléctrica forma una red periódica infinita como ilustra la Fig. 1a. Toda red está conformada por una red y una base. En la Fig. 1b se muestra la base o *celda unitaria* que está conformada por los materiales  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  cuyos espesores son  $a$  y  $b$ , respectivamente. La longitud de la celda unitaria es  $d=a+b$ .

La forma de la función dieléctrica puede expresarse matemáticamente en el intervalo  $-d/2 \leq z \leq d/2$  como en [10]

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \Theta\left(\frac{a}{2} - |z|\right), \quad (2)$$

donde la función de Heaviside es

$$\Theta(z) = \begin{cases} 1 & z \geq 0 \\ 0 & z < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Ya que toda función periódica puede expresarse en términos de una serie de Fourier, expresamos la función dieléctrica en la celda unitaria de la forma

$$\varepsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varepsilon(G_z) e^{iG_z z} \quad (4)$$

donde  $G_z$  es un vector de la red recíproca y toma valores  $G_z = n2\pi/d$ . Para conocer los coeficientes de la serie de Fourier  $\varepsilon(G_z)$  multiplicamos por  $\exp(-iG'_z z)$  e integramos ambos lados de la ecuación,

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(z) e^{-iG'_z z} dz = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \sum_{G_z} \varepsilon(G_z) e^{iG_z z} e^{-iG'_z z} dz. \quad (5)$$

La integral del lado derecho se desarrolla en el Apéndice 1. El resultado es

$$\varepsilon(G_z) = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(z) e^{-iG_z z} dz. \quad (6)$$

Para calcular estos coeficientes primero planteamos el caso en que  $G_z = 0$ . Sustituimos (2) en (6) para obtener

$$\varepsilon(0) = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \left( \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \Theta\left(\frac{a}{2} - |z|\right) \right) dz. \quad (7)$$

Separamos los intervalos en donde la función dieléctrica permanece constante,

$$\varepsilon(0) = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{-\frac{a}{2}} \varepsilon_1 dz + \frac{1}{d} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \varepsilon_2 dz + \frac{1}{d} \int_{+\frac{a}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon_1 dz. \quad (8)$$

El coeficiente de Fourier es entonces

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_1 + f(\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad (9)$$

donde la fracción de llenado  $f$  se define como  $f = a/d$ .

Ahora consideraremos el caso cuando  $G_z \neq 0$ . Los coeficientes de Fourier se obtienen sustituyendo (2) en (6) para obtener

$$\varepsilon(G_z) = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \left( \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \Theta\left(\frac{a}{2} - |z|\right) \right) e^{-iG_z z} dz. \quad (10)$$

Separamos de nuevo la integral en los intervalos en los cuales la función dieléctrica se conserva constante para obtener

$$\varepsilon(G_z) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{a}{d} \left( \frac{1}{\frac{G_z a}{2}} \right) \left( \frac{e^{+iG_z \frac{a}{2}} - e^{-iG_z \frac{a}{2}}}{2i} \right), \quad (11)$$

la que se puede reducir a

$$\varepsilon(G_z) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) f \left( \frac{\text{Sen}\left(\frac{G_z a}{2}\right)}{\frac{G_z a}{2}} \right). \quad (12)$$

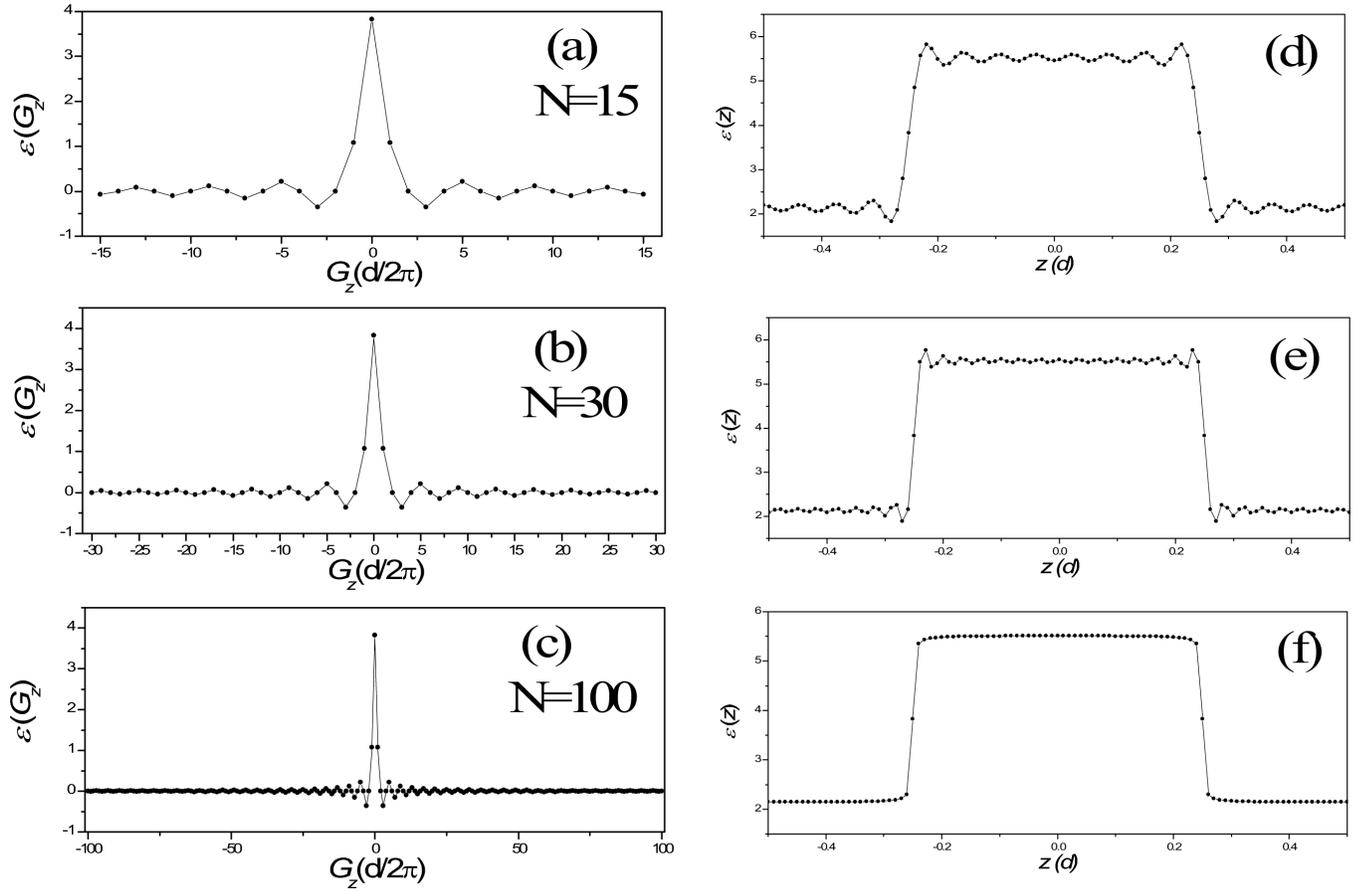


Figura 2. Los paneles (a), (b) y (c) muestran los valores de los coeficientes de Fourier calculados para  $N=15$ , 30 y 100. Los paneles (d), (e) y (f) muestra la función dieléctrica en el espacio real para  $N=15$ , 30 y 100.

Como un ejemplo de la representación de la función dieléctrica en términos de la serie de Fourier consideramos una celda unitaria de espesor  $d = 10^{-8}m$  y  $f=0.5$ . Las funciones dieléctricas son  $\varepsilon_1 = 5,52$  y  $\varepsilon_2 = 2,13$  [10]. Presentamos en las Fig. 2 los coeficientes de Fourier [paneles (a)-(c)] y la serie de Fourier de la función dieléctrica [paneles (d)-(f)] para los casos  $N=15$ , 30 y 100. Se observa que a medida que el numero de ondas planas aumenta, los coeficientes de Fourier tienden al valor cero. Por su parte, la función dieléctrica converge mejor a medida que se ocupan más valores de  $N$ , es decir, más ondas planas. En el Apéndice 2 incluimos un programa en *Matlab* que realiza estas figuras para diferentes valores de  $N$ .

### 3. ECUACIÓN DE VALORES PROPIOS

Para resolver la ecuación de ondas en términos de la serie de Fourier es más conveniente expresar la esta ecuación como

$$\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y(z, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} E_y(z, \omega) = 0, \quad (13)$$

donde es posible obtener una serie de Fourier del inverso de la función dieléctrica de la forma

$$\mu(z) \equiv \frac{1}{\varepsilon(z)} = \sum_{G_z} \mu(G_z) e^{iG_z z}, \quad (14)$$

cuyos coeficientes de Fourier son

$$\begin{aligned} \mu(G_z) = & \left\{ \frac{1}{\varepsilon_1} + f \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \right\} \delta_{G_z,0} \\ & + \left\{ f \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \frac{\text{Sen} \left( \frac{G_z a}{2} \right)}{\left( \frac{G_z a}{2} \right)} \right\} (1 - \delta_{G_z,0}). \end{aligned} \quad (15)$$

El campo eléctrico también puede expresarse en términos de serie de Fourier en la forma

$$E(z) = \sum_{G_z} E(G_z) e^{iG_z z} e^{ik_z z}. \quad (16)$$

Sustituyendo las expresiones en serie de  $\mu(z)$  y  $E(z)$  en (13) que define la ecuación de onda tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{G_z} \mu(G_z) e^{iG_z z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum_{G'_z} E(G'_z) e^{iG'_z z} e^{ik_z z} \\ = -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{G_z} E(G_z) e^{i(k_z + G_z)z}. \end{aligned} \quad (17)$$

Realizando las derivadas en el primer término tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{G_z} \sum_{G'_z} \mu(G_z) E(G'_z) (k_z + G'_z)^2 e^{i(G'_z + G_z)z} \\ = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{G_z} E(G_z) e^{iG_z z}, \end{aligned} \quad (18)$$

donde hemos eliminado en ambos lados la exponencial  $e^{ik_z z}$ . Multiplicando (18) por  $e^{iG'_z z}$  e integrando sobre la celda unitaria, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dz e^{iG'_z z} \sum_{G_z} \sum_{G'_z} \mu(G_z) E(G'_z) (k_z + G'_z)^2 e^{i(G'_z + G_z)z} \\ = \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dz e^{iG'_z z} \sum_{G_z} E(G_z) e^{iG_z z}. \end{aligned} \quad (19)$$

Como se muestra en el Apéndice 1, identificamos las funciones delta:

$$\begin{aligned} \sum_{G_z} \sum_{G'_z} \mu(G_z) E(G'_z) (k_z + G'_z)^2 \delta_{G'_z, G'_z + G_z} \\ = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{G_z} E(G_z) \delta_{G'_z, G_z}. \end{aligned} \quad (20)$$

Aplicando (20) a (19) se obtiene

$$\sum_{G'_z} \mu(G'_z - G'_z) E(G'_z) (k_z + G'_z)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} E(G'_z); \quad (21)$$

finalmente, si cambiamos el índice mudo  $G'_z$  por  $G_z$  tenemos

$$\sum_{G'_z} \mu(G_z - G'_z) E(G'_z) (k_z + G'_z)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} E(G_z). \quad (22)$$

#### 4. REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE LA ECUACIÓN DE VALORES PROPIOS

La estrategia para resolver la ecuación de eigenvalores es plantear una ecuación matricial. Para obtenerla desarrollamos el lado izquierdo de (22),

$$\begin{aligned} \sum_{G'_z} \mu(G_z - G'_z) E(G'_z) (k_z + G'_z)^2 \\ = \mu\left(G_z - \left[-n \frac{2\pi}{d}\right]\right) \left[k_z + (-n) \frac{2\pi}{d}\right]^2 E\left(-n \frac{2\pi}{d}\right) \\ + \mu\left(G_z - \left[(-n+1) \frac{2\pi}{d}\right]\right) \left[k_z + (-n+1) \frac{2\pi}{d}\right]^2 \\ \times E\left(\left(-n+1\right) \frac{2\pi}{d}\right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \mu\left(G_z - \left[-1 \frac{2\pi}{d}\right]\right) \left[k_z + (-1) \frac{2\pi}{d}\right]^2 E\left(-1 \frac{2\pi}{d}\right) \\ + \mu(G_z - [0]) [k_z]^2 E(0) \end{aligned}$$

$$+ \mu\left(G_z - \left[+1 \frac{2\pi}{d}\right]\right) \left[k_z + (+1) \frac{2\pi}{d}\right]^2 E\left(+1 \frac{2\pi}{d}\right)$$

+ ...

$$\begin{aligned} + \mu\left(G_z - \left[(n-1) \frac{2\pi}{d}\right]\right) \left[k_z + (n-1) \frac{2\pi}{d}\right]^2 \\ \times E\left((n-1) \frac{2\pi}{d}\right) \end{aligned}$$

$$+ \mu\left(G_z - \left[n \frac{2\pi}{d}\right]\right) \left[k_z + (n) \frac{2\pi}{d}\right]^2 E\left(n \frac{2\pi}{d}\right). \quad (23)$$

Esta larga suma puede escribirse como una multiplicación de un vector renglón por un vector columna,

$$\begin{aligned} [V(G_z, -n) \cdots V(G_z, 0) \cdots V(G_z, +n)] \begin{bmatrix} E(-n) \\ \vdots \\ E(0) \\ \vdots \\ E(+n) \end{bmatrix} \\ = \frac{\omega^2}{c^2} E(G_z), \end{aligned} \quad (24)$$

donde cada elemento del renglón es

$$V\left(G_z, \left[n \frac{2\pi}{d}\right]\right) = \mu\left(G_z - \left[n \frac{2\pi}{d}\right]\right) \left[k_z + (n) \frac{2\pi}{d}\right]^2. \quad (25)$$

La ec. (25) es válida para cualquier valor de  $G_z$ . Para lograr un sistema cuadrado es necesario plantear esta ecuación para los valores entre  $-N$  y  $N$ , incluyendo  $N = 0$ . Procediendo de esta forma obtenemos

$$\vec{A} \vec{X} = \lambda \vec{X}, \quad (26)$$

donde

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} V(-N, -N) & \dots & V(-N, 0) & \dots & V(-N, +N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V(0, -N) & \dots & V(0, 0) & \dots & V(0, +N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V(+N, -N) & \dots & V(+N, 0) & \dots & V(+N, +N) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

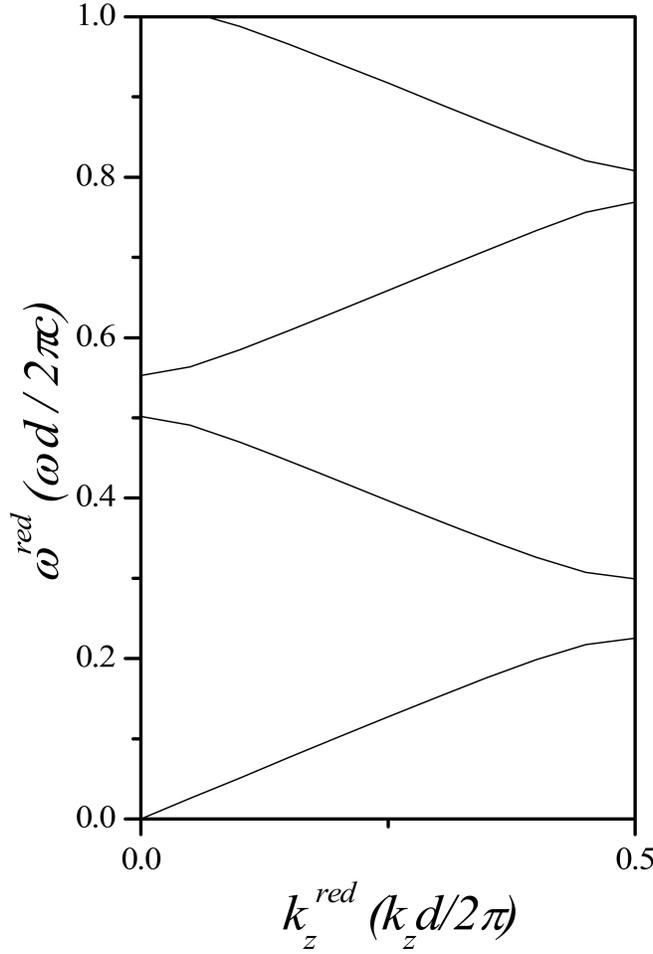


Figura 3. Se muestra la estructura de bandas con 201 ondas planas.

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} E(-N) \\ \dots \\ E(0) \\ \dots \\ E(+N) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\lambda = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (29)$$

En la Figura 3 presentamos la estructura de bandas del sistema. En el eje X graficamos el vector de onda reducido y en el eje Y la frecuencia reducida. Observamos que existen cuatro brechas energéticas (BEP) en el intervalo de energía entre 0 y 1. Las ondas electromagnéticas con valores de energía dentro de la BEP no pueden propagarse en el interior del cristal. En el Apéndice 3 mostramos el programa que hemos usado para realizar esta figura. Estos programas pueden ser de utilidad para investigadores experimentales que realizan diferentes estudios de aplicación de cristales fotónicos. Veamos un ejemplo. Para realizar la amplificación de señal luminiscente en la presencia un cristal fotónico unidimensional [11] es necesario optimizar los parametros de red de óxido de silicio. La búsqueda de la amplificación de la señal

luminiscente puede ser un camino para la elaboración de láseres basados en cristales fotónicos.

## 5. CONCLUSIONES

Hemos realizado una exposición detallada de cuatro puntos importantes del Metodo de Ondas Planas para la obtención de Bandas de Energía Prohibida en cristales fotónicos en una dimensión. En primer lugar, Mostramos la utilización de series de Fourier para describir una función periódica. En segundo lugar, tomamos la ecuacion de onda definida en el espacio real y mediante la sustitución de las series de Fourier del inverso de la función dieléctrica y el campo electromagnético obtenemos la ecuación de valores propios definida en el espacio de Fourier. En tercer lugar, ilustramos la obtención de una ecuación matricial mediante la expansión de la ecuación de valores propios. Por último, presentamos codigos computacionales en lenguaje *Matlab* que permiten al estudiante tomar confianza en el cálculo de expansión de series de Fourier y cálculo de bandas.

A nuestro conocimiento no existe otro reporte en castellano donde se detalle el Metodo de Ondas Planas de la forma en que hemos enfocado este trabajo. Consideramos que nuestra exposición es de utilidad a los estudiantes que inician en el estudio de Bandas de Energía Prohibida no solamente para cristales fotónicos, sino tambien para el estudio de otros medios periódicos.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por el proyecto CONACYT-60897. RAG agradece una Beca-Tesis de Maestria. Agradecemos a “PROMEP-2005” por financiamiento especial.

## 7. APÉNDICE 1

La ec. (5) puede se puede escribir como

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(z) e^{-iG'_z z} dz = \sum_{G_z} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(G_z) e^{iG_z z} e^{-iG'_z z} dz. \quad (30)$$

Podemos definir la integral en el lado derecho como  $I_1$ :

$$I_1 = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} e^{iG_z z} e^{-iG'_z z} dz, \quad (31)$$

donde  $G_z = 2n\pi/d$  y  $G'_z = 2n'\pi/d$ . Asociando las exponenciales la integral es

$$I_1 = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} e^{i(G_z - G'_z)z} dz, \quad (32)$$

$$I_1 = \frac{1}{i(G_z - G'_z)} \left[ e^{i(G_z - G'_z)z} \right]_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}}, \quad (33)$$

$$I_1 = \frac{d}{\pi(n - n')} \left[ \frac{e^{i\pi(n-n')} - e^{-i\pi(n-n')}}{2i} \right], \quad (34)$$

$$I_1 = d \frac{\sin[\pi(n - n')]}{\pi(n - n')}, \quad (35)$$

La función  $I_1$  se relaciona con la delta de Dirac,

$$\delta(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}. \quad (36)$$

De esta forma podemos escribir

$$I_1 = d\delta_{G_z, G'_z}. \quad (37)$$

Ahora (30) puede escribirse como

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(z) e^{-iG'_z z} dz = \sum_{G_z} d\varepsilon(G_z) \delta_{G_z, G'_z}. \quad (38)$$

Aplicando la delta de Dirac tenemos

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(z) e^{-iG'_z z} dz = d\varepsilon(G'_z). \quad (39)$$

Finalmente llegamos a la expresión

$$\varepsilon(G_z) = \frac{1}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \varepsilon(z) e^{-iG_z z} dz. \quad (40)$$

## 8. APÉNDICE 2

```
clear
ip = 20;
d = 100.0d-10;
a = d/2;
b = d/2;
f = a/d;
e1 = 5.52;
e2 = 2.1316;
G = 2*pi/d;
ic = 1;
for n = -ip:ip
Gz = n*G;
GzV(ic) = Gz;
if n == 0
epsiV(ic) = 1/e1 + f*(1/e2-1/e1);
else
epsiV(ic) = f*(1/e2-1/e1)*
(sin(GzV(ic)*a/2))/(GzV(ic)*a/2);
end
ic = ic + 1;
end
iz = 1;
for z = 0:d/500:d
zV(iz) = z;
```

```
epsi(iz) = 0;
ic = 1;
for n=-ip:ip
epsi(iz) = epsi(iz) + epsiV(ic)*exp(i*GzV(ic)*z);
ic = ic+1;
end
iz = iz+1;
end
subplot(2,1,1);plot(GzV,epsiV)
subplot(2,1,2);plot(zV/d,epsi)
```

## 9. APÉNDICE 3

```
clear
ip = 0;
d = 100.0d-10;
a = d/2;
b = d/2;
f = a/d;
e1 = 5.52;
e2 = 2.1316;
G = 2*pi/d;
ikz=1;
for kz = 0 : 0.1*(pi/d) : pi/d
ir=1;
ic=1;
for n=-ip:ip
Gzn=G*n;
for m=-ip:ip;
Gzm=G*m;
Gzn_m = Gzn - Gzm;
if n == m
mu = 1/e1 + f*(1/e2-1/e1);
else
mu = f*(1/e2-1/e1)*(sin(Gzn_m*a/2))/(Gzn_m*a/2);
end
A(ir,ic)=mu*(kz+Gzm)^2;
ic=ic+1;
end % m
ic=1;
ir=ir+1;
end % n
e = eig(A);
w = sort(e);
Vkz(ikz) = kz*(d/(2*pi));
Vw1(ikz) = sqrt(abs(w(1)))*(d/(2*pi));
Vw2(ikz) = sqrt(abs(w(2)))*(d/(2*pi));
Vw3(ikz) = sqrt(abs(w(3)))*(d/(2*pi));
Vw4(ikz) = sqrt(abs(w(4)))*(d/(2*pi));
Vw5(ikz) = sqrt(abs(w(5)))*(d/(2*pi));
ikz = ikz+1;
end
```

## REFERENCIAS

- [1] Yablonovitch E., *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2059, 1987.
- [2] Archuleta-Garcia R., "Heteroestructuras de cristal fotónico", Tesis de Maestría, Universidad de Sonora, 2007.
- [3] Yablonovitch E., Gmitter T.J., *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1950, 1989.
- [4] John R., Rangarajan R., *Phys. Rev. B* **38**, 10101, 1988.
- [5] Economou E.N., Zdetsis A., *Phys. Rev. B* **40**, 1334, 1989.
- [6] Sapathy S., Zhang Z., Salehpour M.R., *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1239, 1990.
- [7] Leung K.M., Liu Y.F., *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2646, 1990.
- [8] Ho K.M., Chan C.T., Soukoulis C.M., *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3152, 1990.
- [9] Sozuer H.S., Haus J.W., *Phys. Rev. B* **45**, 13962, 1992.
- [10] Ramos-Mendieta F., Halevi P., *J. Opt. Soc. of America B* **14**, 370, 1997.
- [11] Agarwal V., Del Rio J.A., *Appl. Phys. Lett.* **82**, 1512, 2003.

# EXTENSIÓN DEL PROCESO DE ORNSTEIN-UHLENBECK PARA LA DESCRIPCIÓN DEL CRECIMIENTO ECONÓMICO EN UNA SOCIEDAD SUJETA A AMENAZA DELINCUENCIAL

M. A. Subieta Vásquez<sup>1</sup>, G. M. Ramírez Ávila<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Carrera de Física, U.M.S.A.*

<sup>2</sup>*Instituto de Investigaciones Físicas, U.M.S.A.*

## RESUMEN

Se analiza el proceso de Ornstein-Uhlenbeck considerando dos tipos de potenciales para la descripción del crecimiento de capital acumulado  $x$  de un sector social sometido a actividades delictivas. Se considera un modelo basado en teoría de juegos diferenciales para la interacción entre la población, los policías y los delincuentes, al cual le asignamos un carácter estocástico. Se resuelve la ecuación de Fokker-Planck lo que permite describir el comportamiento de la densidad de probabilidad de  $x$  en función del tiempo. Se estudian dos escenarios socio-económicos, considerando dos tipos de reacción (hostil y tolerante) de la población frente a la delincuencia. Finalmente, se intenta hacer una correspondencia entre los aspectos termodinámicos y los socio-económicos.

*Descriptor: Procesos Estocásticos, Econofísica.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Los métodos de la Física Estadística han demostrado ser muy fructíferos y en las últimas décadas ellos han resultado ser también muy importantes en la investigación multidisciplinaria. Por ejemplo la *ecuación maestra* además de tener aplicaciones en termodinámica, en la teoría de láseres [1], en la cinética química [2] e incluso en ciencias sociales [3]. Así, se puede citar el trabajo de Helbing [4] en el cual se describe el cambio del comportamiento de la población afectada por un campo social. Por otra parte, fenómenos tales como las actividades delictivas y su efecto sobre la economía local han sido modelados utilizando teoría juegos diferenciales [5]. En este sentido, la propuesta es la descripción del crecimiento económico sujeto a actividades delictivas desde una perspectiva estocástica, inspirada en el hecho ya mencionado del desarrollo que se tiene sobre la teoría, y además de la posibilidad de extender el concepto del proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* a sistemas socio-económicos. La delincuencia en general se ha visto presente en diferentes países, ya sean estos países con economías desarrolladas o países que se encuentran en desarrollo, pero que pasa cuando la delincuencia se quiere introducir en una sociedad y tiene que corromper a las instituciones de seguridad en el país, ¿cómo se desarrolla esto en cada estructura de diferentes tipos de sociedades?. En este sentido analizamos dos escenarios, un escenario en el cual vemos una sociedad la cual no acepta con facilidad a la delincuencia, es más, se comporta de una manera hostil ante ella, y otro escenario el cual se comporta de forma tal, que no tiene mucho control sobre la delincuencia, se

analizan estos dos casos de manera separada.

## 2. MODELO DETERMINISTA

Se considera a un comerciante que al tiempo  $t$  tiene un capital acumulado  $x(t)$ , el cual es completamente invertido en su negocio. Sin la influencia de los delincuentes, éste capital crece a una tasa constante  $q$ . Ahora, si se considera la presencia de la delincuencia, al tiempo  $t$  el comerciante es amenazado, por lo que tiene dos opciones: rechazar o aceptar la demanda delictiva. Si la demanda es rechazada, el delincuente procede con su amenaza en un instante de tiempo posterior  $t + \Delta$  con una probabilidad  $\Upsilon(\Delta; e_g, e_p)$ , siendo  $e_g(t)$  el *esfuerzo del delincuente* por mantener su demanda en pie y  $e_p(t)$  el *esfuerzo de la policía* por proteger al comerciante. La demanda de los delincuentes está representada por:

$$\Theta_{\Delta} = \Upsilon(\Delta; e_g, e_p)e^{q\Delta}x(t), \quad (1)$$

lo cual nos conduce a la acumulación de capital en  $t + \Delta$ :

$$x(t + \Delta) = e^{q\Delta}x(t)(1 - \Upsilon(\Delta; e_g, e_p)). \quad (2)$$

Para  $\Delta \rightarrow 0$  se tiene

$$\dot{x} = (q - f(e_g, e_p))x, \quad (3)$$

donde la tasa de amenaza delictiva

$$f(e_g, e_p) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Upsilon(\Delta; e_g, e_p)/\Delta, \quad (4)$$

es la propuesta en [5]. La interacción entre los delincuentes, los policías y la población está basada en teoría de juegos diferenciales. Así, se consideran la funcional objetivo para los delincuentes:

<sup>1</sup>Email: [sekemnept@yahoo.es](mailto:sekemnept@yahoo.es)

<sup>2</sup>Email: [gramirez@ulb.ac.be](mailto:gramirez@ulb.ac.be)

$$\begin{aligned} & \max_{e_g} \int_0^{\infty} e^{-\rho_g t} (\Theta - c_g(e_g)) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\rho_g t} (x f(e_p, e_g) - c_g(e_g)) dt, \end{aligned} \quad (5)$$

y para los policías

$$\begin{aligned} f1(e_p, e_g) &= \kappa(x f(e_p, e_g) - c_g(e_g)), \\ f2(e_p, e_g) &= (1 - \kappa)(q - f(e_p, e_g))x - c_p(e_p), \\ \max_{e_p} \int_0^{\infty} e^{-\rho_p t} [f1(e_p, e_g) + f2(e_p, e_g)] dt, \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $c_p(e_p), c_g(e_g)$  son las funciones de costo para ambos jugadores,  $\kappa$  es el parámetro de corrupción, el cual describe el grado en el cual los delincuentes son capaces de corromper a la policía y  $\rho_g, \rho_p$  son las tasas de descuento temporal de ambos jugadores. Además, se tiene la forma funcional para la tasa de amenaza,

$$f = \Phi e_p^{\alpha_p} e_g^{\alpha_g}, \quad (7)$$

para la función de costo de los delincuentes

$$c_g(e_g) = c_g e_g^{\beta_g}, \quad (8)$$

y para la función de costo de los policías

$$c_p(e_p) = c_p e_p^{\beta_p}, \quad (9)$$

con  $c_p, c_g, \beta_p, \beta_g, \alpha_g, \Phi$  y  $\alpha_p < 0$  constantes.  $\Phi$  es la reacción de la población frente a las actividades delincuenciales.

Aplicando el principio del máximo de Pontryagin [10]. Se halla la forma de las estrategias o trayectorias de control óptimo para ambos jugadores [5]:

$$e_g^*(x) = \left[ \alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^{1+\alpha} c_p^\alpha}{(1 + \lambda_p - 2\kappa)^\alpha c_g^{1+\alpha}} \right]^{\frac{1}{\beta_g}} x^{\frac{1}{\beta_g}}, \quad (10)$$

$$e_p^*(x) = \left[ \alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^\alpha (1 + \lambda_p - 2\kappa)^{1-\alpha}}{c_p^{1-\alpha} c_g^\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta_p}} x^{\frac{1}{\beta_p}}, \quad (11)$$

donde  $\lambda_g, \lambda_p$ , son los precios sombra o los valores actuales de coestado de la acumulación de capital para cada jugador. De (10) y (11), se puede encontrar también la expresión para la tasa de amenaza en equilibrio

$$f^*(e_p^*, e_g^*) = \Phi \left[ \frac{(1 - \lambda_g) c_p}{(1 + \lambda_p - 2\kappa) c_g} \right]^\alpha, \quad (12)$$

donde  $\alpha \equiv \alpha_p/\beta_p = \alpha_g/\beta_g$ . Uno de los resultados interesantes que sugiere la expresión (12) es el hecho de que la tasa de amenaza en equilibrio crece con el nivel de corrupción de la policía  $\kappa$ , hasta un valor  $\kappa$  crítico, véase Fig. 1, para el cual, la tasa de amenaza en equilibrio se bifurca presentando valores muy grandes. Entonces para valores pequeños de  $\kappa$  dentro del intervalo  $[0, 1]$ , existen los valores constantes  $\lambda_g \in (0, 1)$  y  $\lambda_p \in (-1, \infty)$ , tales que

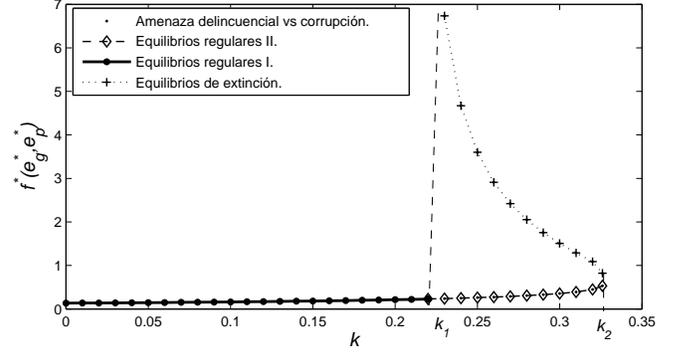


Figura 1. Tasa de amenaza en equilibrio en función del nivel de corrupción de la policía para  $c_p = 0,6$ ,  $c_g = 0,9$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\Phi = 0,2$ ,  $\rho_g = \rho_p = 1$ , donde  $\kappa_1 = 0,22$ ,  $\kappa_2 = 0,326$ .

el par de estrategias (10) y (11) constituyen un equilibrio perfecto de *Markov* en el juego.

Existen dos tipos de equilibrio, un único equilibrio para  $\kappa \leq \kappa_1$ , y un otro equilibrio para  $\kappa \in (\kappa_1, \kappa_2]$  con valores bajos de la tasa de amenaza en equilibrio, los cuales son llamados *equilibrios regulares*. El otro equilibrio correspondiente a la rama de  $\kappa \in (\kappa_1, \kappa_2]$  con valores altos de la tasa de amenaza en equilibrio, es llamado *equilibrios de extinción*. En los equilibrios regulares, la tasa de amenaza en equilibrio aumenta con el nivel de corrupción de la policía. En tanto que en los equilibrios de extinción la tasa de amenaza en equilibrio disminuye con el nivel de corrupción y, cuando nos aproximamos a  $\kappa_1$  tiende a infinito, ver Fig. 1.

Si se considera un escenario donde los valores de la corrupción se encuentran cercanos al valor de  $\kappa_1$ , deberíamos esperar que el equilibrio regular permanezca también para  $\kappa > \kappa_1$ ; sin embargo, se tiene que para valores de  $\kappa$  ligeramente mayores que  $\kappa_1$ , repentinamente se genera un segundo equilibrio, donde se tienen valores muy altos de la tasa de amenaza en equilibrio. En este caso  $\lambda_g \approx 1$  y  $\lambda_p \approx 2\kappa - 1$ , lo cual implica que los valores de los esfuerzos de ambos jugadores están dentro de  $[0, 1]$ . Los esfuerzos de los delincuentes son mayores que los de los policías, induciendo así una gran tasa de amenaza, lo cual implica que en los equilibrios de extinción, la policía conspira con los delincuentes y no ofrece protección, permitiendo que la extorsión aumente y se constituya en un daño significativo hacia las actividades económicas. En lo que sigue, nos enfocaremos en el estudio de las estrategias (10) y (11), sujetas al comportamiento estocástico de la acumulación de capital.

### 3. MODELO ESTOCÁSTICO

En este modelo, se considera la *ecuación de Langevin* como ecuación fenomenológica, la cual representará en cada instante de tiempo el crecimiento de la cantidad de capital acumulado y a su vez, el estado del juego diferencial estocástico. En este sentido, el crecimiento del capital acumulado es considerado como el movimiento unidimensional de una partícula *browniana*, la cual

está inmersa en un fluido y experimenta fluctuaciones en su movimiento debido a la fuerza fluctuante  $\Gamma(t)$ . A su vez, la partícula está sometida a una fuerza de fricción que es proporcional a su velocidad; es decir:

$$F_f(v) = -\zeta v, \quad (13)$$

la cual corresponde a la fuerza análoga dada por:

$$F(x) = -\mu x, \quad (14)$$

donde  $F(x)$ , representa la fuerza socio-económica, proporcional al crecimiento del capital acumulado de la sociedad multiplicado por el coeficiente  $\mu$ . Esta fuerza en relación con el potencial socio-económico estará dada por  $F(x) = -\frac{d}{dx}V(x)$ , al igual que su análogo para la partícula browniana, es decir:  $F_f(v) = -\frac{d}{dv}V(v)$ .

En el modelo, se asume que el fluido representa a la sociedad<sup>3</sup> donde el potencial  $V(x)$  puede ser entendido como el campo socio-económico, el cual refleja la influencia social y las interacciones relevantes para el cambio en el comportamiento de la variable macroscópica que corresponde al crecimiento de la cantidad de capital acumulado. En consecuencia, se tiene un juego diferencial estocástico sujeto a un proceso del tipo *Ornstein-Uhlenbeck* en el cual, si  $q < f^*$ , da lugar a un potencial socio-económico parabólico para el proceso. Entonces, la ecuación de *Langevin* para este caso será:

$$dx_t = -\mu x_t dt + \sigma dW_t, \quad (15)$$

análogamente

$$dv_t = -\zeta v_t dt + \sigma dB_t, \quad (16)$$

donde  $\mu = q - f^*$ ,  $\zeta = \zeta_b/m$ ,  $dB_t = \Gamma_b(t)/m = \Gamma(t)$  y  $m$  es la masa<sup>4</sup> de la partícula browniana. Ahora si se escribe (15) como:

$$dx_t = -\mu x_t dt + \text{fluctuaciones}, \quad (17)$$

se tiene que el término  $\sigma \dot{W}_t = \sigma dW_t = \sigma \xi(t)$  es la fuerza aleatoria socio-económica que es una variable estocástica asociada al ruido que producen las fluctuaciones de la actividad económica de la sociedad en la acumulación de capital. Despreciando dichas fluctuaciones, volvemos a la ecuación determinista para el crecimiento del capital acumulado (3).

Se asume que  $\xi(t)$  es un ruido blanco delta correlacionado, es decir

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t'),$$

<sup>3</sup>En la analogía de la sociedad con el fluido, se considera a cada agente económico de la sociedad como una molécula del fluido; donde éstos contribuyen de una manera aleatoria con el crecimiento económico, en términos de la acumulación de capital. En el modelo la interacción relevante en la sociedad es dada entre los policías con los delincuentes, tomando en cuenta la actitud de la sociedad frente a la delincuencia.

<sup>4</sup>Se considera al tamaño del capital acumulado como análogo a la masa.

análogamente para el caso de la partícula browniana se tiene:

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0, \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t'),$$

donde el factor de peso  $\sigma^2$  es la medida de la intensidad de ruido. Además, se tiene que la función de correlación  $\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle$  es proporcional a la función  $\delta$ . Asimismo, el juego diferencial estocástico estará sujeto a la ecuación fenomenológica

$$dx_t = \mu x_t dt + \sigma dW_t. \quad (18)$$

Si  $q > f^*$ , se tiene un potencial socio-económico parabólico invertido para el proceso. Análogamente para la partícula browniana se tiene que:

$$dv_t = \zeta v_t dt + \sigma dB_t. \quad (19)$$

### 3.1. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LANGEVIN

Para esto, se considera una ecuación de *Fokker-Planck* para la evolución temporal de la densidad de probabilidad de la variable macroscópica  $x$ . Entonces, para un potencial parabólico dado por

$$V(x) = \frac{1}{2}\mu x^2. \quad (20)$$

La ecuación de *Langevin* (15) se resuelve realizando el cambio:  $y = \frac{\sqrt{\mu}}{\sigma}x$  con  $t' = \mu t$  [9], y rescribiendo  $t' = t$  se tiene:

$$dy_t = -y_t dt + dW_t, \quad (21)$$

que según la interpretación de *Ito*, se tendrá la ecuación asociada de *Fokker-Planck*

$$\frac{\partial P(y, t|y_0)}{\partial t} = -\frac{\partial P(y, t|y_0)}{\partial y}y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(y, t|y_0)}{\partial y^2}, \quad (22)$$

donde  $P(y, t|y_0)$  es la densidad de probabilidad de transición en función del tiempo. Para el caso en el que se tiene un potencial parabólico invertido

$$V(x) = -\frac{1}{2}\mu x^2. \quad (23)$$

La ecuación de *Fokker-Planck* para (23) tiene la forma:

$$\frac{\partial P(y, t|y_0)}{\partial t} = \frac{\partial P(y, t|y_0)}{\partial y}y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(y, t|y_0)}{\partial y^2}. \quad (24)$$

Finalmente, para el caso en el que el potencial es cero se tiene la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial P(y, t|y_0)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(y, t|y_0)}{\partial y^2}, \quad (25)$$

que corresponde a un proceso de *Wiener*.

