

ISSN - 1562 - 3823

REVISTA BOLIVIANA DE FISICA

NUMERO 15

OCTUBRE 2009 • LA PAZ - BOLIVIA

**1ª OLIMPIADA ANDINA DE
ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA**
19 al 23 de Junio de 2009

1ª OAAA
Lago Titikaka, La Paz, Bolivia



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FISICAS
CARRERA DE FISICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FISICA

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA
Ésta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física	Instituto de Investigaciones Físicas	Carrera de Física
Dr. Diego Sanjinés Castedo Email: sanjines@fiumsa.edu.bo	Lic. Alfonso Velarde Chávez Email: avelarde@fiumsa.edu.bo Dr. Eduardo Palenque Vidaurre Email: edyruy@latinmail.com	Lic. Deterlino Urzagasti Email: urza@fiumsa.edu.bo
Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622		

CONSEJO EDITORIAL

Dr. Oscar Antonio Rondón Institute of Nuclear and Particle Physics University of Virginia McCormick Road, Charlottesville, VA 22901 804 924-6787, USA Email: or@virginia.edu	Dr. Carlos Navia Instituto de Física Universidade Federal Fluminense Av. Gen. Milton Tavares de Souza 24210-340, Niterói, RJ-Brasil Email: gfcnoj@portela.if.uff.br
Dr. Juan C. Muzzio Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas Universidad Nacional de La Plata La Plata-Argentina Email: jmuzzio@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar	Dr. Renán Cabrera Physics Department University of Windsor Ontario-Canada Email: rcabrera@princeton.edu
Dr. Oscar Saavedra Dipartimento di Fisica Generale Universita di Torino, Italia Email: saavedra@to.infn.it	Dr. Piero Galeotti Dipartimento di Fisica Generale Universita di Torino, Italia Email: galeotti@to.infn.it
Dr. Jason Gallas Instituto de Física Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil Email: jgallas@if.ufrgs.br	Dr. Paulo Murilo Castro de Oliveira Instituto de Fisica Universidade Federal Fluminense C.P. 1002966, Niterói, RJ-Brasil Email: pmco@regulus.if.uff.br

ISSN 1562-3823



Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
Y
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 15
OCTUBRE DE 2009

Revista Boliviana de Física

ISSN 1562-3823

Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica

<http://biblioweb.dgsca.unam.mx/latindex>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

Diseño: D. Urzagasti.

Dirección: Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.

Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

Portada: Logotipo de la 1^{ra} Olimpiada Andina de Astronomía y Astrofísica que se llevó a cabo del 19 al 23 de Junio en el lago Titikaka, La Paz, Bolivia; diseñado por Noemí Mendoza (Aula Virtual - FCPN), idea de Roy Bustos.

Formato \LaTeX 2 ϵ . *Tipo de fuente utilizada:* mathptmx

IMPRESO EN BOLIVIA — PRINTED IN BOLIVIA

SEMBLANZA DE UN VISIONARIO:

EL MUNDO CIENTÍFICO TIENE UN LABORATORIO DE ALTURA GRACIAS AL ESFUERZO DE ISMAEL ESCÓBAR

POR W. TAVERA¹

Intenté encontrar, sin éxito, alguna relación biográfica del Dr. Ismael Escóbar Vallejo, fundador del Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya, entre las descoloridas páginas de los archivos del Instituto de Investigaciones Físicas de la UMSA. Sin embargo, estos vetustos y polvorientos compendios históricos del manejo administrativo de un laboratorio científico emergente en la década de los 40, pujante en la década de los 50 y consolidado en la década de los 60, permiten esbozar someramente, una semblanza de la personalidad del Dr. Escóbar. Al ver, no sin una gran admiración, la nutrida correspondencia que se generó en aquella época, unas veces mecanografiada y otras a mano, a veces dirigida a un ministro o al rector de la universidad y otras al funcionario, unas veces expresando ideas y otros proyectos concretos, muchísimas notas dirigidas a científicos de otros países, muchas solicitudes de apoyo y materiales, artículos publicados, etc., uno se imagina al hombre como alguien que desplegó un esfuerzo extraordinario para poner a funcionar un laboratorio científico en Bolivia, en una época donde los problemas de toda índole, y principalmente los de comunicación y de orden político, eran considerables.

Entrevisté al Prof. Oscar Saavedra², quien conoció a Ismael Escóbar a principios de los sesenta, buscando datos que permitan labrar, cual escultura de un personaje admirable, los rasgos y figura del que tuvo la inspiración de ofrecer, y ante todo, con la colaboración de personalidades como Lattes y Occhialini, convencer al mundo científico sobre la posibilidad de realizar investigación de primer nivel en física de Rayos Cósmicos en los años difíciles de la post-guerra. La primera impresión que tuve de Ismael Escóbar —comenta Saavedra— fue la de una persona con un carácter fuerte y muy seguro de sí mismo. Su trabajo era verdaderamente impresionante, continúa Saavedra, ponía mucha pasión en la dirección del Laboratorio y no importaba si estaba en una reunión académica formal o si era momento de tomar las herramientas para realizar personalmente alguna labor requerida. Saavedra describe al científico español como un hombre de acción, en el sentido de que si él tomaba la decisión de hacer algo, no había nada que lo impidiera hacerlo.

Recurrí a la *web* con el mismo propósito de indagar sobre nuevos aspectos biográficos del Dr. Ismael Escóbar, y con mucho pesar encontré un reporte del *Civista Medical Center* publicado en el “washingtonpost.com”³ comunicando el deceso por complicaciones en el corazón de Ismael Escóbar Vallejo de 90 años de edad, en fecha 20 de abril de 2009. Profundo pesar por esta gran pérdida, pero pesar aún porque como comunidad científica boliviana siento que hemos perdido en algún momento de nuestra historia, el vínculo sólido que moldea la gratitud con este “héroe de la ciencia en Bolivia”. Irónicamente, al buscar información sobre la vida del Dr. Escóbar, encontré información sobre su muerte, y solamente a raíz de esta ingrata noticia me fue posible conocer que él nació el 17 de junio de 1918 en Villa Frades de Campos, Valladolid, allá en la lejana España. Sus Padres fueron Don Isaac Escobar y Doña Ana Vallejo; su esposa la Sra. Rosario Pérez del Castillo Crosby con quien se casó en enero de 1946; sus hijos Ana María, Elizabeth y Richard.

Ismael Escóbar se graduó con honores como profesor del Instituto de Enseñanza de Peñaflores en San Sebastián, Guipuzcua en España. Asumió su primer trabajo como educador en julio de 1937 en la Colonia Nules en Castellón

¹El Dr. Wilfredo Tavera es actualmente Director del Instituto de Investigaciones Físicas de la UMSA. Email: witavera@fiumsa.edu.bo.

²El Dr. Oscar Saavedra, fue Director del Laboratorio de Física Cósmica en el periodo 1966 – 1968.

³<http://www.washingtonpost.com/AR2009050103655.html>.

de la Plana, España. Posteriormente, ganó una beca para estudiar en la Escuela de la Fuerza Aérea Republicana de Radio y Meteorología donde se graduó con honores en julio de 1938 e inmediatamente comenzó a trabajar para la Fuerza Aérea en Barcelona, Cataluña. Cuando Barcelona fue tomada por las fuerzas armadas de Francisco Franco, Escóbar fue capturado y deportado a un campo de concentración cerca de Marsella, de donde consigue escapar en un buque de carga hacia el Mar Caribe.

Busqué entre la bibliografía disponible otras facetas de la vida de Ismael Escóbar y encontré el libro de Carlos Aguirre⁴ como una referencia importante del quehacer científico en Bolivia. Al describir la historia del Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya, Aguirre se remonta a finales de la guerra civil española durante la cual el Dr. Ismael Escóbar trabajaba para el servicio meteorológico de la Fuerza Aérea de España. A inicios de 1939, Escóbar llega a Francia como refugiado y, un poco antes de la caída de París, consigue tomar un barco que lo desembarcaría en Santo Domingo. Durante su corta estadía en República Dominicana, donde trabajó como representante de ventas de la revista Plus Ultra y posteriormente como su escritor y director, Escóbar conoce a un grupo de meteorólogos mexicanos que se dirigen a Bolivia para realizar estudios climatológicos a grandes alturas. En julio de 1941, Escóbar llega a Bolivia y comienza a trabajar como meteorólogo a partir de enero de 1942. Su trabajo inicial consistió en montar y operar una red de estaciones para apoyar los trabajos del Ministerio de Agricultura. Fue jefe de sector en el Comité Fiscal de Fomento Agrícola y Regadío, ideó la creación del Servicio Meteorológico Boliviano del cual fue su Director General. Entre 1942 y 1943 se instalaron en Chacaltaya dos estaciones de la red meteorológica. A partir de entonces se inician observaciones con importantes aportes al conocimiento de la climatología local. El 19 de junio de 1943, la UMSA designa a Escóbar como Profesor Interino de la Escuela de Ayudantes Técnicos en la materia de Cosmografía y Meteorología y más tarde, mediante examen de oposición, se lo designa como Catedrático de Complementos de Física en el primer curso y de Cosmografía y Meteorología en el segundo, del Instituto de Ciencias Exactas.

Corría el año 1946 cuando Occhialini y Lattes, del grupo de Cecil Powell de Bristol, deciden llevar un nuevo tipo de emulsiones nucleares a sitios de gran altura y “descubren” la estación meteorológica de Chacaltaya entre los mapas del Departamento de Geografía de la Universidad de Bristol. Ese mismo año, llega Lattes a Bolivia y con la colaboración decidida de Escóbar, expone las emulsiones nucleares en Chacaltaya cuyos resultados darían posteriormente la evidencia del mesón π y su decaimiento en mesón μ . A principios de 1949, Escóbar presenta al Rector de la UMSA la propuesta para la creación en Chacaltaya del Laboratorio de Física Cósmica, la misma que fue aprobada oficialmente en 1951, autorizando su funcionamiento desde enero de 1952. Escóbar fue su Director hasta 1963.

En 1950, Escóbar obtuvo una beca de la *John Simon Guggenheim Foundation* para realizar estudios de doctorado en el MIT junto al Profesor Bruno Rossi. A su retorno, con la colaboración de la gente del MIT se instalan varios experimentos en Chacaltaya. Bajo las gestiones de Ismael Escóbar se establecen acuerdos de colaboración científica con otros países, entre las que destacan las colaboraciones Brasil–Bolivia, Bolivia–USA, Bolivia–Italia y Bolivia–Japón. Producto de estas colaboraciones se realiza una mejora sustancial en las instalaciones de Chacaltaya y se ponen en marcha varios proyectos de primera línea en la investigación de la Física de Rayos Cósmicos. En 1963, Ismael Escóbar fue condecorado con el “Cóndor de los Andes” por el gobierno Boliviano por su contribución al desarrollo del País y la creación de uno de los laboratorios de gran altura más famosos en el mundo.

En octubre de 1963, Escóbar asume una importante posición en el Departamento de Ciencia, Educación y Tecnología del Banco Interamericano de Desarrollo (BID), donde trabajó hasta su jubilación en 1983. Sin duda, el trabajo pionero de Ismael Escóbar representa un ejemplo de lucha por el desarrollo de la ciencia en Bolivia, y su legado, un incentivo para seguir construyendo el futuro.

⁴“Medio Siglo de Ciencia en Bolivia”, Carlos Aguirre B., Ed. Fundación Universal Simón I. Patiño, 1996. El Dr. Carlos Aguirre, fue Director del Instituto de Investigaciones Físicas de 1973 a 1978.

CONTENIDO

A. ARTÍCULOS

SOBRE UN TIPO DE EFECTO RETICULAR DURANTE LA PROPAGACIÓN LIBRE DE UN ELECTRÓN DE BLOCH	<i>Diego Sanjinés C.</i>	1
EL POTENCIAL EÓLICO DE LAS JUNTAS	<i>R. Torrez S., F. Ghezzi & E. Palenque</i>	9
ESTUDIO DE LA CORRELACIÓN FOTÓNICA EN LA CAVIDAD RADIANTE UTILIZANDO LA MECÁNICA ESTADÍSTICA NO EXTENSIVA	<i>M. J. Andrade & M. A. Viscarra</i>	14

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

CRISIS DEL OZONO Y CRISIS CLIMÁTICA: SIMILITUDES Y DIFERENCIAS	<i>Francesco Zaratti</i>	19
HALOS DE CONTAMINACIÓN EN LA SUB-CUENCA DEL RÍO ANTEQUERA (PAZÑA – DEPARTAMENTO DE ORURO)	<i>E. Ricaldi</i>	22
PROYECTO LAGO BOLIVIA	<i>A. Velarde et al.</i>	32
MODELADO DE SOMBREROS	<i>R. Forno</i>	39
UN MODELO DINÁMICO PARA EL CAMPO GEOMAGNÉTICO	<i>M. Calcina</i>	44

C. MEMORIAS DE LA REUNIÓN ANUAL DE LA SOBOFI U OTRAS REUNIONES DE FÍSICA

XX REUNIÓN NACIONAL DE LA SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA	<i>SOBOFI</i>	63
--	---------------	----