### 3.2. EXPANSIÓN EN AUTOFUNCIONES DE LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN

Escribiendo la densidad de probabilidad como:

$$P(y, t) = \varphi(y)e^{-\lambda t}, \quad (26)$$

esto nos conduce a

$$L_{\text{FP}}\varphi(y) = -\lambda\varphi(y), \quad (27)$$

es decir

$$-y\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(y)}{\partial y^2} = -\lambda\varphi(y), \quad (28)$$

donde  $L_{\text{FP}}$  es el operador de Fokker-Planck. Ahora escribiendo:

$$e^{y^2}L_{\text{FP}}\varphi(y)e^{-y^2} = -\lambda\varphi(y), \quad (29)$$

el operador  $L_{\text{FP}}$  es transformado en el operador  $\bar{L}_{\text{FP}}$ , el cual es Hermitiano. Donde las autofunciones de este operador estarán dadas por:

$$\psi(y) = \varphi(y)e^{y^2}. \quad (30)$$

Por tanto, (21) se reduce a un problema de autovalores,  $\lambda_n = n$  con  $n = 1, 2, \dots$  y autofunciones

$$\psi_{\lambda_n} = H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n}(e^{-y^2}), \quad (31)$$

las cuales son los polinomios de *Hermite*. Además, las autofunciones cumplen las condiciones de ortogonalidad:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} H_n(y) H_m(y) dy = 0, \quad (32)$$

para  $n \neq m$  y

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} H_n^2(y) dy = \sqrt{\pi} 2^n n! = C_n^{-1}. \quad (33)$$

Por lo que las autofunciones ortonormalizadas toman la forma:

$$\psi_n(y) = \tilde{H}_n(y) = \sqrt{C_n} H_n(y). \quad (34)$$

La solución formal de (22) dependiente del tiempo con la condición inicial:

$$P(y, t|y_0) = \delta(y - y_0), \quad (35)$$

puede ser escrita [8]:

$$P(y, t|y_0) = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(y) \psi_n(y_0) e^{-nt}. \quad (36)$$

De este modo se tiene la expansión de la densidad de probabilidad de transición en autofunciones  $\psi_n$ . Por lo tanto (36) es la representación espectral de la densidad de probabilidad de transición  $P(y, t|y_0)$ . Ahora, tomando en cuenta (34) se tiene:

$$P(y, t|y_0) = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{H}_n(y) \tilde{H}_n(y_0) e^{-nt}. \quad (37)$$

La autofunción  $\psi_0(y)$  representa en este caso la densidad de probabilidad estacionaria correspondiente al autovalor  $n = 0$  y para la autofunción  $H_0(y) = 1$  no normalizada, de modo que:

$$\psi_0(y) = \sqrt{N} H_0(y) e^{-y^2}. \quad (38)$$

Entonces, es posible hallar la densidad de probabilidad estacionaria calculando  $N$ , de manera que:

$$N^{-1} = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\sigma^2 \pi}{\mu}}, \quad (39)$$

donde finalmente  $\psi_0(y)$  toma la forma:

$$\psi_0(y) = \sqrt[4]{\frac{\mu}{\sigma^2 \pi}} e^{-y^2}. \quad (40)$$

En virtud de la fórmula de Mehler<sup>5</sup> [9], la serie en (37) puede ser sumada. En consecuencia, se llega a la expresión definitiva de la densidad de probabilidad de transición:

$$P(y, t|y_0) = \sqrt{\frac{1}{\pi(1 - e^{-2t})}} \exp\left[-\frac{(y - y_0 e^{-t})^2}{1 - e^{-2t}}\right]. \quad (41)$$

Tomando en cuenta que  $\lambda_n = \mu n$  debido a  $t' = \mu t$  en la variable de estado  $x$  y además  $y = \frac{\sqrt{\mu}}{\sigma} x$ , entonces (41) toma la forma:

$$P(x, t|x_0) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi\sigma^2(1 - e^{-2\mu t})}} \exp\left[-\frac{\mu(x - x_0 e^{-\mu t})^2}{\sigma^2(1 - e^{-2\mu t})}\right]. \quad (42)$$

Se concluye por lo tanto que (37) es la representación espectral de  $P(x, t|x_0)$  con  $y = \frac{\sqrt{\mu}}{\sigma} x$  y además que las autofunciones  $\psi_n$  juntamente con los autovalores  $\lambda_n = \mu n$  forman un conjunto completo. Por tanto, el espectro del proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* es puramente discreto, dado que  $\lambda_n = \mu n$ ; en otras palabras, el espectro consiste de todos los armónicos de frecuencia de relajación  $\mu$  del proceso.

Siguiendo el mismo procedimiento, para el caso del potencial parabólico invertido, el proceso no tiene una solución estacionaria lo cual implica que los autovalores tienen la forma  $\lambda_n = n + 1$ , de modo que (36) resulta:

$$P(y, t|y_0) = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{H}_n(y) \tilde{H}_n(y_0) e^{-nt} e^{-t}. \quad (43)$$

Por tanto, se tiene:

$$P(y, t|y_0) = \sqrt{\frac{1}{\pi(1 - e^{-2t})}} \exp\left[\frac{(y_0 e^{-\mu t} - y)^2}{1 - e^{-2t}}\right] e^{-t}. \quad (44)$$

<sup>5</sup>Esta fórmula corresponde a la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)\pi}} \exp\left(\frac{-(x^2 + y^2 z^2 - 2xyz)}{1 - z^2}\right) = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tilde{H}_n(x) \tilde{H}_n(y).$$

Finalmente, tomando en cuenta que  $\lambda_n = \mu(n + 1)$  debido a  $t' = \mu t$  en la variable de estado  $x$  y además que  $y = \frac{\sqrt{\mu}}{\sigma} x$ , entonces se tiene:

$$P(x, t|x_0) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi\sigma^2(1 - e^{-2\mu t})}} \exp\left[\frac{\mu(x_0 e^{-\mu t} - x)^2}{\sigma^2(1 - e^{-2\mu t})}\right] e^{-\mu t}. \quad (45)$$

### 3.3. COEFICIENTES DE ARRASTRE Y DIFUSIÓN EN RELACIÓN CON LA FUERZA SOCIO-ECONÓMICA

De (15) y (21) se tiene que

$$dx_t = h(x, t)dt + g(x, t)dW_t, \quad (46)$$

con  $g(x, t) = \sigma$  y  $h(x, t) = \mp\mu x$ . La relación de ambas funciones con la ecuación de *Fokker-Planck* está dada mediante los coeficientes de la interpretación de *Ito* [8]:

$$D^{(1)}(x, t) = h(x, t) \quad (47)$$

y

$$D^{(2)}(x, t) = g^2(x, t), \quad (48)$$

donde

$$g^2(x, t) = \sigma^2 = \text{cte}. \quad (49)$$

Por otro lado, la varianza para el proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* en términos del coeficiente de difusión  $D$  es

$$\sigma^2 = 2\mu^2 D(1 - e^{-2\mu t}). \quad (50)$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión del proceso. Además, se tiene que el coeficiente de arrastre para el proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* sujeto a potenciales parabólicos está dado por

$$D^{(1)}(x, t) = \mp\mu x = F(x, t). \quad (51)$$

Para  $t \rightarrow \infty$  se verifica que

$$D = \frac{\sigma^2}{2\mu^2}. \quad (52)$$

Se puede ver que el coeficiente de arrastre del proceso, corresponde a la fuerza socio-económica en el modelo. Entonces, el campo socio-económico dependiente del tiempo puede ser escrito como

$$V(x, t) = -\frac{D^{(1)}(x, t)x}{2}. \quad (53)$$

Entonces, las expresiones (42) y (45) se pueden escribir en términos del coeficiente de difusión como

$$P(x, t|x_0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\mu D(1 - e^{-2\mu t})}} e^{-\frac{V(x, t)}{D}} \quad (54)$$

y

$$P(x, t|x_0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\mu D(1 - e^{-2\mu t})}} e^{-\frac{V(x, t)}{D}} e^{-\mu t}, \quad (55)$$

respectivamente, donde los campos socio-económicos dependientes del tiempo

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \frac{(x - x_0 e^{-\mu t})^2}{2\mu(1 - e^{-2\mu t})} \\ V(x, t) &= \frac{(x_0 e^{-\mu t} - x)^2}{2\mu(1 - e^{-2\mu t})}, \end{aligned}$$

corresponden a (54) y (55) respectivamente. En consecuencia (40) puede ser escrita como

$$P_{\text{est}}(x) = \psi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{4D\pi\mu}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D\mu}\right], \quad (56)$$

### 3.4. JUEGO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICO

Las expresiones para las estrategias de los jugadores representados por los niveles de esfuerzos de los delincuentes y los policías, toman la forma

$$e_g^*(x, t) = \left[ \alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^{1+\alpha} c_p^\alpha}{(1 + \lambda_p - 2\kappa)^\alpha c_g^{1+\alpha}} \right]^{\frac{1}{\beta_g}} P(x, t)^{\frac{1}{\beta_g}}, \quad (57)$$

y

$$e_p^*(x, t) = \left[ \alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^\alpha (1 + \lambda_p - 2\kappa)^{1-\alpha}}{c_p^{1-\alpha} c_g^\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta_p}} P(x, t)^{\frac{1}{\beta_p}}, \quad (58)$$

debido a que el crecimiento de la acumulación de capital está representado por (42) y (45); los niveles de esfuerzo de ambos jugadores estarán sujetos al comportamiento de las densidades de probabilidad fuera del equilibrio termodinámico. Así, las funcionales objetivo de cada jugador estarán sujetas a los valores esperados de los niveles de esfuerzo, es decir

$$\max_{e_g} E(e_g) \left[ \int_0^\infty e^{-\rho_g t} (x\gamma(e_p, e_g) - c_g(e_g)) \right] dt, \quad (59)$$

para los delincuentes y

$$g1(e_p, e_g) = \kappa(x\gamma(e_p, e_g) - c_g(e_g)),$$

$$g2(e_p, e_g) = (1 - \kappa)(q - \gamma(e_p, e_g))x - c_p(e_p),$$

$$\max_{e_p} E(e_p) \left[ \int_0^\infty e^{-\rho_p t} [g1(e_p, e_g) + g2(e_p, e_g)] \right] dt, \quad (60)$$

para los policías. Así, (57) y (58), para el *estado estacionario* o de equilibrio termodinámico del proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* sujeto a un potencial parabólico, adoptan la forma

$$e_g^*(x) = \left[ \alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^{1+\alpha} c_p^\alpha}{(1 + \lambda_p - 2\kappa)^\alpha c_g^{1+\alpha}} \right]^{\frac{1}{\beta_g}} P_{\text{est}}(x)^{\frac{1}{\beta_g}}, \quad (61)$$

$$e_p^*(x) = \left[ \alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^\alpha (1 + \lambda_p - 2\kappa)^{1-\alpha}}{c_p^{1-\alpha} c_g^\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta_p}} P_{\text{est}}(x)^{\frac{1}{\beta_p}}, \quad (62)$$

de modo que los valores esperados serán

$$E(e_g^*) = \left[ \alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^{1+\alpha} c_p^\alpha}{(1 + \lambda_p - 2\kappa)^\alpha c_g^{1+\alpha}} \right]^{\frac{1}{\beta_g}} (\pi D \mu)^{\frac{1}{4\beta_g}}, \quad (63)$$

$$E(e_p^*) = \left[ \alpha \Phi \frac{(1 - \lambda_g)^\alpha (1 + \lambda_p - 2\kappa)^{1-\alpha}}{c_p^{1-\alpha} c_g^\alpha} \right]^{\frac{1}{\beta_p}} (\pi D \mu)^{\frac{1}{4\beta_p}}, \quad (64)$$

debido a que el valor esperado de la densidad de probabilidad estacionaria (40) para el crecimiento de la acumulación de capital está dado por

$$E(x) = \int_0^\infty x P_{\text{est}}(x) dx = \sqrt[4]{\pi D \mu}. \quad (65)$$

#### 4. ESCENARIOS SOCIO-ECONÓMICOS

Se caracterizan los escenarios socio-económicos en base a (i) la actitud de la sociedad frente a las actividades delincuenciales, (ii) la corrupción<sup>6</sup> de la policía, y (iii) la actitud de ambos jugadores frente a sus utilidades. La primera situación es reflejada por el parámetro  $\tilde{\phi} = \frac{\phi}{q} \left[ \frac{c_p}{c_g} \right]^\alpha$ , donde  $q$  es la tasa de crecimiento económico<sup>7</sup>;  $c_g$  y  $c_p$  son los coeficientes asociados a las funciones de costos (8) y (9) para ambos jugadores y  $\alpha$  puede ser interpretado como la demanda de trabajo en el área; en este sentido, un alto nivel de desempleo es representado por valores grandes de  $\alpha$ , mientras que una alta demanda de trabajo es representada por valores pequeños de  $\alpha$ . Entonces, si  $\tilde{\phi} > 1$  se tiene un escenario en el cual la sociedad es tolerante hacia las actividades delincuenciales, mientras que si  $\tilde{\phi} < 1$  la sociedad es hostil a las actividades delincuenciales. La segunda situación es reflejada en el comportamiento de la tasa de amenaza  $f^*$  en equilibrio, en función del nivel de corrupción  $\kappa$ . En este sentido, como se pudo observar en la Fig. 1, para un mismo nivel de corrupción existen dos situaciones en las cuales se tienen; por un lado, una sociedad sumergida en la delincuencia debido a los altos niveles de amenaza<sup>8</sup>, y por el otro lado, una sociedad sujeta a la delincuencia, pero con bajos niveles de amenaza<sup>9</sup>. Todo este comportamiento se puede observar dentro de los niveles de corrupción pertenecientes al intervalo  $[\kappa_1, \kappa_2]$ . Finalmente, la tercera situación se refleja en los parámetros  $\rho_g$  y  $\rho_p$ , los cuales representan las tasas de descuento temporal para los delincuentes y policías respectivamente.

<sup>6</sup>La definición de corrupción que se utiliza en el trabajo, es la definición utilizada por el "Banco Mundial", la cual es, "El abuso de las instituciones públicas para la ganancia privada". (World Bank, "Helping Countries Combat Corruption: The role of the World Bank", 1997).

<sup>7</sup>El crecimiento económico es considerado en términos de la acumulación de capital.

<sup>8</sup>La situación descrita por altos niveles de amenaza delincencial, es considerada como el efecto del alto grado de conspiración entre delincuentes y policías para con el crecimiento económico de la región.

<sup>9</sup>En esta situación, se considera el efecto de un bajo grado de conspiración entre delincuentes y policías.

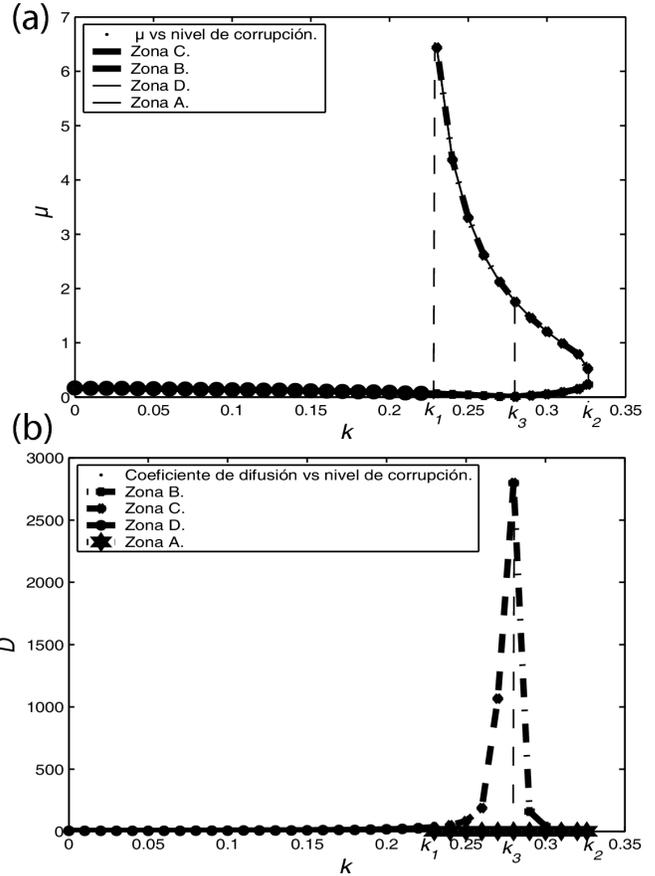


Figura 2. Comportamiento de (a)  $|\mu|$ , (b)  $D$  en función del nivel de corrupción de la policía  $\kappa$ , para  $q = 0,3$ ,  $\tilde{\phi} = 0,48$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $c_g = 0,9$ ,  $c_p = 0,6$ ,  $\phi = 0,2$ ,  $\rho_g = \rho_p = 1$ . Los puntos críticos característicos corresponden a  $\kappa_1 = 0,22$ ,  $\kappa_2 = 0,326$  y  $\kappa_3 = 0,28$ .

Valores de  $\rho_g \geq 1$  y  $\rho_p \geq 1$ , se traducen en una actitud miope<sup>10</sup> de ambos jugadores.

#### 4.1. ESCENARIO I

Este escenario está caracterizado por una actitud hostil de la sociedad hacia los delincuentes, donde se tiene una alta demanda de trabajo, y la policía así como los delincuentes toman una actitud miope. El comportamiento de  $f^*$  en función de  $\kappa$ , se muestra en la Fig. 1, donde para un mismo nivel de corrupción, puede haber un daño significativo en el crecimiento económico<sup>11</sup> ( $f^* \rightarrow \infty$ ), mientras que para  $f^* \rightarrow 0$ , no se tiene ningún efecto significativo.

A continuación se analiza el comportamiento de  $\mu$  y  $D$  mediante un enfoque termodinámico y otro socio-económico.

<sup>10</sup>La miopía es considerada como la actitud en la cual, ni los policías, ni los delincuentes, tienen una visión a largo plazo; es decir, ambos solo ven los beneficios de sus utilidades a corto plazo.

<sup>11</sup>Para el modelo estocástico, el crecimiento económico es considerado una variable aleatoria, debido a que este no solamente está influenciado por  $f^*$ , sino también por el efecto de las contribuciones aleatorias de cada individuo relacionado con alguna actividad económica dentro de la sociedad.

#### 4.1.1. ENFOQUE TERMODINÁMICO

En la Fig. 4(a) se puede observar que  $\mu$ , presenta en el intervalo  $[\kappa_1, \kappa_2]$  la coexistencia de tres curvas caracterizadas por zonas en el modelo estocástico, las cuales representan el grado de fricción para el movimiento de la partícula que se las describe de la siguiente manera:

- La **zona A** además de representar a los equilibrios de extinción en el modelo estocástico, está caracterizada por ser una región de **alta fricción**, es decir, que dentro de ésta, el proceso que gobierna el comportamiento de la partícula browniana, es el proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* sujeto a un potencial parabólico, debido a la presencia de una fuerza de fricción, donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción. La presencia de este potencial implica que el proceso tiene una solución estacionaria dada por (40), la cual describe al sistema en el equilibrio termodinámico. Dentro de la misma zona, se tienen dos casos límite para la alta fricción, uno está dado para el punto crítico  $\kappa_1$  (límite máximo), y el otro para  $\kappa_2$  (límite máximo).
- La **zona B** además de representar a los equilibrios regulares en el modelo estocástico, está caracterizada por ser una región de **baja fricción**, lo cual implica que está gobernada por un proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* sujeto a un potencial parabólico, debido a la presencia de una fuerza socio-económica, donde  $\mu$  es nuevamente el coeficiente de fricción. Dentro de esta misma zona, se tienen dos casos límite para la baja fricción, uno está dado para el punto crítico  $\kappa_2$  (límite máximo) y el otro para  $\kappa_3$  (límite mínimo).
- La **zona C** representa también a los equilibrios regulares en el modelo estocástico. Está caracterizada por ser una región con **ausencia de fricción**; en consecuencia, la zona tiene un proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* sujeto a un potencial parabólico invertido, debido a la presencia de una fuerza socio-económica, donde  $\mu$  no se comporta como un coeficiente de fricción. La presencia de este potencial en el proceso, implica que éste no tiene una solución estacionaria, por lo cual, la zona no describe un equilibrio termodinámico. Al igual que en las otras dos zonas descritas anteriormente, ésta tiene dos casos límite para la ausencia de fricción, uno está dado para el punto crítico  $\kappa_1$  (límite máximo), y el otro para  $\kappa_3$  (límite mínimo).
- La **zona D** representa también a los equilibrios regulares en el modelo estocástico. La misma, está caracterizada también por ser una región con **ausencia de fricción**, lo cual implica que está gobernada por un proceso de *Ornstein-Uhlenbeck*, sujeto a un potencial parabólico invertido. Ésta zona corresponde al intervalo de  $[\kappa = 0, \kappa_1]$ , en el que los valores de  $\mu$  disminuyen a medida que el nivel de corrupción

aumenta, como efecto de que los valores de  $f^*$  se incrementan con el nivel de corrupción.

En la Fig. 4(b), se puede observar también la presencia de las cuatro zonas mencionadas anteriormente. Vemos que, mientras el parámetro de corrupción se incrementa, el sistema está sujeto gradualmente a la influencia de  $f^*$  mediante el parámetro  $\mu$ . En consecuencia, para los niveles de corrupción dentro del intervalo  $[\kappa_1, \kappa_2]$ , en el sistema ocurren transiciones debido a que ocurren también transiciones en el proceso de *Ornstein-Uhlenbeck*. Así, tomando en cuenta las transiciones dadas en los puntos críticos  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  y  $\kappa_3$ ; se tiene que en el punto crítico representado por  $\kappa_1$ , ocurre una transición que va de la **zona C** a la **zona A**, y viceversa<sup>12</sup>, a medida que los valores de  $\mu$  se aproximan al límite máximo para la alta fricción correspondiente a la **zona A**; en consecuencia, debido a la dependencia del coeficiente de difusión  $D$  con el parámetro  $\mu$ , los valores de  $D$  tienden a cero. Dado que la **zona A** puede presentar un equilibrio termodinámico para el proceso, entonces se toma en cuenta la energía media de la partícula, que por el principio de equipartición,

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}k_b T, \quad (66)$$

donde  $k_b$  es la constante de Boltzmann,  $m$  es la masa de la partícula y  $T$  es la temperatura. También,  $t \rightarrow \infty$  es

$$\langle E \rangle = m\mu^2 D = \frac{1}{2}k_b T. \quad (67)$$

En consecuencia,  $D \propto T$  en el equilibrio termodinámico. Así, se puede decir que a medida que  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow 0$ , por lo cual el proceso se encontrará en la **zona A**. Para el punto crítico representado por  $\kappa_3$ , se tienen dos transiciones: por un lado, ocurre una transición que va de la **zona C** a la **zona B** y viceversa, por el otro lado, ocurre una transición que va de la **zona C** a la **zona A** y viceversa. Entonces, en el primer caso, la transición es posible si los valores de  $\mu$  se aproximan al límite mínimo para la baja fricción de la **zona B**; es decir,  $\mu \sim 0$ . En consecuencia  $T \rightarrow \infty$  ya que  $D \rightarrow \infty$ . Para el segundo caso, la transición es posible, si los valores de  $\mu$  se aproximan a la zona de alta fricción correspondiente a la **zona A**; es decir,  $\mu \rightarrow \infty$ . En consecuencia,  $D \rightarrow 0$ , lo que implica que  $T \rightarrow 0$ . Finalmente, para el punto crítico representado por  $\kappa_2$ , se tiene una transición que va de la **zona B** a la **zona A** y viceversa, a medida que los valores de  $\mu$  se aproximan al límite mínimo para la alta fricción correspondiente a la **zona A**. Así,  $\mu \rightarrow \infty$ , con lo que  $D \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow 0$ .

#### 4.1.2. ENFOQUE SOCIO-ECONÓMICO

La sociedad al ser considerada como un fluido; puede caracterizarse por el comportamiento de  $f^*$  mediante  $\mu$ , en función del nivel de corrupción de la policía. Del enfoque termodinámico, hemos visto comportamientos de  $\mu$

<sup>12</sup>La transición puede ser de la **zona C** a la **zona A** y viceversa, ya que ambas zonas coexisten para un mismo punto crítico.

y  $D$ , en los cuales se reconocen cuatro zonas con distintas características. La **zona A** de alta fricción, la cual está caracterizada por valores de  $D$  tendiendo a cero, lo que implica dentro del contexto socio-económico que las fluctuaciones en el crecimiento económico son mínimas; es decir, que las contribuciones en el crecimiento económico de cada individuo de la sociedad son casi nulas. Debido a que  $\mu \rightarrow \infty$ , la influencia de este parámetro sobre el crecimiento económico es muy significativa, en consecuencia  $f^*$  lo es también sobre  $\mu$ . Éste análisis, nos conduce a afirmar que, la influencia de la amenaza delincriminal sobre el crecimiento económico es tan grande, que las actividades económicas de la sociedad se ven muy afectadas, teniéndose consecuencias muy dañinas que obstaculizan en gran medida el crecimiento económico. Debido a que, la **zona B** representa a la región de baja fricción en el enfoque termodinámico, no se tiene una influencia significativa de  $\mu$  sobre las fluctuaciones del crecimiento económico. Es decir, que  $f^*$  al no tener una incidencia muy grande sobre  $\mu$ , las actividades económicas dentro la sociedad no son influenciadas en gran medida por la amenaza delincriminal; en consecuencia, el crecimiento económico no es obstaculizado. Sin embargo, a medida que nos aproximamos al punto crítico dado por  $\kappa_3$ , la influencia de  $\mu$  tiende a cero y la difusión del proceso tiende a infinito. Como resultado se tienen grandes fluctuaciones en el crecimiento económico, debido a que las contribuciones de cada individuo de la sociedad, no están sujetas a los potenciales socio-económicos; de lo cual, se puede decir que el crecimiento económico está libre de la influencia de la amenaza delincriminal. Como la **zona C** y la **zona D** están caracterizadas por una ausencia de fricción en el enfoque termodinámico; este hecho dentro del contexto socio-económico, significa que la influencia del potencial dado por (23) es muy significativa en el crecimiento económico; en consecuencia, las contribuciones de los individuos de la sociedad en el crecimiento económico no son afectadas por la influencia de la amenaza delincriminal.

Dentro del contexto socio-económico, las transiciones que ocurren dentro el intervalo de los puntos críticos para el nivel de corrupción dado por  $[\kappa_1, \kappa_2]$ , son interpretadas como transiciones del sistema socio-económico, donde se encuentra la coexistencia de las tres zonas descritas anteriormente, las cuales pueden ser clasificadas como sigue:

- La **zona A** representa una **región de mayor riesgo** para el crecimiento económico, debido a la gran influencia de la amenaza delincriminal sobre la sociedad.
- La **zona B** representa una **región de menor riesgo** para el crecimiento económico, debido a la pequeña influencia de la amenaza delincriminal sobre la sociedad.
- La **zona C** y la **zona D** representan las **regiones de mínimo riesgo** para el crecimiento económico,

debido a la influencia no perceptible de la amenaza delincriminal sobre la sociedad.

Entonces, las transiciones ocurren entre éstas zonas a medida que la influencia de  $f^*$  sobre los potenciales socio-económicos sea significativa o no. Es decir, el crecimiento económico se encontrará en la región de mayor riesgo para un nivel de corrupción de la policía, si ésta elige políticas que prioricen en favorecer sus ganancias y en consecuencia también las ganancias de los delincuentes, no tomando en cuenta los efectos que puedan traer dichas políticas sobre la sociedad y la economía<sup>13</sup>. Para el mismo nivel de corrupción, el crecimiento económico se encontrará en la región de menor riesgo, si la policía elige políticas que si bien, favorecen sus ganancias y las de los delincuentes, consideran también los efectos que traen dichas políticas en la sociedad y la economía<sup>14</sup>.

#### 4.1.3. SITUACIÓN DE ESTANCAMIENTO ECONÓMICO

En el enfoque termodinámico, se vio que la **zona A** y la **zona B**, están caracterizadas también por ser regiones que presentan una solución estacionaria para el proceso, debido a las características del potencial parabólico que gobierna ambas zonas. Dentro del contexto socio-económico; ésta solución dada por (40), representa una situación de estancamiento económico ya que la densidad de probabilidad del crecimiento del capital acumulado es constante. Así, el valor esperado de este, viene dado por la expresión (65) la cual será invariable. En consecuencia, el nivel de esfuerzos de los policías y de los delincuentes estarán representados por las expresiones (63) y (64) respectivamente. El comportamiento de estos esfuerzos se muestra en la Fig. 4.1.3(a) y (b), donde se puede observar que en ambas **zonas A** y **B**, el nivel de esfuerzos de los delincuentes en función al nivel de corrupción es mayor que el de los policías<sup>15</sup>.

Además, se puede ver también que ambos esfuerzos disminuyen con el nivel de corrupción en la **zona A**<sup>16</sup> y aumentan con el nivel de corrupción en la **zona B**<sup>17</sup>.

<sup>13</sup>Esta interpretación nos conduce a la idea, de que la policía no está muy interesada en que se socave la legitimidad y credibilidad de la institución.

<sup>14</sup>Esta interpretación puede ser considerada como una actitud de la policía, que vela por la legitimidad y credibilidad de la institución.

<sup>15</sup>Este hecho nos sugiere que si bien la policía con una actitud corrupta puede percibir mayor beneficio a largo plazo esta situación puede cambiar debido a que el precio sombra  $\lambda_p$  de los policías llega a ser negativo, lo cual les representa un beneficio mínimo ya que la institución es inamovible del sector, a diferencia de los delincuentes que pueden optar por moverse a otro sector.

<sup>16</sup>Éste hecho refleja por un lado, la actitud desinteresada que toma la policía hacia la legitimidad de la institución, en consecuencia, los esfuerzos por proteger a la sociedad disminuyen, por otro lado, la actitud hostil de la sociedad obliga a que los esfuerzos de los delincuentes por mantener su amenaza también disminuyan. En este sentido podemos considerar que en esta situación se tendrá una fuerte reacción social.

<sup>17</sup>Éste hecho refleja por un lado una actitud de la policía, la cual está interesada en la "legitimidad de la institución", para controlar de alguna manera la reacción de la sociedad. En consecuencia, los niveles de esfuerzos que emplean para proteger a la sociedad au-

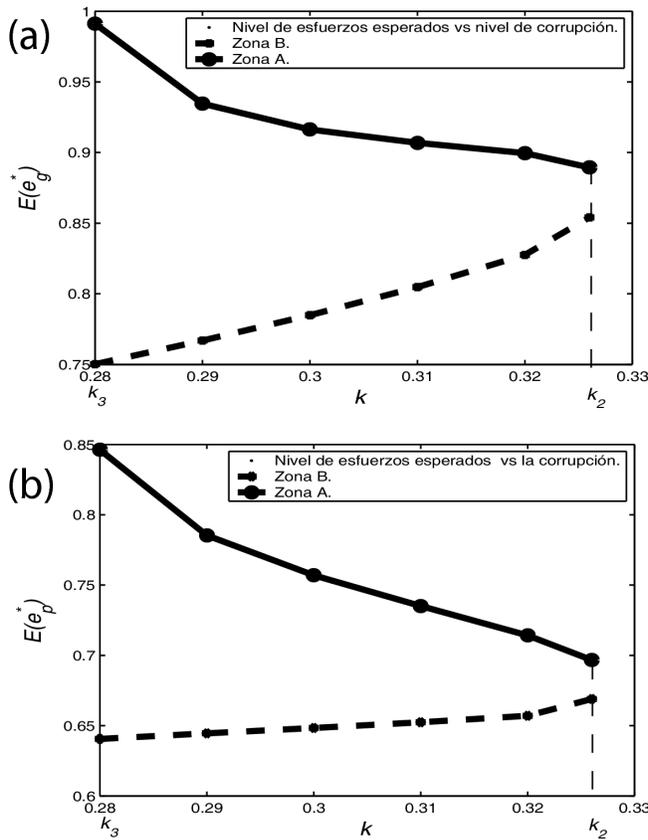


Figura 3. Nivel de esfuerzos (a) policía, (b) delincuentes en función del nivel de corrupción de la policía para  $c_p = 0,6$ ,  $c_g = 0,9$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\Phi = 0,2$ ,  $\bar{\Phi} = 0,48$ ,  $\beta_g = \beta_p = 5$ ,  $\rho_g = \rho_p = 1$ , siendo  $\kappa_3 = 0,28$ ,  $\kappa_2 = 0,326$ .

#### 4.2. ESCENARIO II

Este escenario está caracterizado por una actitud tolerante de la sociedad hacia las actividades delincuenciales, donde la actitud de la policía y de los delincuentes es miope, y además se tiene una alta demanda de trabajo. Para estas condiciones, el comportamiento de la tasa de amenaza en equilibrio  $f^*$ , en función del nivel de corrupción de la policía se muestra en la Fig. 4.2. A diferencia con el comportamiento de  $f^*$  para el primer escenario, se puede ver que para este caso, el intervalo de los niveles de corrupción dados por  $[\kappa_1, \kappa_2]$ , son distintos. Además, la amenaza delincencial crece mucho más rápido con el nivel de corrupción. Se puede observar al igual que en el escenario anterior, que para un mismo valor del nivel de corrupción de la policía, se tienen dos situaciones; la primera cuando  $f^* \rightarrow \infty$ , por lo que la amenaza se encuentra en la región de los equilibrios de extinción; la segunda cuando  $f^* \rightarrow 0$ , por lo que la amenaza se encuentra en la región de los equilibrios regulares.

El comportamiento de  $\mu$  y  $D$  se muestra en la Fig. 4.2(a) y (b), donde a diferencia del comportamiento de  $\mu$  para el primer escenario, se puede observar para este caso, que solo se da la coexistencia de las zonas

mentan. Por otro lado, los esfuerzos de los delincuentes aumentan también debido a la reacción controlada de la sociedad.

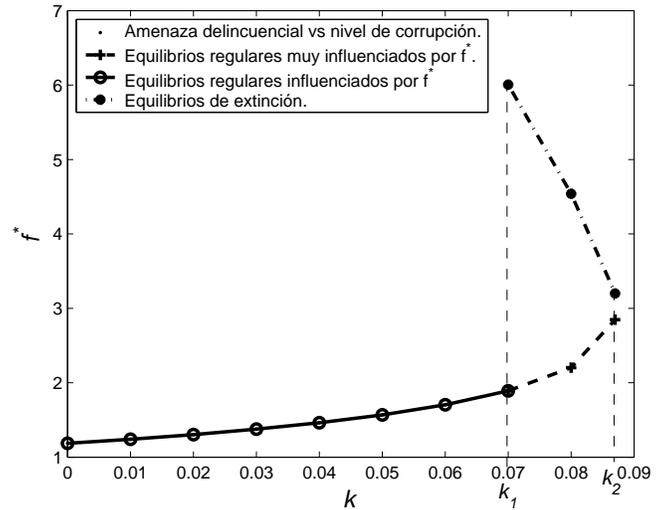


Figura 4. Tasa de amenaza en equilibrio  $f^*$  en función del nivel de corrupción de la policía para  $c_p = 0,6$ ,  $c_g = 0,9$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\Phi = 0,9$ ,  $\rho_g = \rho_p = 1$ , siendo  $\kappa_1 = 0,07$ ,  $\kappa_2 = 0,087$ .

**A** y **B** dentro del intervalo  $[\kappa_1, \kappa_2]$ . Donde, la **zona A** tiene las mismas características que en el escenario anterior, excepto que los valores límites para la región de alta fricción están dados por los puntos críticos  $\kappa_1 = 0,07$  y  $\kappa_2 = 0,087$ . Del mismo modo, se tiene que para la **zona B** los límites para la región de baja fricción están dados por  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ . La **zona C** representa a diferencia del primer escenario, una región de fricción y corresponde al intervalo  $[k = 0, \kappa_1]$ . En resumen, las tres zonas representan regiones de fricción, siendo el nivel más alto el de la **zona A**.

Se puede observar también que la difusión para el proceso, disminuye muy rápidamente con el nivel de corrupción; es decir,  $D \rightarrow 0$  más rápidamente. Nuevamente, se encuentran transiciones que van de la **zona A** a la **zona B** y viceversa, a medida que  $\mu$  influye en el proceso. Debido a este hecho,  $D$  tiende a cero. Como las tres regiones de fricción pueden llegar al equilibrio termodinámico, podemos decir que  $T \rightarrow 0$  como consecuencia de que  $D \rightarrow 0$ .

##### 4.2.1. ENFOQUE SOCIO-ECONÓMICO

Debido al enfoque termodinámico dado en la anterior sección, se puede relacionar dentro del contexto socio-económico a las tres zonas como, regiones de riesgo para el crecimiento económico, siendo la **zona A** y **C**, las de menor riesgo. Como el riesgo está sujeto a la influencia de  $f^*$ , se puede puntualizar para este escenario, que la influencia de este parámetro es muy significativa en las tres zonas.

Las transiciones en el sistema socio-económico observadas dentro del intervalo de los niveles de corrupción  $[\kappa_1, \kappa_2]$  están dadas para niveles de corrupción de la policía mucho más bajos que para el caso del primer escenario. Lo anterior es producto de la reacción de la sociedad frente a las actividades delincuenciales. En consecuen-

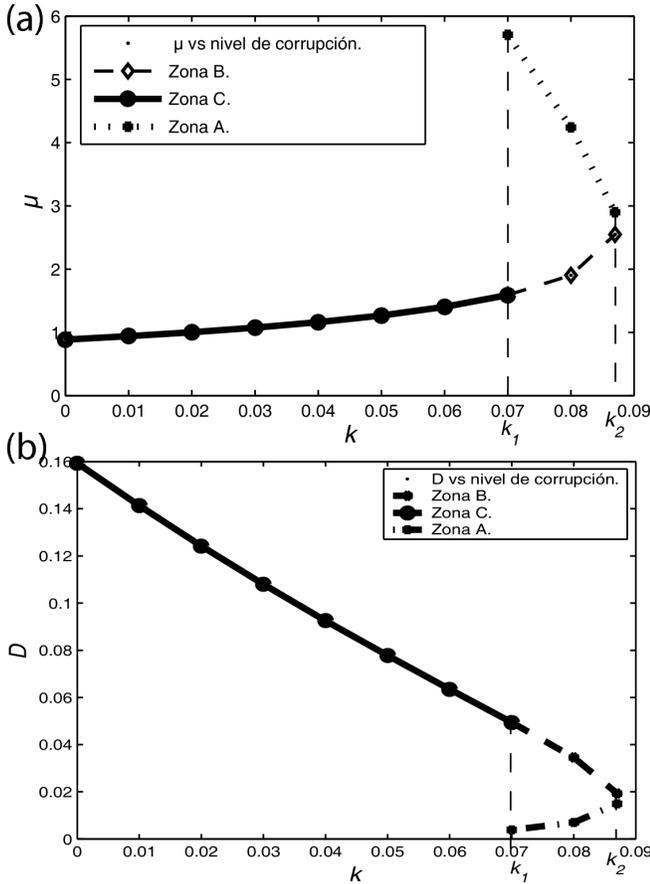


Figura 5. Comportamiento del coeficiente de (a)  $|\mu|$ , (b) de  $D$  en función del nivel de corrupción de la policía  $\kappa$ , para  $q=0.3$ ,  $\tilde{\phi} = 2,17$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $c_g = 0,9$ ,  $c_p = 0,6$ ,  $\phi = 0,9$ ,  $\rho_g = \rho_p = 1$ . Donde los puntos críticos característicos corresponden a los valores de  $\kappa_1 = 0,07$ ,  $\kappa_2 = 0,087$ .

cia, se puede decir que en esta sociedad no se necesitan niveles altos de corrupción para encontrarnos en situaciones donde la actitud de la policía puede hacer que el sistema se encuentre en las regiones de mayor o menor riesgo para el crecimiento económico. En síntesis, debido a que la difusión del proceso tiende rápidamente a cero con el nivel de corrupción, el crecimiento económico es afectado en gran medida. Es decir, la influencia de la amenaza delincriminal aumenta rápidamente con el nivel de corrupción. En consecuencia, la sociedad tenderá a estar sometida por la delincuencia más rápidamente.

#### 4.2.2. SITUACIÓN DE ESTANCAMIENTO ECONÓMICO

Como las tres regiones representan riesgo para el crecimiento económico, entonces todas representan una situación de estancamiento. Las causas son, al igual que en el primer escenario, la gran influencia que tiene la amenaza delincriminal sobre la sociedad. Este hecho nos conduce a un estado estacionario en el proceso, el cual representa la situación de estancamiento económico. Para este escenario el comportamiento de los niveles de esfuerzos de los policías y los delincuentes se muestra en la

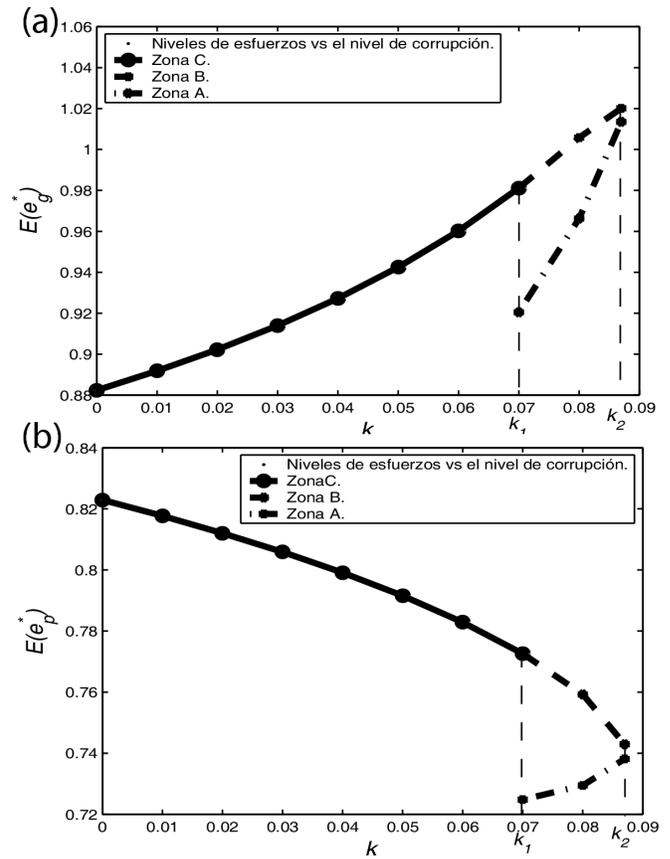


Figura 6. Nivel de esfuerzos de la policía (a), de los delincuentes (b) en función de la corrupción de la policía para  $c_p = 0,6$ ,  $c_g = 0,9$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\Phi = 0,9$ ,  $\tilde{\Phi} = 2,17$ ,  $\beta_g = \beta_p = 5$ ,  $\rho_g = \rho_p = 1$ , siendo  $\kappa_3 = 0,07$ ,  $\kappa_2 = 0,087$ .