D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

1 ^{RA} OLIMPIADA ANDINA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA	<i>R. Bustos et al.</i>	67
13 ^{RA} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA, 3 ^{RA} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA	<i>R. Bustos et al.</i>	73

SOBRE UN TIPO DE EFECTO RETICULAR DURANTE LA PROPAGACIÓN
LIBRE DE UN ELECTRÓN DE BLOCH

A LATTICE EFFECT PRODUCED DURING THE FREE PROPAGATION OF A BLOCH ELECTRON

DIEGO SANJINÉS C.†

Universidad Mayor de San Andrés, Carrera de Física
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz–Bolivia

RESUMEN

Se investiga una de las formas cómo podría manifestarse físicamente la estructura de red periódica en la propagación unidimensional de un electrón de Bloch. Los efectos dinámicos de esta propagación en presencia de ciertos potenciales externos son conocidos: la oscilación de Bloch en presencia de un potencial lineal y localización dinámica en presencia de potenciales armónicos. En ausencia de un potencial externo (propagación “libre”), la teoría semiclásica y la teoría cuántica predicen una velocidad constante de propagación, lo que se verifica en la simulación numérica de la ecuación de Schrödinger. En este caso se puede apreciar que el paquete de ondas gaussiano que simula al electrón en el instante inicial, evoluciona deformándose como una gaussiana asimétrica; si bien el centro de masa (centroide) del paquete se propaga con velocidad constante, el valor máximo del paquete se propaga con una velocidad constante mayor, por lo que se puede concluir que el centro efectivo de interacción eléctrica del paquete se “adelanta” al centro de masa. Se propone un escenario experimental en el que una consecuencia física interesante (y eventualmente medible) de dicho “adelanto” se manifiesta en un cristal ideal en 2D.

Descriptor: teoría de transporte electrónico — fenómenos de conductividad — transporte por “hopping”

Código(s) PACS: 72.10.Bg, 72.20.-i, 72.20.Ee

ABSTRACT

A study is carried out of an effect due to the structure of the lattice in the propagation of a one-dimensional Bloch electron. The dynamics of this propagation in the presence of certain external potentials are well known: the Bloch oscillation in the presence of a lineal potential and the dynamic localization in the presence of harmonic potentials. In the absence of an external potential (free propagation), both the semi classic theory and the quantum theory predict a constant propagation velocity which is verified by numerical simulations of the Schrödinger equation. In this case, the Gaussian wavepacket that simulates the electron in its initial state, evolves itself into an asymmetrical gaussian maintaining the centre of mass at a constant velocity. However the wavepackets peak propagates with greater velocity, indicating that the center of mass lags behind the effective center of the electrical interaction. We propose an experimental scenario in which an interesting physical consequence of such a lag would manifest itself in an ideal 2D crystal.

Subject headings: electronic transport theory — conductivity phenomena — “hopping” transport

1. INTRODUCCIÓN

La evolución de un paquete de ondas cuántico que representa a un electrón moviéndose en presencia de la estructura periódica de la red en una dimensión (1D) se estudia usualmente a través de la correspondiente ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$H\Psi = i\hbar\partial_t\Psi \quad (1)$$

con un hamiltoniano de enlace fuerte o *tight-binding* (ver, por ejemplo, Ashcroft and Mermin 1976, cap. 10) dado por $H(\hat{p}, \hat{x}) = -2A \cos a\hat{p} + V(\hat{x})$, donde: $V(\hat{x}) = V(x)$ es un potencial arbitrario externo que no es intrínseco a la red, A es una integral de solapamiento entre sitios reticulares vecinos (o elemento de *hopping*, Madelung 1978) y $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$. Este será pues el modelo físico al que nos referiremos como “electrón de Bloch”; el fenómeno de la oscilación de Bloch se verifica cuando el potencial externo corresponde a un campo eléctrico externo estático y homogéneo, i.e., $V(x) \propto x$ (la referencia histórica canónica es Bloch 1928)¹.

La solución de la ecuación de Schrödinger (1), la función de onda Ψ , se puede representar en la base de funciones de Wannier Φ (definida en la red 1D) como

$$\Psi(x, t) = \sum_n C_n(t)\Phi(x - na) \quad (2)$$

donde las $\Phi(x - na)$ están fuertemente centradas en torno al sitio n (con n entero) de una red de Bravais con constante de red a que representa geoméricamente al cristal en 1D. Los coeficientes $C_n(t)$ indican de manera efectiva cuál es la dinámica del paquete de ondas a medida que se propaga por el cristal, pues la densidad de probabilidad cuántica $|\Psi|^2$ está representada por $|C_n|^2$. La ecuación iterativa de evolución temporal para $C_n(t)$ que resulta de sustituir (2) en la ecuación de Schrödinger y discretizar al tiempo como $t = p\Delta t$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) es

$$C_n^{p+1} = \sum_m C_m^p \exp[-i\lambda(1 + \lambda\partial_t)(V_n^p + V_m^p)]F_{m-n} + O(\lambda^3), \quad (3)$$

†Email: sanjines@fumsa.edu.bo.

¹ Una introducción pedagógica a la dinámica de las oscilaciones de Bloch en 1D se da en Hartmann et al. (2004), cuya lista de referencias constituye además

una excelente fuente de información actualizada que resume el trabajo de otros investigadores y provee una visión global de estos temas de investigación.

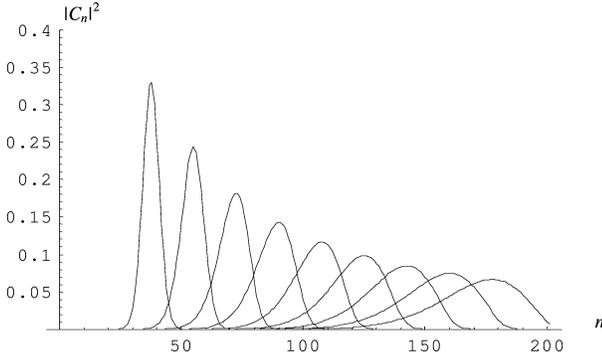


FIG. 1.— Secuencia evolutiva de densidades de probabilidad $|C_n|^2$ para una velocidad inicial $v(0) \propto \sin k$ con $k = 1$. Los perfiles de dicha densidad corresponden (de izquierda a derecha) a los instantes adimensionales $\tau = 0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160$.

donde $\lambda \equiv \Delta t/2$, $\partial_t V_m^p \equiv \partial_t V(x = ma, t = p\Delta t)$ y

$$F_m = \frac{1}{v^*} \int_{1-ZB} dk e^{-ikma} e^{-2i\lambda T(k)}. \quad (4)$$

En (4) $T(k)$ es la energía cinética de enlace fuerte dada por $T(k) = -2A \cos(ka)$; la integral sobre k se efectúa en la primera zona de Brillouin (1-ZB) y luego se divide por el volumen v^* de la 1-ZB. El esquema dado por la aplicación de las ecuaciones (2)—(4) a problemas de dinámica de partículas en una red resulta de adaptar el formalismo del método pseudo-espectral al tipo de banda de enlace fuerte $T(k)$ referida arriba (Sanjinés 2001).

La solución de (3) para el caso de la evolución libre ($V(x) = 0$) del paquete de ondas (ver (7) abajo) servirá —entre otros— para calcular el centroide del paquete de acuerdo a $\langle n \rangle \equiv \sum_n |C_n|^2 n$. Esta cantidad, junto a la posición cuadrática media $\langle n^2 \rangle$, constituyen las principales variables dinámicas en el estudio de la oscilación de Bloch y sus fenómenos asociados, como ser localización dinámica (Dunlap and Kenkre 1986). En este trabajo se utilizará, además de $\langle n \rangle$, la cantidad $\langle n^3 \rangle$ que está asociada al concepto de asimetría o “sesgo” (*skewness*) de una distribución de probabilidad (Freund and Wanpole 1980). La eventual aplicación física sugerida en este trabajo (sección 5) para dicho sesgo es un tema que —hasta donde se pudo constatar— no está referido en la literatura usual sobre la dinámica de paquetes de onda en una red.

2. PROPAGACIÓN ASIMÉTRICA DEL PAQUETE INICIAL GAUSSIANO

En este artículo nos interesa investigar cómo se comporta un paquete inicial gaussiano (normalizado) dado por $C_n^0 = B \exp(-n^2/\sigma) \exp(ikan)$ con $B = (2/\pi\sigma)^{1/4}$ y con velocidad inicial $v(0) \propto \sin k$ cuando se propaga en ausencia de algún potencial externo $V(x)$; en tal caso aún la interacción del paquete con la red se efectúa por medio de la energía cinética de enlace fuerte $T(k)$. A este tipo de dinámica es a lo que nos referiremos como “propagación libre en la red”, en contraste con la propagación libre en el continuo, donde la energía cinética es $\hbar^2 k^2/2m$ con el resultado bien conocido de un paquete gaussiano que se va dispersando simétricamente en torno a su centroide, el que a su vez se propaga con velocidad constante (ver, por ejemplo, Liboff 1980, cap. 6). Lo interesante del problema abordado aquí es que, si bien el paquete en la red así como el paquete en el continuo se propagan con velocidad constante, el paquete en la red no se dispersa de manera simétrica en torno a su centroide. Debe señalarse que este es un resultado estrictamente cuántico, ya que la aplicación de las ecuaciones de movimiento semiclásicas (Ashcroft and Mermin 1976, cap. 12) al hamiltoniano de enlace fuerte no podrá revelar tal dispersión asimétrica.

En ausencia de un potencial externo ($V(x) = 0$) la ec. (3) se

“integra” en el tiempo y resulta en

$$C_n(\tau) = \sum_r C_r(0) i^{r-n} J_{r-n}(\tau) = \sum_m C_{n+m}(0) i^m J_m(\tau), \quad (5)$$

donde se definió el “tiempo adimensional” $\tau \equiv 2At$. (Ya que tomaremos $\hbar = 1$ a lo largo de este trabajo, entonces el elemento de hopping A se mide en unidades de tiempo inverso s^{-1}). Para el paquete inicial gaussiano $C_r(0) = C_r^0$ referido arriba, y para las funciones de Bessel expresadas en su representación integral como

$$J_m(\tau) = \frac{1}{\pi i^m} \int_0^\pi e^{i\tau \cos \varphi} \cos(m\varphi) d\varphi, \quad (6)$$

se obtiene de (5) los coeficientes

$$C_n(\tau) \cong 0.356 \int_{-\pi}^\pi e^{i(\tau \cos \varphi - n\varphi)} e^{-(k+\varphi)^2} d\varphi. \quad (7)$$

Para llegar a (7) se tomó una constante de red unitaria $a = 1$ y una desviación estándar $\sigma = 4$ en el paquete inicial $C_r(0)$. Debemos señalar que la elección particular que hacemos de constantes y parámetros físicos tiene por finalidad poder expresar de la manera más sencilla posible las expresiones que, como (7), revelarán los aspectos cualitativos más importantes de la dinámica de la propagación libre del electrón de Bloch, que en este trabajo se resumen en la propagación asimétrica del paquete de ondas que representa a la partícula en cuestión. Por esta misma razón, omitiremos en adelante el coeficiente 0.365 en (7).

En la Fig. 1 se aprecia la secuencia evolutiva de densidades de probabilidad $|C_n|^2$ para una velocidad inicial $v(0) \propto \sin k$ con $k = 1$. Los perfiles de dicha densidad corresponden (de izquierda a derecha) a los instantes adimensionales $\tau = 0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160$.

En esta secuencia evolutiva ya podemos apreciar, como se anunció, que la propagación libre en la red del paquete inicial corresponde a una gaussiana asimétrica. A fin de caracterizar analíticamente a cualquier gaussiana asimétrica de la Fig. 1 será necesario utilizar un modelo adecuado para tal efecto. De hecho, existen varios modelos y aplicaciones de gaussianas asimétricas² de las que destacan aquellas que se construyen “pegando” dos mitades de gaussianas ordinarias con diferentes desviaciones estándar; no obstante, para los fines de este trabajo, será mejor considerar un modelo de gaussiana asimétrica definida sobre todo su dominio con los mismos parámetros.

La expresión para $C_n(\tau)$ en (7) es una integral que no se puede resolver de una forma analítica sencilla y compacta. Lo ideal —en el contexto de este trabajo— sería ciertamente resolver (7) analíticamente; sin embargo, ya que es posible obtener la expresión cuántica *exacta* para la velocidad del centroide del paquete de ondas, entonces en realidad sólo nos interesa conocer la velocidad con que el máximo del paquete se adelanta al centroide. A partir de un modelo de gaussiana asimétrica que ajustaremos empíricamente según la simulación de la Fig. 1, se podrá calcular entonces la posición del centro efectivo de interacción eléctrica asociado al sesgo del paquete de ondas. El criterio utilizado para lograr lo anterior es simple: la contribución significativa para $|C_n|^2$ proviene de los sitios en donde el integrando de $C_n(t)$ en (7) oscila menos. Para lograr dicha condición utilizaremos el criterio dado por

$$\left| e^{i(\tau \cos \varphi - n\varphi)} \right| = 1. \quad (8)$$

² Ver, por ejemplo, *The Skew-Normal Probability Distribution*, http://www.iop.org/njp4_1_002.html, y referencias allí citadas.