Fig. 4.2.2(a) y (b), donde se puede observar que los niveles de esfuerzos de los delincuentes son mayores que el de los policías, con la diferencia de que los niveles de esfuerzos de los delincuentes crecen con el nivel de corrupción en las **tres zonas**<sup>18</sup>.

## 5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En base a los resultados obtenidos los cuales fueron explicados en las secciones precedentes, se puede decir que es posible abordar un problema socio-económico utilizando conceptos y herramientas de la Física, en particular de la Mecánica Estadística. El modelo físico engloba al modelo determinista de teoría de juegos y puede aportar más resultados.

En base al análisis del modelo, se pueden explicar algunas constataciones empíricas hechas en economía. Así, se puede ver que la corrupción de la policía puede resultar positiva en ciertas condiciones. Es decir, podemos suponer que la influencia del parámetro  $q$  en el crecimiento económico, limita la actividad económica de la sociedad. En este sentido, podríamos pensar que  $q$  es una tasa de

<sup>18</sup>Este hecho, está reflejado por el comportamiento de la sociedad; es decir, por la actitud tolerante que toma esta frente a los delincuentes. Los niveles de esfuerzo de los delincuentes aumentan, independientemente que la policía elija o no una actitud de interés hacia la legitimidad y credibilidad de la institución.

crecimiento sujeta a una reglamentación del comercio local, la cual no resulta muy favorable para el crecimiento económico de la región. Algunas observaciones empíricas sobre este hecho, aunque en un contexto socio-económico distinto son discutidas en [11]. En el primer escenario, tenemos una región con sólidas instituciones de seguridad y organizada socio-económicamente. En general, en este tipo de sociedades, los delincuentes tienen que hacer un mayor esfuerzo para introducirse. Este esfuerzo tiene un límite que se puede traducir en una irrupción brusca (con el consecuente rechazo de la sociedad) o solapada (aumentando niveles de corrupción). En el proceso de corrupción de las instituciones, puede darse una inyección de capital. Esto hace que exista un crecimiento económico cuyos réditos se distribuyan en la misma sociedad.

Por el contrario en una economía mal organizada y con instituciones frágiles, como es el caso de países en desarrollo, los delincuentes hacen esfuerzos menores por introducirse a su sistema, y justamente por esta razón, las membranas débiles de este país, no generan resistencia, tanto para la entrada de ese "pequeño capital", como para su salida: Esto último se traduce en el riesgo de fuga del capital sin generar ningún crecimiento económico.

Por otro lado, se puede extender el concepto del proceso de *Ornstein-Uhlenbeck* a otros sistemas socio-económicos. El modelo podría ser analizado mediante autómatas celulares, considerando a cada individuo de la sociedad como una célula, a la cual se puede asociar estados que podrían representar la actitud del mismo (hostil o tolerante) hacia la delincuencia y la policía. Una ventaja de esta perspectiva, es que se podría analizar la interacción entre todos los individuos de la sociedad y al mismo tiempo introducir ruido al sistema para estudiar sus efectos sobre la interacción. Este ruido podría representar una influencia aleatoria a un cambio en la actitud del o los individuos. Así el sistema estará sujeto a un proceso en el cual un comportamiento macroscópico (colectivo) de la sociedad, pueda ser entendido a partir de las interacciones entre individuos.

Se podría considerar dentro del modelo, que el coeficiente de difusión  $D$  dependa del tiempo. Este hecho, nos conduciría a otro tipo de proceso en el cual la ecuación de *Fokker-Planck* toma otra forma y para resolverla se deben utilizar métodos numéricos.

Se puede considerar  $i$  estados de  $N$  individuos de la sociedad en términos de su actitud, y construir una *ecuación maestra* en la cual el llamado vector de socio-

configuración contenga toda la información acerca de la distribución de los  $N$  individuos sobre los estados  $i$ . Donde se puede además asociar una probabilidad  $P$  de encontrar la socio-configuración  $A$  al tiempo  $t$ . De esta manera considerando las tasa de transición de la socio-configuración  $A$  a la  $A'$  en el tiempo  $t$ , se llega a la *ecuación maestra* para el sistema. Donde  $A'$  podría representar el cambio en la actitud de la sociedad.

Finalmente, en el modelo, se puede considerar el efecto de un potencial periódico sobre el sistema socio-económico.

#### Agradecimientos

MS agradece al Lic. Daniel Málaga por las fructíferas discusiones que ayudaron a aclarar los aspectos económicos del presente trabajo.

#### REFERENCIAS

- [1] Haken, H., *Laser Theory*, Springer, Berlin, 1984.
- [2] Oppenheim, K. E. Schuler and G. H. Weiss, eds., *Stochastic Processes in Chemical Physics: The Master Equation*, Mit Press, Cambridge, 1972.
- [3] Weidlich, W., *Physics and Social Science. The Approach of Synergetics*. *Physics Reports* **204**, 1–163, 1991.
- [4] Helbing D., *A Mathematical Model for the Behavior of Individuals in a Social Field II*. arXiv:cond-mat/9805194, V. 1., Institute for Theoretical Physics University of Stuttgart, 1998.
- [5] Dawid H., Feichtinger G., Novak *Extortion as an obstacle to economic growth: a dynamic analysis*. *European Journal of Political Economy*, V. **18**, 499–516, 2002.
- [6] Einstein A., *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geförderte Bewegung von in der ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, *Ann. Phys.*, 17–549, 1905.
- [7] Uhlenbeck & Ornstein., *On the theory of Brownian motion*, *Physical Review* **36**, 823-841, 1930.
- [8] Risken H., *The Fokker-Planck equation*, Second edition, Springer, Verlag. Berlin, Hendelberg, New York, 1989.
- [9] Lefever R., *Noise-Induced Transitions, Theory and applications in Physics, Chemistry, and Biology*. Springer-Verlag Berlin Hendelberg, New York, Tokyo, 1984.
- [10] Dockner, Jorgensen, Vanlong, Sorger., *Differential games in economics and management science*, Cambridge, 2000. Kaufmann & Shan-Jin Wei., "Does Corruption 'Grease Money' Speed Up the Wheels of Commerce?", paper presented at the annual meeting of the American Economic Association., January, Chicago, 1998.
- [11] Lewin K., *Field Theory in Social Science*, Harper and Brothers, New York, 1951.

# COPENHAGUEN

*Una obra de teatro en dos actos (Michael Frayn, 1998)*

## PRESENTACIÓN

En esta ocasión presentamos a los lectores de la *Revista Boliviana de Física*, a manera de una oportunidad de expansión cultural, el libreto de la exitosa obra de teatro “Copenhague” (Michael Frayn, 1998) que reproduce el drama sobre el conflicto moral vivido por dos de los principales protagonistas de la historia de la era nuclear: Niels Bohr (Premio Nóbel en 1922) y Werner Heisenberg (Premio Nóbel en 1933). La incorporación de Margrethe (esposa de Niels Bohr) a la obra es esencial, pues ella –a manera de una figura maternal– en varias ocasiones escuchó y aconsejó pacientemente al joven Werner Heisenberg cuando éste, varios años antes de la Segunda Guerra Mundial, era huésped habitual del Instituto de Física Teórica que dirigía Bohr en Copenhague, en donde se formaron varios de los físicos más importantes del siglo XX. Ya entonces las discusiones en el Instituto eran muy polémicas, pues ciertamente se estaba creando una nueva física, la mecánica cuántica, cuyas implicaciones habrían de revolucionar el pensamiento científico ortodoxo vigente desde hacía más de 20 siglos. Ello cobró el precio de un gran desgaste emocional durante las discusiones en el Instituto, principalmente debido a que Bohr acostumbraba exigir (a la manera de una tortura mental) a sus jóvenes huéspedes la máxima claridad y precisión en los argumentos que constituirían la base epistemológica de la nueva mecánica cuántica. Y no sólo eso, sino también estaba presente ya el germen del conflicto moral, pues la mecánica cuántica permitía por primera vez entender los mecanismos para la liberación de la enorme energía contenida en los átomos.

Durante la Segunda Guerra Mundial Dinamarca fue ocupada por las tropas nazis. Ya entonces Niels Bohr y su instituto eran muy conocidos. Aunque los nazis fingieron respetar al notable científico, era claro que tenían la decidida intención de enviar a cuanto judío encontraran a los campos de concentración, situación que comprometía seriamente el funcionamiento del instituto pues varios colaboradores de Bohr eran judíos. Por otra parte, la Alemania Nazi ya había emprendido investigaciones en torno a la energía nuclear, cuya dirección indiscutible recaía sobre Werner Heisenberg. En 1941, Heisenberg, en compañía de su discípulo y amigo personal, el físico Carl Friedrich von Weizsäcker, visitaron la ocupada Dinamarca como parte de una representación oficial alemana. Y aquí es donde comienza el misterio. Ciertamente Heisenberg quería encontrarse con su antiguo profesor y mentor, tal vez a fin de recordar las gratas nostalgias de los tiempos en que ambos diseñaron los cimientos de la mecánica cuántica. Pero asimismo eran tiempos de guerra y casualmente Bohr conocía a la mayoría de los físicos emigrados (en los EUA y en Inglaterra) que estaban trabajando activamente en la energía nuclear. Si acaso la visita de Heisenberg a su

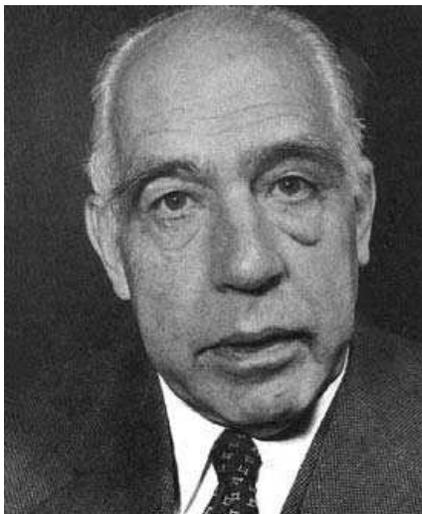
venerable profesor tenía otra oculta intención –como averiguar el estado de avance de las investigaciones nucleares de los aliados– es algo que nunca se sabrá, pues la conversación que sostuvieron discípulo y profesor se realizó durante una caminata de ambos a lo largo de un parque al lado del Instituto de Bohr. No quedan registros de aquella conversación más que las versiones de segunda mano de la gente allegada a Bohr y Heisenberg. Lo cierto es que después de aquella visita las relaciones entre discípulo y profesor quedaron muy deterioradas, y ninguno de los dos quiso hablar más del tema, salvo por comentarios vagos y difusos.

En el recuento autobiográfico de Heisenberg *Diálogos sobre Física Atómica* (BAC, Ed. Católica, Madrid 1972), de donde se reproduce un fragmento al final de este libreto, él se refiere brevemente a aquel encuentro de una manera más bien escueta y general. David C. Cassidy, en su monumental obra biográfica *Uncertainty, the Life and Science of Werner Heisenberg* (Freeman, New York 1992), es más específico y ofrece más detalles importantes sobre el encuentro, pero es asimismo más especulativo.

De manera interesante vemos cómo esta historia, que probablemente sólo sería del interés de un pequeño grupo de académicos, se convierte súbitamente en todo un evento referido ampliamente por los medios. Después del estreno de la obra en 1998 en Londres, ésta se llevó –con todo éxito– a varios países, por ejemplo: EUA, Francia, Alemania, Canadá, y en Iberoamérica: Argentina, México, Chile, Venezuela, Colombia. En varios de estos últimos, fueron las sociedades de física las encargadas de organizar el evento. *Copenhague* no pasó desapercibida por la crítica y recibió varios premios. Inclusive ya existe la versión para la televisión. Aunque la obra sólo tiene tres personajes, y seguramente una escenografía austera, se nota que el argumento es tan profundo y relevante, que logra transmitir la esencia del problema: el científico frente a su obra y a su conciencia, particularmente cuando la bomba atómica devino en una especie de “experimento exitoso” desde el punto de vista meramente técnico.

El libreto que transcribimos aquí fue tomado del sitio de Internet <http://temakel.com/teatroCopenhague.htm>, y corresponde a la puesta en escena de *Copenhague* en Argentina (2002). En esta versión adaptada para la *Revista Boliviana de Física*, se ha incorporado al final un pequeño glosario de algunos términos técnicos identificados por el signo (\*) a lo largo del libreto. Asimismo, y como se dijo arriba, se incluyó un epílogo tomado de *Diálogos de Física Atómica* a fin de reproducir, con la mayor fidelidad posible, lo que pasó durante aquella célebre y polémica conversación, según las propias palabras de Heisenberg.

Diego Sanjinés C.



Niels Bohr



Margrethe Bohr



Werner Heisenberg

## PRIMER ACTO

MARGRETHE ¿Pero, por qué vino a Copenhaguen?

BOHR Mi amor, ¿acaso importa? ¿Cuántos años hace que hemos muerto los tres?

MARGRETHE Algunas preguntas perduran mucho tiempo después de muertos sus dueños. Como fantasmas buscan las respuestas que nunca encontraron en vida.

BOHR Algunas preguntas no encuentran sus respuestas.

MARGRETHE ¿Por qué vino? ¿Qué es lo que trataba de decirte?

BOHR En el fondo creo que era muy sencillo: quería charlar.

MARGRETHE ¿Charlar? ¿Con el enemigo? ¿En medio de la guerra?

BOHR Margrethe, mi amor, no éramos enemigos.

MARGRETHE ¡Estamos hablando de 1941!

BOHR Heisenberg era nuestro amigo.

MARGRETHE Heisenberg era alemán. Nosotros éramos daneses. Los alemanes habían ocupado nuestro país. Nunca te vi tan enojado con alguien como esa noche con Heisenberg.

BOHR No te quiero contradecir, pero creo que me mantuve increíblemente tranquilo. Para él era tan difícil como para nosotros.

MARGRETHE Por eso mismo, ¿Por qué lo hizo? Ahora no le hacemos daño a nadie, no traicionamos a nadie.

HEISENBERG Ya estamos todos muertos, es cierto. Y el mundo se acuerda de mí sólo por dos cosas: por el principio de incertidumbre (\*) y por mi misteriosa visita a Niels Bohr en Copenhaguen en 1941. Todos entienden de qué se trata la incertidumbre. O eso creen. Nadie entiende por qué fui a Copenhaguen. Lo he explicado una y otra vez. A Bohr mismo, y a Margrethe. A los interrogadores, a los oficiales de inteligencia, a periodistas, historiadores. Cuanto más lo explicaba más incierto resultaba. Bueno, con mucho gusto haré un nuevo intento. Ahora que ya estamos muertos y no le hacemos daño a nadie, y no traicionamos a nadie.

MARGRETHE Ahora te lo puedo decir. Nunca me gustó.

BOHR No es cierto. Te caía muy bien cuando vino por primera vez en los años veinte. ¿Y cuando vino a la playa, con nosotros y los chicos? Era uno más de la familia.

MARGRETHE Tenía algo “raro”, ya desde esa época.

BOHR Pero era un físico excepcional. Y cuanto más lo pienso más me convenzo de que Heisenberg fue el mejor.

HEISENBERG ¿Quién fue Bohr? Fue el primero, el padre de todos nosotros. Todo lo que hicimos se fundó sobre su gran intuición.

BOHR Pensar que vino a trabajar conmigo en 1924...

HEISENBERG Acababa de terminar mi doctorado, y Bohr era el físico atómico más famoso del mundo.

BOHR... y en menos de un año la mecánica cuántica le era deudora de unas cuantas cosas.

MARGRETHE Surgió del trabajo que hicieron juntos.

BOHR Y un año después obtuvo el principio de incertidumbre.

MARGRETHE Y fue tuya la complementariedad (\*).

BOHR Las discutimos juntos.

HEISENBERG Juntos hicimos nuestros mejores trabajos.

BOHR Funcionábamos como una empresa.

HEISENBERG Presidente y gerente general.

MARGRETHE Padre e hijo.

HEISENBERG Una empresa familiar.

MARGRETHE Aunque teníamos nuestros propios hijos.

BOHR Y seguimos trabajando juntos mucho tiempo después cuando ya había dejado de ser mi asistente.

HEISENBERG Después de haber regresado a Alemania en 1927, para hacerme cargo de mi cátedra en Leipzig, y mucho después de tener mi propia familia.

MARGRETHE Entonces llegaron los nazis al poder.

BOHR Y se volvió cada vez más difícil. Cuando estalló la guerra, imposible. Hasta ese día en 1941.

MARGRETHE Cuando se terminó para siempre.

BOHR Si, ¿Por qué lo hizo?

HEISENBERG Septiembre de 1941. Durante años lo tuve registrado en la memoria como octubre.

MARGRETHE Septiembre. Fines de septiembre.

HEISENBERG La memoria es tan curiosa, en la cabeza el pasado se vuelve presente. Septiembre de 1941, Copenhague. E inmediatamente acá estoy, bajándome del tren nocturno que viene de Berlín, con mi colega Weizsäcker. Dos trajes civiles entre todos los uniformes grises del ejército alemán y los elegantes uniformes negros de las SS que llegaban con nosotros. En mi portafolio están los papeles de la conferencia que voy a dar. En mi cabeza hay otro mensaje que debo comunicar. La conferencia es de astrofísica. El asunto dentro de mi cabeza es más difícil. Mi colega Weizsäcker ha sido mi Juan Bautista, le ha escrito a Bohr para advertirle de mi llegada.

MARGRETHE ¿Quiere verte?

BOHR Creo que ha venido para eso.

MARGRETHE Debe ser muy importante lo que quiere decirte.

HEISENBERG El encuentro tiene que parecer natural. Tiene que ser en privado.

MARGRETHE Espero que no estés pensando en invitarlo a nuestra casa.

BOHR Obviamente es lo que esta esperando.

MARGRETHE ¡Niels! ¡Ellos han ocupado nuestro país!

BOHR El no es ellos.

MARGRETHE Es uno de ellos.

HEISENBERG Lo primero que hacemos es visitar oficialmente el Instituto de Bohr de Física Teórica, y almorzamos en el viejo comedor familiar del instituto. Por supuesto que no tengo oportunidad de hablarle a Bohr. ¿Dónde está? Es como en un sueño. No puedo poner en foco los detalles precisos de la escena que me rodea. A la cabecera de la mesa ¿Es Bohr? Es Rozental, es Moller, es quien decido que sea... Lo que sí me acuerdo es que fue una ocasión muy incómoda.

BOHR Fue un desastre. Causó una muy mala impresión. Dijo que era lamentable la ocupación de Dinamarca. Pero que sin embargo era perfectamente aceptable la ocupación de Polonia. Y que ahora era seguro que Alemania ganaría la guerra.

HEISENBERG Nuestros tanques están a las puertas de Moscú. ¿Qué nos puede detener? Hay una sola cosa quizás. Una sola.

BOHR Es cierto que él sabe que lo están vigilando. Se tiene que cuidar con lo que dice. Pero bueno se podría cuidar con lo que dice.

MARGRETHE Se tiene que cuidar o no lo van a dejar salir del país de nuevo.

HEISENBERG Me pregunto si se imaginan lo doloroso que fue conseguir el permiso para venir. Los humillantes pedidos al partido, los esfuerzos degradantes para que nuestros amigos en la cancillería usaran sus influencias.

MARGRETHE ¿Cómo lo viste? ¿Está muy cambiado?

BOHR Un poco más viejo.

MARGRETHE Todavía lo recuerdo como un chico.

BOHR Tiene casi cuarenta. Un profesor maduro.

MARGRETHE ¿Estás seguro de que quieres invitarlo acá?

BOHR Pongamos los argumentos a favor y en contra, de una manera razonable y científica. Primero, Heisenberg es un amigo.

MARGRETHE Primero, Heisenberg es alemán.

BOHR Un judío blanco. Así lo llamaban los nazis. Enseñaba relatividad, y decían que era física judía. No podía mencionar a Einstein, pero siguió con la relatividad a pesar de que lo atacaban terriblemente.

MARGRETHE Todos los judíos de verdad perdieron sus trabajos. El todavía enseña.

BOHR Todavía enseña relatividad.

MARGRETHE Todavía es profesor en Leipzig. No quería dejar Alemania.

BOHR Quiere estar ahí para reconstruir la ciencia alemana cuando Hitler no este más.

MARGRETHE Y si lo están custodiando van a informar todo. A quién ve. Qué les dice. Qué le dicen a él.

HEISENBERG Llevo mi vigilancia a costas como una enfermedad infecciosa. Sé que a Bohr también lo vigilan.

MARGRETHE Y sabes que también te vigilan.

BOHR ¿Quién? ¿La Gestapo?

HEISENBERG ¿Se dará cuenta?

BOHR No tengo nada que esconder.

MARGRETHE Nuestros compatriotas. Sería terrible para ellos si tan solo pensaran que estás colaborando.

BOHR Invitar a un viejo amigo a cenar no es colaborar.

MARGRETHE Podría parecerlo. ¿No van a hablar de política?

BOHR Sólo de física. Supongo que quiere hablar de física.

MARGRETHE Creo que también tienes que suponer que nosotros no somos los únicos que escuchamos lo que se dice en esta casa. Si quieren privacidad sería mejor que hablaran al aire libre.

HEISENBERG ¿Podré sugerirle que vayamos a caminar?

BOHR Me parece que nada de paseos. Lo que me quiera decir me lo puede decir donde lo escuchen todos.

MARGRETHE Quizás quiera compartir una idea nueva.

HEISENBERG Así que ahora me encuentro, caminando en el crepúsculo otoñal hacia la casa de los Bohr. Seguido, supongo, por mi sombra invisible. ¿Qué siento? Miedo, seguro; el miedo que a uno siempre le produce, un maestro, el jefe, un padre. Mucho más miedo por lo que tengo que decir. Y más miedo aún por lo que puede pasar si fracaso.

MARGRETHE ¿Tendrá algo que ver con la guerra?

BOHR Heisenberg es un físico teórico. No creo que nadie haya descubierto una manera de usar la física teórica para matar gente.

MARGRETHE ¿Tendrá que ver con la fisión? (\*)

BOHR ¿Por qué querría hablarme a mí de fisión?

MARGRETHE Porque estás trabajando en eso. Y eres la máxima autoridad en el tema.

BOHR No ha publicado nada sobre fisión.

MARGRETHE Pero si los alemanes estuvieran desarrollando algún tipo de arma que se basara en la fisión nuclear.

BOHR Mi amor, nadie va a desarrollar un arma basada en la fisión nuclear.

MARGRETHE Pero si los alemanes lo intentaran, Heisenberg estaría involucrado.

BOHR ¿Por qué? En Alemania siempre hubo muchos físicos buenos.

MARGRETHE Ya no. Casi todos judíos. Y todos tuvieron que huir a Estados Unidos y a Inglaterra.

HEISENBERG Einstein, Pauli, Born... y tantos otros.

MARGRETHE ¿Y si Heisenberg fuera el responsable del trabajo?

BOHR ¡Margrethe, no existe tal trabajo! John Wheeler y yo lo hicimos todo en 1939 (\*). Una de las cosas que se desprende de nuestro trabajo es que no hay manera de poder usar la fisión para producir armas, por lo menos en un futuro cercano.

MARGRETHE ¿Entonces por qué todos siguen trabajando en el tema?

BOHR Porque tiene algo de mágico. Se dispara un neutrón al núcleo de un átomo de uranio y se divide en dos elementos distintos. Era lo que trataban de hacer los alquimistas, que un elemento se convirtiera en otro.

MARGRETHE ¿Entonces a qué viene?

HEISENBERG Aplasto las piedritas del camino tan familiar hacia la puerta de entrada de la casa de los Bohr, y hago sonar la campana. Siento miedo, sí. Es una mezcla disparatada de vanidad y de algo que me hace sentir totalmente indefenso —porque de los 2.000 mil millones de habitantes de esta tierra me ha tocado a mí esta responsabilidad imposible... ( Se abre la pesada puerta.)

BOHR ¡Mi querido Heisenberg!

HEISENBERG ¡Mi querido Bohr!

BOHR Pasa, pasa...

MARGRETHE Y por supuesto, apenas se ven, se avivan las viejas llamas.

HEISENBERG Me siento tan conmovido de que me hayas podido recibir.

BOHR Debemos intentar seguir comportándonos como seres humanos.

HEISENBERG Me doy cuenta de lo difícil que resulta.

BOHR Sólo pudimos darnos la mano el otro día en el almuerzo.

HEISENBERG Y a Margrethe no la veo desde...

BOHR Desde hace cuatro años.

MARGRETHE Niels tiene razón. Se te ve mayor.

HEISENBERG Nos tendríamos que haber visto en Zurich...

BOHR En septiembre de 1939.

HEISENBERG Y lamentablemente...

BOHR Lamentablemente para nosotros también.

MARGRETHE Y mucho más lamentablemente para tanta otra gente.

HEISENBERG Sí. Por supuesto.

BOHR Así están las cosas.

HEISENBERG ¿Qué puedo decirles?

MARGRETHE ¿Es que se puede decir algo en estas circunstancias?

HEISENBERG No. ¿Y sus hijos?

MARGRETHE Están bien, gracias. ¿Isabel? ¿Los chicos?

HEISENBERG Muy bien. Mandan cariños.

MARGRETHE A pesar de todo ¡tenían tantas ganas de verse! Pero ahora que llegó el momento están tan ocupados en evitar mirarse a los ojos que apenas se ven.

HEISENBERG No sé si se dan cuenta cuanto significa para mí estar acá de vuelta, en esta casa. Estuve muy solo en estos últimos años.

BOHR Me lo puedo imaginar.

MARGRETHE A mí casi no me ve. Lo observo discretamente detrás de mi cortésia mientras sigue intentando.

HEISENBERG ¿La situación acá ha sido difícil?

BOHR ¿Difícil?

MARGRETHE Por supuesto. Tiene que preguntar. Tiene que liberarse de eso.

BOHR Difícil... ¿Qué puedo decir? Por el momento no se impusieron las leyes raciales.

MARGRETHE Todavía.

BOHR Hace unos meses empezaron a deportar a los comunistas y a otros elementos anti-alemanes.

HEISENBERG ¿Pero a ustedes...?

BOHR No nos han molestado.

HEISENBERG Estuve muy preocupado.

BOHR Muy amable. Por ahora nada que deba quitarte el sueño.

MARGRETHE Silencio. Cumplió con su deber. Ahora puede llevar la conversación a temas más placenteros.

HEISENBERG ¿Todavía navegas?

BOHR ¿Navegar?

MARGRETHE Mal comienzo.

BOHR No, no navego.

HEISENBERG ¿El mar está...?

BOHR Minado.

HEISENBERG Por supuesto.

MARGRETHE Supongo que no le preguntaré si continúa esquiando.

HEISENBERG ¿Y esquiar?

BOHR ¿Esquiar? ¿En Dinamarca?

HEISENBERG En Noruega. Solía ir a Noruega.

BOHR Solía, sí.

HEISENBERG Digo como Noruega también está....

BOHR ¿Ocupada? Si. De hecho supongo que podríamos tomarnos vacaciones en casi cualquier lugar de Europa.

HEISENBERG Perdón no lo quise decir de esa manera.

BOHR Quizás estoy un poco susceptible.

HEISENBERG A lo mejor podrías considerar la posibilidad de venir alguna vez a Alemania...

MARGRETHE Este chico es un idiota.

BOHR Mi querido Heisenberg, sería fácil equivocarse y pensar que los ciudadanos de una pequeña nación, de una pequeña nación invadida, invadida caprichosa y cruelmente, por su vecino más poderoso, no tienen exactamente los mismos sentimientos de orgullo nacional, y el mismo amor por su país que sus conquistadores.

MARGRETHE Niels, qué dijimos.

BOHR Sólo hablar de física, sí.

MARGRETHE Nada de política.

BOHR Lo siento.

HEISENBERG No, no, yo sólo quería decir que todavía tengo mi cabaña de esquiar. Así que si por casualidad... alguna vez... por cualquier motivo.

BOHR Quizás Margrethe fuera tan gentil de coserme una estrella amarilla en mi chaqueta de esquiar.

HEISENBERG Sí. Sí. Qué estúpido.

MARGRETHE Silencio nuevamente. Ahora me empieza a dar pena. Sentado acá, completamente solo, frente a nosotros dos, en un país donde se lo odia. Ahora lo veo mas joven, como el chico que vino acá por primera vez en 1924. Tímido y arrogante y con necesidad de que lo quieran. Y, sí, es triste porque Niels lo amaba. Fue un padre para él.

HEISENBERG ¿En qué estás trabajando?

BOHR En la fisión, casi exclusivamente ¿Y tu?

HEISENBERG Varias cosas.

MARGRETHE ¿Fisión?

HEISENBERG A veces siento mucha envidia de tu ciclotrón (\*).

MARGRETHE ¿Por qué? ¿También estás trabajando sobre la fisión?

HEISENBERG Hay más de treinta en los Estados Unidos. Mientras que en Alemania... Bueno... ¿Por lo menos todavía pueden ir a su casa de la playa?

BOHR Todavía vamos, sí.

MARGRETHE Perdón estabas por decir que en Alemania...

BOHR... no hay ni un solo ciclotrón.

HEISENBERG Es tan linda la playa en esta época del año.

BOHR ¿No será que viniste a llevarte el ciclotrón? ¿No es por eso que viniste a Copenhaguen?

HEISENBERG No vine a Copenhaguen por eso.

BOHR Lo siento. No debo adelantar conclusiones

HEISENBERG No, ninguno de nosotros debería adelantar conclusiones de ningún tipo.

BOHR Pero la falta de ciclotrones en Alemania no es seguramente un secreto militar.

HEISENBERG No tengo idea de qué es secreto y que no lo es.

BOHR Tampoco es un secreto porque no los tienen. Tú no lo puedes decir pero yo sí puedo. Es porque los alemanes sistemáticamente se opusieron a la física teórica. ¿Por qué? Porque la mayoría de los que trabajaban en ese campo eran judíos. ¿Y por qué tantos eran judíos? Porque la física teórica, la física que le interesaba a Einstein, a Schrödinger, a Pauli y a nosotros dos, siempre fue considerada en Alemania inferior a la física experimental, y las cátedras teóricas eran las únicas a las que podían acceder los judíos.

MARGRETHE ¿Física, sí?

BOHR Esto es física.

MARGRETHE También es política.

HEISENBERG A veces es muy difícil separarlas. ¿Estás en contacto con nuestros amigos en Inglaterra? ¿Con Born? ¿Con Chadwick?

BOHR Heisenberg, estamos bajo ocupación alemana. Alemania esta en guerra con Inglaterra.

HEISENBERG Pensé que quizás mantuvieras algún contacto. ¿Y con la gente en Estados Unidos? Con ellos no estamos en guerra

BOHR ¿Qué quieres saber?

HEISENBERG Curiosidad...

MARGRETHE La única visita de afuera vino de Alemania. Tu amigo Weizsäcker nos visitó en marzo. No se por qué lo trajo al director del Instituto Alemán.

HEISENBERG Lo hizo con las mejores intenciones. Quizás no les explicó que el Instituto está bajo el control de la Cancillería. Tenemos buenos amigos en la embajada acá.

BOHR Es un departamento del gobierno nazi

HEISENBERG Seguramente estarán intentando que los ciudadanos distinguidos de este país puedan trabajar tranquilos.

BOHR ¿Me estás diciendo que tus amigos en la embajada me están protegiendo?

HEISENBERG Lo que digo, por si Weizsäcker no lo aclaró, es que se sentirían muy honrados si pudieran aceptar una invitación de vez en cuando.

BOHR ¿Ir a cócteles a la embajada alemana? ¿A tomar café con tortas con el embajador nazi?

HEISENBERG A alguna conferencia quizás. A grupos de discusión. Cualquier tipo de contacto social podría ser de ayuda.

BOHR Seguro que sí.

HEISENBERG En algunas circunstancias podría ser esencial.

BOHR ¿En qué circunstancias?

HEISENBERG Creo que los dos lo sabemos.

BOHR ¿Porque soy medio judío?

HEISENBERG Todos en algún momento podemos necesitar ayuda de nuestros amigos.

BOHR ¿Por esto vino a Copenhagen? ¿Para invitarme a mirar la deportación de mis compatriotas desde las ventanas de la embajada alemana?

HEISENBERG ¡Bohr, por favor! ¡Por favor! ¿Qué otra cosa puedo hacer? ¿Cómo puedo ayudar? Yo se que es una situación increíblemente difícil para tu. Lo entiendo. Pero también es una situación increíblemente difícil para mí.

BOHR Sí. Discúlpeme. Estoy seguro de que también tienes las mejores intenciones.

HEISENBERG De todos modos no vine por eso.

MARGRETHE Quizás deberías decir simplemente lo que quieres decir.

HEISENBERG ¿No tendrías ganas de salir a caminar como en los viejos tiempos?

BOHR Hace frío esta noche, me parece, para caminar.

HEISENBERG Esto es tan difícil. ¿Te acuerdas dónde nos conocimos?

BOHR Por supuesto, en Göttingen en 1922.

HEISENBERG En un congreso en tu honor.

BOHR Era un gran honor. Estaba consciente de eso.

HEISENBERG Se te honraba por dos razones. Primero, por ser un gran físico...

BOHR Sí, sí.

HEISENBERG... y en segundo lugar porque eras una de las pocas personas de Europa que estaba dispuesta a tratar con Alemania. La primera guerra había terminado hacía cuatro años, y todavía se nos trataba como a leproso. Pero nos diste la mano. Siempre inspiraste amor, sabes eso. Donde sea que hayas estado, que hayas trabajado. Acá, en Dinamarca. En Inglaterra, en Estados Unidos. Pero en Alemania te adorábamos. Porque nos diste la mano.

BOHR Alemania cambió.

HEISENBERG Sí. Entonces estábamos derrotados y podías ser generoso.

MARGRETHE Y ahora ustedes dominan.

HEISENBERG Y es más difícil ser generoso. Pero nos diste la mano y la estrechamos.

BOHR Sí... ¡No! tu no. En realidad me la mordiste.

HEISENBERG ¿La mordí?

BOHR ¡Me mordiste la mano! ¡Sí! Yo te la di ceremoniosa y amistosamente y tu me la mordiste.

HEISENBERG ¿De qué estás hablando?

BOHR Te paraste y me atacaste.

HEISENBERG Ah... Hice algunos comentarios.

BOHR Era un hermoso día de verano. Hileras de físicos y matemáticos eminentes, todos dando su aprobación a mi sabiduría. De repente salta un cachorro atrevido y me dice que mis cálculos matemáticos están equivocados.

HEISENBERG Estaban equivocados.

BOHR ¿Qué edad tenías?

HEISENBERG Veinte.

BOHR Dos años menos que el siglo.

HEISENBERG No exactamente.

BOHR El cinco de diciembre, ¿sí?

HEISENBERG 1, 93 años menos que el siglo.

BOHR Para ser exactos.

HEISENBERG No, para ser exactos 1,928... 7... 6... 7... 1...

MARGRETHE Y Niels decide, de repente, amarlo nuevamente, a pesar de todo. ¿Por qué? ¿Qué pasó? ¿Fue el recuerdo de ese día de verano en Göttingen? Como sea, para cuando nos sentamos a cenar, las cenizas se encendieron nuevamente.

BOHR ¡Siempre tan combativo! Hasta cuando jugábamos tenis de mesa. Parecía que me querías matar.

HEISENBERG Quería ganar. Tu también quería ganar.

BOHR Yo quería un agradable partido de ping-pong.

HEISENBERG Dices eso porque no podías ver la expresión de tu cara.

BOHR Podía ver la suya.

HEISENBERG ¿Y cuando jugábamos al póker en mi cabaña de esquiar? Una vez nos limpió a todos. ¿Te acuerdas de eso? ¡Con una escalera que no tenía! Todos matemáticos, todos contando las cartas, estamos 90% seguros de que no tiene nada. Pero él sigue haciéndonos subir y subir la apuesta. Esa confianza demente. Hasta que nuestra fe en la probabilidad matemática comienza a debilitarse y uno por uno nos vamos al mazo.

BOHR Es que estaba seguro de que tenía una escalera. No vi bien las cartas. Me engañé a mí mismo.

MARGRETHE Pobre Niels.

HEISENBERG ¿Pobre Niels? ¡Ganó! Nos dejó en la bancarrota. ¡Era demencialmente competitivo!

BOHR Tu eras el competitivo. Una vez bajábamos esquiando desde la cabaña para buscar provisiones y hasta a eso lo convertía en una carrera. ¿Te acuerdas? Estábamos con Weizsäcker y alguien más. Sacó un cronómetro.

HEISENBERG El pobre Weizsäcker tardó dieciocho minutos.

BOHR Tu bajaste en diez.

HEISENBERG Ocho.

BOHR No me acuerdo cuánto tardé yo.

HEISENBERG Cuarenta y cinco minutos.

BOHR Gracias.

HEISENBERG Esquiabas como hacías ciencia. ¿Qué estabas esperando? Probablemente estabas realizando los cálculos de los diecisiete posibles recorridos diferentes.

MARGRETHE Y sin que yo estuviera ahí para poderlas transcribir.

BOHR Por lo menos yo sabía dónde estaba. A la velocidad que iban ustedes se estaban enfrentando a la relación de incertidumbre. Si sabían dónde estaban, no sabían a qué velocidad habían bajado. Si sabían a qué velocidad habían bajado, no sabían donde estaban.

HEISENBERG Yo no necesito detenerme para pensar.

BOHR Justamente eso es lo que podría ser criticable en parte de su trabajo.

HEISENBERG De todos modos, generalmente llegaba.

BOHR Sí, pero no te importaba qué se destruía en el camino. Mientras funcionaba la matemática estabas satisfecho.

HEISENBERG Si algo funciona, funciona.

BOHR Pero la pregunta siempre es: ¿Qué significa la matemática?, en un lenguaje sencillo. ¿Cuáles son las implicancias filosóficas?

HEISENBERG Cuando se baja a setenta kilómetros por hora las decisiones se toman solas. De repente, enfrente hay un abismo. ¿Doblo a la izquierda o la derecha? Si lo pienso me mato. En la cabeza uno dobla para los dos lados.

BOHR Porque tu insistís en que siempre es más fácil actuar que reaccionar. Tomar una decisión de hacer algo que responder a la acción del otro.

HEISENBERG Si claro. Como la música, esa es otra cosa que nos hace decidir. Yo toco el piano y es como si el camino se abriera delante de mí, sólo tengo que seguir. Así tuve mi único éxito con las mujeres. Una velada musical en casa de unos amigos en Leipzig, un trío de piano. 1937. Estamos tocando Beethoven en Sol mayor. Terminamos el scherzo, y levanto la vista para ver si los otros dos están listos para comenzar el finale presto. Y en ese instante veo a una joven sentada a un costado de la sala. Sólo un instante, pero por supuesto ya me la había llevado a mi cabaña, nos habíamos comprometido, nos habíamos casado, etc. –fantasías románticas inútiles–. Y arrancamos con el finale presto, que es extremadamente rápido y no tengo tiempo de asustarme. Y todo me resulta fácil. Terminamos y como si hubiera seguido esquiando. Hago que me presenten a la joven, la acompaño a su casa y, sí, una semana más tarde me la llevo a la cabaña, otra semana nos comprometemos, y tres meses más tarde nos casamos. ¡Y todo por la velocidad de ese finale presto!

BOHR Decías que te sentía solo. Pero tienes compañía.

HEISENBERG ¿La música?

BOHR ¡Isabel!

HEISENBERG Ah, sí. Aunque con los chicos y esas cosas... siempre envidié cómo ustedes dos hablan de todo. De su trabajo. Sus problemas. De mí, seguro.

BOHR La naturaleza me formó como una entidad matemática curiosa: no una unidad sino la mitad de dos.