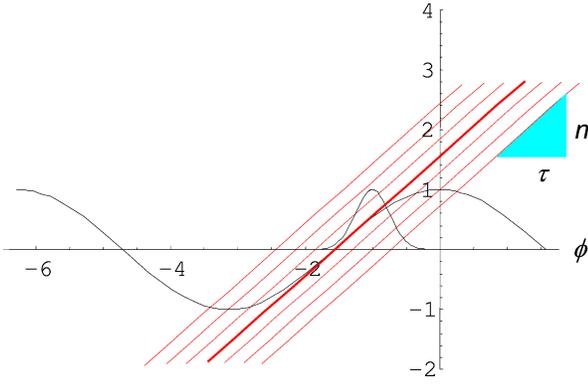


FIG. 2.— Solución gráfica de (11) que da los valores de ϕ para los cuales el conjunto de líneas rectas de pendiente n/τ interseca a la curva $\cos \phi$ (la gaussiana sólo se incluye para efectos de comparación).

Definiendo la variable auxiliar ξ como

$$\xi \equiv \cos \phi - \frac{n}{\tau} \phi, \quad (9)$$

se tiene pues que la condición dada en (8) sólo se cumple si

$$\tau \xi_p = p\pi, \quad (10)$$

donde p es un entero y el tiempo adimensional τ puede considerarse —sin pérdida de generalidad— como un número natural (incluyendo al cero) que, para un cierto instante arbitrario después del instante inicial $\tau = 0$, podría llegar a ser un número suficientemente grande. Así, la condición (8) se cumple cuando

$$\cos \phi = \frac{n}{\tau} \phi + \xi_p. \quad (11)$$

Esta es una ecuación trascendental cuyas soluciones para ϕ se pueden estimar gráficamente en la Fig. 2, donde se incluye la gaussiana dada en el integrando de (7). Así, las soluciones de (11) corresponden a los valores de ϕ para los cuales el conjunto de líneas rectas de pendiente n/τ interseca a la curva $\cos \phi$. Esta intersección puede ser de dos formas: la línea recta es secante a $\cos \phi$, o bien, la línea recta es tangente a $\cos \phi$.

Así, las regiones de intersección donde la tangente a la curva tiene la pendiente n/τ definen uno o varios conjuntos “densos” de soluciones para ϕ tales que se cumple la condición (8) y por lo tanto el integrando en (7) oscila poco. Éstos son los casos que nos interesan pues contribuyen de manera más significativa al valor final de la integral (7). Los demás casos corresponden a una oscilación rápida del integrando en (7) lo que provoca que el valor de la magnitud de $C_n(t)$ sea relativamente pequeño. El conjunto de rectas de pendiente n/τ puede ser denso, pues la separación sobre el eje vertical de dos rectas adyacentes es $\xi_{p+1} - \xi_p = p/\tau$; ya que τ puede ser muy grande, entonces dicha separación podrá ser muy pequeña. En consecuencia, para valores de la pendiente $n/\tau \leq 1$ siempre habrá rectas que sean tangentes a $\cos \phi$ en algún punto. En la Fig. 2 se muestra algunas rectas, de las que la que tiene el trazo grueso es tangente a $\cos \phi$ en $\phi = -\pi/2$.

Distingamos pues los casos siguientes correspondientes a la condición (8):

- i) $n > \tau \rightarrow$ no hay zonas “densas”; oscilación rápida del integrando en (7).
- ii) $n = \tau \rightarrow$ hay una gran zona “densa”; régimen estacionario del integrando en (7).
- iii) $n < \tau \rightarrow$ hay varias zonas “densas” más pequeñas; régimen estacionario del integrando en (7).

Ilustremos estos casos con los gráficos de la Fig. 3 donde se graficó $\tau \xi$ vs. ϕ según (9) junto a la gaussiana $\exp[-7.91(\phi + 1)^2]$. En estos gráficos se eligió un valor fijo de $\tau = 100$ y valores de: a) $n = 120$, b) $n = 100$, c) $n = 90$, d) $n = 70$, e) $n = 50$, f) $n = 20$. El gráfico (a) corresponde al caso (i); el gráfico (b) corresponde al caso (ii); los gráficos (c)—(f) corresponden al caso (iii).

Los anteriores gráficos revelan la forma cómo los parámetros n y τ se deben relacionar a fin de contribuir de manera significativa a $C_n(t)$ en (7). Es más: la relación entre n y τ según los casos (i), (ii) o (iii) permite prever que el perfil de la densidad de probabilidad $|C_n|^2$ presentará una asimetría con respecto al “centroide” del paquete, tal como se observa claramente en las gaussianas asimétricas de la Fig. 1.

3. ADELANTO DEL CENTRO EFECTIVO DE CARGA ELÉCTRICA CON RESPECTO AL CENTRO DE MASA

En la Fig. 4 se graficó la evolución temporal del centroide $\langle n \rangle \equiv \sum_n n |C_n|^2$ y del punto máximo n_m correspondientes a cada una de las gaussianas asimétricas en la secuencia de la Fig. 1. Recordemos que el cálculo *exacto* para el ritmo de variación en la posición del centroide $\langle n \rangle$ corresponde a su velocidad inicial $v(0)$ (Sanjinés 2001), pues ésta se mantiene constante siempre que la evolución sea “libre” (i.e., $V(x) = 0$):

$$v(0) = \frac{d}{dt} \langle n \rangle = 2A |S_0| \sin(ka); \quad (12)$$

Tomando $2A = 1$, $|S_0| = 0.986$ y $ka = 1$ se obtiene una velocidad inicial $v(0) = 0.829$, lo que coincide razonablemente con el valor que se desprende de la simulación numérica de la Fig. 4 (el error porcentual es de 0.12%):

$$\frac{d \langle n \rangle}{dt} \cong \frac{149}{180} \cong 0.828. \quad (13)$$

Por otra parte, para n_m se calcula su ritmo de variación a partir de la simulación:

$$\frac{dn_m}{dt} \cong \frac{158}{180} \cong 0.878. \quad (14)$$

Observando la solución gráfica de la Fig. 2 tenemos que

$$\left. \frac{d \cos \phi}{d \phi} \right|_{\phi = -1} = 0.84, \quad (15)$$

por lo que la contribución más importante a $C_n(t)$ proviene de la región $n/\tau \in [0.84, 1]$. Esto es ciertamente muy razonable en vista de la serie de gráficos de la Fig. 3.

A continuación se deducirá de una manera semi-analítica la expresión que permita calcular el adelanto de n_m , el punto máximo de la gaussiana asimétrica, con respecto a su centroide (o centro de masa) $\langle n \rangle$. El objetivo que se persigue es poder estimar a partir de este cálculo, cuál sería el sitio efectivo de un paquete de ondas electrónico desde el cual se “emite” el campo eléctrico, es decir, el “centro efectivo de interacción eléctrica” cuya posición será identificada como n_q . Ya que la densidad lineal de carga eléctrica asociada a un paquete de ondas es $\lambda(x) = q |\Psi|^2$, con $q = -e$ la carga del electrón (y $|\Psi|^2 = |C_n|^2$), entonces se debería esperar que n_q se encuentre próximo a n_m , pues es sabido que el campo eléctrico es más intenso allí donde la densidad de carga eléctrica es mayor. De hecho, en vista del adelanto de n_m respecto a $\langle n \rangle$, ya se puede inferir al menos que $n_q > \langle n \rangle$.

En la Fig. 5 se muestra el detalle ampliado de la Fig. 2 donde la recta tangente a la curva $\cos \phi$ permite estimar un intervalo centrado en ϕ_0 de magnitud $2\Delta\phi$. Este intervalo es aquel que en los gráficos de la Fig. 3 corresponde a los sitios donde la función

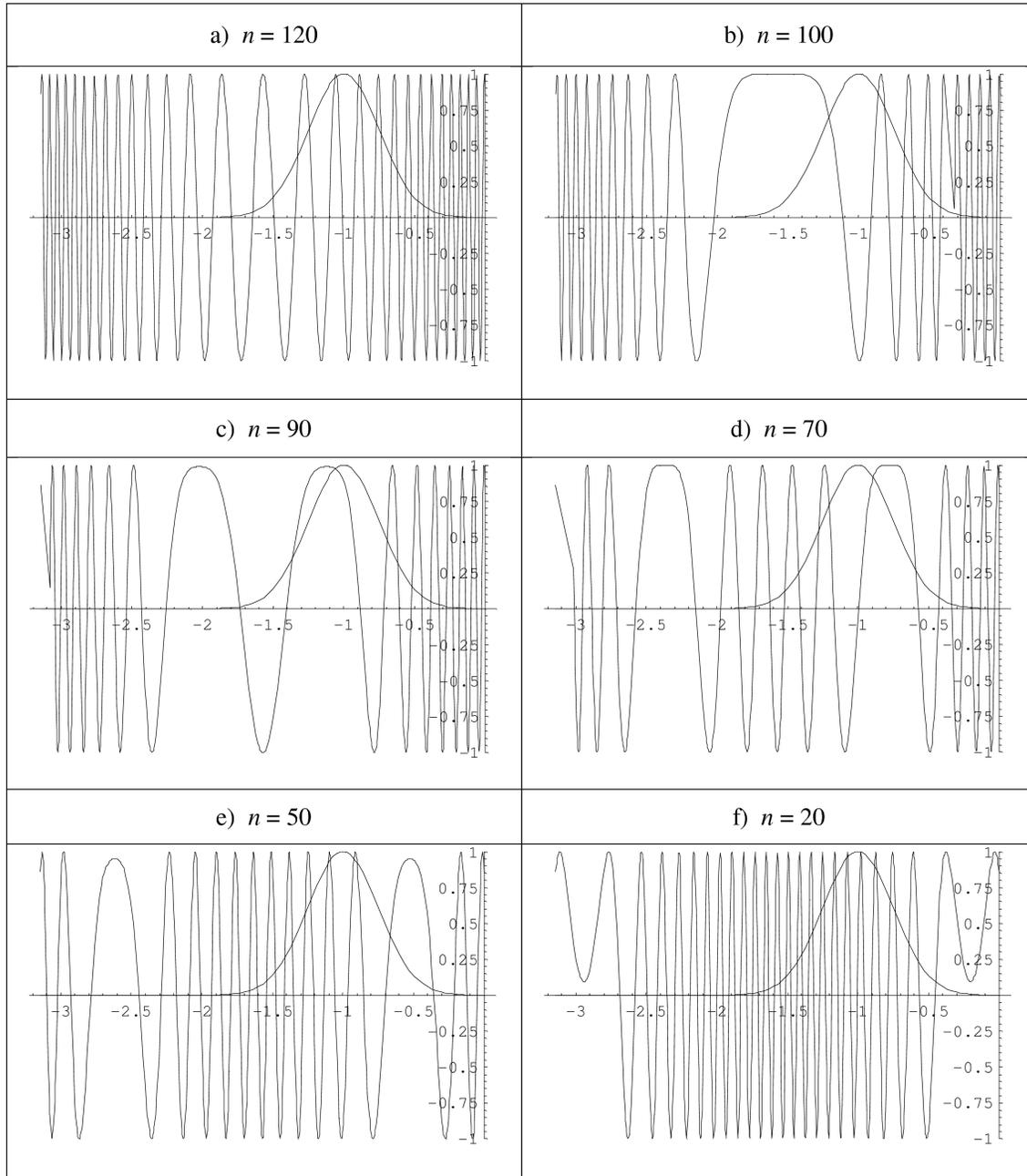


FIG. 3.— Gráficos de $\tau\xi$ vs. φ según (9) junto a la gaussiana $\exp[-7.91(\varphi+1)^2]$. En estos gráficos se eligió un valor fijo de $\tau=100$ y valores de: a) $n=120$, b) $n=100$, c) $n=90$, d) $n=70$, e) $n=50$, f) $n=20$. El gráfico (a) corresponde al caso (i); el gráfico (b) corresponde al caso (ii); los gráficos (c)—(f) corresponden al caso (iii).

oscilatoria en el integrando de (7) oscila menos, y por lo tanto produce la mayor contribución a la amplitud de probabilidad C_n .

Desarrollando $\cos\varphi$ en serie en torno a φ_0 hasta el término de orden 2, se obtiene $\Delta\varphi=|\varphi-\varphi_0|=\gamma \tan\varphi_0$, (con $\gamma<1$). Así, ya que la pendiente de la recta tangente en $\varphi=\varphi_0$ es n/τ , la condición dada por

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= -\text{sen}(n/\tau) \\ \Delta\varphi &= \gamma(n/\tau)\end{aligned}\quad (16)$$

permite tener una estimación aproximada de la región efectiva donde el integrando de (7) contribuye de forma significativa a la integral correspondiente para $C_n(\tau)$. De acuerdo a la evidencia numérica dada por las simulaciones de la Fig. 3, el valor adecuado de γ en (16) será $\gamma=\frac{1}{2}$. De aquí, $C_n(\tau)$ en (7) se podrá aproximar por

$$I(n/\tau) = B \int_{\max(\varphi_0-\Delta\varphi/2, -\pi/2)}^{\varphi_0+\Delta\varphi/2} e^{-c(k+\varphi)^2} d\varphi \cong B \int_{-\arcsen(n/\tau)-n/4\tau}^{-\arcsen(n/\tau)+n/4\tau} e^{-c(k+\varphi)^2} d\varphi, \quad (17)$$