HEISENBERG La matemática es muy extraña cuando se la aplica a la gente. Uno más uno puede ser tantas cosas...

MARGRETHE Silencio. ¿En qué pensará? ¿En su vida? ¿En la nuestra?

HEISENBERG Silencio. Y por supuesto están pensando nuevamente en sus hijos.

MARGRETHE Los mismos recuerdos luminosos. Las mismas oscuridades. Vuelven y vuelven.

HEISENBERG Sus cuatro hijos vivos y los dos muertos.

MARGRETHE Harald. Solo en ese hospital.

BOHR Está pensando en Cristian y en Harald.

HEISENBERG Los dos chicos perdidos. Harald...

BOHR Todos esos años solo, en ese hospital espantoso.

HEISENBERG Y Cristian. El primogénito. El hijo mayor.

BOHR Una vez más esos segundos que veo todos los días.

HEISENBERG Esos breves segundos en el barco, cuando el timón se traba en el mar embravecido y Cristian se está cayendo.

BOHR Si no lo hubiera dejado estar al timón...

HEISENBERG Esos segundos tan largos en el mar.

BOHR Esos segundos interminables en el mar.

HEISENBERG Cuando intenta alcanzar el salvavidas.

BOHR Casi lo alcanza.

MARGRETHE Yo estoy en nuestra casa de la playa. Levanto la vista de mi trabajo. Niels está en la puerta mirándome silenciosamente. De pronto desvía la mirada y sé que ha pasado.

BOHR Tan cerca, ¡Tan cerca! ¡Una distancia tan pequeña!

HEISENBERG El timón se traba una y otra vez... una y otra vez...

MARGRETHE Niels desvía la mirada.

BOHR Cristian estira el brazo para alcanzar el salvavidas...

HEISENBERG Pero hay cosas de las que ni ellos hablan.

BOHR Algunas cosas sólo las pensamos.

MARGRETHE Porque no hay nada que decir.

BOHR Bueno... quizás no tengamos tanto frío. Me propusiste una caminata.

HEISENBERG En realidad hace bastante calor.

BOHR No vamos a tardar.

HEISENBERG Una semana como máximo.

BOHR ¿Qué? ¿Cómo nuestra famosa primera caminata?

HEISENBERG Fuimos a Elsinore. Me acuerdo muchas veces de lo que me dijiste estando ahí.

BOHR ¿Te molesta mi amor? ¿Media hora?

HEISENBERG Quizás una hora. Dijiste que no podíamos tener una impresión virgen de Elsinore, que se veía afectada por saber que Hamlet había vivido ahí. Cada rincón oscuro nos recordaba la oscuridad dentro del alma humana...

MARGRETHE Así que están caminando de nuevo. Lo logró. Y si están caminando están hablando. Hablando de otra manera, sin duda. Tantas veces he transcrito sobre lo diferente que es el comportamiento de las partículas cuando no son observadas... Ahora que empezaron, una hora se convertirá en dos o en tres... Lo primero que alguna vez hicieron juntos fue irse a caminar. Después de esa conferencia en Göttingen. Niels inmediatamente fue a buscar a ese joven atrevido que había cuestionado sus matemáticas, y se lo llevó a caminar por el campo. Caminar, hablar, conocerlo. Y cuando Heisenberg llegó aquí a trabajar para él, de nuevo salieron a dar su vuelta histórica por el campo. Mucha de la física del siglo veinte la hicieron al aire libre. Caminando por los bosques en nuestra casa de campo. Bajando a la playa con los chicos. Cristian de la mano de Heisenberg. Y cada noche, después de cenar en Copenhagen, caminaban por el parque detrás del Instituto, o hasta el puerto. Caminar y hablar. Mucho, mucho antes de que las paredes tuvieran oídos... Pero esta vez, en 1941, la caminata toma un curso distinto. Diez minutos después de salir... vuelven. Apenas he levantado la mesa, lo veo a Niels en la puerta. Me doy cuenta inmediatamente de lo enojado que está. No puede mirarme a los ojos.

BOHR Heisenberg se quiere despedir. Se va.

MARGRETHE El tampoco me mira.

HEISENBERG Gracias. Una hermosa velada. Casi como en los viejos tiempos. Muy amable.

MARGRETHE ¿quieres tomar algo? ¿Café?

HEISENBERG Tengo que preparar mi conferencia.

MARGRETHE ¿Pero nos va a venir a ver antes de irte?

BOHR Tiene mucho que hacer.

HEISENBERG Perdóname si dije o hice algo que...

BOHR Sí, sí.

HEISENBERG Significó mucho para mí estar con los dos de nuevo. Más de lo que se imaginan.

MARGRETHE Fue un placer para nosotros. Cariños a Isabel y a los chicos.

BOHR Claro.

HEISENBERG Tal vez cuando esta guerra haya terminado... si estamos vivos... adiós.

MARGRETHE ¿Política?

BOHR Física. No tiene razón. ¿Cómo puede tener razón? Si John Wheeler y yo...

MARGRETHE Un poco de aire fresco mientras hablamos, ¿no?

BOHR ¿Aire fresco?

MARGRETHE Una vuelta por el jardín. Más saludable que quedarse adentro, creo.

BOHR Ah, sí.

MARGRETHE Para todos.

BOHR Sí. Gracias... ¿Cómo podría tener razón? Wheeler y yo analizamos el asunto exhaustivamente en 1939.

MARGRETHE ¿Qué te dijo?

BOHR Nada. No sé. Estaba demasiado enojado para entender.

MARGRETHE ¿Tenía que ver con la fisión?

BOHR ¿Qué pasa durante la fisión? Se dispara un neutrón al núcleo de un átomo de uranio, se divide y libera energía.

MARGRETHE Una gran cantidad de energía, ¿Sí?

BOHR Suficiente para mover una mota de polvo. Pero también libera dos o tres neutrones más cada uno de los cuales puede llegar a dividir otro núcleo.

MARGRETHE ¿Y esos núcleos divididos liberan energía a su vez?

BOHR Y dos o tres neutrones más.

HEISENBERG Mientras uno esquía se desplaza un poco de nieve. Ese poco de nieve desplaza más nieve y se forma una bola de nieve...

BOHR Una cadena de núcleos divididos, que se multiplica, atraviesa el uranio, duplicándose y cuadruplicándose en una millonésima de segundo de una generación a la otra. Dos divisiones para empezar, luego dos al cuadrado, dos al cubo, a la cuarta, a la quinta, a la sexta...

HEISENBERG El tronar de la avalancha retumba en todas las montañas alrededor...

BOHR Hasta que mas tarde o mas temprano, digamos después de ocho generaciones, 280 motas de polvo han sido desplazadas. 280 es un número con 24 cifras. Suficientes motas de polvo para crear una ciudad, y todos los que viven en ella.

HEISENBERG Pero hay una dificultad.

BOHR Gracias a Dios, hay una dificultad. El uranio natural está constituido por dos isótopos diferentes, el U-238 y el U-235. Menos del uno por ciento es U-235 y ésta pequeña fracción es la única parte que es fisionada por neutrones rápidos.

HEISENBERG Esta fue la gran intuición de Bohr. Le sucedió cuando estaba en Princeton en 1939, caminando por el campus universitario con Wheeler.

BOHR Aquí hay una doble dificultad. El 238 no sólo no puede ser dividido de ninguna manera por los neutrones rápidos, sino que los absorbe. Así que al poco tiempo que comienza la reacción en cadena, no quedan suficientes neutrones rápidos para fisionar al 235.

HEISENBERG Y la cadena se detiene.

BOHR También se puede fisionar al 235 con neutrones lentos. Pero entonces la reacción en cadena ocurre mucho más lentamente de lo que el uranio necesita para explotar.

HEISENBERG Y una vez más la cadena se detiene.

BOHR Lo que todo esto significa es que una reacción en cadena explosiva no ocurrirá jamás en el uranio natural. Para producir una explosión se tendrá que separar 235 puro. Y para que la cadena sea lo suficientemente larga para producir una explosión importante se necesitarían muchas toneladas. Y es extremadamente difícil poder separarlo.

HEISENBERG Tentadoramente difícil.

BOHR Afortunadamente difícil. Los cálculos más optimistas cuando estuve en Estados Unidos en 1939, eran que para producir unos gramos de U-235 se tardarían 26.000 años. Y creo que para entonces se habrá terminado la guerra. Así que se equivoca, ¿Se equivoca! ¿O yo me equivoco? ¿Habré calculado mal? A ver... ¿Cuál es el ritmo de absorción de neutrones rápidos del 238? ¿Cuál es el camino libre medio de los neutrones lentos en el 235...?

MARGRETHE Pero, ¿Qué había dicho Heisenberg exactamente? Eso es lo que todos querían saber, entonces y después.

BOHR Es lo que quisieron saber los ingleses en cuanto Chadwick se pudo comunicar conmigo. ¿Qué dijo exactamente Heisenberg?

HEISENBERG ¿Y qué, exactamente, contestó Bohr? Eso fue lo primero que me preguntaron mis colegas cuando regresé a Alemania.

MARGRETHE ¿Qué le contó Heisenberg a Niels? ¿Qué le respondió Niels? La persona que más lo quería saber era Heisenberg mismo.

BOHR Por eso volvió a Copenhagen dos años después de terminada la guerra en 1947.

MARGRETHE Esta vez escoltado por un visible acompañante de la Inteligencia británica y no por agentes invisibles de la Gestapo.

BOHR Creo que quería varias cosas.

MARGRETHE Dos cosas. Paquetes de comida...

BOHR Para su familia en Alemania. No tenían nada para comer.

MARGRETHE Y para ponerse de acuerdo sobre qué se habían dicho en 1941.

BOHR La conversación se descompuso casi tan rápido como la vez anterior.

MARGRETHE Ni siquiera pudieron ponerse de acuerdo sobre por dónde habían caminado esa noche.

HEISENBERG ¿Por dónde caminamos?

BOHR No caminamos.

HEISENBERG Yo veo las hojas otoñales amontonadas debajo de los faroles de la calle.

BOHR ¡Porque tu piensas que fue en octubre!

MARGRETHE Y fue en septiembre.

BOHR No había hojas caídas.

MARGRETHE Y era 1941... ¡No se podían encender los faroles en la calle! Estábamos en guerra.

BOHR No nos habíamos alejado de mi estudio. Yo veo los papeles bajo la luz de mi escritorio.

HEISENBERG ¡Estábamos afuera! Lo que yo iba a decir era traición. Si me escuchaban me ejecutaban.

MARGRETHE ¿Y qué fue esa cosa misteriosa que dijiste?

HEISENBERG No tiene misterio. Nunca hubo misterio. Lo recuerdo perfectamente porque mi vida estaba en juego, y elegí mis palabras con mucho cuidado. Simplemente te pregunté si, como físico, uno tenía el derecho moral de trabajar en la explotación de la energía atómica. ¿Sí?

BOHR No me acuerdo.

HEISENBERG No te acuerdas, no, porque casi inmediatamente te alarmaste. Te detuviste en seco.

BOHR Porque yo estaba horrorizado.

HEISENBERG Horrorizado. Bien, te acuerdas de eso. Te quedaste ahí parado, mirándome, horrorizado.

BOHR Porque la deducción era obvia. Tú estabas trabajando en eso.

HEISENBERG Y tu te apresuraste a concluir que yo estaba tratando de proveer a Hitler con armas nucleares.

BOHR ¡Y era lo que estabas haciendo!

HEISENBERG ¡No! ¡Un reactor! ¡Eso era lo que intentábamos construir! ¡Una máquina para producir energía! ¡Para generar electricidad, para impulsar barcos!

BOHR ¡No dijiste nada sobre un reactor!

HEISENBERG ¡No dije nada sobre nada! No con claridad. No podía. No sabía cuánto podían oírnos, ni qué le repetirías a otros.

BOHR Pero te pregunté si realmente pensabas que la fisión de uranio se podría usar para construir armas.

HEISENBERG ¡Ah! ¡Ahora te acuerdas!

BOHR Sí. Y claramente recuerdo lo que me contestaste.

HEISENBERG Te dije que ahora sabía que sí.

BOHR Y eso es lo que realmente me horrorizó.

HEISENBERG Porque tu confiabas que para producir armas se necesitaría 235 y que nunca íbamos a poder producir suficiente.

BOHR Un reactor. Sí, quizás porque ahí no ocurriría la explosión. Se puede mantener en funcionamiento la reacción en cadena con neutrones lentos en el uranio natural.

HEISENBERG De lo que nos habíamos dado cuenta, sin embargo, era que si alguna vez podíamos poner en funcionamiento el reactor, el 238 absorbería los neutrones rápidos. Como tú intuiste genialmente en 1939. Y a su vez sería transformado por ellos y se convertiría en un elemento totalmente nuevo.

BOHR Neptunio. Que a su vez se transformaría en otro elemento...

HEISENBERG Por lo menos tan posible de ser fisionado como el 235.

MARGRETHE Plutonio.

HEISENBERG Plutonio.

BOHR Como no me di cuenta.

HEISENBERG Si lográbamos construir un reactor íbamos a poder construir bombas. Eso es lo que me llevó a Copenhagen. Pero no podía decirlo. Y en este punto dejaste de escucharme. La bomba ya había explotado dentro de tu cabeza. La conversación estaba terminada. Nuestra única oportunidad de hablar se había ido para siempre.

BOHR Porque ya había comprendido el punto central. Que por un camino u otro veías la posibilidad de proveerle a Hitler armas nucleares.

HEISENBERG Comprendiste por lo menos cuatro puntos centrales, todos equivocados. Le dijiste a Rozenthal que yo había intentado sonsacarte lo que sabías de la fisión. Le dijiste a Weisskopf que yo te había preguntado qué sabías del programa nuclear aliado. Chadwick entendió que yo intentaba persuadirte de que no existía un programa alemán. ¡Pero también parece que le contaste a alguna gente que yo quería reclutarte para trabajar para nosotros!

BOHR Muy bien. Empecemos todo desde el principio. No hay hombres de la Gestapo en las sombras. No hay un oficial de inteligencia británica. Nadie nos observa.

MARGRETHE Sólo yo.

BOHR Sólo Margrethe. Vamos a dejarle todo claro a Margrethe. Tu sabes que yo creo fervientemente que no hacemos ciencia para nosotros, que la hacemos para poder explicársela a otros...

HEISENBERG En un lenguaje sencillo.

BOHR En un lenguaje sencillo. No es tu posición, lo sé; tu podría tranquilamente describir lo que estás investigando en ecuaciones diferenciales si es posible, pero por Margrethe...

HEISENBERG Un lenguaje sencillo

BOHR Un lenguaje sencillo. Está bien, así que aquí estamos, caminando por la calle una vez más. Y esta vez estoy totalmente tranquilo. Te escucho con atención. ¿Qué quieres decirme?

HEISENBERG ¡No es sólo lo que yo quiero decirte! ¡Es todo el equipo nuclear alemán en Berlín! No Diebner, por supuesto, no los nazis; Weizsäcker, Hahn, todos ellos querían que viniera y que lo discutiera con tu. Todos te vemos como una especie de padre espiritual.

MARGRETHE El Papa. Así lo llamaban a sus espaldas. Y ahora quiere que les dé la absolución.

HEISENBERG ¿Absolución? ¡No!

MARGRETHE Es lo que dicen tus colegas alemanes.

HEISENBERG La absolución es lo último que quiero.

MARGRETHE Le dijiste a un historiador que lo habían expresado perfectamente.

HEISENBERG ¿Sí? Absolución... ¿Es por eso que vine? Es como tratar de acordarme de todas las distintas explicaciones que di de todo lo que hice... Pero si ahora la palabra absolución aparece entre ellas...

MARGRETHE Yo pensaba que la absolución se otorgaba por los pecados ya cometidos y por su arrepentimiento, no por los pecados que se querían cometer y todavía no se habían realizado.

HEISENBERG ¡Exactamente! ¡Por eso yo quedé estupefacto!

BOHR ¿Tu quedaste estupefacto?

HEISENBERG ¡Porque me diste la absolución! ¡Eso es exactamente lo que hiciste! Mientras regresábamos rápidamente a la casa. Dijiste algo en voz baja acerca de que todos durante una guerra estaban obligados a hacer lo mejor posible por su país. ¿Sí?

BOHR Dios sabe qué dije. Pero ahora estoy acá, muy tranquilo y consciente, midiendo mis palabras. No quieres absolución. Entiendo. ¿Quieres que te diga que no lo hagas? Está bien. Pongo mi mano sobre tu brazo. Te miro a los ojos en mi modo más papal. Y te digo. Regresa a Alemania, Heisenberg. Reúne a tus colegas en el laboratorio. Súbete a una mesa y diles: "Dice Niels Bohr que desde su estudiado punto de vista, proveerle a un homicida maniaco un instrumento sofisticado de asesinato masivo es..." ¿Qué puedo decir? "...una idea interesante." No, ni siquiera una idea interesante. "...en realidad, más bien, una idea seriamente poco interesante". ¿Qué sucede? ¿Todos abandonan instantáneamente sus contadores Geiger, cierran todo con llave y se van a la casa?

HEISENBERG No, obviamente.

BOHR Porque los arrestarían.

HEISENBERG Si nos arrestan o no, no cambia nada. Al contrario, empeorarían las cosas. Yo dirijo el programa de investigación nuclear para el Instituto de Ciencias. Pero hay otro programa del ejército, dirigido por Kurt Diebner y él es del partido nazi. Si yo no estoy, simplemente harán que Diebner se haga cargo del mío también. Mi única esperanza es seguir yo a cargo del programa.

BOHR Así que no quieres que te diga que sí y no quieres que te diga no.

HEISENBERG Lo que quiero es que escuches atentamente lo que voy a decirte ahora y que no salgas disparado como un loco por la calle.

BOHR Muy bien. Acá estoy caminando muy lenta y pa-palmente. Y escucho atentamente mientras me dices que...

HEISENBERG Que las armas nucleares requerirán un enorme esfuerzo técnico.

BOHR Cierto.

HEISENBERG Que demandarán enormes recursos.

BOHR Recursos enormes. Cierto.

HEISENBERG Que antes o después, los gobiernos tendrán que preguntarles a los científicos si vale la pena comprometer esos recursos; si existe la esperanza de producir esas armas a tiempo para que ellos las usen.

BOHR Por supuesto, pero...

HEISENBERG Espera. Tendrán que venir a tu y a mí. Nosotros somos los que tendremos que aconsejarles si vale la pena seguir adelante o no. Al final de cuentas la decisión estará en nuestras manos, nos guste o no.

BOHR ¿Y eso es lo que quieres decirme?

HEISENBERG Eso es lo que quiero decirte.

BOHR ¿Es por eso que te ha costado tanto llegar hasta aquí? ¿Por eso tiraste por la borda casi veinte años de amistad? ¿Simplemente para decirme eso?

HEISENBERG Simplemente para decirte eso.

BOHR ¡Pero, Heisenberg, esto es más misterioso todavía! ¿Para qué me lo cuentas? ¿Qué quieres que haga? ¡El gobierno de ocupación de Dinamarca va a venir a preguntarme a mí si deberíamos producir armas nucleares!

HEISENBERG ¡No, pero tarde o temprano, si logro permanecer a cargo del programa, el gobierno alemán me lo va a preguntar a mí! ¡Me preguntarán a mí si continuamos o no! ¡Y yo tendré que decidir qué responderles!

BOHR Entonces tienes una salida fácil a tus problemas. Sencillamente diles la verdad que me acabas de contar a mí. Que es muy difícil. Y quizás se desanimen. Quizás pierdan interés.

HEISENBERG Pero, Bohr, ¿A dónde lleva eso? ¿Cuáles serán las consecuencias si logramos hacer fracasar el programa Alemán?

BOHR ¿Qué puedo decirte que no puedas decirte tu mismo?

HEISENBERG Leí en un diario de Estocolmo que los americanos están trabajando sobre una bomba atómica.

BOHR Ah, era eso. Era eso. Ahora entiendo todo. ¿Tú crees que estoy en contacto con los americanos?

HEISENBERG Puede ser. Es posible. Si hay alguien en la Europa ocupada que está en contacto, tienes que ser tu.

BOHR Así que, si quieres saber sobre el programa nuclear de los aliados.

HEISENBERG Simplemente quiero saber si existe uno.

Una pista. ¡Un indicio! Acabo de traicionar a mi país y arriesgar mi vida para advertirte de la existencia de un programa alemán.

BOHR ¿Y ahora yo tengo que devolverte el cumplido?

HEISENBERG ¡Bohr, tengo que saberlo! ¡Yo soy el que tiene que decidir! Si los aliados están fabricando una bomba, ¿qué estoy eligiendo para mi país? Sería fácil equivocarse y pensar que porque el país de uno es culpable, uno lo ama menos. Nací en Alemania. Es donde me convertí en quien soy. Alemania es todas las caras de mi infancia, todas las manos que me levantaron cuando me caí, todas las voces que me dieron aliento y me señalaron el camino, todos los corazones que le hablan a mi corazón. Alemania es mi madre viuda y mi hermano imposible. Es mi mujer. Alemania es nuestros hijos. ¡Tengo que saber qué estoy decidiendo para ellos! ¿Es otra derrota? ¿Otra pesadilla como la pesadilla en la que me crié? Bohr, mi infancia en Munich terminó en medio de la anarquía y la guerra civil. ¿Van a pasar hambre más niños como nosotros lo pasamos? ¿Van a tener que pasarse las noches de invierno, como yo cuando iba a la escuela, arrastrándose a través de las líneas enemigas, en la oscuridad, para buscar entre la nieve comida para mi familia? ¿Van a pasarse toda una noche, como lo hice yo a los diecisiete, con un fusil en la mano, hablando y hablando con un prisionero aterrorizado que iban a ejecutar en la mañana?

BOHR Pero, mi querido Heisenberg, no tengo nada para decirte. No tengo idea de si hay un programa nuclear aliado.

HEISENBERG Se está poniendo en marcha mientras tú y yo estamos hablando en esa noche de 1941. Y puede ser que esté eligiendo algo peor que la derrota. Porque la bomba que están construyendo es para ser usada contra nosotros. La noche de Hiroshima el 6-8-1945 Oppenheimer dijo que era lo único que lamentaba. Que no habían fabricado la bomba a tiempo para ser usada sobre Alemania.

BOHR Se atormentó mucho después.

HEISENBERG Después, sí. Por lo menos nosotros nos atormentamos antes. ¿Acaso uno solo de ellos se detuvo a pensar por un instante qué estaban haciendo? ¿Lo hizo Oppenheimer o alguno de sus colegas? ¿Lo hizo Einstein cuando le escribió a Roosevelt en 1939 urgiéndolo a financiar una investigación sobre la bomba? ¿Lo hiciste tu cuando escapaste de Copenhagen dos años más tarde y te uniste al equipo de Los Álamos?

BOHR ¡Mi querido Heisenberg, no le estábamos suministrando la bomba a Hitler!

HEISENBERG Tampoco la estaban dejando caer sobre la cabeza de Hitler. La estaban arrojando sobre

viejos en la calle, sobre madres con sus hijos. Y si la hubieran fabricado a tiempo hubiera sido sobre mis compatriotas. Mi mujer. Mis hijos. Esa era la intención, ¿sí?

BOHR Esa era la intención.

HEISENBERG No tenían la menor idea de qué es lo que pasa cuando se tira una bomba sobre una ciudad. Ni siquiera una bomba convencional. Ninguno de ustedes lo había padecido. Ni uno solo. Una noche me fui caminando desde el centro de Berlín a los suburbios, después de uno de los grandes bombardeos. Toda la ciudad en llamas. Hasta los charcos en las calles están ardiendo. Son charcos de fósforo derretido. Se pega a los zapatos como una caca de perro incandescente. Me lo tengo que sacar constantemente, como si las calles hubiesen sido ensuciadas por una jauría del infierno. Te hubieses reído, mis zapatos estallaban en llamas todo el tiempo. A mi alrededor, supongo, hay miles de personas muriendo quemada. Y lo único que puedo pensar es: “¿cómo voy a conseguir otro par de zapatos en tiempos como éstos?”

BOHR Tu sabes por qué los científicos aliados trabajaron en la bomba.

HEISENBERG Por supuesto. Por miedo.

BOHR El mismo miedo que los consumía a ustedes. Porque ellos tenían miedo de que ustedes estuvieran trabajando en ella.

HEISENBERG ¡Pero, Bohr, tu podrías haberles dicho!

BOHR ¿Decirles qué?

HEISENBERG ¡Lo que yo te dije en 1941! ¡Que la elección estaba en nuestras manos! ¡En las mías, en las de Oppenheimer! ¡Que si yo puedo decirles a las autoridades alemanas la desalentadora verdad, cuando me lo pregunten, él también puede!

BOHR ¿Esto es lo que quieres de mí? ¿No que te cuente qué están haciendo los americanos sino que los detenga?

HEISENBERG Que les digas que podemos detenerlos juntos.

BOHR Yo no tenía ninguna comunicación con los americanos.

HEISENBERG Pero, sí con los británicos.

BOHR Sólo más tarde.

HEISENBERG La Gestapo interceptó el mensaje que les mandaste acerca de nuestro encuentro.

MARGRETHE ¿Y lo pusieron en tus manos?

HEISENBERG ¿Y por que no? Habían empezado a confiar en mí. Es lo que me dio la posibilidad de mantener la situación bajo control.

BOHR No es por criticar, Heisenberg, pero si este es el plan por el que viniste a Copenhagen, es... ¿cómo decirlo?... sumamente interesante.

HEISENBERG No es un plan. Es una esperanza. Ni siquiera eso. Un delgado, microscópico hilo de posibilidad. Totalmente improbable. ¡Pero que vale la pena intentar, Bohr! ¡Vale la pena intentarlo! Pero ya estás muy enojado para entender lo que digo.

MARGRETHE No. ¡Está enojado porque está empezando a entender! Los alemanes se deshacen de la mayoría de sus mejores físicos porque son judíos. Los Estados Unidos y Gran Bretaña les dan asilo. Y eso es para los aliados una esperanza de salvación. Y tú venís aullándole a Niels, rogándole que los convenza de que se detengan. Pero, ¡Como te atreves! ¡Como te atreves!

BOHR Margrethe, mi amor, tratemos de expresarnos un poco más civilizadamente.

HEISENBERG Civilizadamente. Eso tendríamos que haber hecho, discutir civilizadamente. Cuando escuché lo de Hiroshima por primera vez me negué a creerlo. Desde los últimos meses de la guerra estábamos viviendo en una mansión en medio de la campiña inglesa. Nos secuestraron los ingleses, a todo el equipo alemán que trabajábamos en la investigación atómica. En Alemania, nuestras familias se están muriendo de hambre, sin saber nada de nosotros. Y ahí estamos, sentándonos a la mesa cada noche para participar de una excelente cena formal, con nuestro encantador anfitrión, el oficial inglés encargado de nosotros. Pero la guerra ya terminó y seguimos allí y todo es encantadoramente civilizado. Yo toco sonatas de piano de Beethoven. El mayor Rittner nos lee a Dickens. ¿Realmente me han pasado a mí estas cosas?... Esperamos a que nos revelen cuál es el sentido de todo eso. Y una noche sucede. Lo escuchamos por la radio: ustedes acaban de cometer el hecho por el que nos atormentábamos. Por eso estábamos ahí. Nos encerraron para que no habláramos con nadie del tema hasta que fuera demasiado tarde. Cuando el mayor Rittner nos lo contó, yo me rehusé a creerlo, hasta que lo escuché con mis propios oídos en el noticiero. No teníamos ni idea de lo avanzado que estaban. Nos quedamos despiertos esa noche, hablando, tratando de entender. Estamos todos literalmente estupefactos.

MARGRETHE ¿Por qué lo hicieron ellos? ... ¿O por qué no lo habían hecho ustedes?

HEISENBERG Las dos cosas. Las dos. Otto Hahn quiere quitarse la vida porque él descubrió la fisión, y ve

sangre en sus manos. Gerlach, nuestro viejo coordinador nazi, también quiere morir, porque sus manos están tan vergonzosamente limpias. Pero ustedes lo hicieron. Construyeron la bomba.

BOHR Sí.

HEISENBERG Y la usaron sobre un blanco humano.

BOHR Sobre un blanco humano.

MARGRETHE ¿No querrás sugerir que Niels hizo algo malo por haber trabajado en Los Álamos?

HEISENBERG Por supuesto que no. Bohr nunca hizo nada malo en su vida.

MARGRETHE La decisión la habían tomado mucho antes de que llegara Niels. La bomba la iban a construir estuviera o no estuviera él.

BOHR De todos modos mi contribución fue muy pequeña.

HEISENBERG Oppenheimer contó que tú eras el padre confesor del equipo.

BOHR Parece ser mi rol en la vida.

HEISENBERG Dijo que la tuya fue una contribución importante.

BOHR En lo espiritual quizás, no en lo práctico.

HEISENBERG Fermi dice que fuiste tu quien resolvió como detonar la bomba de Nagasaki.

BOHR Propuse una idea.

MARGRETHE ¿No querrás insinuar que hay algo que Niels deba explicar o defender?

HEISENBERG Nunca nadie le pidió que explicara o defendiera nada. Es un hombre profundamente bueno.

BOHR No se trata de mi bondad. Me ahorraron tener que tomar la decisión.

HEISENBERG Sí, y a mi no. Con lo cual me pasé los últimos treinta años de mi vida dando explicaciones y defendiéndome. Cuando fui a Estados Unidos, en 1949, muchos físicos ni siquiera me querían dar la mano. Las mismas manos que habían construido la bomba no querían tocar la mía.

MARGRETHE Si crees que me estás aclarando la situación ahora, te equivocas.

BOHR Margrethe, yo entiendo sus sentimientos...

MARGRETHE Yo no. ¡Ahora la que esta enojada soy yo! Es muy fácil para él hacerte sentir culpable. ¿Qué hace él, después de consultarte? ¡Vuelve a Berlín y les dice a los nazis que él puede producir bombas atómicas!

HEISENBERG Si. Pero les recalco es la dificultad de separar 235.

MARGRETHE Les cuentas lo del plutonio.

HEISENBERG Se los cuento a algunos oficiales de menor rango. ¡Tengo que mantenerles viva la esperanza!

MARGRETHE Porque si no mandarían a buscar al otro.

HEISENBERG A Diebner. Muy posiblemente.

MARGRETHE Siempre hay un Diebner dispuesto a hacerse cargo de nuestros crímenes.

HEISENBERG Es posible que Diebner logre avanzar más que yo.

BOHR ¿Diebner?

HEISENBERG Es posible. Sólo posible.

BOHR ¡No tiene ni un cuarto de tu habilidad!

HEISENBERG Ni un décimo. Pero tiene diez veces más ganas. Daría una versión muy distinta si fuera él y no yo el que se reúne con Albert Speer, el ministro de armamento de Hitler.

MARGRETHE La famosa reunión con Speer.

HEISENBERG Este es el momento importante. El decisivo junio de 1942. Nueve meses después de mi viaje a Copenhagen. Hitler cancela todas las investigaciones que no produzcan resultados inmediatos, y Speer es el único arbitro que decide cuáles programas califican. Y justo acabamos de obtener la primera señal de que nuestro reactor va a funcionar. Nuestro primer incremento de neutrones. No mucho, 13 %, pero es un comienzo.

BOHR ¿Junio de 1942? Están un poco más adelantados que Fermi en Chicago.

HEISENBERG Pero no lo sabemos. Además la fuerza aérea inglesa comenzó con sus bombardeos a blancos civiles. Han arrasado con la mitad de Lübeck y todo el centro de Rostock y Colonia. Alemania necesita desesperadamente nuevas armas para contraatacar. Es el momento para presentar nuestro caso.

MARGRETHE ¿No le piden los fondos para continuar?

HEISENBERG ¿Para continuar con el reactor? Por supuesto que sí. Pero le pido tan poco que no se toma el programa en serio.

MARGRETHE ¿Le cuentas que el reactor va a producir plutonio?

HEISENBERG Por supuesto que no. No a Speer. No le cuento que el reactor va a producir plutonio.

BOHR Una omisión llamativa. Es cierto.

HEISENBERG ¿Y qué sucede? Nos da lo justo para que el programa sobreviva. Y ese es el fin de la bomba atómica alemana. Es el fin.

MARGRETHE Sin embargo siguen con el reactor.

HEISENBERG Seguimos con el reactor. Porque ahora no corremos el riesgo de producir a tiempo el plutonio suficiente para hacer una bomba. Trabajamos como locos. Lo tenemos que arrastrar de una punta a la otra de Alemania para alejarlo del bombardeo y para que no caiga en manos rusas. Y lo instalamos en un pueblito del oeste.

BOHR ¿En Haigerloch?

HEISENBERG Si. La posada del pueblo tiene una bodega en el sótano. Le hacemos un pozo en el piso al reactor y me aseguro que ese programa siga funcionando, bajo mi control hasta el amargo final.

BOHR Pero Heisenberg, con respeto, con el mayor respeto, ustedes no podían controlar al reactor. El reactor lo iba a matar.

HEISENBERG Nunca llegó a una etapa crítica.

BOHR Gracias a Dios. Cuando los aliados se hicieron cargo descubrieron que no tenía barras de control de cadmio. No estaba previsto ningún mecanismo para absorber el exceso de neutrones, en caso de que la reacción se sobrecalentara. ¡Si hubieran llegado a una etapa crítica, se hubiera derretido y desaparecido al centro de la tierra!

HEISENBERG No, para nada. Teníamos un cascote de cadmio.

BOHR ¿Un cascote de cadmio? ¿Qué pensaban hacer con un cascote de cadmio?

HEISENBERG Tirarlo al agua pesada. El moderador en el que estaba inmerso el uranio.

BOHR ¡Mi querido Heisenberg, no es por criticar, pero habían enloquecido!

HEISENBERG ¡Casi llegamos! ¡Teníamos un crecimiento de neutrones espectacular! Llegamos a un crecimiento del 670%. Una semana más. Quince días más. ¡Es todo lo que necesitábamos!

BOHR ¡Sólo los salvó la llegada de los aliados!

HEISENBERG ¡Casi llegamos a la etapa crítica! Un poquito más y la reacción en cadena se hubiera sostenido indefinidamente. Sólo necesitamos un poco más de uranio.

BOHR ¿Y tenían todo bajo control?

HEISENBERG ¡Bajo mi control! ¡Sí! ¡Eso es lo que importa! ¡Bajo mi control!

BOHR Tu ya no controlabas ese programa, Heisenberg, el programa te controlaba a tí.

HEISENBERG Dos semanas más, dos barras más de uranio y hubieran sido los físicos alemanes los que lograban la primera reacción en cadena auto sustentada.

BOHR Excepto que Fermi ya lo había logrado en Chicago dos años antes.

HEISENBERG No lo sabíamos.

BOHR No estaban enterados de nada en esa cueva. Los expertos aliados dijeron que ni siquiera tenían algo para protegerse de la radiación.

HEISENBERG No teníamos tiempo para pensar en eso. Sólo podíamos pensar en hacer que funcionara el reactor.

BOHR Yo tendría que haber estado ahí para cuidarte. Siempre me necesitaste a tu lado para sosegarlo. Tu propio cascote de cadmio.

HEISENBERG Si hubiera muerto entonces por la radiación, ¿qué me hubiera perdido? Treinta años de explicaciones. Treinta años de reproches y hostilidad. Hasta tú me diste la espalda. A veces pienso que esas semanas en Haigerloch fueron la última época feliz de mi vida. Estábamos libres de la polítiquería de Berlín. Fuera del alcance de las bombas. La guerra finalizaba. No teníamos nada en qué pensar, salvo el reactor.

MARGRETHE Mírenlo. Está perdido como un chico. Estuvo jugando en el bosque todo el día, corriendo de un lado para el otro. Tuvo coraje tuvo miedo. Y ahora llegó la noche y lo único que quiere es irse a la casa.

HEISENBERG Silencio.

BOHR Silencio.

MARGRETHE Silencio.

HEISENBERG Y una vez más el timón se trabó y Cristian se está cayendo.

BOHR Una vez más intenta alcanzar el salvavidas.

MARGRETHE Una vez más levanto la vista de mi trabajo y Niels está en la puerta, mirándome silenciosamente...

BOHR Entonces, Heisenberg, ¿A qué viniste a Copenhague en 1941? Estuvo bien que nos contaras todos los miedos que tenías. Pero no creíste realmente que yo te iba a contar si los americanos estaban trabajando en una bomba.

HEISENBERG No.

BOHR No esperabas en serio que yo los detuviera.

HEISENBERG No.

BOHR Ibas a volver a trabajar en el reactor más allá de lo que yo te dijera.

HEISENBERG Sí.

BOHR Entonces, ¿a qué viniste?

HEISENBERG ¿A qué vine?

BOHR Cuéntanos nuevamente. Otro borrador. Y esta vez nos saldrá bien. Esta vez entenderemos.

MARGRETHE Hasta puede ser que tu mismo entendas.

BOHR Después de todo, el funcionamiento del átomo era difícil de explicar. Hicimos muchos intentos. Con cada intento se volvía más oscuro. Pero al final llegamos. Vamos, otro borrador, otro borrador.

HEISENBERG ¿A qué vine? Y una vez más recorreré esa noche de 1941. Aplasto las piedritas del camino tan familiar hacia la puerta de entrada de la casa de los Bohr, y hago sonar la campana. ¿Qué siento? Miedo, seguro, y la importancia absurda y horrible de alguien que trae malas noticias. Pero... sí... hay algo más. Aquí viene de nuevo. Casi puedo ver su cara. Algo bueno. Algo luminoso y esperanzador.

BOHR Abro la puerta...

HEISENBERG Y ahí está él. Veo sus ojos que se iluminan al verme.

BOHR Sonríe con su sonrisa cautelosa de estudiante.

HEISENBERG Y siento un momento de mucho consuelo.

BOHR Un segundo de alegría tan dulce.

HEISENBERG Como si regresara a casa después de un largo viaje.

BOHR Como si un hijo perdido hubiera aparecido en la puerta.

HEISENBERG Repentinamente me he liberado de todos los temores, de toda la oscuridad.

BOHR Cristian está vivo. Harald todavía no nació.

HEISENBERG El mundo está en paz de nuevo.

MARGRETHE Mírenlos. Todavía padre e hijo. Por un momento. Incluso ahora que estamos todos muertos.

BOHR Por un segundo volvemos a los años veinte.

HEISENBERG Y nos hablaremos y entenderemos como entonces.

MARGRETHE Y de esas dos cabezas surgirá el futuro. Qué ciudades serán destruidas y cuáles sobrevivirán. Quién morirá y quién vivirá. Qué mundo desaparecerá y cuál triunfará.

BOHR ¡Mi querido Heisenberg!

HEISENBERG ¡Mi querido Bohr!

BOHR Pasa, pasa...

## SEGUNDO ACTO

HEISENBERG La primera vez que vine a Copenhagen fue muy al comienzo de la primavera en 1924. Marzo.

BOHR Tu tenías veintidós. Así que yo debía tener...

HEISENBERG Treinta y ocho.

BOHR Casi la misma edad que tenías cuando viniste en 1941.

HEISENBERG ¿Y qué hacemos?

BOHR Nos ponemos las botas y la mochila.

HEISENBERG Nos tomamos el tranvía hasta el final del recorrido...

BOHR ¡Y caminamos!

HEISENBERG Hacia el norte, a Elsinore.

BOHR Si uno camina habla.

HEISENBERG Caminamos y hablamos, durante casi doscientos kilómetros.

BOHR Y después no paramos de hablar en tres años.

HEISENBERG Compartíamos una botella de vino en tu departamento del instituto.

BOHR Pero tenemos que seguir los hilos hasta el comienzo del laberinto. ¿A tu no te importaba? Espero que no.

MARGRETHE ¿Qué?

BOHR Que te dejáramos en casa.

MARGRETHE ¿Mientras ustedes se iban a caminar? Por supuesto que no. ¿Por qué me iba a importar? Tenías que salir de casa. Dos hijos nuevos al mismo tiempo era mucho para que lo tolerara cualquier hombre.

BOHR ¿Dos hijos nuevos?

MARGRETHE Heisenberg.

BOHR Sí, sí.

MARGRETHE Y nuestro propio hijo.

BOHR ¿Aage?

MARGRETHE ¡Ernesto!

BOHR 1924, por supuesto, Ernesto.

MARGRETHE El quinto. ¿Sí?

BOHR Sí. Y era marzo, tienes razón. No tenía más de...

MARGRETHE Una semana.

BOHR ¿Una semana? Una semana, sí. ¿Y de verdad no te importaba?

MARGRETHE Para nada. Me ponía contenta que tuvieras una excusa para irte. Siempre te ibas a caminar con tus asistentes nuevos.

HEISENBERG ¡Ah, aquellos años! ¡Esos años asombrosos! ¡Esos tres cortos años!

BOHR De 1924 a 1927.

HEISENBERG Desde que llegué a Copenhagen a trabajar con tu...

BOHR Hasta que te marchaste, a hacerse cargo de tu cátedra en Leipzig.