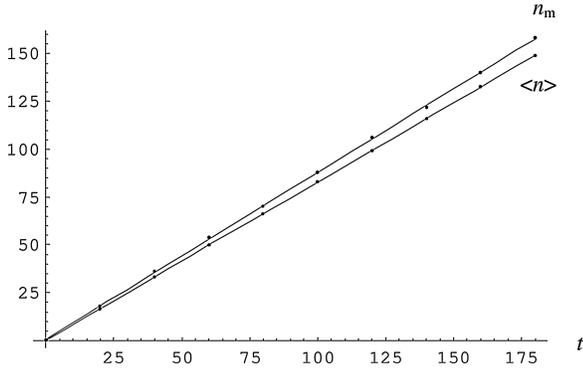


FIG. 4.— Evolución temporal del centroide $\langle n \rangle$ y del punto máximo n_m correspondientes a cada una de las gaussianas asimétricas en la secuencia de la Fig. 1.

donde $c \cong 7.91$, $k=1$ y B es una constante apropiada que comprende a la constante de normalización.

Al aproximar $C_n(\tau) \cong I(n/\tau)$ se debe tomar en cuenta que, formalmente, para un valor fijo del tiempo adimensional τ , la posición n de cada átomo puede tomar los valores correspondientes a un cristal unidimensional infinito, i.e., $-\infty \leq n \leq \infty$, por lo que la nueva variable independiente n/τ de $I(n/\tau)$ tomará los valores $-\infty \leq n/\tau \leq \infty$. Esto naturalmente introduce una indefinición en los valores de n en $I(n/\tau)$, por lo que en general se podrá escribir $C_n(\tau) \cong I((n+m)/\tau)$ donde m es un entero arbitrario, o bien, $C_{n+m}(\tau) \cong I(n/\tau)$. Por otra parte, y solamente como consecuencia del método semi-analítico de aproximación que conduce a (17), debe tomarse $n/\tau \leq 1$ en los límites de integración, para lo que será suficiente considerar sólo $0 \leq n/\tau \leq 1$, pues fuera de este intervalo la integral en (17) es prácticamente nula. Las consideraciones hechas en este párrafo pueden verificarse, por ejemplo, al comparar en la Fig. 6 los perfiles de densidad de probabilidad $|C_{n+m}(\tau)|^2 \cong |I(n/\tau)|^2$, con $m=22$ y $B \cong 0.228$, correspondientes al instante $\tau = 160$.

De hecho, la aproximación de los gráficos de la Fig. 6 es tan buena, que apenas se puede distinguir los perfiles de $|C_{n+m}(\tau)|^2$ y de $|I(n/\tau)|^2$: el primero tiene una cola visible entre $\tau=160$ y $\tau=170$, mientras que el segundo se “clava” abruptamente en $\tau=160$. Para otros valores de τ la aproximación también es muy buena, manteniéndose el valor de $m=22$, pero ajustando los valores de la constante B para cada valor específico de τ . (Como veremos luego, el valor de B resultará inmaterial para efectos de calcular el adelanto de n_m y n_q respecto a $\langle n \rangle$.)

A continuación deduciremos, de acuerdo a (17), la expresión que permitirá calcular la velocidad de adelanto de n_m . Para ello reescribamos (17) definiendo las variables auxiliares $z \equiv n/\tau$, $\varphi_1 \equiv -\arcsen z - z/4$, $\varphi_2 \equiv -\arcsen z + z/4$, $u \equiv (\varphi + k)\sqrt{c}$, $u_i \equiv (\varphi_i + k)\sqrt{c}$ ($i = 1, 2$). Así, $I(z)$ en (17) queda como

$$I(z) = B \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du = -B \int_0^{u_1} e^{-u^2} du + B \int_0^{u_2} e^{-u^2} du. \quad (18)$$

El punto máximo n_m del paquete gaussiano asimétrico se halla pues de acuerdo a la condición $\partial_z |I(z)|^2 = 0$, lo que se traduce en $\exp(-u_1^2) \partial_z u_1(z) = \exp(-u_2^2) \partial_z u_2(z)$, que a su vez, después de algunas manipulaciones algebraicas, se transforma en una ecuación algebraico-trascendental para z :

$$e^{cz(k-\arcsen z)} = \frac{4 - \sqrt{1-z^2}}{4 + \sqrt{1-z^2}}. \quad (19)$$

Resolviendo numéricamente (19) para $c \cong 7.91$ y $k=1$, se obtiene

$$z = \frac{n_m}{\tau} \cong 0.861, \quad (20)$$

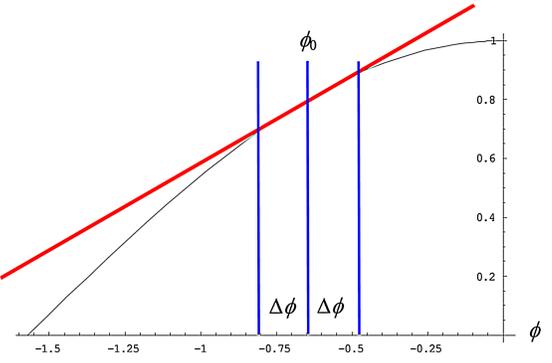


FIG. 5.— Detalle ampliado de la Fig. 2 donde la recta tangente a la curva $\cos \varphi$ permite estimar un intervalo centrado en φ_0 de magnitud $2\Delta\varphi$.

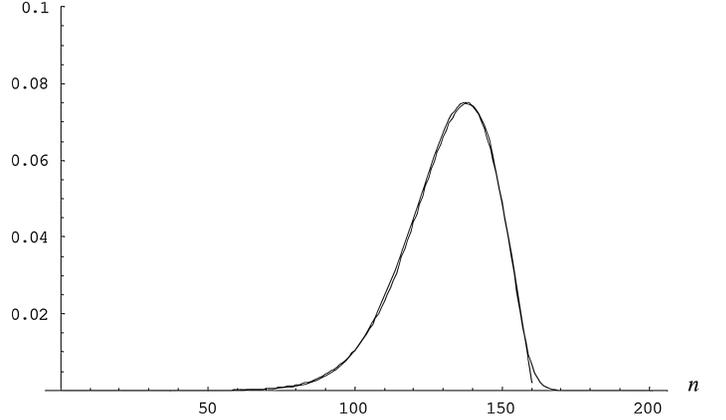


FIG. 6.— Perfiles de densidad de probabilidad $|C_{n+m}(\tau)|^2$ y $|I(n/\tau)|^2$, con $m=22$ y $B \cong 0.228$, correspondientes al instante $\tau=160$. El primero tiene una cola visible entre $\tau=160$ y $\tau=170$, mientras que el segundo se “clava” abruptamente en $\tau=160$.

lo que coincide razonablemente bien con el resultado (14) de la simulación numérica representada en la Fig. 4 (el error porcentual es de 1.9%). Comparando (14) y (20) se verifica que $\partial_\tau n_m = n_m/\tau$, i.e., el punto máximo n_m del paquete gaussiano asimétrico se propaga, adelante del centroide $\langle n \rangle$, con velocidad constante.