HEISENBERG Tres años de una primavera áspera, vigorizante típica del norte de Europa.

BOHR Al final de la cual teníamos la mecánica cuántica, teníamos el principio de incertidumbre...

HEISENBERG Teníamos la teoría de la complementariedad.

BOHR Teníamos la totalidad de las interpretaciones del grupo de Copenhagen.

HEISENBERG Nuevamente Europa en toda su gloria. Un nuevo renacimiento, con Alemania otra vez en su merecido lugar, en el centro de todo. ¿Y quiénes abrieron el camino para todos los demás?

MARGRETHE Ustedes dos.

HEISENBERG Lo hicimos si.

BOHR Lo hicimos.

MARGRETHE ¿Y a eso intentabas volver en 1941?

HEISENBERG A algo que hicimos en aquellos tres años... Algo que dijimos, algo que pensamos... Algo referido al modo en que trabajamos.

BOHR Juntos.

HEISENBERG Juntos. Sí, juntos.

MARGRETHE No.

BOHR ¿No? ¿Qué quieres decir, no?

MARGRETHE Juntos no. No hicieron ninguna de esas cosas juntos.

BOHR Si, las hicimos. Claro que las hicimos.

MARGRETHE Cada uno hizo su trabajo cuando estuvieron separados. Primero terminaste de resolver la mecánica cuántica en Heligoland.

HEISENBERG Bueno había llegado el verano y yo tenía mi alergia.

MARGRETHE No. Te fuiste solo a esa isla diciendo que ahí no había nada que te distrajera.

HEISENBERG Si. Mi cabeza empezó a despejarse, y tuve una imagen muy definida de cómo debería ser la física atómica. De pronto me di cuenta que teníamos que limitarla a las mediciones que podíamos hacer, a lo que podíamos observar. No podemos ver los electrones dentro del átomo...

MARGRETHE Como tampoco Niels puede ver los pensamientos en tu cabeza o tu los pensamientos en la de Niels.

HEISENBERG Lo único que podemos ver son los efectos que producen los electrones en la luz que ellos reflejan...

BOHR Pero las dificultades que tu intentabas resolver eran aquellas que habíamos explorado juntos, comiendo en el departamento del instituto o en la casa de la playa.

HEISENBERG Por supuesto. Pero recuerdo la noche cuando las matemáticas empezaron por primera vez a armonizar con el principio de incertidumbre.

MARGRETHE En Heligoland.

HEISENBERG En Heligoland.

MARGRETHE Solo.

HEISENBERG Si. Fue terriblemente agotador. Pero a eso de las tres de la mañana logro resolverlo. Parece como si mirara a través de la superficie del fenómeno atómico y veo un extraño y bello mundo interior. Un mundo de estructuras puramente matemáticas. Si, estaba feliz.

MARGRETHE Más feliz de lo que estuviste con nosotros el invierno siguiente.

HEISENBERG Por supuesto ¿Con todas esas tonterías de Schrödinger?

BOHR ¿Tonterías? Vamos. ¿La formulación de la mecánica ondulatoria de Schrödinger? (\*)

MARGRETHE... ¡Dijo que era repulsiva!

HEISENBERG Dije que las consecuencias para la física eran repulsivas. Schrödinger dijo que mis matemáticas eran repulsivas.

BOHR A mí me parece recordar que usaste otra palabra.

HEISENBERG Tu lo invitaste aquí a Schrödinger...

BOHR Para mantener un debate apacible sobre nuestras diferencias.

HEISENBERG Y tú caíste sobre él como un loco. Lo vas a buscar a la estación y arremetes contra él antes de que pudiera bajar sus valijas del tren. Y luego la sigues contra él desde las primeras horas de la mañana hasta la medianoche.

BOHR ¿Yo la sigo? ¡Él la seguía!

HEISENBERG ¡Por que no querías hacer la menor concesión!

BOHR ¡Y él tampoco!

HEISENBERG ¡Lo hiciste enfermar! ¡Tuvo que meterse en la cama para poder alejarse de tu!

BOHR Tuvo un leve resfrío con algo de fiebre.

HEISENBERG ¡Margrethe lo tuvo que cuidar!

MARGRETHE Le di cantidades de té y torta para que no se debilitara.

HEISENBERG ¡Sí, mientras que tu no lo dejaste en paz ni en la cama! ¡Te sentaste ahí y lo martillaste a palabras!

BOHR Muy cortésmente.

HEISENBERG ¡Tú eras el Papa y el Santa Oficio y la Inquisición en una sola persona! Y entonces, después de que Schrödinger se fue huyendo de tu casa – y esto no me lo voy a olvidar, Bohr, no voy a dejar que lo olvides nunca – te pusiste de su lado. ¡Me atacaste a mí!

BOHR Porque a esa altura habías enloquecido. Te habías vuelto un fanático. De ninguna manera querías permitirle un lugar en la mecánica cuántica a la teoría ondulatoria.

HEISENBERG ¡Me traicionaste!

BOHR Dije que la mecánica ondulatoria de Schrödinger y tu mecánica de las matrices (\*) eran simplemente herramientas alternativas.

HEISENBERG Estabas aceptando algo de lo que siempre me acusa a mí: “Si funciona, funciona“. No importa el significado.

BOHR Por supuesto que me importa el significado. Tenemos que explicárselo a Margrethe.

MARGRETHE ¿A mí? ¡Si no se lo podían explicar entre ustedes! ¡Seguían discutiendo hasta la madrugada todas las noches! ¡Los dos se enojaban tanto!

BOHR Quedábamos exhaustos.

MARGRETHE El experimento de la cámara de niebla (\*) terminó con esas discusiones.

BOHR Sí, porque si se desprende un electrón de su átomo, y pasa a través de una cámara de niebla, se puede ver la huella que deja.

HEISENBERG Y es un escándalo. ¡Porque no debería haber una huella!

MARGRETHE De acuerdo a tu manera de ver la mecánica cuántica.

HEISENBERG ¡No hay una huella! ¡No hay órbitas! ¡Ni huellas ni trayectorias! ¡Sólo efectos externos!

MARGRETHE Pero ahí está la huella. La vi yo misma, tan clara como la estela que deja un barco al pasar.

BOHR Era una paradoja fascinante.

HEISENBERG Y a tu te encantaban las paradojas, ese es tu problema. Te regodeabas en las contradicciones.

BOHR Sí, y tú nunca pudiste entender el encanto que hay en la paradoja y la contradicción. Ese es tu problema. Vives y respiras paradojas y contradicciones, pero no eres capaz de ver la belleza de ellas, como el pez no puede ver la belleza del agua.

HEISENBERG A veces me sentía atrapado en una especie de infierno sin ventanas. Tú no te das cuenta de lo agresivo que eres. Dando vueltas por la habitación como si estuvieras por comerte a alguien – yo puedo adivinar quién va a ser.

BOHR Pero así hacíamos la física.

MARGRETHE ¡No! ¡Al final lo hiciste por tu cuenta, solo! Te fuiste a esquiarse a Noruega.

BOHR ¡Tenía que alejarme de todo eso!

MARGRETHE ¡Y resolviste la complementariedad, en Noruega, por tu cuenta! Ustedes dos funcionan mucho mejor por separado.

HEISENBERG Tenerlo a él lejos, fue un gran alivio, como poder escaparle a mi alergia en Heligoland.

MARGRETHE Si yo fuera el maestro no los dejaría sentarse juntos.

HEISENBERG Y ahí fue cuando desarrollé el principio de incertidumbre. Caminando solo en la oscuridad. Empiezo a pensar qué verías tú, si pudieses enfocar un telescopio sobre mí, desde las montañas de Noruega. Me verías junto a los faroles de la calle, luego nada mientras yo me desvanecía en la oscuridad, luego otro vistazo mientras paso por la luz de otro farol. Y eso es lo que vemos en la cámara de niebla. No una huella continua sino una serie de visiones breves - una serie de colisiones entre el electrón que pasa y varias moléculas de vapor de agua. O pienso en tu viaje a Leiden en 1925. ¿Qué veía Margrethe de ese viaje, estando en su hogar, aquí en Copenhagen? Una postal de Hamburgo, quizás. Luego una de Leiden. Una de Göttingen. Una de Berlín. Por que lo que vemos en la cámara de niebla ni siquiera son

las colisiones en si mismas, sino las gotas de agua que se condensan alrededor de ellas. No hay huella, no hay direcciones precisas; solo una lista borrosa de las ciudades que visitaste. No sé por qué no se nos ocurrió antes, estábamos demasiado ocupados discutiendo para siquiera pensar.

BOHR En cambio parecía que tú habías abandonado todo tipo de discusión. ¡Cuándo regresé de Noruega me encontré con que habías hecho un borrador de tu trabajo sobre el principio de incertidumbre y que ya lo había mandado a publicar!

MARGRETHE Y entonces empieza el combate.

BOHR ¡Mi muy querido Heisenberg, no es un comportamiento muy franco apurarse a imprimir un primer borrador antes de haberlo discutido juntos! ¡Esa no es nuestra manera de trabajar!

HEISENBERG ¡No! ¡La manera en que trabajamos es que me acosas desde la primera hora en la mañana hasta la última hora de la noche! ¡La manera en que trabajamos es que me vuelves loco!

BOHR Sí, por que tu informe tiene un error fundamental.

MARGRETHE Ahí están en pleno combate.

HEISENBERG Yo le muestro la verdad más extraña acerca del universo con la que jamás nos hayamos topado desde la teoría de la relatividad: que nunca se puede saber todo sobre el paradero de una partícula, o de cualquier otra cosa – ni siquiera de Bohr ahora, mientras da vueltas de un lado al otro de la habitación de ese modo suyo tan irritante -. Yo hago añicos el universo objetivo que lo rodea, ¡y lo único que puedes decirme es que tengo un error en la formulación!

BOHR ¡Y lo tienes!

MARGRETHE ¿Quieren té? ¿Torta?

HEISENBERG Escúchame, en mi trabajo lo que intentamos localizar no es un electrón libre, de viaje a través de una cámara de niebla, sino a un electrón cuando está en su lugar, dando vueltas adentro de un átomo...

BOHR Y la incertidumbre no surge, como tú sostienes – a través de su impreciso retroceso cuando es golpeado por un fotón que avanza...

HEISENBERG ¡Lenguaje sencillo, lenguaje sencillo!

BOHR Estoy hablando en un lenguaje sencillo.

HEISENBERG Escúchame...

BOHR El lenguaje de la mecánica clásica.

HEISENBERG ¡Escúchame! Copenhague es un átomo. Margrethe es su núcleo. ¿Está bien la escala? ¿Diez mil a uno?

BOHR Sí, sí.

HEISENBERG Y Bohr es un electrón. Está paseando por alguna parte de la ciudad en la oscuridad, nadie sabe dónde. Está aquí, está allá, está en todas partes y en ninguna. Yo soy un fotón. Un quantum de luz. Soy enviado dentro de la oscuridad para encontrar a Bohr. Y tengo éxito, porque logro chocar con él... ¿Pero, qué sucedió? ¡Mira, te desaceleraste! ¡Te desviaste! ¡Ya no estás haciendo exactamente lo mismo que tan irritantemente estabas haciendo cuando te choqué!

BOHR ¡Pero Heisenberg, Heisenberg! ¡También has sido desviado! ¡Si se puede ver qué ha sucedido con tu y con tu partícula de luz entonces pueden calcular qué me ha pasado a mí! ¡El problema es saber qué te ha sucedido a tu! Porque para comprender cómo se te ve, nosotros tenemos que tratarte no solo como a una partícula, sino como a una onda. Tengo que usar no sólo tu mecánica sobre las partículas, también tengo que usar la mecánica ondulatoria de Schrödinger.

HEISENBERG Ya lo sé, lo añadí en una posdata a mi artículo.

BOHR Todos recuerdan tu informe, pero nadie recuerda tu posdata. Pero el asunto es fundamental. Las partículas son cosas, completas en sí mismas. Las ondas son alteraciones que se producen en otras cosas.

HEISENBERG Ya lo sé. La complementariedad. Está en la posdata.

BOHR Tu nunca aceptaste absoluta y totalmente la teoría de la complementariedad, ¿verdad?

HEISENBERG ¡Sí! ¡Absoluta y totalmente! ¡La defendí en la Conferencia de Como de 1927! Soy un fiel partidario desde entonces. Me convenciste. Acepté tus críticas humildemente.

BOHR No antes de decirme algunas cosas profundamente hirientes.

HEISENBERG ¡En un momento literalmente me hiciste llorar!

BOHR Yo las diagnosticué como lágrimas de frustración y de rabia.

HEISENBERG ¿Un berrinche infantil?

BOHR Yo crié a mis hijos.

HEISENBERG ¿Y qué pasó con Margrethe? ¿Ella también tuvo una rabieta? Me enteré que la hiciste llorar después que me fui, haciéndola transcribir tus interminables correcciones de tu tesis sobre la complementariedad.

BOHR De eso no me acuerdo.

MARGRETHE Yo sí.

HEISENBERG Tuvimos que arrancar de su cama a Pauli en Hamburgo para que viniera una vez más a Copenhague a negociar la paz.

BOHR Lo logró. Terminamos con un tratado. La incertidumbre y la complementariedad se irguieron como los dos pilares centrales de las Interpretaciones de la Mecánica Cuántica de Copenhague.

HEISENBERG Un compromiso político, desde luego, como la mayoría de los tratados.

BOHR ¿Ves? En algún lugar dentro de ti todavía hay reparos secretos.

HEISENBERG Para nada, funciona. Eso es lo que importa. ¡Funciona, funciona!

BOHR Sí, funciona. Pero es más importante que eso. Porque, ¿se das cuenta de qué hicimos en esos tres años, Heisenberg? ¡No quiero exagerar pero nosotros dimos vuelta el mundo como una media! Sí, escuchen, presten todos atención: Volvimos a poner al hombre en el centro del universo. A través de la historia somos desplazados continuamente. Primero nos convertimos en meros accesorios de los insondables propósitos de Dios, diminutas figuras arrojadas en la gran catedral de la creación. ¡Y ni bien nos recuperamos en el Renacimiento, apenas el hombre se ha restablecido como la medida de todas las cosas – como proclamaba Protágoras – entonces somos desplazados otra vez por los productos de nuestro propio razonamiento! Somos empequeñecidos otra vez mientras los físicos construyen las nuevas catedrales grandiosas de la mecánica clásica para que nosotros las admiremos. Hasta que llegamos a principios del siglo veinte, y de repente nos vemos forzados a levantarnos nuevamente de nuestra postración.

HEISENBERG Empieza con Einstein.

BOHR Empieza con Einstein. El muestra que la medida –o sea la medida de la cual depende toda la posibilidad de la existencia de la ciencia– la medida, no es un evento impersonal que ocurre con la imparcialidad del universo. Es un acto humano, llevado a cabo desde un punto de vista específico en el tiempo y en el espacio, desde el punto de vista particular de un posible observador. Y aquí, en Copenhague, en aquellos tres años a mediados de los años veinte,

nosotros descubrimos que no hay un universo objetivo determinable con precisión. Que el universo existe sólo como una serie de aproximaciones. Sólo dentro de los límites determinados por nuestra relación con él. Sólo a través del entendimiento alojado en la cabeza del ser humano.

MARGRETHE ¿Entonces este hombre que pusiste en el centro del universo es Bohr o es Heisenberg?

BOHR Bueno, mi amor, vamos.

MARGRETHE Es que no es lo mismo.

BOHR Cualquiera de los dos. Cualquiera de nosotros.

MARGRETHE Si Heisenberg es el que está en el centro del universo, entonces esa partícula del universo que él no puede ver es el mismo. Así que no tiene sentido preguntarle por qué vino a Copenhagen en 1941. ¡El no lo sabe! No consiste en eso la teoría de la complementariedad. He transcrito tanto sobre el tema. Si alguien está haciendo algo en lo cual tiene que concentrarse no puede al mismo tiempo estar pensando en hacerlo, y si piensa en hacerlo entonces en realidad no puede estar haciéndolo. Ahora perdóname pero tú ni siquiera sabes por qué desarrollaste el principio de incertidumbre.

BOHR Mientras que si eres la que está en el centro del universo...

MARGRETHE Entonces puedo decirle que fue porque quería destruirlo a Schrödinger.

HEISENBERG Yo quería demostrar que él estaba equivocado, por supuesto.

MARGRETHE El estaba ganando. Cuando la cátedra de Leipzig quedó vacante, él era uno de los candidatos y no tú. Entonces ahí usted publica su maravilloso principio.

BOHR No es por criticar, Margrethe, pero tienes una tendencia a reducir todo al plano personal.

MARGRETHE ¡Por que todo es personal! ¡Acabas de darnos una conferencia al respecto! Cuando cuentas la historia todo está en orden, todo tiene un principio, un medio y un final. ¡Pero yo estaba ahí! ¡Y cuando recuerdo cómo era todo y miro a mi alrededor, lo que veo no es un cuento! Es confusión y rabia y celos y lágrimas y que nadie sabe lo que significan las cosas ni qué camino van a seguir.

HEISENBERG De todos modos, funciona, funciona.

MARGRETHE Sí, funciona maravillosamente bien. Después de tres meses de haber publicado tu trabajo sobre el principio de incertidumbre te ofrecen la cátedra de Leipzig.

HEISENBERG No me refería a eso.

MARGRETHE Sin mencionar las otras que te ofrecieron.

HEISENBERG Si muchas.

BOHR Y varias universidades norteamericanas.

HEISENBERG Pero no me refería a eso.

MARGRETHE ¿Y qué edad tienes cuando te haces cargo de la cátedra en Leipzig?

HEISENBERG Veintiséis.

BOHR El profesor titular más joven de Alemania.

HEISENBERG Cuando digo que funciona me refiero a la Interpretación de Copenhagen. La Interpretación de Copenhagen funciona. Y continúa funcionando.

MARGRETHE Sí. ¿Y por qué al final los dos aceptaron la Interpretación? ¿Crees de verdad que fue porque querían restablecer el humanismo?

BOHR Por supuesto que no. Fue por que era el único modo de explicar los experimentos.

MARGRETHE ¿O fue por que ahora que te habías convertido en profesor necesitabas crear una doctrina sólidamente establecida para enseñar? ¿O porque querías que tus nuevas ideas fueran públicamente respaldadas por el Papa de Copenhagen? Y tal vez Niels decidió apoyarlas a cambio de que aceptases las doctrinas que él había creado y lo reconocieras como cabeza de la iglesia. Y si quiere saber a qué viniste a Copenhagen en 1941, también te lo voy a decir. Tienes razón, no es tan misterioso: viniste a pavonearte con nosotros.

BOHR ¡Margrethe!

MARGRETHE ¡No! Cuando llegó acá en 1924 era un humilde asistente de una nación humillada, agradecido por tener trabajo. Y ahora regresa triunfante, el científico más importante de la nación que ha conquistado la mayor parte de Europa. Vino a mostrarnos lo bien que le va en la vida.

BOHR ¡No puedes seguir diciendo eso!

MARGRETHE Lo siento, ¿pero no es por eso que está acá? Porque arde en deseos de que sepamos que él está a cargo de alguna pieza vital de alguna investigación secreta. Y que no obstante él ha conservado una elevada independencia moral. La preserva tan claramente que hasta debe ser vigilado por la Gestapo. La preserva con tanto éxito que ahora también sufre un importante y maravilloso dilema moral que debe afrontar.

BOHR Sí, bueno, ahora sólo te estás dando cuerda para seguir atacando.

MARGRETHE Una reacción en cadena. Uno cuenta una verdad dolorosa y eso lleva a dos más. Y como francamente lo admitís, vas a regresar para continuar haciendo precisamente lo que hacía antes, diga lo que le diga Niels.

HEISENBERG Así es.

MARGRETHE Por, ni soñando renunciarías a una oportunidad tan magnífica para investigar.

HEISENBERG No, si lo puedo evitar no.

MARGRETHE También quieres demostrarle a los nazis lo útil que es la física teórica. Quieres salvar el honor de la ciencia alemana. Quieres estar ahí para restablecerla con toda su gloria en cuanto termine la guerra.

HEISENBERG De cualquier modo no le cuento a Speer que el reactor va a producir plutonio.

MARGRETHE No, porque temes lo que pasaría si los nazis invierten grandes recursos, y fracasas en tu intento de darles la bomba. Por favor, no intentes decirnos que eres un héroe de la resistencia.

HEISENBERG Nunca pretendí ser un héroe.

MARGRETHE Tu talento reside en esquiar tan rápido que nadie puede ver en dónde estás. Siempre en más de una posición a la vez, como una de sus partículas.

HEISENBERG Sólo puedo decir que funcionó. A diferencia de lo que le pasó a la mayoría de los héroes de la resistencia. ¡Funcionó! Sé lo que piensan. Piensan que tendría que haberme unido al complot contra Hitler, para que me ahorcasen como al resto.

BOHR Desde luego que no.

HEISENBERG No lo dicen, porque hay algunas cosas de las que mejor no hablar. Pero lo piensan.

BOHR No.

HEISENBERG ¿Qué habría logrado? ¿Qué habrías conseguido si te hubieras arrojado para salvar a Cristian y te hubieras ahogado también? Pero eso tampoco se puede decir.

BOHR Sólo pensarse.

HEISENBERG Sí. Lo siento.

BOHR Y volver a pensar y pensar. Cada día.

HEISENBERG A tu te tuvieron que sujetar para que no te tiraras, lo sé.

MARGRETHE Mientras que tú te sujetaste a tu mismo.

HEISENBERG Sin embargo es mejor quedarse en el barco. Es mejor mantenerse vivo, y arrojar el salvavidas. ¡Sin ninguna duda!

BOHR Tal vez sí. Tal vez no.

HEISENBERG Es mejor. Es mejor.

MARGRETHE Realmente es increíble. Los dos razonaron el camino hacia el minúsculo mundo del átomo con una precisión y una delicadeza asombrosa. Ahora resulta que todo depende de estos objetos inmensos que cargamos sobre los hombros. Y lo que está sucediendo ahí es...

HEISENBERG Elsinore. La oscuridad dentro del alma humana.

MARGRETHE Elsinore, sí.

HEISENBERG Si, quizás tengas razón Margrethe. Tenía miedo de las consecuencias. Yo era consciente de que estaba del lado de los ganadores... ¡Tantas explicaciones para todo lo que hice! No le conté a Speer simplemente por que no se me ocurrió. Y vine a Copenhagen simplemente por que sí se me ocurrió. Un millón de cosas que podríamos hacer o no todos los días. Un millón de decisiones que se toman solas. ¿Por qué no me mataste?

BOHR ¿Por qué no te que...?

HEISENBERG Matarme. Asesinarme. Aquella noche de 1941. Ahí estamos, caminando, regresando a la casa, y tú acabas de llegar a la conclusión de que le voy a proveer a Hitler armas nucleares. Seguramente vas a tomar los recaudos necesarios para que eso no suceda.

BOHR ¿Asesinándote?

HEISENBERG Estamos en medio de una guerra. Soy un enemigo. No hay nada extraño o inhumano en matar a un enemigo. Puedes hacerlo sin ruido, sin sangre, sin sufrimiento. Tan limpiamente como un piloto que aprieta un botón a tres mil metros de altura dejando caer una bomba sobre la tierra. Simplemente esperas a que me haya ido. Te sientas tranquilamente en tu sillón favorito y le repite en voz alta a Margrethe, frente a nuestro público invisible, lo que acabo de contarte, y yo estaré muerto en muy poco tiempo.

BOHR Mi querido Heisenberg, la idea es desde luego...

HEISENBERG De lo más interesante. Tan interesante que ni siquiera se te ocurrió. Una vez más, la complementariedad. Yo soy tu enemigo; también soy tu amigo. Soy un peligro para la humanidad; también soy tu invitado. Soy una partícula; también soy una onda. Tenemos un conjunto de obligaciones para con el mundo en general, y otro conjunto de obligaciones irreconciliables con nuestros compatriotas, con nuestros vecinos, nuestros amigos, familia, hijos. Todo lo que podemos hacer es actuar y luego mirar atrás y ver que pasó.

- MARGRETHE Te voy a contar otro motivo por el que hiciste el principio de incertidumbre; tienes una afinidad natural por el.
- HEISENBERG Entonces, te debe resultar gratificante verme volver derrotado en 1947. Arrastrándome por el piso nuevamente. Con mi nación en ruinas otra vez.
- MARGRETHE En realidad no. Estás demostrando que en lo personal has salido victorioso una vez más.
- HEISENBERG ¿Mendigando paquetes de comida?
- MARGRETHE No. Cuando te quedas en Göttingen bajo protección británica, a cargo de la ciencia alemana de posguerra.
- HEISENBERG El primer año en Göttingen dormí sobre paja.
- MARGRETHE Isabel me contó que después tuvieron una casa encantadora.
- HEISENBERG Me la dieron los británicos.
- MARGRETHE Tus nuevos padres adoptivos. Que se la habían confiscado a otro.
- BOHR Suficiente, mi amor, basta.
- MARGRETHE No, me tragué mis pensamientos durante todos estos años. ¡Pero es enloquecedor que este hijo nuestro, tan inteligente, esté permanentemente rogando que le digamos cuáles son los límites de su libertad, para después ir y transgredirlos! ¿Arrastrándote por el piso? ¡El que está arrastrándose es mi querido y buen marido! Literalmente. Arrastrándose hacia la playa en la oscuridad, en 1943, huyendo de su patria como un ladrón en la noche, para que no lo asesinen. La protección de la embajada alemana de la que tanto te jactabas no duró mucho. Nos incorporaron a los enemigos del Reich.
- HEISENBERG Yo se los advertí en 1941. No me escucharon. Por lo menos Bohr escapó a Suecia.
- MARGRETHE ¿Sí? ¿Y dónde estás mientras tanto? Encerrado en una cueva como un salvaje, tratando de conjurar a un espíritu diabólico. Al final, a eso se redujo toda esa primavera luminosa de los años 20, eso fue lo que produjo: una máquina más eficiente para matar gente.
- BOHR Se me rompe el corazón cada vez que lo pienso.
- HEISENBERG Nos rompió el corazón a todos.
- MARGRETHE Y esta máquina maravillosa todavía puede llegar a matar a cada hombre, a cada mujer y a cada niño del planeta. ¿Y si nosotros somos realmente el centro del universo, si nosotros somos realmente lo único que mantiene su existencia, qué va a quedar?
- BOHR La oscuridad. Una oscuridad total y final.
- MARGRETHE Hasta las preguntas que nos atormentan al final se extinguirán. Hasta los fantasmas se morirán.
- HEISENBERG Lo único que puedo decir es que yo no lo hice. Yo no fabriqué la bomba.
- MARGRETHE ¿No, y por qué? También te lo voy a decir. Es la razón más sencilla de todas. Por que no pudiste. No entendías nada de física.
- HEISENBERG Eso dijo Goudsmit.
- MARGRETHE Y Goudsmit sabía lo que decía. Era uno de los miembros de tu círculo mágico.
- HEISENBERG Si pero él no tenía ni idea de lo que yo comprendía o no respecto de la bomba.
- MARGRETHE Te buscó por toda Europa para la inteligencia de los aliados. Él te interrogó cuando fuiste capturado.
- HEISENBERG Me culpó a mí, por supuesto. Sus padres habían muerto en Auschwitz. Pensaba que yo debería haber hecho algo para salvarlos. No sé qué.
- MARGRETHE Él dijo que no entendías la diferencia crucial entre un reactor y una bomba.
- HEISENBERG Yo la entendía muy claramente. Simplemente no se lo dije a los demás.
- MARGRETHE Ah.
- HEISENBERG Pero la entendía.
- MARGRETHE Secretamente.
- HEISENBERG Pueden chequearlo si no me creen.
- MARGRETHE ¿Hay evidencia?
- HEISENBERG Todo fue registrado con mucho cuidado.
- MARGRETHE ¿Hay testigos?
- HEISENBERG Testigos intachables.
- MARGRETHE ¿Qué lo escribieron?
- HEISENBERG Que lo grabaron y lo transcribieron.
- MARGRETHE ¿A pesar de que no se lo contaste a nadie?
- HEISENBERG Se lo conté a una sola persona. Se lo conté a Otto Hahn. Esa noche terrible en Farm Hall, cuando quedamos solos después de que escuchamos el noticiero.. Le di una explicación más que razonable de cómo había funcionado la bomba.
- MARGRETHE ¿Después del hecho?

HEISENBERG Después del hecho. Sí. Cuando ya no importaba. Hablé de todas las cosas que Goudsmit decía que yo no entendía.

BOHR La masa crítica. Eso era lo más importante. La cantidad de material que se necesitaba para establecer la reacción en cadena. ¿Le dijiste a él cuál era la masa crítica? (\*)

HEISENBERG Le di una cifra, sí. ¡Averígualo si no me crees! Tenían micrófonos por todas partes... estaban grabando todo lo que dijimos. Todo lo que le conté a Hahn esa madrugada.

BOHR Pero la masa crítica. Le diste una cifra. ¿Cuánto era?

HEISENBERG Me olvidé.

BOHR Heisenberg...

HEISENBERG Está en las grabaciones. Puedes escucharlo.

BOHR La cifra para la bomba de Hiroshima...

HEISENBERG Era de cincuenta kilos.

BOHR ¿Esa fue la cifra que le diste a Hahn? ¿Cincuenta kilos?

HEISENBERG Le dije una tonelada aproximadamente.

BOHR ¿Una tonelada? ¿Mil kilos? Heisenberg, creo que por fin estoy empezando a entender algo.

HEISENBERG Lo único en lo que estaba equivocado.

BOHR Estabas excedido veinte veces.

HEISENBERG Lo único.

BOHR Pero Heisenberg, ¡tus matemáticas, tus matemáticas! ¿Cómo podía estar tan alejadas?

HEISENBERG No lo estaban. En cuanto calculé la difusión obtuve el resultado correcto.

BOHR ¿Apenas la calculaste?

HEISENBERG Una semana después les di a todos una conferencia sobre eso. ¡Está grabado! ¡Búsquelo!

BOHR Quieres decir... ¿que no lo habías calculado antes? ¿No resolviste la ecuación de difusión?

HEISENBERG No había necesidad.

BOHR ¿No había necesidad?

HEISENBERG El cálculo ya estaba hecho.

BOHR ¿Hecho por quién?

HEISENBERG Por Perrin y Flugge en 1939.

BOHR ¿Por Perrin y Flugge? Pero mi querido Heisenberg, eso era para el uranio natural. Wheeler y yo demostramos que el único que se fisionaba era el 235.

HEISENBERG Tu gran tesis. La base de todo lo que hicimos.

BOHR Así que necesitabas calcular la cifra para el 235 puro.

HEISENBERG Obviamente

BOHR ¿Y no lo hiciste?

HEISENBERG No lo hice.

BOHR Y por eso estabas tan confiado en que no ibas a poder hacer la bomba hasta que no obtuvieras el plutonio. Porque te pasaste toda la guerra creyendo que se necesitaba una tonelada de 235 y no unos pocos kilos. Y para obtener una tonelada de 235 en un tiempo posible...

HEISENBERG Hubiera necesitado algo así como doscientos millones de separadores. Era claramente imaginable.

BOHR Si te hubiera dado cuenta de que sólo tenía que producir unos pocos kilos...

HEISENBERG Hasta para hacer un kilo se hubieran necesitado aproximadamente doscientos mil separadores.

BOHR Pero doscientos millones es una cosa; doscientos mil es otra, y su construcción es posible de imaginar.

HEISENBERG Es posible.

BOHR Los americanos sí se lo imaginaron.

HEISENBERG Por que Otto Frisch y Rudolf Peierls resolvieron la ecuación de difusión. Tendrían que haber estado haciendo sus cálculos para nosotros, en Berlín. Pero en vez de eso, lo hicieron en Inglaterra.

MARGRETHE Porque eran judíos.

BOHR Y descubrieron lo rápido que iba a ir la reacción en cadena.

HEISENBERG Y por lo tanto el poco material que se iba a necesitar. Pero también se equivocaron. Un poco más de medio kilo.

BOHR Estaban equivocados por supuesto. Lo hacían parecer cien veces más imaginable de lo que en realidad era.

HEISENBERG En cambio, yo hice que pareciera veinte veces menos imaginable.

BOHR Así que podrías haber fabricado la bomba sin construir un reactor. Lo podrías haber hecho con el 235 desde el principio.

HEISENBERG Casi seguro que no.

BOHR Sin embargo, era posible.

HEISENBERG Podía ser posible.

BOHR Y ese problema lo tenías resuelto mucho antes de llegar a Copenhagen. Simplemente al no tratar de probar la ecuación de difusión.

HEISENBERG Qué falla más insignificante.

BOHR Pero las consecuencias fueron enormes.

HEISENBERG Tan grandes como para salvar a una ciudad. ¿Cuál ciudad? Cualquiera de las ciudades sobre las que nunca arrojamos nuestra bomba.

BOHR Londres, supongo, si la hubieran tenido a tiempo. Pero si los americanos ya habían ingresado a la guerra, y los aliados habían comenzado a liberar Europa, entonces...

HEISENBERG ¿Quién sabe? París también. Amsterdam. Tal vez, Copenhagen.

BOHR Entonces Heisenberg, cuéntanos algo muy simple: ¿por qué no hiciste los cálculos?

HEISENBERG ¡No lo sé! ¡No sé por qué no lo hice! ¡Porque no se me ocurrió! ¡Porque no lo pensé! ¡Porque supuse que no valía la pena hacerlo!

BOHR ¿Supusiste? ¡Tú nunca suponías las cosas! ¡Así fue como llegaste al principio de incertidumbre, porque rechazaste nuestras suposiciones! ¡Tú calculabas, Heisenberg! ¡Calculabas todo! ¡Lo primero que hacías con un problema era usar las matemáticas!

HEISENBERG Deberías haber estado ahí para frenarme.

BOHR Sí, no te lo hubiera dejado pasar por alto si yo hubiera estado ahí supervisándote.

HEISENBERG ¡A pesar de que tu hiciste exactamente la misma suposición! ¡Tú creías que no había peligro por exactamente las mismas razones que yo! ¿Por qué no hiciste el cálculo?

BOHR ¿Por qué no hice el cálculo?

HEISENBERG ¡cuéntanos por qué no lo calculaste y sabremos por qué no lo hice yo!

BOHR ¡Es obvio por qué yo no lo hice!

HEISENBERG A ver... Continúa.

MARGRETHE ¡Porque él no intentaba fabricar una bomba!

HEISENBERG Muchas gracias. Por que él no intentaba fabricar una bomba. Me imagino que a mí me pasaba lo mismo. Porque yo no estaba tratando de construir una bomba. Muchas gracias.

BOHR Entonces te engañaste a tu mismo, como me pasó a mí en el póker con la escalera real que nunca tuve. Pero en ese caso...

HEISENBERG ¿Por qué vine a Copenhagen? Sí, ¿por qué vine...?

BOHR Analicemos un borrador más, ¿sí? ¡Un borrador final!

HEISENBERG Y una vez más aplasto las piedritas tan familiares hasta la puerta de la casa de los Bohr y hago sonar la tan familiar campana. ¿Por qué he venido? Lo sé perfectamente bien. Lo sé tan bien que no tengo necesidad de preguntármelo. Hasta que una vez más la pesada puerta se abre.

BOHR Él está parado en el umbral de la puerta parpadeando por la repentina inundación de luz que viene del interior de la casa.

HEISENBERG Y, repentinamente, las razones que estaban claras dentro de mi cabeza pierden definición. La luz cae sobre ellas y se desparraman.

BOHR ¡Mi querido Heisenberg!

HEISENBERG ¡Mi querido Bohr!

BOHR Pasa, pasa...

HEISENBERG Qué difícil es ver aún aquello que está frente a nuestros ojos. Lo único que poseemos es el presente, y el presente se disuelve constantemente en el pasado. Bohr desaparece cuando me doy vuelta para mirarla a Margrethe.

MARGRETHE Niels tiene razón. Se te ve mayor.

BOHR Tengo entendido que tuviste algún problema personal.

HEISENBERG Margrethe pasó a la historia mientras me doy vuelta hacia Bohr. Y sin embargo, cuánto más difícil es vislumbrar lo que hay detrás de nuestros ojos. Aquí estoy, en el centro del universo, y sin embargo, lo único que puedo ver son las dos sonrisas que no me pertenecen.

MARGRETHE ¿Cómo está Isabel? ¿Cómo están los chicos?

HEISENBERG Muy bien. Mandan cariños... Puedo presentir una tercera sonrisa en la habitación, muy cerca de mí. ¿Podría ser la que, de pronto, veo por un instante en aquel espejo?

MARGRETHE Observo las dos sonrisas en el cuarto, una incómoda y que intenta congraciarse, la otra que se está transformando de cálida a meramente cortés. Sé que hay también una tercera sonrisa en la habitación, inalterable, amable —espero— y cautelosa.

HEISENBERG ¿Has podido practicar un poco de esquí?

BOHR Yo miro de reojo a Margrethe, y por un instante veo lo que ella puede ver y yo no – a mí mismo, y a la sonrisa que se va desvaneciendo de mi cara mientras el pobre Heisenberg sigue equivocándose.

HEISENBERG Yo los miro a los dos que me miran, y por un segundo veo a la tercera persona en la habitación tan claramente como los veo a ellos. Su huésped inoportuno, tropezando de una grosería a la otra.

BOHR Lo veo mirándome, ansioso, suplicante, intentando que volvamos a los viejos tiempos, y yo veo lo que él ve que falta alguien en la habitación. Me ve a mí. La ve a Margrethe. No se ve a sí mismo.

HEISENBERG Dos mil millones de personas en el mundo, y el que tiene que decidir su destino es el único que siempre se esconde de mí.

BOHR Tu sugeriste un paseo.

HEISENBERG ¿Te acuerdas de Elsinore? ¿La oscuridad en el interior del alma humana...?

BOHR Y salimos. Hacia fuera, bajo los árboles otoñales. A través de las calles oscurecidas por los posibles bombardeos.

HEISENBERG Ahora no hay nadie más en el mundo excepto Bohr y ese otro ser invisible. ¿Quién es esta presencia que me envuelve en la oscuridad?

MARGRETHE La partícula que vuela vagando por la oscuridad, y nadie sabe adónde va. Está aquí, está allá, está en todo lugar y en ningún parte.

BOHR Con aparente indiferencia él empieza a hacerme la pregunta que estuvo preparando.

HEISENBERG ¿Tiene uno como físico moralmente el derecho para trabajar en la explotación práctica de la energía atómica?

MARGRETHE El gran choque.

BOHR Yo me detengo. El se detiene...

MARGRETHE Así es como trabajan.

HEISENBERG Él me mira, horrorizado.

MARGRETHE Ahora, por fin, sabe dónde está y qué está haciendo.

HEISENBERG El se da vuelta.

MARGRETHE Y apenas comienza el momento del choque, ya se terminó.

BOHR Ya estamos regresando apurados a la casa.

MARGRETHE Ya están los dos escapándose uno del otro en la oscuridad.

HEISENBERG Nuestra conversación se terminó.

BOHR Nuestra gran sociedad también.

HEISENBERG Toda nuestra amistad.

MARGRETHE Y todo con respecto a él se vuelve tan incierto como antes.

BOHR A menos que... si... un experimento hipotético... Supongamos por un momento que no me voy volando en la noche. Veamos qué sucede si en cambio recuerdo la figura paternal que se supone que interpreto. Si me detengo, controlo mi enojo y me vuelvo hacia él. Y le pregunto por qué.

HEISENBERG ¿Por qué?

BOHR ¿Por qué estás tan seguro de que va a ser tan tranquilizadamente difícil construir una bomba con el 235? ¿Es por que hiciste el cálculo?

HEISENBERG ¿El cálculo?

BOHR De la difusión en el 235. No. Es por que no lo calculaste. No te habías dado cuenta conscientemente de que había que hacer un cálculo.

HEISENBERG Y por supuesto ahora sí me doy cuenta. En realidad, no sería tan difícil. Veamos... La sección eficaz de dispersión es de aproximadamente  $6 \times 10^{-24}$  cm<sup>2</sup>, así que el camino libre medio sería... Espere...

BOHR Y de pronto un nuevo mundo muy distinto y muy terrible empieza a tomar forma...

MARGRETHE Ese fue el mayor y último pedido que Heisenberg te hizo. El que lo comprendieras cuando él no podía comprenderse a sí mismo. Y ese fue el mayor y último acto de amistad que tuviste con él: dejarlo en el error.

HEISENBERG Sí. Tal vez yo debería agradecerártelo.

BOHR Quizás deberías.

MARGRETHE Como sea, fue el fin de la historia.

BOHR Aunque tal vez también yo debería agradecer-te algo. Esa noche de verano en 1943, cuando me escapé en el bote pesquero, y los barcos de carga llegaron desde Alemania...

MARGRETHE ¿Y eso qué tiene que ver con Heisenberg?

BOHR Cuando los barcos llegaron ese miércoles había ocho mil judíos en Dinamarca que iban a ser arrestados y arrojados en sus bodegas. Al día siguiente, en vísperas del año nuevo judío, cuando la SS empezó a acorralarlos, apenas si se encontraba un judío.

MARGRETHE Habían sido escondidos en las iglesias y los hospitales, y en las casas de los vecinos y en casas de campo.

BOHR ¿Y cómo fue posible eso? Porque alguien en la Embajada Alemana nos había dado el dato.

HEISENBERG Georg Duckwitz, su especialista en navegación.

BOHR ¿Uno de tus hombres?

HEISENBERG Uno de mis amigos.

BOHR Fue un informante increíble. Nos avisó el día anterior a que llegaran los cargueros –el mismo día que Hitler dio la orden–. Él nos dio la hora exacta en la que las SS iban a actuar.

MARGRETHE Fue la resistencia la que los sacó de sus escondites y los pasó de contrabando a Suecia.

BOHR Que un puñado de nosotros lograra escapar a los barcos de patrulla alemanes en un barco pesquero ya era bastante increíble. Pero que una armada completa lograra pasar con la mayor parte de ocho mil personas a bordo, era como si se abriese el Mar Rojo.

MARGRETHE Yo creía que aquella noche no había barcos patrulleros alemanes...

BOHR No. De pronto todo el escuadrón había sido declarado no apto para salir al mar por razones de seguridad.

HEISENBERG Cómo lo lograron, no me lo puedo imaginar.

BOHR Así que quizás debería agradecerte.

HEISENBERG ¿Por qué?

BOHR Por mi vida. Por todas nuestras vidas.

HEISENBERG A esa altura, no tenía nada que ver conmigo. Lamento decirlo.

BOHR Pero luego de que me fui, volviste a Copenhagen.

HEISENBERG Para asegurarme que nuestra gente no se apoderase del Instituto en tu ausencia.

BOHR Tampoco nunca te agradecí por eso.

HEISENBERG ¿Sabías que me ofrecieron tu ciclotrón?

BOHR Lo podrías haber usado para separar un poco del 235.

HEISENBERG Mientras tanto, te ibas desde Suecia a Los Álamos.

BOHR Para jugar mi pequeña parte en la muerte de cien mil personas.

MARGRETHE ¡Niels, no hiciste nada malo!

BOHR ¿No?

HEISENBERG Claro que no. Fuiste un buen hombre, del principio al fin, y nadie podría decir lo contrario. Mientras que yo...

BOHR Mientras que tu, mi querido Heisenberg, nunca lograste contribuir a la muerte de una sola persona en toda tu vida.

MARGRETHE Bueno, sí.

HEISENBERG ¿Sí?

MARGRETHE Una. Esa historia que nos contaste. Ese pobre hombre que vigilaste toda la noche, cuando eras un chico en Munich, mientras él esperaba ser fusilado por la mañana.

HEISENBERG No, cuando llegó la mañana yo lo convencí para que lo dejaran ir.

BOHR Heisenberg, tengo que decir que si a la gente se la va a medir estrictamente en términos de cantidades observables...

HEISENBERG Entonces nosotros necesitaríamos una nueva y extraña ética cuántica. Habría un lugar en el cielo para mí. Y otro para ese hombre de las SS que me encontré camino a casa desde Haigerloch. Ese fue el fin de mi guerra. Las tropas aliadas nos estaban cercando; no había nada más que pudiéramos hacer. Isabel y los chicos se habían refugiado en un pueblito de Bavaria, así que fui a verlos antes de que me capturasen. Tuve que ir en bicicleta –a esa altura ya no quedaban trenes ni otro transporte – y tenía que viajar de noche y dormir bajo los arbustos de día, porque de día el cielo estaba plagado de aviones aliados, barriendo los caminos buscando cualquier cosa que se moviera. ¿Esto era lo que había elegido para mi país? ¿Escombros interminables? ¿Este humo perpetuo en el cielo? ¿Estas caras hambrientas? ¿Era responsabilidad mía? Y toda esa gente desesperada en los caminos. Los más desesperados de todos eran los SS. Bandas de fanáticos con nada que perder, vagando por ahí, fusilando a los desertores, colgándolos de los árboles de los costados del camino. A la segunda noche, de pronto, ¡allí estaba, esa casaca negra terrible y familiar que surgió de la penumbra frente a mí! En sus labios, mientras me detengo, esa palabra terrible y familiar. “Desertor“, dice él. Se lo ve tan exhausto como yo. Le entrego la orden de viaje que yo mismo me escribí. Pero apenas hay luz para leer y está demasiado cansado para molestarse en mirarla. En cambio, empieza a abrir la funda de su pistola. Me va a pegar un tiro porque es menos trabajo. Y de repente estoy pensando con gran rapidez y con claridad, que es como esquiar o como aquella noche en Heligoland o la otra del parque detrás del Instituto.

Viene a mi mente el atado de cigarrillos americanos que tengo en mi bolsillo. Y ya está en mi mano, se lo ofrezco. La solución más desesperada que haya intentado nunca. Yo espero. En el paquete hay solo dos palabras muy sencillas pero con grandes letras: Lucky Strike, Golpe de Suerte. Cierra la funda, y agarra los cigarrillos... ¡Funcionó, funcionó! Como todas las otras soluciones a todos los otros problemas. Me dejó vivir a cambio de veinte cigarrillos. Y seguí viaje. Tres días y tres noches. A través de los niños que lloraban, perdidos y famélicos, reclutados para pelear, y luego abandonados por sus comandantes. A través de los hambrientos trabajadores esclavos caminando a sus casas en Francia, en Polonia, en Estonia. A través de mi tierra querida. Mi arruinada, deshonrada y querida tierra.

BOHR ¡Mi querido Heisenberg, mi querido amigo!

MARGRETHE Silencio. El silencio al que siempre regresamos.

HEISENBERG Y por supuesto sé en qué están pensando.

MARGRETHE Todos aquellos chicos perdidos en los caminos.

BOHR Heisenberg vagando por el mundo, él mismo como un chico perdido.

MARGRETHE Nuestros propios hijos perdidos.

HEISENBERG Y en el barco, el timón se traba una vez más.

BOHR ¡Tan cerca, tan cerca! ¡Por tan poco!...

MARGRETHE Niels se para en la puerta, mirándome, entonces desvía su mirada...

HEISENBERG Y una vez más se hunde dentro de las profundidades del mar.

BOHR Antes de que podamos aferrarnos a algo, nuestra vida se ha terminado.

HEISENBERG Antes de que podamos vislumbrar quién o qué somos, nos hemos ido para siempre y nos hemos convertido en polvo.

BOHR Instalados en todo ese polvo que nosotros levantamos.

MARGRETHE Y tarde o temprano llegará el tiempo en que todos nuestros hijos serán polvo, y luego los hijos de nuestros hijos.

BOHR Cuando las decisiones, grandes o pequeñas, no se vuelvan a tomar nunca más. Cuando no haya más incertidumbre, porque no habrá más conocimiento.

MARGRETHE Y cuando todos nuestros ojos se hayan cerrado, cuando hasta los fantasmas se hayan ido... ¿qué quedará de nuestro adorado mundo? ¿De nuestro arruinado, deshonrado y adorado mundo?

HEISENBERG Pero mientras tanto, en éste muy preciado mientras tanto ahí está. Los árboles del parque. Los lugares amados. Nuestros hijos y los hijos de nuestros hijos. Preservados, posiblemente, por aquel momento tan breve en Copenhagen. Por algún acontecimiento que nunca va a ser localizado o definido del todo. Por ese último núcleo de incertidumbre que subyace en el corazón de todo lo que existe.

**FIN**

## EPÍLOGO

*Lo que ocurrió en Copenhaguen según las propias palabras de Heisenberg.*

A finales de 1941 habían quedado suficientemente aclarados para nuestra “comunidad del uranio” los fundamentos físicos del aprovechamiento técnico de la energía atómica. Sabíamos que a partir del uranio natural y del agua pesada se puede construir un reactor atómico que suministre energía, y que en semejante reactor debe originarse un producto derivado del uranio 239, el cual, lo mismo que el uranio 235, sirve como explosivo para las bombas atómicas. Al principio, es decir, a finales de 1939, había yo supuesto por razones teóricas que, en lugar de agua pesada, se podía utilizar también carbono muy puro como medio atenuador. Pero este camino fue prematuramente abandonado a causa de una medición equivocada, como posteriormente se demostró, de las propiedades de absorción del carbono, medición realizada en otro instituto muy renombrado, por lo cual no hicimos nosotros comprobación alguna. Para la obtención del uranio 235 no conocíamos entonces ningún procedimiento que hubiera conducido, con instalaciones técnicas realizables en Alemania y bajo las circunstancias de la guerra, a cantidades dignas de mención. Y como además la obtención del explosivo atómico sólo podía realizarse con el funcionamiento de reactores gigantesco a lo largo de muchos años, resultaba claro para nosotros que, en cualquier caso, la fabricación de bombas atómicas únicamente sería posible con un enorme esfuerzo técnico.

Resumiendo, se puede concluir lo siguiente: sabíamos ya entonces que en principio se podían fabricar bombas atómicas y conocíamos un procedimiento realizable, pero juzgábamos que las instalaciones técnicas necesarias debían ser más grandes aún de lo que efectivamente fueron después. Nos hallábamos así en la feliz situación de poder informar sinceramente a nuestro gobierno sobre el estado del problema, y saber al mismo tiempo con toda seguridad que en Alemania no podría ordenarse un intento serio para fabricar bombas atómicas, pues un esfuerzo técnico tan fabuloso hacia un objetivo que se movía en una incierta lejanía, no era, en modo alguno, aceptable para el gobierno alemán dentro de la tensa situación de guerra.

[...] A pesar de todo me atrevo a suponer que tampoco en América se consagrará con ardor el esfuerzo de los físicos a producir bombas atómicas. Pero, naturalmente, podría también empujarles a ello el temor de que lo hagamos nosotros. “Me gustaría –respondió Carl Friedrich– que pudieras hablar con Niels en Copenhaguen sobre todo esto. Para mí significaría mucho el que Niels, por ejemplo, opinara que estamos equivocados y que lo que deberíamos hacer es abandonar estos trabajos sobre el uranio.”

En el otoño de 1941, cuando creíamos tener ya una imagen suficientemente clara de la posible evolución técnica, nos apalabramos para que por invitación de la embajada alemana en Copenhaguen pudiera yo pronunciar allí una conferencia científica. Quería yo aprovechar la ocasión que esta conferencia me brindaba, para hablar con Niels sobre el problema del uranio. El viaje tuvo lugar, si mal no recuerdo, en octubre de 1941.

## GLOSARIO

**Principio de incertidumbre.** Formulación fundamental de la física moderna según la cual, por principio, cantidades físicas denominadas *complementarias*, como por ejemplo, la posición y la velocidad (momentum lineal), no pueden determinarse simultáneamente con exactitud, debido al carácter dual de partícula y de onda que presentan –de manera significativa– las entidades atómicas. Así, si  $\Delta p$  es la incertidumbre en la medición del momentum y  $\Delta x$  la incertidumbre en la medición de la posición, por ejemplo de un electrón, entonces se cumple que  $\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar$ , donde  $\hbar$  es la constante de Planck (dividida por  $2\pi$ ). Así como  $p$  y  $x$  son variables complementarias en el caso anterior, también lo son la energía  $E$  y el tiempo  $t$ , y otros pares de cantidades físicas.

**Principio de complementariedad.** Principio básico de la mecánica cuántica estrechamente relacionado – junto al principio de incertidumbre– con la llamada “Interpretación de Copenhague”. Este principio se refiere a la naturaleza dual entre onda y partícula que exhiben las entidades atómicas cuando se manifiestan bien como partículas o bien como ondas según la naturaleza de las mediciones realizadas. Bohr formuló este principio a fin de dotar de un significado riguroso a la nueva mecánica cuántica y colocar a la incertidumbre como una propiedad inherente por naturaleza a las entidades del mundo cuántico.

**Fisión.** La fisión nuclear es un tipo de reacción nuclear provocada por un neutrón o un fotón energético que al incidir sobre un núcleo masivo (con número atómico mayor a 77) provoca la división del núcleo en dos fragmentos aproximadamente iguales más dos o tres neutrones adicionales y energía térmica. Si el número atómico del núcleo original es mayor a 90, puede ocurrir la fisión espontánea del tipo de la desintegración radiactiva. El uranio 233, 235 y el plutonio 239 son susceptibles de fisión por energía térmica (0.025 eV); el uranio 238 sólo puede fisionarse por neutrones energéticos. La aparición de 2 o 3 neutrones adicionales después de cada reacción de fisión de un núcleo permite que tenga lugar una reacción en cadena, que, de ser controlada, se aprovecha en los reactores nucleares; si la reacción en cadena no es controlada, la liberación súbita de una gran cantidad de energía térmica constituye una bomba nuclear.

**Bohr, Wheeler (1939).** El famoso artículo de Bohr y Wheeler tituló “*The Mechanism of Nuclear Fission*” (*Phys. Rev.* **56**, 426, 1939) y se convirtió de inmediato en la referencia más citada para efectos de las aplicaciones de la energía nuclear, particularmente en los inicios del proyecto Manhattan. En aquel tiempo aún no existía el secreto militar sobre estos conocimientos y los avances recientes de la comunidad científica internacional se publicaban –entre otras revistas– en la famosa *Physical Review* de los EUA. El resumen del artículo es: “*Sobre la base del modelo de gota líquida del núcleo atómico, se ofrece una explicación del mecanismo de fisión nuclear. En particular, se obtiene conclusiones acerca de la variación de la energía crítica entre núcleos diferentes para lograr la fisión, así como acerca de la dependencia de la sección transversal de fisión para un núcleo dado en función a la energía del agente excitador. Se presenta una discusión detallada de las observaciones sobre la base de consideraciones teóricas. La teoría y el experimento concuerdan razonablemente a fin de dar una imagen satisfactoria de la fisión nuclear.*”

**Ciclotrón.** Dispositivo experimental diseñado por Ernest O. Lawrence en los EUA (1929) a fin de lograr la aceleración de partículas subatómicas cargadas hasta velocidades muy altas, con lo que se logró bombardear núcleos atómicos y obtener nuevos elementos químicos por fisión. En el caso de electrones, éstos pueden acelerarse hasta velocidades muy próximas a la de la luz. El ciclotrón consiste de dos recintos metálicos cerrados en forma de la letra D contenidos entre dos imanes muy potentes. Dentro de cada D el haz de partículas se desvía por efecto del campo magnético perpendicular y así pasa a la otra D, acelerándose por efecto de un campo eléctrico alternante. Cada vez que el haz pasa de una D a la otra se acelera un poco; este efecto repetido da como resultado que la trayectoria del haz parezca una espiral en cuyo extremo externo las partículas emergen. El primer ciclotrón podía contenerse dentro de una habitación regular, por lo que constituyó un avance revolucionario en el estudio experimental de la física nuclear y de partículas elementales. Lawrence recibió el Premio Nobel en 1939.

**Mecánica cuántica ondulatoria.** Formulación de la mecánica cuántica realizada por Edwin Schrödinger en 1926 (premio Nobel en 1933) inspirada originalmente en la dualidad onda-corpúsculo propuesta por Louis Victor de Broglie. Esta formulación de la mecánica cuántica consiste básicamente de resolver una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden, la ecuación de Schrödinger, bajo la forma de un problema de eigenvalores. Así, el eigenvalor del operador hamiltoniano se interpreta como la energía de un estado cuántico estacionario, y su correspondiente eigenfunción, la función de onda  $\Psi$ , se interpreta como una cantidad compleja cuyo módulo al cuadrado  $|\Psi|^2$  es una densidad de probabilidad (interpretación de Born). La física entra en la ecuación de Schrödinger a través del operador de energía potencial que puede ser modelado según el fenómeno que se desee investigar. Como en toda ecuación diferencial, las soluciones dependen fuertemente de las condiciones de borde. El éxito de esta manera de resolver los problemas importantes de la mecánica cuántica descansa en el hecho de que lo que se está resolviendo,

básicamente, es una ecuación diferencial con condiciones de borde bien definidas, para cuyo efecto los métodos matemáticos necesarios eran ya bien conocidos en su mayoría a principios del siglo XX.

***Mecánica cuántica matricial.*** Formulación de la mecánica cuántica realizada por Born, Heisenberg y Jordan en 1925 sobre la base de operaciones básicas del álgebra matricial, donde la no-conmutatividad del producto se manifiesta a través del conmutador de operadores de momento y posición:  $[x,p]=i\hbar$ . En esta formulación los operadores cuánticos que corresponden a observables físicas se representan como matrices y las funciones de onda toman la forma de vectores (en un espacio de Hilbert). Sin embargo, y a diferencia de los espacios vectoriales ordinarios, la dimensión del espacio de Hilbert es infinita, por lo que las tales matrices también tienen dimensión infinita. No obstante, en esta formulación de la mecánica cuántica se puede obtener las energías de los estados estacionarios y todos los resultados conocidos de los sistemas cuánticos (como es el caso del oscilador armónico), donde los “saltos” debidos a las transiciones cuánticas entre estados estacionarios diferentes surgen de manera natural. Tanto la formulación ondulatoria como la formulación matricial de la mecánica cuántica son completamente equivalentes, pero la primera ganó mayor aceptación entre la comunidad científica internacional, probablemente debido a que en aquel tiempo el uso de matrices era aún restringido.

***Cámara de niebla.*** Dispositivo utilizado en la física nuclear para la detección visual de trazas de partículas atómicas, cuyo principio básico de funcionamiento consiste de la formación de un gas por la expansión adiabática rápida de una mezcla de alcohol y agua; el paso de una partícula atómica por dicho gas provoca la condensación del gas y deja una traza de pequeñas gotitas que indica la trayectoria de la partícula atómica.

***Masa crítica.*** Cantidad de masa de una sustancia fisible en la que la producción efectiva de neutrones es lo suficientemente grande como para iniciar y mantener una reacción nuclear en cadena.

**XVIII REUNIÓN NACIONAL DE LA SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA  
“FÍSICA, SOCIEDAD Y DESARROLLO”  
DEL 25 AL 28 DE OCTUBRE DE 2006  
ORURO–BOLIVIA**

Sociedad Boliviana de Física

*La Paz—Bolivia*

**RESUMEN**

Se presenta la relación de ponencias de la XVIII Reunión Nacional de Física realizada en Oruro entre el 25 y el 28 de Octubre de 2006.

**TÍTULO:**

PROYECTO LAGO

**AUTOR:**

Lic. Alfonso Velarde

**RESUMEN:**

Se instalará un arreglo de detectores Cerenkov con un área de 4 m<sup>2</sup> cada uno para la detección de GRBs en un sistema de observatorios en Sierra La Negra (Mexico), Chacaltaya (Bolivia) y Bariloche (Argentina).

preferencia por la formación de granizo, que es un indicador de la fuerza convectiva que generan estas tormentas.

**TÍTULO:**

COMPETENCIAS DEL PROFESIONAL EN FÍSICA

**AUTOR:**

Dr. Wilfredo Tavera Ll.

**RESUMEN:**

Se presenta un trabajo de validación de las competencias del profesional en Física en el ámbito latinoamericano y se infieren algunas recomendaciones para su consideración en los currículos.

**TÍTULO:**

CURVAS DE ROTACIÓN DE GALAXIAS ESPIRALES

**AUTOR:**

Lic. Deterlino Urzagasti

**RESUMEN:**

Se construye un modelo para describir el comportamiento de las curvas de rotación de galaxias espirales utilizando el modelo cosmológico estándar y ecuaciones de fluido ideal. El ajuste del modelo a las curvas de rotación de diez galaxias resulta razonable y permite obtener parámetros estructurales y dinámicos de las mismas.

**TÍTULO:**

ESTRUCTURA VERTICAL DE LAS TORMENTAS MÁS INTENSAS EN EL ALTIPLANO

**AUTOR:**

M.Sc. Luis A. Blacutt

**RESUMEN:**

Se presentan los resultados de la estructura vertical de las tormentas en el Altiplano. Las medidas se tomaron con el radar meteorológico a bordo del satélite TRMM. Las tormentas en el Altiplano durante los meses de verano (diciembre-febrero) tienen

**TÍTULO:**

UNA ADAPTACIÓN DEL MÉTODO DE RELAJACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE LAPLACE CON CONDICIONES DE CONTORNO ABIERTAS

**AUTOR:**

Dr. Diego Sanjinés

**RESUMEN:**

Se utiliza el algoritmo numérico de relajación para la ecuación de Laplace en dos dimensiones, correspondiente a una distribución arbitraria de carga eléctrica contenida en una región finita del espacio. Las condiciones de borde de este problema son abiertas, pues se conoce el potencial en cada carga y no así en el borde de la región. El problema de conocer el potencial dentro de dicha región se resuelve hallando

las contribuciones de monopolo y dipolo en la expansión multipolar del potencial bajo la aproximación de campo lejano, y así se establece el potencial en un borde circular que contiene a la región de interés. Luego se aplica el algoritmo de relajación usual tomando al potencial de dicho borde como condición de borde cerrada, lo que permite finalmente calcular de manera recursiva el potencial en toda la región interior. Esta técnica se ilustra para un dipolo, un "tripolo", un cuadrupolo y una pieza metálica continua de forma arbitraria.

**TÍTULO:**

FÍSICA NUCLEAR EXPERIMENTAL

**AUTOR:**

Lic. Isaac Poma

**RESUMEN:**

Se presenta un enfoque general de la física nuclear, mostrando la infraestructura e instrumentación necesaria para realizar trabajos sobre: espectroscopia gamma, actividad de las fuentes y activación.

**TÍTULO:**

ORIGEN DE LAS CONSTANTES UNIVERSALES

**AUTOR:**

Dr. José Alberto Nogales Vera

**TÍTULO:**

IDENTIFICACIÓN DE LAS FUENTES GAMMA CON EL EXPERIMENTO BASJE

**AUTOR:**

Dr. Armando Ticona

**RESUMEN:**

Se estudia las características de los datos del experimento BASJE. Con base en éstas se selecciona datos que no activen ningún detector de muones. Se compara las direcciones de estos eventos seleccionados con las fuentes conocidas.

**TÍTULO:**

EFECTOS EN LA EDAD DE REPRODUCCIÓN DE MODELO PRESA-PREDADOR

**AUTOR:**

Dr. Armando Ticona

**RESUMEN:**

Usando el modelo Penna asexual, reproducimos el modelo presa-predador con edades de reproducción variables. De esta manera, estudiamos la influencia de la presión de los predadores en el ciclo reproductivo de las presas.

**TÍTULO:**

RADIACIÓN DEL GAS RADÓN EN LA MINERÍA

**AUTOR:**

Lic. Raúl Mamani Portillo

**TÍTULO:**

GEOMAGNETISMO

**AUTOR:**

Lic. Edgar Ricaldi Yarvi

**RESUMEN:**

Se presenta información general sobre el campo de investigación del geomagnetismo

**TÍTULO:**

CIRCULACIÓN ATMOSFÉRICA SOBRE EL ALTIPLANO ANDINO

**AUTOR:**

Dr. Flavio Ghezzi

**RESUMEN:**

Se determina el régimen del flujo de masas de aire sobre el altiplano andino y las zonas tropicales.

**TÍTULO:**

EVIDENCIAS DEL CALENTAMIENTO GLOBAL EN BOLIVIA

**AUTOR:**

Dr. Eduardo R. Palenque

**RESUMEN:**

Se presenta una visión general del calentamiento global en el planeta. Se discute sucintamente algunos modelos y sus predicciones para luego compararlos con los datos reales e históricos (reconstruidos) del país. Se presentan diferentes series de tiempo de variables climáticas relacionadas con el calentamiento global y los cambios climáticos observados.

**TÍTULO:**

OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA Y OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

**AUTOR:**

Lic. Roy Omar Bustos Espinoza

**RESUMEN:**

Se presenta un resumen de los últimos 10 años del proyecto OBF y el primer año de la OBAA, así como también la convocatoria 2007.

---

**TÍTULO:**

EL TIEMPO DE SINCRONIZACIÓN DE OSCILADORES FOTOCONTROLADOS

**AUTOR:**

Dr. Marcelo Ramírez Ávila

**RESUMEN:**

El tiempo de sincronización o transiente es un aspecto poco estudiado en osciladores. Se presentará cómo este transiente depende de las condiciones iniciales y se mostrará cómo eventualmente puede indicar la estabilidad del sistema.

---

**TÍTULO:**

COMPOSICIÓN ATMOSFÉRICA: PERSPECTIVAS Y FUTURO TRABAJO DEL LFA-UMSA

**AUTOR:**

Dr. Marcos Andrade

---

**TÍTULO:**

ESTUDIO DEL EFECTO DE SUPERFICIES ALTAMENTE REFLECTANTES SOBRE LA RUV ERITÉRMICAMENTE EFECTIVA: RESULTADOS DE LA CAMPAÑA EN EL SALAR DE UYUNI

**AUTOR:**

Dr. Marcos Andrade

---

**TÍTULO:**

EXPERIENCIAS EN SAN CRISTÓBAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

**AUTOR:**

Lic. M. Córdoba

---

**TÍTULO:**

LA MAGIA DE LA FÍSICA

**AUTOR:**

Estudiantes de Física-UMSA

---

**TÍTULO:**

SONIDOS PULSANTES: SILBATOS DOBLES PREHISPÁNICOS

**AUTOR:**

Lic. Arnaud Gerard

---

**TÍTULO:**

FÍSICA E INTERACCIÓN SOCIAL UNIVERSITARIA

**AUTOR:**

Ing. Pedro Miranda

---

**TÍTULO:**

¿TIENEN EL MISMO ORIGEN LOS METEORITOS FERROSOS EN BOLIVIA?

**AUTOR:**

Lic. Gonzalo Pereira

---

**TÍTULO:**

HITOS OBSERVACIONALES EN LA COSMOLOGÍA: EL PREMIO NOBEL DE FÍSICA 2006

**AUTOR:**

M.Sc. Mirko Raljevic

---

**TÍTULO:**

LA RADIACIÓN UV DIFUSA EN LA PAZ

**AUTOR:**

Lic. René Tórrez

---

**TÍTULO:**

GALILEO: GENIO Y FIGURA EN UNA ÉPOCA DE TRANSICIÓN

**AUTOR:**

Dr. Francesco Zaratti

---

**TÍTULO:**

MESA REDONDA “FÍSICA, SOCIEDAD Y DESARROLLO”

**PANELISTAS:**

Ing. Jorge Sandoval (Sociedad de Ingenieros, Oruro), Ing. Miguel Velásquez (DNCYT-Viceministerio de Ciencia y Tecnología), Dr. Luis Alberto Rodrigo (Academia Nacional de Ciencias de Bolivia), Dr. Santiago Sologuren (Sociedad Boliviana de Matemática), Dr. Hugo Rojas (UPB), Dr. José Nogales (Sociedad Boliviana de Física).

---

## 12<sup>ava</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

Bustos R.<sup>1</sup>, Mariscal J.<sup>2</sup>, Villalba J.<sup>2\*</sup>, Apaza V.R.<sup>2</sup>, Espinoza W.<sup>2</sup>, Poma I.<sup>2</sup>, Subieta V.<sup>2</sup>, Gutierrez V.H.<sup>3</sup>,  
Guaygua T.<sup>4</sup>, Jemio C.<sup>4</sup>, Portugal R.<sup>5</sup>, Mamani R.<sup>6</sup>, Martinez L.<sup>7</sup>, Justiniano I.<sup>8</sup>, Payllo J.P.<sup>9</sup>  
Enriquez J.<sup>10</sup>, Quiroga I.<sup>11</sup>, Vargas C.<sup>12</sup>, Coraite O.<sup>13</sup>, Quiroz Z.<sup>14</sup>, Portocarrero H.<sup>15</sup>  
Condori V.H.<sup>16\*</sup>, Apaza R.<sup>17</sup>, Condori H.<sup>18\*</sup>, Poma O.<sup>19\*</sup>

<sup>1</sup>Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)

<sup>2</sup>Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), Carrera de Física, La Paz

<sup>3</sup>Universidad Mayor, Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCH)  
Facultad de Tecnología, Carrera de Ingeniería de Sistemas, Sucre

<sup>4</sup>Universidad Técnica de Oruro (UTO), Facultad Nacional de Ingeniería (FNI), Oruro

<sup>5</sup>Universidad Mayor de San Simón (UMSS), Facultad de Ciencia y Tecnología, Cochabamba

<sup>6</sup>Universidad Autónoma Tomas Frías (UATF), Carrera de Física, Potosí

<sup>7</sup>Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA), Santa Cruz de la Sierra

<sup>8</sup>Colegio Maria Auxiliadora, Cobija, Pando, <sup>9</sup>Colegio 12 de Agosto, Yacuiba, Tarija

<sup>10</sup>Colegio Maryknoll, Cochabamba, <sup>11</sup>Servicios, Ciencia y Tecnología, Cochabamba

<sup>12</sup>Colegio Buenas Nuevas, Sucre, <sup>13</sup>Colegio La Salle, Oruro

<sup>14</sup>Instituto Americano, La Paz, <sup>15</sup>Colegio San Ignacio, La Paz

<sup>16</sup>Colegio Basil Miller, El Alto, La Paz, <sup>17</sup>Unidad Educativa del Sur, El Alto, La Paz

<sup>18</sup>Estudiante, FI, UMSA, La Paz, <sup>19</sup>Estudiante de Beca Patiño, Suiza, \*Ex Olímpico

### RESUMEN

La 12<sup>ava</sup> OBF se llevó a cabo con éxito el 7, 8 y 9 de Septiembre en la ciudad de Santa Cruz de la Sierra, en las instalaciones del departamento de Física de la Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA). Se contó con la presencia de ocho delegaciones departamentales: Chuquisaca, Cochabamba, La Paz, Oruro, Pando, Potosí, Santa Cruz de la Sierra y Tarija. Se evaluó en las categorías de 8<sup>vo</sup> de Primaria, 1<sup>ro</sup>, 2<sup>do</sup> y 3<sup>ro</sup> de Secundaria. Si bien la categoría de 4<sup>to</sup> de Secundaria no participó en Santa Cruz, ellos participaron en las etapas previas de la 12<sup>ava</sup> OBF y los ganadores tienen como principal premio el ingreso libre y directo a las universidades comprometidas con el proyecto.

Se concentraron cerca de cien personas entre estudiantes y profesores, quienes compartieron sus experiencias, costumbres y culturas dando una señal de unificación a la sociedad boliviana. La categoría de 3<sup>ro</sup> de Secundaria tuvo dos modalidades de evaluación: Teórica y Práctica, y los ganadores forman el equipo base que representará al país en la XII Olimpiada Iberoamericana de Física (XIII OIBF) a llevarse a cabo en Septiembre de 2008 en Valparaíso, Chile.

Los ganadores de 2<sup>do</sup> de Secundaria, 1<sup>ro</sup> de Secundaria y 8<sup>vo</sup> de Primaria forman los equipos preseleccionados postulantes a futuros eventos Iberoamericanos e Internacionales a llevarse a cabo el 2009, 2010 y 2011.

Se presentan los exámenes resueltos de los exámenes simultáneos de selección tomados a nivel nacional de todas las etapas más el examen del evento nacional: la 12<sup>ava</sup> OBF.

¡Felicidades! a todos los jóvenes participantes y ganadores de las distintas etapas y categorías así como también a todos los establecimientos fiscales y particulares del área urbana y rural de todo el país que participaron en la competencia olímpica del apasionante mundo de la física. Todos ellos están dando un digno ejemplo a seguir por otros establecimientos, profesores y estudiantes contemporáneos así como también por todas las generaciones venideras.

La Página Internet del proyecto es: <http://www.fiumsa.edu.bo/olimpiada/>

*Descriptores: Enseñanza de la Física, Actividades Organizacionales, Física y Sociedad.*

## Examen Simultaneo de Selección: 8° de Primaria

### Parte conceptual 8° de Primaria (40%)

1. (10%) Redondee las siguientes cantidades adecuadamente para escribirlas con tan solo dos cifras significativas:

- a. 4.59                      b. 0.000996                      c. 3.85002                      d. 10 099                      e. 99 500

2. (15%) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a. El que la densidad del plomo sea mayor que de la madera significa que una misma masa de ambas sustancias ocupa menor volumen en el caso de la madera y un mayor volumen en el caso del plomo.
b. No existe hielo con temperatura menor a $-2[^\circ\text{C}]$ .
c. A nivel del mar, la temperatura de congelamiento es $0 [^\circ\text{C}]$ y la de ebullición es mayor a $100 [^\circ\text{C}]$ .
d. A más de $0 [^\circ\text{C}]$ , a nivel del mar, el agua se encuentra en estado gaseoso o líquido.
e. Qué el mercurio sea más denso que el agua, significa que al pesar un mismo volumen de ambos se obtendrá menos peso para el agua que el mercurio.

3. (5%) Si usted quiere escribir su altura con el mayor número de cifras significativas, ¿qué instrumento escoge para medirse?: una regla graduada en pulgadas, una regla graduada en centímetros, una regla graduada en pies o una regla graduada en metros.

4. (10%) Escriba las siguientes longitudes en metros. (No se olvide considerar el número de Cifras Significativas)

- a. 2000 [mm]                      b. 10 [cm]                      c. 1.0 [cm]                      d. 250 [mm]

### Parte Práctica 8° de Primaria (60%)

1. (20%) Una unidad de tiempo, que algunas veces se utiliza en la física microscópica, es el trémolo. Un trémolo es igual a  $10^{-8}$ s. ¿Hay más trémolos en un segundo que segundos hay en un año?

2. (20%) Se sabe que la masa de una moneda de 5 bolivianos es 10 gramos y la masa de una moneda de 1 Boliviano es 3 gramos. Se tiene una bolsa con 100 gramos de monedas de 5 bolivianos y otra bolsa con 201 gramos de monedas de 1 Boliviano. ¿Cuál bolsa tiene más dinero?

3.(10%) Elabore un procedimiento y una lista de materiales para determinar la densidad del agua.

4. (10%) ¿Las fórmulas que representan a una recta, una parábola y una hipérbola son:

$y = mx$ ,  $y = bx^2$ ,  $y = \frac{c}{x}$ , respectivamente. Si x e y representan longitudes, halle las unidades de las constantes m, b y c en el Sistema Internacional.

### Solución Parte Conceptual 8° de Primaria

1.- (a) 4.6                      (b) 0.0010                      (c) 3.9                      (d)  $10 \times 10^3 = 10 \text{ K}$                       (e)  $10 \times 10^4$

2.- (a) Falso                      (b) Falso                      (c) Falso                      (d) Verdadero                      (e) Verdadero

3.- Para tener mayor No de CS se debe escoger el instrumento con mayor apreciación, esto significa escoger el instrumento con escala más pequeña; como  $1\text{cm} < 1\text{plg} = 2.54\text{cm} < 1\text{pie} = 12\text{plg} < 1 \text{ metro} = 100 \text{ cm}$ , entonces se debe escoger la regla graduada en centímetros.

4.- (a)  $2000 [\text{mm}] = 2.000 [\text{m}]$                       (b)  $10 [\text{cm}] = 0.10 [\text{m}]$                       (c)  $1.0 [\text{cm}] = 0.010 [\text{m}]$   
       (d)  $250 [\text{mm}] = 0.250 [\text{m}]$

**Solución Parte Practica 8° de Primaria**

1.- Como 1 trémolo =  $10^{-8}$  [s] entonces se puede usar esta igualdad como un factor de conversión.

$$\text{En un segundo se tendrán } 1 \text{ s} \times \frac{1 \text{ tremolo}}{10^{-8} \text{ s}} = 1 \times 10^8 \text{ tremolos}$$

$$\text{En un año se tiene } 1 \text{ año} \times \frac{365 \text{ dias}}{1 \text{ año}} \times \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ dia}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 0,32 \times 10^8 \text{ s}$$

Entonces en 1 segundo se tienen más trémolos que segundos en un año.

2.- La bolsa de 100gr tiene monedas de 5 bolivianos, cada uno de 10gramos, entonces

$$100 \text{ g} \times \frac{1 \text{ Moneda de 5 Bs.}}{10 \text{ g}} = 10 \text{ Monedas de 5 Bs} = 50 \text{ Bs.}$$

La bolsa de 201g tiene monedas de 1 Bs. Cada una de 3 gramos entonces

$$201 \text{ g} \times \frac{1 \text{ Moneda de 1 Bs.}}{3 \text{ g}} = 67 \text{ Monedas de 1 Bs} = 67 \text{ Bs.}$$

La bolsa con monedas de 1 Bs. Tiene más dinero.

3.- Para determinar la densidad se necesita determinar la masa de un volumen de agua y hallar la relación entre ambas cantidades:

Materiales - Balanza, Regla, Recipiente con un interior de forma cilíndrica y Agua

- (1) Medir la masa del recipiente vacío en la balanza.
- (2) Medir la masa del recipiente lleno de agua en la balanza.
- (3) Restar la segunda masa de la primera, para obtener así la masa del agua.
- (4) Medir la altura  $h$  del agua en el recipiente.
- (5) Medir el diámetro interno del recipiente.

(6) Con la altura y el diámetro interno. Calcular el volumen de agua con la ecuación:  $V = \frac{\pi}{4} d^2 h$

(7) Con la masa del agua obtenida en (3) y el volumen del agua, obtenido en (6), determinar la densidad  $\rho$  que es cociente entre la masa y el volumen.

4.-

(a)  $y = m x$  Si (y) y (x) son longitudes para que la ecuación sea dimensionalmente correcta, m debe ser adimensional. Así en ambos miembros de la igualdad se tendrán dimensiones de longitud.

(b)  $y = b x^2$  Si (y) y (x) son longitudes la ecuación dimensional será entonces  $[L] = b [L]^2 \Rightarrow b = [L]^{-1}$

Donde  $b$  tendrá dimensiones de longitud a la (-1), en el SI corresponde a  $[m]^{-1}$

(c)  $y = c/x$  Se procede igual que en los ejemplos anteriores  $[L] = \frac{C}{[L]} \Rightarrow c = [L]^2$

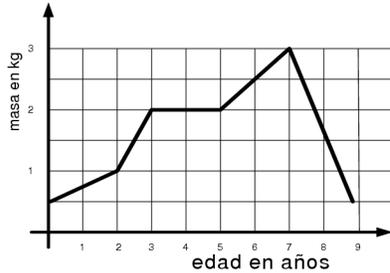
Donde  $c$  en el SI corresponde a  $[m]^2$

## Examen Simultaneo de Selección: 1° de Secundaria

### Parte teórica 1° de Secundaria (40%)

1. (6%) ¿Puede la suma de dos vectores de magnitud distinta, ser igual a cero?

2. (15%) Obsérvese el gráfico de la figura en la que se representa la variación de la masa (crecimiento) de un ser extraterrestre, en kilogramos, en función de la edad de este, en años.



Responda a las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la masa del extraterrestre al nacer?
- ¿En qué periodo de tiempo su crecimiento es mayor?
- ¿En qué periodo de tiempo el extraterrestre decrece?
- ¿A qué edad alcanza la mayor masa?
- ¿Qué sucede de sus 3 hasta sus 5 años de vida?

3. (10%) Dos estudiantes compiten en un concurso de medidas y errores, uno tiene la tarea de medir la distancia de su casa al colegio y el otro de medir el largo de su aula y sus resultados son los siguientes:

Estudiante A:  $(693 \pm 1)$  [m]

Estudiante B:  $(7 \pm 1)$  [m]

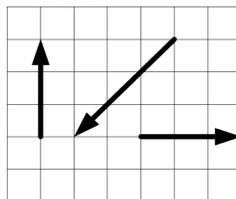
¿Se produjo un empate o cuál de los estudiantes merece el premio? ¿Por qué?

4. (9%) Se sabe que el coeficiente de expansión lineal del aluminio es  $24 \times 10^{-6}$  por  $^{\circ}\text{C}$  y el coeficiente de expansión lineal del vidrio pirex es  $3.2 \times 10^{-6}$  por  $^{\circ}\text{C}$ . Responda a las siguientes preguntas justificando sus respuestas.

- |   |
|---|
| a. ¿Quién sufre mayor dilatación una varilla de 50 cm de aluminio o una varilla de aluminio de 80cm de largo cuando se calientan ambas desde $0^{\circ}\text{C}$ hasta $70^{\circ}\text{C}$ ?                                     |
| b. ¿Quién sufre mayor dilatación una varilla de 1 metro de vidrio pirex o una varilla de 1 metro de aluminio cuando se calientan ambas desde $10^{\circ}\text{C}$ hasta $100^{\circ}\text{C}$ ?                                   |
| c. ¿Quién sufre mayor dilatación una varilla de un metro de vidrio pirex calentada de $15^{\circ}\text{C}$ a $50^{\circ}\text{C}$ o una varilla de un metro de aluminio calentada de $5^{\circ}\text{C}$ a $55^{\circ}\text{C}$ ? |

### Parte Práctica 1° de Secundaria (60%)

- (15%) La humanidad ha existido desde hace unos  $10^6$  años, mientras que el Universo tiene alrededor de  $10^{10}$  años de edad. Si se tomase la edad del Universo como equivalente a un día ¿cuántos segundos hace que existe la humanidad?.
- (15%) Dados los siguientes vectores:



Hallar:  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$  y  $\vec{C} + \vec{A} + \vec{B}$

- (15%) Se incrementa la temperatura de un trozo de metal de  $50^{\circ}\text{C}$  a  $135^{\circ}\text{C}$ , En que escala de temperatura: Kelvin o Fahrenheit, será mayor este incremento. Justifique su respuesta.
- (15%) Un alambre telefónico de cobre prácticamente no tiene comba entre los postes (se halla tenso sin colgar), los postes se hallan separados 35,0 [m] en un día invernal cuando la temperatura es de  $-20^{\circ}\text{C}$  ¿Cuánto más largo es el alambre en un día de verano cuando  $T_C = 35,0^{\circ}\text{C}$ ?

**Solución Parte Conceptual 1° de Secundaria**

1.- Para que los vectores se anulen deben tener la misma dirección y sentidos opuestos, pero además la misma magnitud. En caso de tener magnitudes distintas se tendrá un vector más pequeño que los que lo suman pero distinto de cero.

2.- (a) La masa del extraterrestre al nacer está representada por la ordenada en el origen, es decir el punto donde la curva interseca el eje de las masas que corresponde a 0.5 Kg.

(b) Se observa crecimiento (aumento de la masa al transcurrir el t) del nacimiento (0 años) a los 2 años; de los 2 a los 3 años y de los 5 a los 7 años, pero el mayor crecimiento, corresponde de los 2 años a los 3 años pues la pendiente del gráfico es mayor a las demás, es decir se aumento 1 Kg. en un año. Mientras que en el intervalo de 0 a 2 se incremento 0.5 Kg. En 2 años o equivalentemente 0.25 Kg. Por año y en el intervalo de 5 a 7 años se incremento la masa, 1 Kg. en 2 años o equivalentemente 0.5 Kg. Por año.

(c) El extraterrestre decrece de los 7 a los 9 años por que su masa disminuye mientras transcurre el tiempo.

(d) La mayor masa la alcanza a los 7 años que corresponde al punto máximo de la curva.

(e) Entre los 3 y los 5 años no hay crecimiento ni decrecimiento la masa se mantiene constante.

3.- Aunque ambos estudiantes cometieron el mismo error absoluto de 1 m, el primero lo hizo al medir una distancia mucho mayor a la del segundo, es decir cometió un error relativo porcentual de:

$$\text{Error de A: } \frac{1}{687} \times 100\% = 0.14\%; \quad \text{Error de B: } \frac{1}{7} \times 100\% = 14\%$$

Por lo tanto A merece tener el premio, por que cometió menor error relativo.

4.- La dilatación que sufre un cuerpo está dada por  $\Delta L = \alpha L \Delta T$  donde  $\alpha$  es el coeficiente de expansión lineal, L es la longitud inicial y  $\Delta T$  el cambio de temperatura. Entonces la dilatación es proporcional a estas cantidades.

(a) Como ambas varillas son del mismo material es decir tienen el mismo coeficiente de dilatación sufren el mismo cambio de temperatura, lo único que las diferencia es la longitud entonces la más larga se dilatará más.

(b) Como ambas varillas sufren el mismo incremento de temperatura, tienen la misma longitud, lo único que las diferencia es el material entonces se dilatará más la que tenga mayor coeficiente de dilatación es decir la de aluminio.

$$(c) \text{ La varilla de Pirex sufre un cambio de temperatura de } 50 [^{\circ}\text{C}] - 15 [^{\circ}\text{C}] = 35 [^{\circ}\text{C}]$$

$$\text{La varilla de aluminio sufre un cambio de temperatura de } 55 [^{\circ}\text{C}] - 5 [^{\circ}\text{C}] = 50 [^{\circ}\text{C}]$$

Ambas tienen la misma longitud pero la de aluminio tiene mayor coeficiente de dilatación y además sufre mayor incremento de T, entonces se dilatará más que la varilla de Pirex.

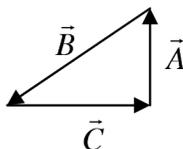
**Solución Parte Práctica 1° de Secundaria**

1.- Si la edad del Universo equivaldría a un día es decir: 10 años = 1 día, entonces la humanidad tendría;

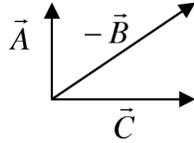
$$10^6 \text{ años} \times \frac{1 \text{ día}}{10^{10} \text{ años}} \times \frac{24 \text{ hrs}}{1 \text{ día}} \times \frac{3600 \text{ seg}}{1 \text{ hr}} = 9 \text{ segundos} - \text{de} - \text{vida}$$

2.- Por el método del polígono: Nótese que la suma  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$

Como la suma es conmutativa y asociativa  $\vec{C} + \vec{A} + \vec{B}$ , también será cero como se verifica en la figura:



Por el Método del Paralelogramo  $\vec{A} + \vec{C} = -\vec{B}$  entonces  $\vec{A} + \vec{C} + \vec{B} = -\vec{B} + \vec{B} = 0$



3.- Para obtener el incremento en grados Fahrenheit, primero calculamos las temperaturas inicial y final en escala Fahrenheit usando la ecuación:

$$^{\circ}F = \frac{9}{5} \times ^{\circ}C + 32$$

Entonces la temperatura inicial  $T_0$  en F será

$$T_0^F = \frac{9}{5} \times 50^{\circ} + 32 \Rightarrow T_0^F = 122^{\circ}F$$

Y la temperatura final  $T_F$  en F será

$$T_F^F = \frac{9}{5} \times 135^{\circ} + 32 \Rightarrow T_F^F = 275^{\circ}F$$

Entonces el incremento de temperatura en escala Fahrenheit

$$\Delta T^F = T_F^F - T_0^F \Rightarrow \Delta T^F = 275^{\circ}F - 122^{\circ}F = 153^{\circ}F$$

Para obtener el incremento en escala Kelvin procedemos de forma similar considerando que la ecuación para cambiar de escala Celsius a Kelvin es:  $K = [^{\circ}C] + 273$  entonces la variación de temperatura en Kelvin será:

$$\Delta T^K = T_F^K - T_0^K \Rightarrow \Delta T^K = (135 + 273) - (50 + 273) = 85^{\circ}K$$

El incremento es mayor en escala Fahrenheit, esto se podía ver inmediatamente por que, nótese en la ecuación para cambiar de escala Celsius a Fahrenheit hay un factor de 9/5 casi 2 que multiplica a los C para convertirlos en Fahrenheit, es decir que los C son casi el doble de los F es decir que en un incremento se tendría mayor número de F que C para compensar el hecho que los C son más grandes.

En cuanto a los K nótese que son del mismo tamaño que los C la diferencia de escalas se debe solo a un desplazamiento del origen pero ambos son iguales pues el factor que los multiplica en la ecuación de cambio de escala es uno. Por ello un incremento en Kelvin es igual a un incremento en Celsius y por tanto menor a Fahrenheit (por el argumento anterior).

4.- Se usa la ecuación:  $\Delta L = \alpha L \Delta T$  que expresa la dilatación de un cuerpo como todos son datos se reemplazan simplemente

$$\Delta L = 17 \times 10^{-6} [1 / ^{\circ}C] \times 35 [m] \times 35,0 [^{\circ}C] - (-20 [^{\circ}C])$$

$$\Delta L = 0.0327 [m] = 3.27 [cm]$$

## Examen Simultaneo de Selección: 2° de Secundaria

### Parte Conceptual 2o de Secundaria (40%)

1. (10%) ¿La Velocidad del sonido es igual en el aire seco y en el agua? Si es diferente ¿En cual de estos medios la velocidad del sonido es mayor?
2. (10%) Cual es la diferencia entre una onda transversal y una onda longitudinal.
3. (5%) ¿Cual es el intervalo de frecuencias que el oído humano puede detectar o escuchar normalmente?
4. (15%) Demostrar que el área de un paralelogramo de lados  $|\vec{A}|$  y  $|\vec{B}|$  es  $|\vec{A} \times \vec{B}|$  (Fig.1)

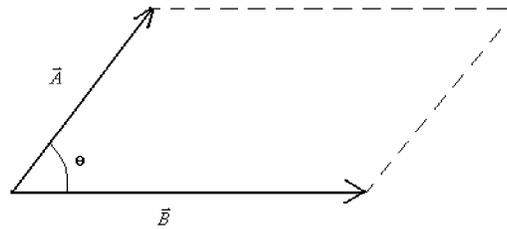


Figura 1

### Parte Práctica 2o de Secundaria (60%)

1. (15%) Si una onda de agua vibra 2 veces por segundo y la distancia entre dos crestas es de 1,5 [m]. ¿Cuál es su velocidad?
2. (15%) Hallar el ángulo formado por los vectores:  $\vec{A} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  y  $\vec{B} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ .
3. (15%) Imagínese la superficie de separación entre dos regiones, una de vidrio ( $n_v=1,5$ ) y la otra de agua ( $n_a=1,33$ ). Un rayo que se propaga en el vidrio incide sobre la superficie de separación con un ángulo  $\theta_i=45^\circ$  y se refracta dentro del agua. ¿ Cual es el ángulo de transmisión  $\theta_t$ ?

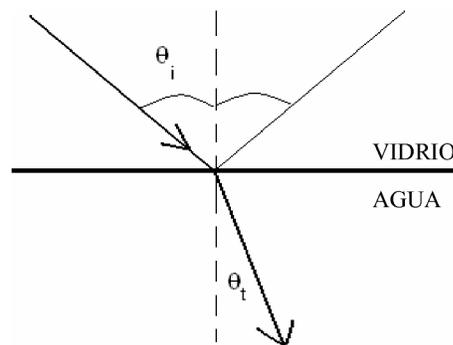


Figura 2

4. (15%) Si la velocidad de la luz es de 300000 [Km./s] ¿ Cuantos kilómetros recorrerá un rayo de luz en un año?

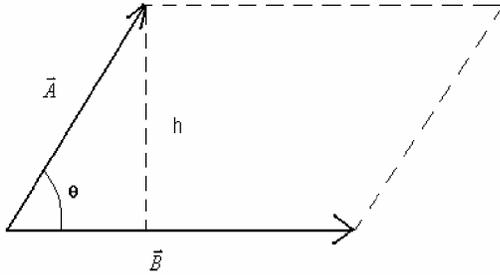
### Solución Parte Conceptual 2° de Secundaria

1. No, la velocidad en el aire seco a temperatura 0 [°C] y presión fija es de 300 [m/s] y en el agua es del orden de 1500 m/s aproximadamente.

2. En una onda transversal, las partículas del medio se mueven (vibran) perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda. En una longitudinal, las partículas del medio se mueven (vibran) en la misma dirección en que se propaga la onda.

3. Normalmente, el oído humano puede detectar tonos que corresponden al intervalo de frecuencias que va de unos 20 Hz a alrededor de 20 [KHz].

4.



$$\text{Area} = h |\vec{B}|, \text{Area} = |\vec{A}| \text{Sen } \theta |\vec{B}|, \text{Area} = AB \text{ Sen } \theta \therefore \text{Area} = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

### Solución Parte Práctica 2º de Secundaria

1. La frecuencia de la onda es  $v=2$  [Hz] y su longitud de onda es  $\lambda=1,5$  [m], entonces la velocidad será:

$$V = \lambda v = (2\text{Hz}) * (1,5\text{m}) = 3 \text{ [m/s]}$$

2. El producto escalar de estos vectores es:

$$\vec{A} \circ \vec{B} = AB \text{Cos } \theta$$

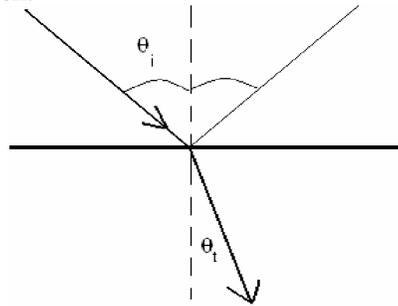
$$\vec{A} \circ \vec{B} = (2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \circ (6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}) = 12 - 6 - 2 = 4$$

$$|\vec{A}| = 3, |\vec{B}| = 7$$

Reemplazando :

$$\text{Cos } \theta = \frac{\vec{A} \circ \vec{B}}{AB} = \frac{4}{21} \Rightarrow \theta = \text{Cos}^{-1} \frac{4}{21} \Rightarrow \theta = 79^\circ$$

3. Aplicando la ley de Snell:



$$n_v \text{Sen } \theta_i = n_A \text{Sen } \theta_t$$

$$\text{Sen } \theta_t = \frac{1,5 * 0,707}{1,33}$$

$$\theta = 52,6^\circ$$

4. la distancia recorrida por la luz es de:

$$d = vt \Rightarrow d = 300000 \text{ [Km./s]} * 1 \text{ año} * 365 \text{ [d]} / 1 \text{ [año]} * 24 \text{ [h]} / 1 \text{ [d]} * 3600 \text{ [s]} / 1 \text{ [h]}$$

$$d = 9,5 * 10^{12} \text{ [Km].}$$

## Examen Simultaneo de Selección: 3° de Secundaria

### Parte Conceptual 3° de Secundaria (40%)

- ¿Puede un cuerpo invertir la dirección de su velocidad si se mueve con aceleración constante? Explique.
- Indique cuáles de las siguientes situaciones son posibles y cuáles son imposibles de suceder:
  - Un cuerpo con velocidad este y aceleración norte.
  - Un cuerpo con velocidad variable y aceleración cero.
  - Un cuerpo con aceleración constante y velocidad variable.
  - Un cuerpo con velocidad constante y aceleración variable.
  - Un cuerpo con velocidad norte y aceleración sur.
- ¿Se dice que las estrellas que observamos en el firmamento son las imágenes del pasado, es correcto decir esto? ¿Por qué?
- La *figura 1* y la *figura 2* representan dos sistemas de resortes todos de constante de rigidez  $k$  sujetados en los puntos fijos **A** (*figura 1*), **B** y **C** (*figura 2*), ambos sistemas dispuestos de manera vertical y sometidos a la acción de la gravedad sujetando un cuerpo de masa  $M$ ; ¿en cuál de los dos sistemas la deformación de los resortes será menor?

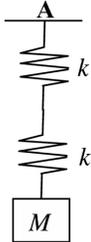


figura 1

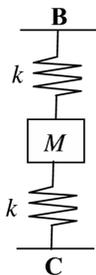
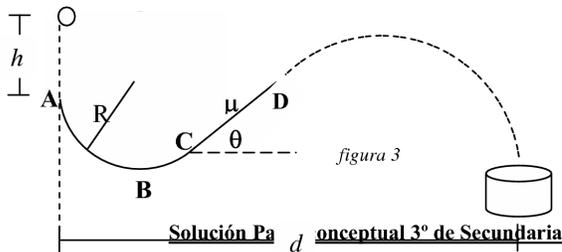


figura 2

### Parte Práctica 3° de Secundaria (60%)

- Un cuerpo de masa desconocida se deja caer una altura  $h$  hasta el punto **A**, para luego deslizarse a través de la rampa **ABCD**, dicha rampa en el tramo **ABC** tiene la forma de un arco de circunferencia de radio  $R$  de superficie lisa, mientras que el tramo **CD** es un plano inclinado de ángulo  $\theta$  con respecto a la horizontal, con un coeficiente de rozamiento cinético  $\mu$  (*figura 3*)
  - ¿Cuál es la velocidad  $v_C$  del cuerpo en el punto **C**? b) ¿Cuál es la velocidad  $v_D$  del cuerpo en el punto **D**?
  - El cuerpo es expulsado en el punto **D** con velocidad  $v_D$  para caer justo dentro de una caja situada a una distancia horizontal  $d$  desde la vertical del punto **A**, como se ve en *figura 3*. Si los puntos **A** y **D** se encuentran al mismo nivel horizontal cuál debe ser la altura  $h$  para que el cuerpo llegue justo dentro de la caja?
- Una manguera dispuesta de manera horizontal, expulsa un chorro de agua con velocidad inicial  $v_0=15$  [m/s], este chorro va a colisionar de manera perpendicular con una ventana inclinada de ángulo  $\theta=30^\circ$  con respecto a la horizontal, como se ve en la *figura 4*.
  - ¿Cuál será la velocidad del chorro en el punto **P**, es decir en el punto de colisión?
  - ¿A qué altura  $h$  bajo el nivel de la manguera se encuentra el punto **P**?
  - Hallar la fuerza que ejerce el chorro sobre la ventana, y determinar si esta se quebrará si el cristal del que está hecho soporta una fuerza máxima de 2000 [N].
- Es sabido que en la Luna la fuerza de gravedad es menor que la de la Tierra. Siendo que la Tierra tiene una densidad promedio  $\rho_0=5520$  [Kg/m<sup>3</sup>] y si consideramos a ambos cuerpos, Tierra y Luna, como esferas compactas de densidad uniforme:
  - Calcule el radio medio de la Tierra cuya masa es  $M_0=5.98 \times 10^{24}$  [Kg]
  - Si la Luna tiene un radio  $R_{Luna}=1,74 \times 10^6$  [m], cuál debería ser la densidad de la Luna para que la gravedad lunar sea igual a la gravedad terrestre (9,81 [m/s<sup>2</sup>])?
- La *figura 5* muestra un cuerpo que desliza en un plano sin rozamiento inclinado doble, que al partir del reposo en el punto **A** desliza hasta **B** y sube hasta **C** donde vuelve en forma inversa hasta **A**, realizando un movimiento oscilatorio. El ángulo de inclinación de ambos planos es  $\beta$ , la distancia **AB** y **BC** es igual a  $d$ . Determinar la frecuencia  $f$  [Hz] y el periodo  $T$  [s] de oscilación del sistema.



Solución Pa d onceptual 3° de Secundaria

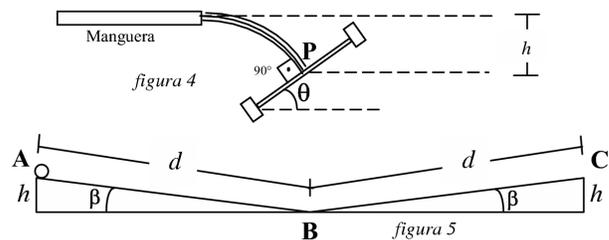
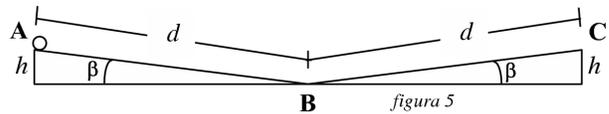


figura 5



1. Si, un cuerpo que avance en una dirección con movimiento uniformemente retardado avanza hasta un punto en que su velocidad se hace nula por estar desacelerando e inmediatamente comienza a moverse en sentido contrario con la misma aceleración pero esta vez acrecentando su velocidad.
2. a) Posible, b) Imposible, c) Posible, d) Imposible, e) Posible
3. Las estrellas del firmamento, excluyendo al sol, se hallan a distancias tan grandes ( $\approx 8000$  [Pc]) que la luminosidad que emanan tarda años incluso siglos en llegar a la Tierra de este manera es correcto afirmar que son las imágenes del pasado y que vemos en el firmamento imágenes que
4. Los sistemas muestran claramente una unión de resortes en serie y una unión de resortes en paralelo respectivamente. La constante de rigidez equivalente  $k_{eq}$  es en

$$\text{serie: } k_{eq} = \frac{k k}{k + k} = \frac{k}{2} \quad \text{y en paralelo: } k_{eq} = k + k = 2k$$

Y la deformación  $x$  se calcula por la ley de Hooke:  $x = F/k_{eq}$ , siendo  $F$  el mismo en ambos casos, porque es el mismo cuerpo,  $x$  queda de la siguiente manera:

$$\text{para el sistema en serie: } x = 2Mg/k \quad \text{y para el sistema en paralelo: } x = Mg/2k$$

Donde la elongación de cada resorte en el sistema en serie es la mitad de su elongación en conjunto y la del sistema en paralelo es la misma, lo que resulta que el sistema que menor deformación tendrá en sus resortes es el del sistema en paralelo.

### Solución Parte Practica 3° de Secundaria

$$1. \quad a) \text{ Por conservación de la energía tenemos: } mg(h + R) = \frac{1}{2} mV_c^2 + mg(R - R \cos \theta),$$

$$2g(h + R - R + R \cos \theta) = V_c^2, \text{ de donde, } V_c = \sqrt{2g(h + R \cos \theta)}$$

b) El rozamiento en el tramo CD realizará un trabajo  $W$ , el cual está en función de la energía cinética,

$$W = \Delta K, \text{ por tanto, } -(mg \sin \theta + f_R)x = \frac{1}{2} mV_D^2 - \frac{1}{2} mV_C^2,$$

$$-(mg \sin \theta + \mu mg \cos \theta)x = \frac{1}{2} m(V_D^2 - V_C^2), \quad -2gx(\sin \theta + \mu \cos \theta) = V_D^2 - V_C^2$$

Es posible obtener  $x$  analizando la geometría del sistema dado, tal que:  $x \sin \theta = R \cos \theta$ , entonces,

$$x = R \cot \theta, \text{ por tanto, } V_D^2 = V_C^2 - 2g(\sin \theta + \mu \cos \theta)R \cot \theta,$$

$$V_D^2 = 2g(h + R \cos \theta) - 2gR(\cos \theta + \mu \cos \theta \cot \theta) = \sqrt{2g(h - R \cos \theta \cot \theta)}$$

c) Podemos hallar  $V_D$  necesario para que el cuerpo llegue a la caja por cinemática: en el eje  $Y$  y en el

$$\text{eje } X \text{ las ecuaciones son respectivamente: } -R = V_D \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

$$d - R - R \sin \theta - x \cos \theta = V_D \cos(\theta)t, \text{ y de ambas hallamos } V_D:$$

$$V_D = \frac{d \operatorname{sen} \theta - R(\operatorname{sen} \theta + 1)}{\cos \theta \operatorname{sen} \theta} \left( \frac{g \cos \theta}{2(d \operatorname{sen} \theta - R(\operatorname{sen} \theta + \operatorname{ctg} \theta + 1))} \right)^{1/2}; \text{ finalmente igualamos con}$$

nuestro  $V_D$  anterior y despejamos  $h$ :

$$2gh - 2gR \cos \theta \operatorname{ctg} \theta = \left( \frac{d \operatorname{sen} \theta - R(\operatorname{sen} \theta + 1)}{\cos \theta \operatorname{sen} \theta} \right)^2 \frac{g \cos \theta}{2(d \operatorname{sen} \theta - R(\operatorname{sen} \theta + \operatorname{ctg} \theta + 1))}$$

$$h = \frac{1}{2g} \left( \left( \frac{d \operatorname{sen} \theta - R(\operatorname{sen} \theta + 1)}{\cos \theta \operatorname{sen} \theta} \right)^2 \frac{g \cos \theta}{2(d \operatorname{sen} \theta - R(\operatorname{sen} \theta + \operatorname{ctg} \theta + 1))} + 2gR \cos \theta \operatorname{ctg} \theta \right)$$

2. a) En el punto P si la velocidad  $V$  es perpendicular al plano de la ventana entonces la velocidad  $V_0$  estará relacionada con  $V$  del siguiente modo:  $V = V_0 \sin \theta$   
 b) En el punto P la componente  $Y$  de la velocidad  $V$  estará relacionada con la altura según:

$$(V \cos \theta)^2 = 2gh, \quad h = \frac{V^2 \cos^2 \theta}{2g}, \quad h = \frac{V_0^2 \cos^2 \theta}{2g \sin^2 \theta}, \quad \text{de donde, } h = \frac{V_0^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{2g}$$

- c) El chorro mantendrá un caudal  $Q$  constante que puede ser relacionada con la fuerza de la siguiente manera:

$$Q = Av_0 = \frac{\pi d^2}{4} v_0 = \frac{V}{t}, \quad V = \frac{\pi d^2}{4} v_0 t, \quad m = \rho V = \rho \frac{\pi d^2}{4} v_0 t$$

E introduciendo la ecuación del impulso o momentum lineal:  $Ft = \Delta mv = m(v_f - v)$   
 considerando  $v_f$  en el instante del choque igual a cero, tendremos que:

$$Ft = -mv = -\rho \frac{\pi d^2}{4} v_0 t v = -\rho \frac{\pi d^2}{4 \sin \theta} v_0^2 t$$

y sustituyendo los datos numéricos nos da una fuerza de  $F = 2345$  lo cual nos indica que el vidrio se quebrará ya que soporta una máxima de 2000 N.

3. a) Podemos relacionar la densidad y la masa de la Tierra de la siguiente forma:

$$\rho_0 = \frac{M_0}{V}, \quad \text{donde, } V = \frac{4}{3} \pi R_0^3, \quad \text{entonces, } \rho_0 = \frac{3M_0}{4\pi R_0^3}, \quad \text{de donde, } R_0 = \sqrt[3]{\frac{3M_0}{4\pi\rho_0}}$$

Sustituyendo los valores numéricos nos da  $R_0 = 6371$  km.

- b) Si  $g$  es la gravedad terrestre ( $9.81 \text{ m/s}^2$ ) podemos relacionarla con la fuerza de atracción

gravitatoria en la Luna:  $F_G = \frac{GM_L m}{R_L^2}$ , además,  $F_G = mg$ , igualando (condición para que la

gravedad de la Luna sea igual a la gravedad de la Tierra) y despejando  $M_L$ :  $M_L = g \frac{R_L^2}{G}$ ,

pero también relacionamos la masa de la Luna con su densidad:  $V_L = \frac{4}{3} \pi R_L^3$ ,

$$\rho_L = \frac{M_L}{V_L} = \frac{g \frac{R_L^2}{G}}{\frac{4}{3} \pi R_L^3} = \frac{3g}{4\pi G R_L}, \quad \text{de donde la densidad de la luna será } \rho_L = 5511 \text{ [Kg/m}^3\text{]}$$

4. El tiempo de caída del cuerpo de A hasta B que es el mismo que el de B hasta C se halla de la

siguiente manera:  $ma = mg \sin \theta$ ,  $d = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} g \sin(\theta) t^2$ , de donde,  $t = \sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}}$

Entonces su periodo de oscilación y su frecuencia se hallan inmediatamente:  $T = 2t = 2\sqrt{\frac{2d}{g \sin \theta}}$ ,

además la frecuencia es,  $f = \frac{1}{T}$ , entonces,  $f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g \sin \theta}{2d}}$

## Examen Simultaneo Final: 4° de Secundaria

### Parte Conceptual 4° de Secundaria (40%)

- 1.- (10%) Un objeto pesado descansa en la plataforma de un camión. Cuando éste acelera, el objeto permanece en su lugar sobre la plataforma y, por tanto, acelera también. ¿Cuál es la fuerza que hace que el objeto acelere? Justifique su respuesta.
- 2.- (10%) Si un cuerpo sujeto a un resorte (con el otro extremo del resorte sujeto a un punto fijo), se deja caer, ¿la disminución de su energía potencial gravitatoria, con respecto al suelo, es igual al aumento de su energía potencial elástica? Justifique su respuesta.
- 3.- (10%) ¿Explique por que en una carrera de ciclismo, los competidores marchan uno tras de otro? Y para adelantarse a otro competidor que está por delante ¿por qué no lo rebasan pasando junto a él?
- 4.- (10%) ¿Puede una partícula pasar de una región de bajo potencial eléctrico a una de alto potencial y disminuir al mismo tiempo su energía potencial eléctrica? Explique la respuesta.

### Parte Práctica 4° de Secundaria (60%)

- 5.- (15%) Un bloque de madera de 180,0 g está unido firmemente a un resorte horizontal como se observa en la figura 1. El bloque se puede deslizar sobre la superficie de una mesa cuyo coeficiente de fricción es 0,30. Una fuerza de 20,0 N comprime el resorte una longitud de 16,0 cm. Si se retira la fuerza y se libera el resorte de esta posición, ¿qué distancia mas allá de la posición de equilibrio se estirará el resorte en su primera oscilación? ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

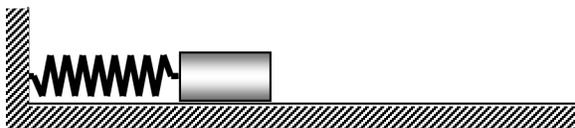
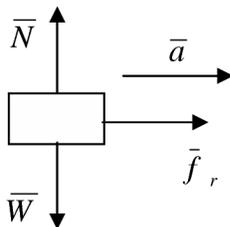


Figura 1

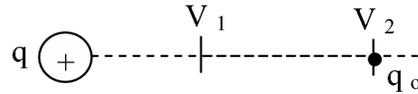
- 6.- (15%) Se supone que una barra de 24 quilates (oro puro) es completamente sólida. Para comprobar esto, un estudiante lleva la barra al laboratorio y, mediante una balanza encuentra que su masa es de 1,00 kg en el aire y de 0,93 kg al sumergirla por completo en agua. ¿Es sólida la barra? ( $\rho_{\text{Au}} = 19,3 \text{ g/cm}^3$ ) Justifique su respuesta.
- 7.- (15%) Un trozo de cobre de 3,0 kg de masa cuya temperatura es  $460,0^\circ \text{C}$  se introduce en un recipiente que contiene una mezcla de hielo y agua a  $0,0^\circ \text{C}$ . Cuando se alcanza el equilibrio, el trozo de cobre está a  $0,0^\circ \text{C}$ . ¿Cuánto hielo se fundió en el proceso? ( $C_{\text{Cu}} = 0,093 \text{ Kcal/kg } ^\circ\text{C}$ ;  $L_{\text{Hielo}} = 80 \text{ Kcal/kg } ^\circ\text{C}$ ).
- 8.- (15%) Dos cargas de  $+2,7 \mu\text{C}$  y  $-3,5 \mu\text{C}$  se colocan a una distancia de 25,0 cm. ¿Dónde se puede colocar una tercera carga para que no experimente una fuerza neta?

### Solución Parte Conceptual

- 1.- La fuerza que hace acelerar al objeto es la fuerza de fricción.



- 2.- No, ya que al bajar el cuerpo también aumenta su energía cinética, por lo tanto la disminución de la energía potencial gravitatoria es igual al aumento de la energía cinética y de la energía potencial elástica.
- 3.- Cuando un cuerpo pasa un lugar, éste queda vacío por un instante muy pequeño y posteriormente el aire ocupa ese lugar, ejerciendo una presión, esto ayuda a dar mayor impulso al corredor. Por la razón mencionada si otro corredor quiere pasar al que está delante de él, pasando por su lado, éste será empujado hacia el corredor que está adelante, produciéndose un choque.
- 4.-

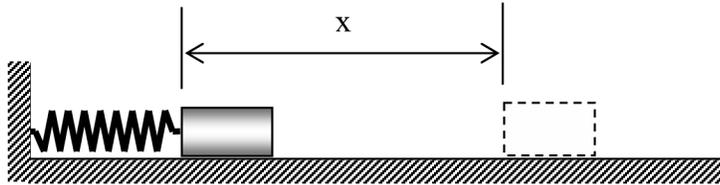


En la figura se observa que  $V_2 < V_1$ , entonces al pasar  $q_o$  de un potencial mayor a uno menor su distancia con respecto de  $q$  disminuirá, y por lo tanto, su energía potencial eléctrica aumentará, ya que:

$$U = \frac{K q_o q}{r}$$

### Parte Práctica

5.-



Para hallar la constante de rigidez,

$$F = k x \quad \rightarrow \quad k = \frac{F}{x} \quad \rightarrow \quad k = \frac{20,0}{0,160} \quad \rightarrow \quad k = 125 \text{ N/m}$$

Aplicando balance de energía,

$$\frac{1}{2} k x_o^2 = \frac{1}{2} k x^2 + f_r x \quad \rightarrow \quad k x_o^2 = k x^2 + 2 \mu m g x$$

$$k x^2 + 2 \mu m g x - k x_o^2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$125 x^2 + (2)(0,30)(0,1800)(9,8) x - (125)(0,16)^2 = 0$$

$$125 x^2 + 1,1 x - 3,2 = 0$$

$$x = \frac{-1,1 \pm \sqrt{(1,1)^2 - (4)(125)(-3,2)}}{(2)(125)} = \frac{-1,1 \pm 40}{250}$$

$$x = 0,16 \text{ m}$$

6.-

$$E = W - W' \quad \rightarrow \quad \rho_{\text{agua}} g V_{\text{Au}} = W - W'$$

$$V_{Au} = \frac{W - W'}{\rho_{agua} g} \rightarrow V_{Au} = \frac{m - m'}{\rho_{agua}}$$

$$V_{Au} = \frac{1,00 - 0,93}{1000} \rightarrow V_{Au} = 7,0 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

entonces,  $\rho_{Au} = \frac{m}{V_{Au}} \rightarrow \rho_{Au} = \frac{1,00}{7,0 \times 10^{-5}} \rightarrow$

$$\rho_{agua} = 14 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Por lo tanto, como la densidad del oro puro es  $19300 \text{ kg/m}^3$  entonces, la barra no es sólida.

7.-  $Q_{Cu} = C_{Cu} m_{Cu} (T_c - T_{oCu}) = (0,093) (3,0) (0,0 - 460,0)$

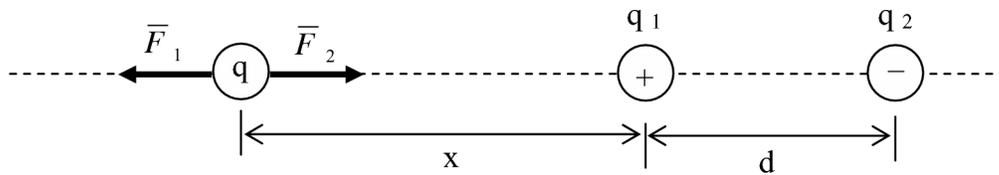
$$Q_{Cu} = -1,3 \times 10^5 \text{ cal}$$

$Q_{Hielo} = m_{Hielo} L_{Hielo}$  luego, como  $Q_{Hielo} = -Q_{Cu}$  entonces,

$$m_{Hielo} = \frac{-Q_{Cu}}{L_{Hielo}} \rightarrow m_{Hielo} = \frac{-(-1,3 \times 10^5)}{80} \rightarrow$$

$$m_{Hielo} = 1,6 \text{ kg}$$

8.-



$$F_1 = \frac{K q_1 q}{x^2} \quad \text{y} \quad F_2 = \frac{K q_2 q}{(x+d)^2}$$

luego, como  $F_1 = F_2$ , entonces

$$\frac{K q_1 q}{x^2} = \frac{K q_2 q}{(x+d)^2} \rightarrow \frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(x+d)^2} \rightarrow$$

$$q_1 (x+d)^2 = q_2 x^2 \rightarrow (q_1 - q_2) x^2 + 2d q_1 x + q_1 d^2 = 0$$

$$(2,7 \mu - 3,5 \mu) x^2 + (2)(0,25)(2,7 \mu) x + (2,7 \mu)(0,25)^2 = 0$$

$$-0,80 x^2 + 1,4 x + 0,17 = 0 \rightarrow 0,80 x^2 - 1,4 x - 0,17 = 0$$

$$x = \frac{1,4 \pm \sqrt{(1,4)^2 - (4)(0,80)(-0,17)}}{(2)(0,80)} = \frac{1,4 \pm 1,6}{1,6}$$

entonces,

$$x = 1,9 \text{ m}$$

12<sup>a</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA  
5<sup>a</sup> Etapa, 08 / Septiembre / 2007: 8<sup>o</sup> de Primaria

AP. Paterno	AP. Materno	Nombre(s)
Teléfono	Departamento	Colegio

Nº =

.....

Nº =

Parte conceptual (40% : Respuestas estrictamente literales)

- a) ¿Qué significa medir?
- b) ¿Qué es una cantidad física?
- c) ¿Qué es un fenómeno físico?
- d) ¿Qué es una magnitud?
- e) ¿Cuáles son las unidades básicas del Sistema Internacional?
- f) En física: ¿Para que sirve la experimentación?
- g) En ciencias naturales: ¿Qué es una unidad?

Parte Práctica (60%)

1. (20%):

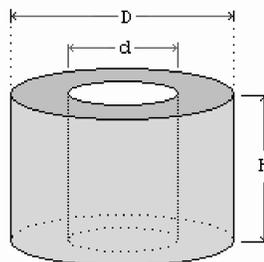
- La fuerza  $F$  de interacción entre dos cargas eléctricas ( $Q_1, Q_2$ ), de acuerdo con la Ley de Coulomb, es:  $F = \frac{k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ ; donde:  $k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$ . Si las unidades de fuerza  $F$  están dadas en newton (N); la distancia  $r$  en metros (m); cada carga eléctrica ( $Q_1, Q_2$ ) en coulomb (C): **Determinar las unidades de la constante dieléctrica del vacío:  $\epsilon_0$ .**

2. (20%):

1. Si 10 calorías tardan 2 segundos en calentar tres gramos de agua, ¿Cuántas calorías se requieren para calentar el agua que contiene un recipiente cilíndrico de radio  $r=5\text{cm}$  y altura  $h=24\text{cm}$  y ¿cuanto tiempo se tarda? (en segundos, y en notación científica). El volumen del cilindro es:  $V = \pi \cdot h \cdot r^2$ , la densidad  $d$  del agua es: un gramo, en un centímetro cúbico ( $d = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ).

3. (20%):

- El diámetro interno  $d$  de un cilindro hueco es 24,31cm y el externo  $D$ , es 30.00cm. Si la altura  $H$  es 11.00 cm. **Determinar analíticamente y cuantitativamente la cantidad de cartulina** (en milímetros cuadrados) necesarios para construir el cilindro (la superficie de un círculo es:  $S = \pi \cdot r^2$ ; el perímetro es  $L = 2 \cdot \pi \cdot r$ ;  $r$  es el radio).



SOLUCIONARIO 8<sup>VO</sup> DE PRIMARIA

## PARTE CONCEPTUAL

- Medir es comparar dos magnitudes iguales considerando a una de ellas como patrón.
- Una cantidad física es el resultado de la medición de una magnitud.
- Fenómeno físico es aquel que no altera la composición de la materia.
- Una magnitud es una propiedad de la materia que puede ser medida directamente con un instrumento o indirectamente a través de una fórmula.
- Las unidades básicas son: metro, kilogramo, segundo, ampere, grado kelvin, candela y mol.
- La experimentación sirve para verificar hipótesis y también para descubrir leyes.
- Una unidad es una base fundamental para un objeto de estudio, que puede definirse estrictamente a condición de que sean invariables en todo el tiempo y lugar.

## PARTE PRACTICA

1 como

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_o r^2}$$

despejando  $\epsilon_o$

$$\epsilon_o = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi F r^2}$$

$$[\epsilon_o] = \left[ \frac{C^2}{N m^2} \right]$$

$$2 \quad V = \pi r^2 h \quad \rightarrow \quad V = \pi (5)^2 (24) \quad \rightarrow \quad V = 1884 \text{ cm}^3$$

entonces la masa del agua es  $m = \rho V \quad \rightarrow \quad m = (1)(1884) \quad m = 1884 \text{ g}$

luego por regla de tres simple

$$Q = \frac{(10 \text{ cal})(1884 \text{ g})}{3 \text{ g}} \quad \rightarrow \quad Q = 6,280 \times 10^3 \text{ cal}$$

$$t = \frac{(2 \text{ s})(6286 \text{ cal})}{10 \text{ cl}} \quad \rightarrow \quad t = 1,256 \times 10^3 \text{ s}$$

3

Area tomando en cuenta el área externa

$$A_E = \pi D H = \pi (30,00 \text{ cm})(11,00 \text{ cm}) \quad \rightarrow \quad A_E = 1037 \text{ cm}^2$$

Area de la base  $A_B = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$

$$A_B = \frac{\pi}{4} [(30,00 \text{ cm})^2 - (24,31 \text{ cm})^2] \quad \rightarrow \quad A_B = 242,7 \text{ cm}^2$$

el área total será

$$A_T = A_E + 2 A_B$$

entonces

$$A_T = 1\,037 + (2)(242,7) \rightarrow A_T = 1\,522 \text{ cm}^2$$

transformando

$$A_T = 1\,522 \text{ cm}^2 \times \left( \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ cm}} \right)^2$$

finalmente

$$A_T = 1,522 \times 10^5 \text{ mm}^2$$

**12<sup>a</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA**  
**5<sup>a</sup> Etapa, 08 / Septiembre / 2007: 1<sup>o</sup> de Secundaria**

AP. Paterno	AP. Materno	Nombre(s)
Teléfono	Departamento	Colegio

Nº =

.....

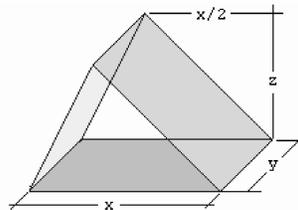
Nº =

**Parte conceptual (40%)**

- a) ¿Qué significa medir?
- b) ¿Qué es una cantidad física?
- c) ¿Qué es un fenómeno físico?
- d) ¿Qué es una unidad patrón y para que sirve?
- e) ¿Qué es una magnitud escalar y vectorial, y cómo se los representa?
- f) ¿Cuáles son las unidades básicas del Sistema Internacional?
- g) En física: ¿Para que sirve la experimentación?
- h) ¿Cuál es la diferencia entre precisión y exactitud?
- i) Una placa de aluminio se corta en dos partes de diferentes tamaños. Si ambas se dilatan en las mismas condiciones. ¿Existirá diferencia porcentual de variación de superficie?

**Parte Práctica (60%)**

1. (10%) La fuerza  $F$  de interacción entre dos cargas eléctricas ( $Q_1, Q_2$ ), de acuerdo con la Ley de Coulomb, es:  $F = \frac{k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ ; donde:  $k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}$ . Si las unidades de fuerza  $F$  están dadas en newton (N); la distancia  $r$  en metros (m); cada carga eléctrica ( $Q_1, Q_2$ ) en coulomb (C): **Determinar las unidades de la constante dieléctrica del vacío:  $\epsilon_0$ .**
2. (20%) Dos vectores forman un ángulo de  $110^\circ$ . Uno de ellos tiene 20 newton y hace un ángulo de  $40^\circ$  con el vector suma de ambos. **Determinar la magnitud del segundo vector y la del vector suma.**
3. (20%) A  $12^\circ\text{C}$ , un prisma triangular recto de un metal tiene una altura  $Z=20\text{ cm}$  lados:  $x=30\text{cm}$   $y=10\text{cm}$  Densidad =  $7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . **Determinar el porcentaje de variación de volumen, cuando la temperatura es 389 Kelvin.** El coeficiente de dilatación lineal del metal es  $17 \times 10^{-6} (1/^\circ\text{C})$



4. (10%) Si 10 calorías tardan 2 segundos en calentar tres gramos de agua, ¿Cuántas calorías se requieren para calentar el agua que contiene un recipiente cilíndrico de radio  $r=5\text{cm}$  y altura  $h=24\text{cm}$  y ¿cuanto tiempo se tarda? (en segundos, y en notación científica). El volumen del cilindro es:  $V = \pi \cdot h \cdot r^2$ , la densidad  $d$  del agua es: un gramo, en un centímetro cúbico ( $d = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ).

SOLUCIONARIO 1<sup>to</sup> SECUNDARIA

## PARTE CONCEPTUAL

- a) Medir es comparar dos magnitudes iguales considerando a una de ellas como patrón.  
 b) Una cantidad física es el resultado de la medición de una magnitud.  
 c) Fenómeno físico es aquel que no altera la composición de la materia.  
 d) La unidad patrón es una unidad que se toma como referencia para medir.  
 e) Una magnitud escalar se caracteriza por un valor numérico y una unidad, mientras que una magnitud vectorial se caracteriza por un valor numérico más un sentido y una dirección. Ejemplos:  $m = 2,0 \text{ kg}$  (escalar);  $F = 10 \text{ N}$ , con una dirección de  $90^\circ$  y sentido hacia arriba (vector).  
 f) Las unidades básicas son: metro, kilogramo, segundo, ampere, grado kelvin, candela y mol.  
 g) La experimentación sirve para verificar hipótesis y también para descubrir leyes.  
 h) La exactitud indica el grado en que los valores experimentales ( $x_i$ ) o un valor promedio ( $\bar{x}$ ) se acerca al valor verdadero ( $x$ ).  
 i) Para los dos pedazos se tendría,  $\Delta A_1 = 2 \alpha A_{01} \Delta T$ ;  $\Delta A_2 = 2 \alpha A_{02} \Delta T$ , luego,  

$$\frac{\Delta A_1}{A_1} = 2 \alpha \Delta T$$
; 
$$\frac{\Delta A_2}{A_2} = 2 \alpha \Delta T$$
, por lo tanto, no existe diferencia porcentual de variación de superficie.

## PARTE PRACTICA

1

como

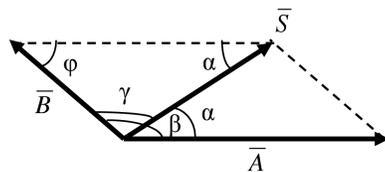
$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon_o r^2}$$

despejando  $\epsilon_o$ 

$$\epsilon_o = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi F r^2}$$

$$[\epsilon_o] = \left[ \frac{C^2}{N m^2} \right]$$

2



**DATOS:**  
 $\beta = 110^\circ$   
 $\alpha = 40^\circ$   
 $A = 20 \text{ N}$

De la figura  $\gamma = \beta - \alpha \rightarrow \gamma = 110^\circ - 40^\circ \rightarrow \gamma = 70^\circ$

$\Phi + \gamma + \alpha = 180^\circ \rightarrow \Phi = 180^\circ - \gamma - \alpha \rightarrow \Phi = 70^\circ$

Aplicando teorema de los senos

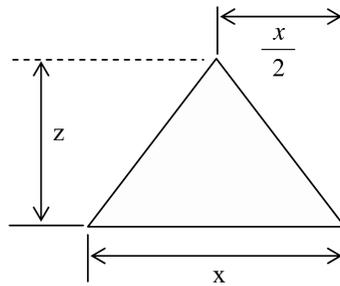
$$\frac{A}{\text{sen } \gamma} = \frac{B}{\text{sen } \alpha}$$

$$B = \frac{A \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma} \rightarrow B = \frac{(20)(\operatorname{sen} 40^\circ)}{\operatorname{sen} 70^\circ} \rightarrow \boxed{B = 14 \text{ N}}$$

$$\frac{A}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{S}{\operatorname{sen} \varphi} \rightarrow S = \frac{A \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \gamma}$$

$$S = \frac{(20)(\operatorname{sen} 70^\circ)}{\operatorname{sen} 70^\circ} \rightarrow \boxed{S = 20 \text{ N}}$$

3



**DATOS:**  
 $T_0 = 12^\circ\text{C}$   
 $z = 20 \text{ cm}$   
 $x = 30 \text{ cm}$   
 $y = 10 \text{ cm}$   
 $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$   
 $T = 389^\circ\text{K}$   
 $A = 17 \times 10^{-6} \text{ C}^{-1}$

Inicialmente  $T = 389^\circ\text{K} = 116^\circ\text{C}$

Luego  $\Delta V = V_0 3 \alpha (T - T_0)$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 3 \alpha (T - T_0) \rightarrow \frac{\Delta V}{V_0} \times 100\% = 3 \alpha (T - T_0) \times 100\%$$

$$\frac{\Delta V}{V_0} \times 100\% = (3)(17 \times 10^{-6})(116^\circ - 12^\circ) \times 100\%$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\Delta V}{V_0} \times 100\% = 0,53\%}$$

4

$$V = \pi r^2 h \rightarrow V = \pi (5)^2 (24) \rightarrow V = 1884 \text{ cm}^3$$

entonces la masa del agua es  $m = \rho V \rightarrow m = (1)(1884) \quad m = 1884 \text{ g}$

luego por regla de tres simple

$$Q = \frac{(10 \text{ cal})(1884 \text{ g})}{3 \text{ g}} \rightarrow \boxed{Q = 6,280 \times 10^3 \text{ cal}}$$

$$t = \frac{(2 \text{ s})(6286 \text{ cal})}{10 \text{ cl}} \rightarrow \boxed{t = 1,256 \times 10^3 \text{ s}}$$

**12<sup>a</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA**  
**5<sup>a</sup> Etapa, 8 de septiembre: 2<sup>o</sup> de Secundaria**

AP. Paterno	AP. Materno	Nombre(s)
Teléfono	Departamento	Colegio

Nº =

.....

Nº =

**Parte conceptual (40%)**

- a) ¿Qué es una magnitud escalar y vectorial, y como se los representa?
- b) ¿Cuáles son las unidades básicas del Sistema Internacional?
- c) ¿Cuál es la diferencia entre precisión y exactitud?
- d) ¿Qué es una unidad patrón y para que sirve?
- e) ¿Qué es frecuencia y en que unidades se mide?
- f) ¿Qué es un espejo?
- g) ¿Qué es una lente delgada?
- h) ¿Como se diferencia un fenómeno físico de un químico?
- i) ¿Cuál es la diferencia entre calor y temperatura?
- j) ¿Por qué en la Paz (que hace mas frío), el agua hierve a menor temperatura que en Santa cruz (que hace mas calor)

**Parte Práctica (60%)**

Problema 1 (10%):

- La magnitud de un vector es 34,76 newton y su dirección 54,23°. Otro vector es de 14,88 N y dirección 165,56°. Determinar analítica y cuantitativamente la magnitud y dirección del producto vectorial entre ambos vectores, luego mostrar gráficamente el resultado.

Problema 2 (20%):

- Con un vernier lineal, con sensibilidad:  $T_s = 0,01\text{mm}$  se realizan tres lecturas ( $n=3$ ), del diámetro D de una esfera en condiciones de repetibilidad. Si las lecturas son: 24,79mm; 24,71mm; 24,74mm. Determinar: a) el valor más probable del volumen de la esfera, b) la incertidumbre de la medida del volumen, c) el error porcentual respectivamente. (Volumen de la esfera:  $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$ ; r es el radio).

Problema 3 (20%):

- Sobre una esfera de vidrio de radio r, incide un haz de luz. Si el índice de refracción del medio (que rodea a la esfera) es  $\eta_o$ : Determinar el índice de refracción  $\eta$  del vidrio de la esfera, de tal manera que los rayos del haz se concentren en un punto de la segunda superficie.

Problema 4 (10%):

- Dada la ecuación:  $\psi = 2 \cdot \sin 2\pi \cdot (0,1x - 5t)$  donde x esta en metros y t en segundos, determinar: a) la longitud de onda ;b) la frecuencia, c) el periodo, d) la velocidad de propagación. Escribir la expresión para una onda que sea idéntica pero que se propague en sentido opuesto.

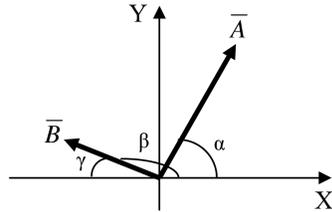
## SOLUCIONARIO 2<sup>to</sup> SECUNDARIA

### PARTE CONCEPTUAL

- a) Una magnitud es una propiedad de la materia que puede ser medida directamente con un instrumento o indirectamente a través de una fórmula.
- b) Las unidades básicas son: metro, kilogramo, segundo, ampere, grado kelvin, candela y mol.
- c) La exactitud indica el grado en que los valores experimentales ( $x_i$ ) o un valor promedio ( $\bar{x}$ ) se acerca al valor verdadero ( $x$ ).
- d) La unidad patrón es una unidad que se toma como referencia para medir.
- e) La frecuencia es el número de vueltas, o el número de vibraciones en la unidad de tiempo. En el Sistema Internacional su unidad es el Hertz.
- f) Un espejo
- g) Una lente es un cuerpo transparente limitado por superficies esféricas. Una de las caras puede ser plana.
- h) En un fenómeno físico no existe transformación en la composición de la materia mientras que en un fenómeno químico si existe transformación de la materia.
- i) El calor es una forma de energía mientras que la temperatura es una medida de la energía.
- j) Porque la presión en La Paz es menor que en Santa Cruz.

### PARTE PRACTICA

1



**DATOS:**

$$A = 34,76 \text{ N}$$

$$\alpha = 54,23^\circ$$

$$B = 14,88 \text{ N}$$

$$\beta = 165,56^\circ$$

de la figura

$$\gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 165,56^\circ = 14,44^\circ$$

luego  $\vec{A} = A \cos \alpha \hat{i} + A \operatorname{sen} \alpha \hat{j} \rightarrow \vec{A} = 20,32 \hat{i} + 28,20 \hat{j}$

$$\vec{B} = -B \cos \gamma \hat{i} + B \operatorname{sen} \gamma \hat{j} \rightarrow \vec{B} = -14,41 \hat{i} + 3,71 \hat{j}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 20,32 & 28,20 & 0 \\ -14,41 & 3,71 & 0 \end{vmatrix} = [ (20,32)(3,71) - (28,20)(-14,41) ] \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 481,7 \hat{k}$$

el vector resultante es perpendicular al plano XY.

2)  $\bar{D} = 24,75 \text{ cm}; \sigma = 0,03 \text{ cm}; \Delta D = 0,02 \text{ cm}$

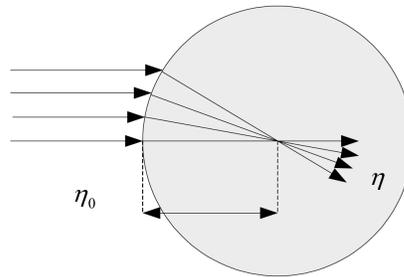
$$V = \frac{\pi}{6} D^3 \rightarrow \bar{V} = \frac{\pi}{6} (24,75 \text{ cm})^3 \rightarrow \boxed{V = 7\,935 \text{ cm}^3}$$

$$\Delta V = \left| \frac{\pi}{2} D^2 \Delta D \right| \rightarrow \Delta V = \left| \frac{\pi}{2} (24,75)^2 (0,02 \text{ cm}) \right|$$

$$\boxed{\Delta V = 19 \text{ cm}^3} ; \quad e_p = \frac{\Delta V \times 100 \%}{\bar{V}}$$

$$e_p = \frac{(19)(100 \%)}{7\,935} \rightarrow \boxed{e_p = 0,24 \%}$$

3)



Cuando  $s_0$  se hace infinito,  $s_i \equiv f_i$  y las ondas incidentes son planas observando la figura de arriba. Entonces a partir de la ecuación:

$$\frac{\eta_0}{s_0} + \frac{\eta}{s_i} = \frac{\eta - \eta_0}{r}$$

Se tiene la siguiente expresión:

$$\eta = \frac{s_i \cdot \eta_0}{s_i - r} \quad \text{o} \quad \boxed{\eta = \frac{f_i \cdot \eta_0}{f_i - r}}$$

4) La ecuación de una onda es:  $\psi = \psi_o \text{ sen} \left( \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{f} t \right)$

Comparando

a)  $\frac{2\pi}{\lambda} = 0,1 \rightarrow \frac{2\pi}{0,1} = \lambda \rightarrow \boxed{\lambda = 20\pi \text{ m}}$

b)  $\frac{2\pi}{f} = 5 \rightarrow \frac{2\pi}{5} = f \rightarrow \boxed{f = 0,4\pi \text{ Hz}}$

c)  $T = \frac{1}{f} \rightarrow T = \frac{1}{0,4\pi} \rightarrow \boxed{T = 0,8 \text{ s}}$

d)  $v = \frac{\lambda}{f} \rightarrow v = \frac{20\pi}{0,4\pi} \rightarrow \boxed{v = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$

12<sup>a</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA  
5<sup>a</sup> Etapa, 08 / Septiembre / 2007: 3<sup>o</sup> de Secundaria

AP. Paterno	AP. Materno	Nombre(s)
Teléfono	Departamento	Colegio

Nº =

Nº =

Parte conceptual (40%)

- a) ¿Qué es un sistema inercial?
- b) ¿Qué es un campo gravitatorio?
- c) En cinemática: ¿Qué es un proyectil?
- d) ¿Cuál es la diferencia entre precisión y exactitud?
- e) ¿Cuántas y cuáles son las fuerzas fundamentales de la naturaleza?
- f) ¿Qué significa medir?
- g) ¿Qué es una lente?
- h) En fluidos, la ecuación de continuidad ¿a qué principio o ley representa?
- i) ¿Qué es una unidad patrón y para que sirve?
- j) ¿Qué es frecuencia y en que unidades se mide?

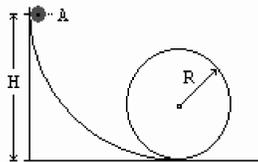
Parte Práctica (60%)

Problema 1 (15%):

- Una piedra se deja caer desde la azotea de un edificio. El sonido de la piedra al impactar con el piso se escucha 6,5 segundos más tarde. Si la velocidad del sonido es  $1120 \text{ pies} \cdot \text{s}^{-1}$ , determinar analítica y cuantitativamente la altura del edificio en metros. ( $g = 32,2 \text{ pies} \cdot \text{s}^{-2}$ )

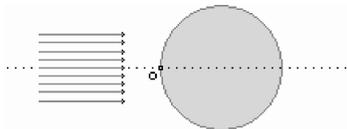
Problema 2 (15%):

- Determinar analíticamente la altura mínima  $H$ , para que una esferita de masa  $M$  que parte del reposo desde el punto A, logre completar la trayectoria circular de radio  $R$ . (Los datos son:  $M$ ,  $R$ , aceleración de la gravedad =  $g$ )



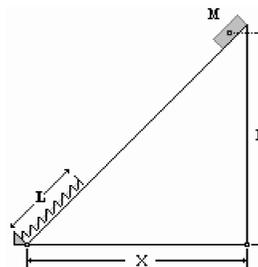
Problema 3 (15%):

- Un haz de luz atraviesa una esfera de vidrio maciza (como se muestra en la figura). ¿A qué distancia (en centímetros, respecto al punto O, sobre el eje horizontal) convergen los rayos? (El radio de la esfera es 5cm, el índice de refracción del vidrio es 1,5; del medio, es 1)



Problema 4 (15%):

- Un ladrillo de masa  $M = 800$  gramos, parte desde una altura  $H$ , y resbala sobre el plano inclinado. Si el coeficiente de rozamiento es 0,2; y logra comprimir al resorte 10 centímetros: Determinar la constante elástica del resorte (en newton/metro).  $H=160\text{cm}$   $X=30\text{cm}$   $L=25\text{cm}$  (longitud natural del resorte);  $g = 32,2 \text{ pies} \cdot \text{s}^{-2}$



SOLUCIONARIO 3<sup>ro</sup> SECUNDARIA

## PARTE CONCEPTUAL

- Un sistema se denomina inercial cuando él está en reposo o se mueve con velocidad constante.
- Se puede decir que la masa “m” produce, en el espacio que la rodea, una situación física que se denomina “campo gravitatorio”, y que se reconoce por la fuerza que “m” ejerce sobre otra masa “M”, colocada en dicha región.
- Un proyectil es un cuerpo que describe una trayectoria parabólica, al ser impulsado desde algún punto.
- La exactitud indica el grado en que los valores experimentales ( $x_i$ ) o un valor promedio ( $\bar{x}$ ) se acerca al valor verdadero ( $x$ ).
- Las fuerzas fundamentales de la naturaleza son, la gravitacional, la electromagnética, la nuclear y la débil.
- Medir es comparar dos magnitudes iguales considerando a una de ellas como patrón.
- Una lente es un cuerpo transparente limitado por superficies esféricas. Una de las caras puede ser plana.
- La ecuación de continuidad representa el principio de conservación de la masa.
- La unidad patrón es una unidad que se toma como referencia para medir.
- La frecuencia es el número de vueltas, o el número de vibraciones en la unidad de tiempo. En el Sistema Internacional su unidad es el Hertz.

## PARTE PRACTICA

1

Para la piedra

$$H = \frac{1}{2} g t_p^2$$

$$t_p = \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (1)$$

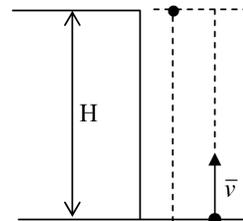
para el sonido

$$H = v_s t_s$$

$$t_s = \frac{H}{v_s} \quad (2)$$

además

$$t = t_p + t_s \quad (3)$$

**DATOS:**

$$v_s = 1120 \text{ pies/s}$$

$$t = 6,5 \text{ s}$$

$$g = 32,2 \text{ pies/s}^2$$

reemplazando (1) y (2) en (3)

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{H}{v_s}$$

reordenando

$$\frac{H^2}{v_s^2} - 2H \left( \frac{t}{v_s} + \frac{1}{g} \right) + t^2 = 0 \quad // / v_s^2$$

$$H^2 - 2 \left( v_s t + \frac{v_s^2}{g} \right) H + (t v_s)^2 = 0$$

luego

$$H^2 - 2 \left( (1120)(6,5) + \frac{(1120)^2}{32,2} \right) H + ((6,5)(1120))^2 = 0$$

$$H^2 - 92\,473 H + 52\,998\,400 = 0$$

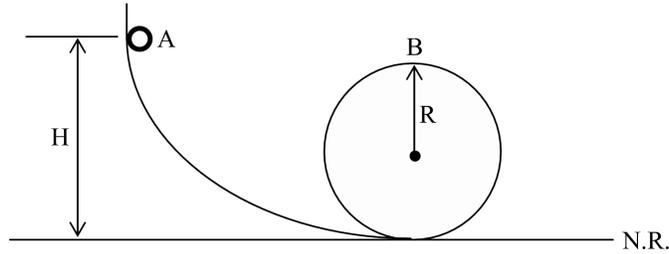
resolviendo y transformando unidades

$$H_1 = 176 \text{ m}$$

y

$$H_2 = 28\,028 \text{ m}$$

2



DATOS:  
M, R, g

Aplicando la conservación de la energía entre los puntos A y B

$$M g H = \frac{1}{2} M v_B^2 + M g 2 R$$

$$2 g H = v_B^2 + 4 g R \quad (1)$$

Aplicando dinámica circular en el punto B y considerando que la normal en ese punto es aproximadamente cero,

$$M g = M \frac{v_B^2}{R}$$

entonces

$$v_B^2 = g R \quad (2)$$



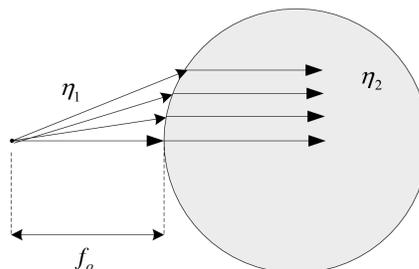
reemplazando (2) en (1)

$$2 g H = g R + 4 g R$$

$$2 H = 5 R \quad \rightarrow \quad \boxed{H = \frac{5 R}{2}}$$

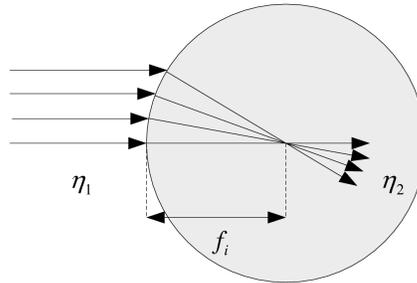
3 Usando la ecuación de lentes esféricas en función de los índices de refracción se tiene:

$$\frac{\eta_1}{s_o} + \frac{\eta_2}{s_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{R} \quad (1)$$



Al observar la anterior figura hay una distancia objeto especial  $s_o \equiv f_o$ , conocida como la distancia focal objeto, para la cual  $s_i = \infty$  y las ondas en el medio trasmisente son planas. Por sustitución directa en (1) se obtiene como resultado

$$f_o = \frac{\eta_1}{\eta_2 - \eta_1} R \quad (2)$$



Análogamente, cuando  $s_o$  se hace infinito,  $s_i \equiv f_i$  y las ondas incidentes son planas observando la figura de arriba. La distancia focal imagen está dada entonces por

$$f_i = \frac{\eta_2}{\eta_2 - \eta_1} R \quad (3)$$

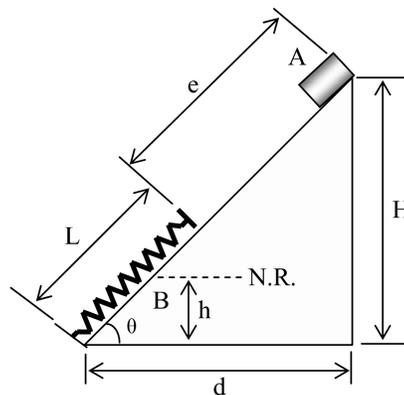
Como la luz entra desde la izquierda; en consecuencia se tiene usando las ecuaciones (2) y (3):

$$f_o = \frac{1}{1,5-1}(5) = 10\text{cm}$$

y

$$f_i = \frac{1,5}{1,5-1}(5) = 15\text{cm}$$

4

**DATOS:**

$M = 0,800 \text{ kg}$

$\mu = 0,2$

$x = 10 \text{ cm}$

$H = 1,60 \text{ m}$

$d = 0,30 \text{ m}$

$L = 0,25 \text{ m}$

Aplicando balance de energía para los puntos A y B

$$M g H = \frac{1}{2} k x^2 + f_r (L - x + e)$$

$$2 M g H = k x^2 + (2 \mu M g \cos \theta) (L - x + e)$$

despejando k 
$$k = \frac{2 M g (H - \mu \cos \theta (L - x + e))}{x^2} \quad (1)$$

además

$$\text{tg } \theta = \frac{H}{d} = \frac{1,60}{0,30} \quad \rightarrow \quad \theta = 79,4^\circ$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{H}{L + e} \quad \rightarrow \quad e = \frac{H}{\operatorname{sen} \theta} - L \quad \rightarrow \quad e = 1,37 \text{ m}$$

luego  $k = \frac{(2)(0,800)(9,8)(1,60 - (0,2)(\cos 79,4^\circ)(0,25 - 0,10 + 1,37))}{0,10^2}$

$k = 2\,421 \text{ N/m}$
--------------------------

## Solución: Parte Experimental Tercero de Secundaria

### Objetivos

- Determinar la densidad de un cuerpo aplicando la ley de Hook y el principio de Arquímedes.

### Teoría

#### La ley de Hooke.

Bajo la acción de una fuerza externa, un cuerpo puede sufrir estiramiento, compresión, torsión doblamiento y, en general, una deformación elástica. Algunos objetos elásticos como un resorte helicoidal pueden dentro de ciertos límites, estirarse o comprimirse en una cantidad  $\Delta L$  que resulte proporcional a la fuerza deformante  $F$

$$F = -k\Delta L$$

En tal caso se dice que el resorte obedece a la ley de Hooke. La constante de proporcionalidad  $k$  recibe el nombre de constante elástica del resorte.

El dinamómetro es un instrumento basado en la ley de Hooke.

#### Principio de Arquímedes

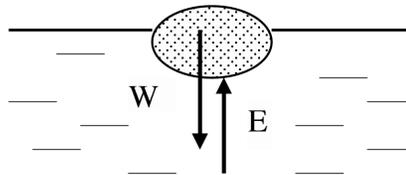


Figura 1

Un cuerpo parcial o totalmente sumergido en un líquido de densidad  $\rho_L$ , experimenta una fuerza de empuje  $E$  hacia arriba igual al peso del fluido desalojado  $W'$ :

$$E = W' = m' g = \rho_L V' g ,$$

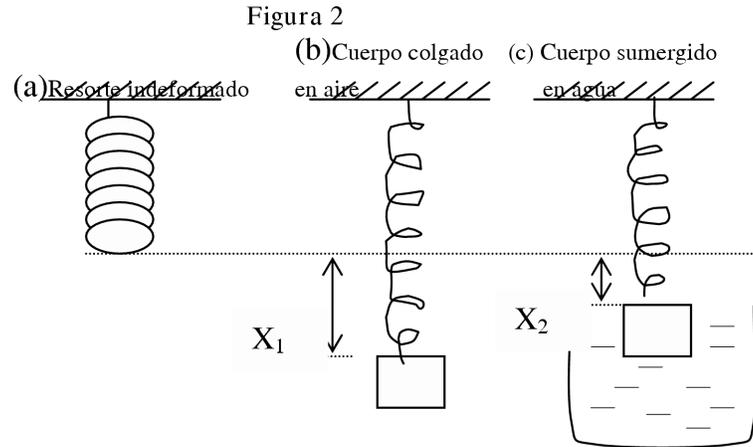
además el volumen de fluido desalojado  $V'$  es igual al volumen del sólido sumergido  $V_s$ , entonces la fuerza de empuje es:

$$(1) \quad E = \rho_L g V_s$$

Para determinar la densidad de un sólido se puede aplicar estos dos principios y construir una balanza llamada la Balanza de Jolly:

#### *Balanza de Jolly*

Consta de un resorte de longitud natural  $L_0$  y constante elástica  $k$  (figura 2a). Este resorte se cuelga verticalmente de un soporte y en su extremo libre se acopla un cuerpo de peso  $W$ , produciéndose una elongación  $x_1$  (figura 2b). A continuación, el cuerpo se sumerge completamente en un líquido por ejemplo agua, lográndose una nueva elongación  $x_2$  (figura 2c), menor a la primera debido a que el agua empuja al cuerpo hacia arriba.



Para el caso en que el cuerpo se halla solo en el aire (b) las fuerzas presentes son dos, el peso del bloque  $W$ , y la fuerza recuperadora del resorte,  $F_R = kx_1$ . Ya que el sistema está en equilibrio la sumatoria de fuerzas es cero:

$$(2) \quad \begin{aligned} W &= F_R \\ W &= kx_1 \end{aligned}$$

En el caso (c) cuando el bloque está totalmente sumergido en agua, actúan tres fuerzas: el peso del bloque  $W$ , la fuerza recuperadora del resorte  $F'_R = kx_2$ , y el empuje  $E$  del fluido. De nuevo el sistema está en equilibrio y el balance de fuerzas es:

$$(3) \quad \begin{aligned} W &= F'_R + E \\ W &= kx_2 + E \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) en (3) y despejando el empuje  $E$ :

$$(4) \quad E = k(x_1 - x_2)$$

Por el principio de Arquímedes,  $E = \rho_L g V_S$ , entonces la ecuación (4) resulta:

$$(5) \quad \rho_L g V_S = k(x_1 - x_2)$$

donde  $V_S$  es igual al volumen total del cuerpo  $V_C$  porque está completamente sumergido en el líquido; además de la ecuación de densidad  $V_C = m_C / \rho_C$ , sustituyendo estas consideraciones en la ecuación (5).

$$(6) \quad \rho_L g \frac{m_C}{\rho_C} = k(x_1 - x_2)$$

con  $m_C g = W$ , y tomando en cuenta la ecuación (1)

$$\frac{\rho_L}{\rho_C} kx_1 = k(x_1 - x_2)$$

despejando  $\rho_C$

$$(7) \quad \rho_C = \left( \frac{x_1}{x_1 - x_2} \right) \rho_L$$

Ecuación que permite calcular la densidad  $\rho_C$  del cuerpo sólido en función de las elongaciones  $x_1$  en aire y  $x_2$  en agua, además de la densidad del líquido  $\rho_L$ . Nótese lo útil del método sobre todo cuando se trata de cuerpos irregulares cuyo volumen es difícil de calcular.

### Materiales

- Resorte
- Recipiente con agua
- Soporte para colgar el resorte
- Regla
- Cuerpo del que se quiere determinar la densidad

### Procedimiento Experimental

1. Montar el experimento como en la figura 2.
2. Colgar el resorte del soporte.
3. Cuelgue el cuerpo del resorte y mida la elongación  $x_1$ .
4. Sumerja el cuerpo en el recipiente con agua y mida la nueva elongación  $x_2$ .
5. Repita los pasos 3 y 4 por lo menos 3 veces.

### Hoja de datos

Nº	Elongacion $x_1$	Elongación $x_2$
1	12.30	7.60
2	12.25	7.55
3	12.10	7.75
Promedio	12.22	7.63
$\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	0.05	0.05

Las elongaciones son:

$$X_1 = (12.22 \pm 0.05) [\text{cm}]$$

$$X_2 = (7.63 \pm 0.05) [\text{cm}]$$

Reemplazando estos datos y el valor de la densidad del agua igual a  $1.00 \text{ g/cm}^3$  en la ecuación (7) calculamos el valor de la densidad del cuerpo, cuyo error se obtiene de realizar la propagación de errores de la ecuación 7:

$$\Delta\rho_C = \frac{x_2}{(x_1 - x_2)^2} \rho_L \Delta x_1 + \frac{x_1}{(x_1 - x_2)^2} \rho_L \Delta x_2$$

Reemplazando datos se tiene  $\rho_C = (2.66 \pm 0.05) \left[ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right]$

# ENSEÑANZA DE LA FÍSICA MEDIANTE EL USO DE JUGUETES<sup>1</sup>

Ximena Canedo<sup>2</sup>

*Universidad Tecnológica Privada de Santa Cruz (UTEPSA)  
Santa Cruz de la Sierra—Bolivia*

## RESUMEN

La necesidad de crear nuevos métodos y medios de enseñanza que permitan motivar al estudiante de la Universidad Tecnológica Privada de Santa Cruz para que los saberes impartidos sean apropiados por el estudiante de manera continua, progresiva y permanente.

La utilización de juguetes por su flexibilidad, sencillez de uso y bajos costos, posibilidades inéditas de promover el proceso de enseñanza/aprendizaje. Es notable por motivar a los estudiantes al aprendizaje de los principios físicos sobre los que se apoya y lograr una mayor comunicación horizontal en y entre grupos de estudiantes.

El uso de los juguetes permite estrechar la brecha entre los saberes previos y la nueva información que se brinda en la materia permitiendo alcanzar la zona de desarrollo próximo y lograr que los saberes adquiridos sean significativos.

*Descriptores: Enseñanza de la Física, Complementos Educativos,  
Física de los Juguetes.*

## 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La enseñanza de la Física se cifra en la capacidad para conocer el mundo que nos rodea y sus fenómenos.

Es muy importante y necesario un orden de los hechos y una estructura para los mismos. Por ello el docente debe presentar una estructuración clara de las relaciones entre conceptos, los procedimientos y la progresión entre las actitudes para favorecer el aprendizaje significativo.

Para que las relaciones anteriores se establezcan se debe saber cuáles son los conocimientos que posee ya el estudiante, quién por último modifica y reelabora sus esquemas de conocimiento construyendo su propio aprendizaje.

Es esta la razón por la que el docente debe actuar como guía y mediador.

El proceso de enseñanza ha de garantizar la funcionalidad de los aprendizajes. El estudiante no sólo debe ser capaz de aplicar lo aprendido en situaciones reales sino ser capaz de aprender a aprender. Hay que reforzar tanto los aspectos prácticos, para que el estudiante pueda familiarizarse con el mundo laboral, como el rigor del lenguaje usado en las conclusiones y reflexiones. El docente debe ajustar la ayuda pedagógica a las diferentes necesidades del estudiantado y facilitar recursos y estrategias variadas que permitan dar repuesta a las diversas motivaciones, intereses y capacidades que presenten los estudiantes.

## 2. PROPUESTA DE SOLUCIÓN

La Universidad Tecnológica Privada de Santa Cruz exige de sus docentes utilización y creación de métodos y medios que permitan que los saberes impartidos sean apropiados por el estudiante de manera continua, progresiva y permanente.

Si bien los métodos de enseñanza son solo una parte del proceso de Enseñanza- Aprendizaje, junto con los medios, son los que con mayor facilidad se pueden variar y los que definirán el grado de apropiación del conocimiento que tendrá el estudiante.

Es de vital importancia el diseño de materiales y medios didácticos, para poner en práctica acciones formativas de largo alcance. Los juguetes ofrecen, por su flexibilidad, sencillez de uso y bajos costos, posibilidades inéditas de promover mayor comunicación horizontal en y entre grupos de estudiantes.

Se piensa que los juguetes son cosas graciosas, poco complicadas y un tema poco profundo. Por lo tanto, los juguetes no exigen el mismo grado de seriedad que una práctica de laboratorio, permitiendo la distensión del estudiante y facilitando romper con los preconceptos que indican que la física es árida, aburrida y difícil.

No se necesita tener conocimientos previos para utilizar juguetes, siempre son simples y amigables en relación al usuario. Después de todo, los estudiantes son especialistas en juegos y juguetes.

La relevancia de los juguetes en el proceso de enseñanza/ aprendizaje es notable por motivar a los estudiantes al aprendizaje los principios físicos sobre los que se apoya.

La utilización de juguetes como medio didáctico presenta los siguientes aspectos:

<sup>1</sup>Trabajo de grado para optar al Diplomado en Educación Superior en la Universidad Tecnológica Privada de Santa Cruz, UTEPSA.

<sup>2</sup>Email: xcanedo@utepsa.edu

Los juguetes resultan motivadores porque el estudiante que lleva la materia de Física General todavía lo es, puede desarmar el juguete bajo el título de experimentación sin perder su nivel de adulto; sensibilizan al estudiante para interactuar con un elemento que no se relaciona (aparentemente) con la materia y que lo devuelve a la época donde se sentía protegido y jugar era lo único importante; estimulan el interés del estudiante hacia un tema determinado por tener la madurez suficiente para poder entender el funcionamiento del juguete en base a los principios abstractos de la materia.

Facilitan la enseñanza, complementando las explicaciones verbales con contenidos icónicos concretos de fácil comprensión que contribuyen a la fijación de los contenidos.

Se puede realizar la explicación del concepto interactuando con el juguete, siendo posibles desde representaciones reales y gráficas exageradas, hasta variaciones impensables con equipo de laboratorio. También pueden presentar abstracciones de forma gráfica.

Exigen un procesamiento global de la información que contienen, como posición y desplazamiento, produciendo un impacto emotivo que genere sentimientos y actitudes que colaboran a alcanzar fácilmente la zona del desarrollo próximo.

Facilitan las comparaciones entre distintos juguetes y permiten analizar con detalle las distintas fases de los procesos complejos.

Permiten analizar el pasado de manera real (bolitas, hondas) o ver realidades poco accesibles habitualmente (carros grúa, locomotoras).

Pueden simplificar o sintetizar realidades complejas (movimiento de extremidades del cuerpo, movimiento de un automóvil).

Pueden utilizarse como instrumento para la evaluación, colocando al estudiante en la posibilidad de describir en detalle cada particularidad del juguete de manera de evaluar el grado de apropiación de los conocimientos impartidos, fuente de diálogo al analizar las

infinitas posibilidades de representación del fenómeno que enriquecen tanto al juguete como la comprensión del concepto y medio de recreación al utilizar al juguete como juguete. Facilita la realización de tareas y el desarrollo de ciertas habilidades dependiendo del contenido que se pretende comunicar, las características de los propios sujetos que trabajaran con los juguetes, el tipo de tarea que se habrá de realizar con ellos, e incluso la experiencia previa de los sujetos en relación con estas formas peculiares de representación.

Como ejemplo se propone el diseño, elaboración y ejecución de una clase para explicar el Teorema del Trabajo y la Energía utilizando el método de casos y juguetes como medios de enseñanza.

### 3. CONCLUSIONES

El uso de los juguetes permite estrechar la brecha entre los saberes previos y la nueva información que se brinda en la materia permitiendo alcanzar la zona de desarrollo próximo y lograr que los saberes adquiridos sean significativos. Este hecho se comprobó con el comportamiento de estudiantes de Física General en la materia consecutiva. Al tocar el tema energético responderán de manera apropiada en comparación con los estudiantes con los que no se utilizó este método.

Otra ventaja de este medio es la permanencia del deseo de investigar. Al parecer piensan que no se puede fallar investigando un juguete y la natural curiosidad lleva a los estudiantes a tratar con otro juguete para luego pasar a diseñar uno propio o a investigar en objetos "serios".

Como los juguetes son medios cordiales y no invasivos para el estudiante, se permite olvidar los preconceptos sobre la aridez y dificultad de la Física. El uso de juguetes como medio le abre la puerta para aprender a aprender al haberse quitado el miedo a investigar, sea por comprobación de teorías o descubrimiento de nuevas, proyectando esta nueva capacidad en su vida diaria, no sólo estudiantil.

---

# REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

## COMITÉ EDITORIAL

### Sociedad Boliviana de Física

**Dr. Diego Sanjinés Castedo**

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: sanjines@fiumsa.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax:(591-2)2792622

### Instituto de Investigaciones Físicas

**Lic. Alfonso Velarde Chávez**

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: avelarde@fiumsa.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax:(591-2)2792622

### Carrera de Física

**Lic. Deterlino Urzagasti**

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: urza@fiumsa.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax:(591-2)2792622

---

### Objetivos

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

La RBF publica artículos, revisiones y colaboraciones en lengua castellana. Se reciben también artículos escritos en inglés, los que son traducidos al castellano por los editores para su publicación.

### Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

### Instrucciones para los autores

Las colaboraciones enviadas para su publicación deberán estar escritas preferentemente en castellano. Trabajos escritos en inglés podrán ser aceptados por el Comité Editorial y, pasado el proceso de aceptación serán traducidos al castellano para su publicación en la RBF.

Los autores deberán enviar su contribución preferentemente en formato LATEX. Para ello necesitarán el formato de la RBF especificado en los archivos *rbfi.cls* y *rbfi.tex*, los cuales, podrán serles enviados por correo electrónico o podrán ser obtenidos de la página de *internet* de la Carrera de Física de la U.M.S.A. ([www.umsanet.edu.bo/fisica/](http://www.umsanet.edu.bo/fisica/)). En caso contrario, los autores podrán enviar su contribución en formato de texto (extensión *.txt*) ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. En cualquier caso, las figuras deberán ser enviadas preferentemente en formato *postscript* (extensiones *.ps* o *.eps*), o en su defecto en el formato con la extensión *.jpg*.

Las contribuciones, o cualquier consulta sobre la RBF, deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.