4. POSICIÓN DEL CENTRO EFECTIVO DE INTERACCIÓN ELÉCTRICA

A continuación calcularemos la posición del centro efectivo de interacción eléctrica n_q a partir del potencial electrostático $V(x,y)$ (la variable definida arriba como $z=n/\tau$ correspondería pues a una posición estática para un cierto instante adimensional τ); de aquí se calculará el campo eléctrico $\mathbf{E}(x,y)$ que se mediría en el punto (x,y) a causa de una distribución de carga unidimensional $\lambda(z)=q|\Psi(z)|^2$ (con $q=-e$ la carga del electrón y $|\Psi|^2=|C_n|^2$). El potencial electrostático asociado a esta distribución de carga es

$$V(x,y) = K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lambda(z)|^2 dz}{\sqrt{(x-z)^2 + y^2}}, \quad (21)$$

donde $K \equiv 1/(4\pi\epsilon_0)$. Ya que $\mathbf{E} = -\nabla V$ en 2D, las derivadas respecto a las coordenadas x , y se pueden obtener derivando el integrando en (21), pues las coordenadas son independientes de la variable de integración z . Así, las componentes de \mathbf{E} a lo largo de un punto sobre el eje Y ($x=0$) resultan ser:

$$E_x = -K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\lambda(z)dz}{(z^2 + y^2)^{3/2}}, \quad E_y = -K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\lambda(z)dz}{(z^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (22)$$

Ahora supongamos que dicho punto se encuentra a una distancia y y por encima del eje X mucho mayor que el tamaño “efec-

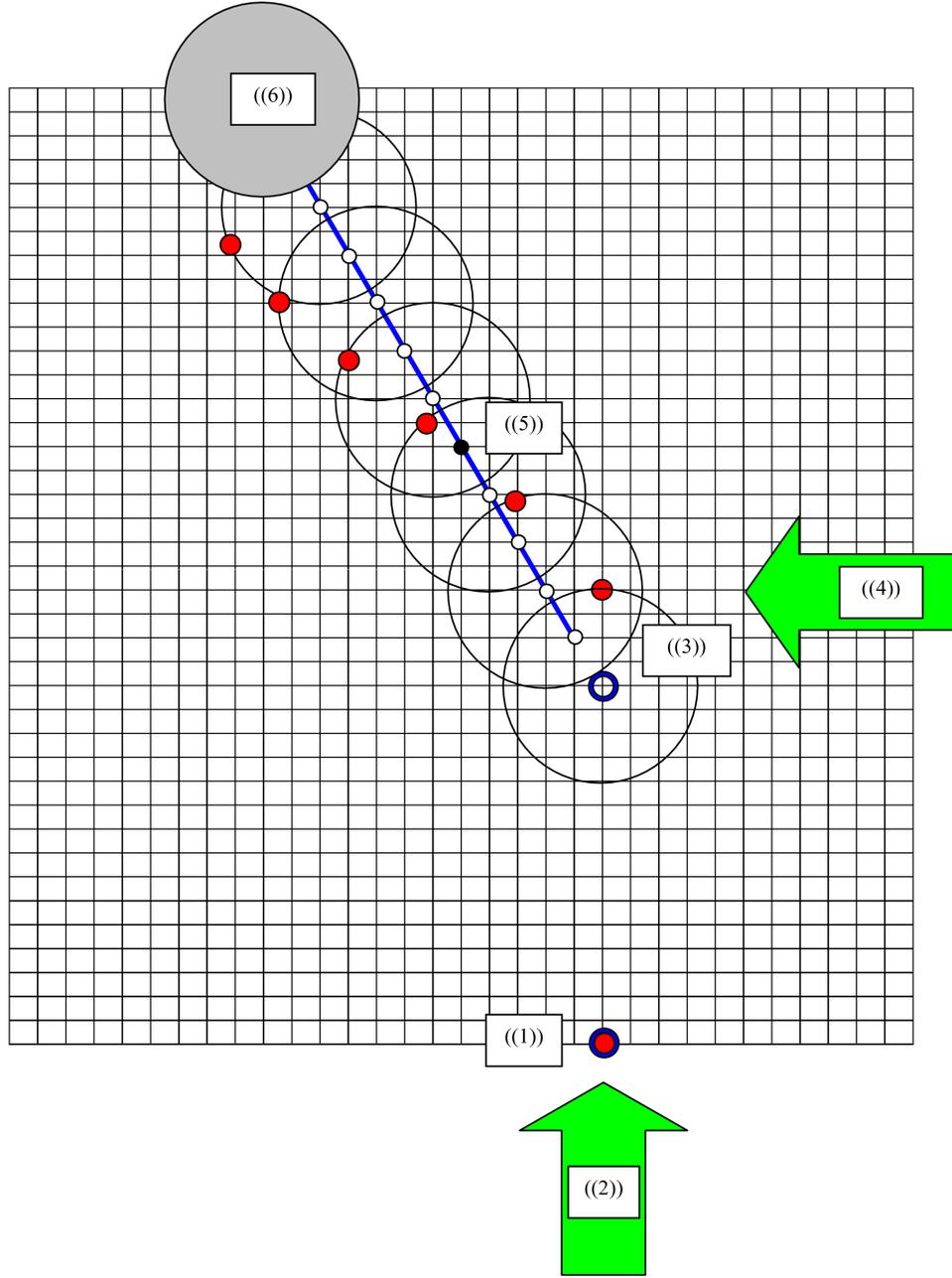


FIG. 7.— Bosquejo de un experimento *pensado* en el que la partícula inicial en ((1)) se propaga en la red mientras n_q se adelanta a n_m hasta que en ((3)), la aplicación súbita de un campo eléctrico externo ((4)) provoca el giro de n_q en torno a n_m dando lugar a un momento dipolar magnético que sería detectado en ((6)).

tivo” del paquete de ondas, de tal manera que $y \gg z$ en las integrales de (22). En tal caso, obviamente la variable z no alcanzaría a tomar valores muy grandes pues el paquete de ondas está localizado dentro de un intervalo finito y la variable y siempre se puede tomar mucho mayor que los límites de dicho intervalo. Esta consideración nos permite desarrollar los integrandos de (22) en serie y luego proceder a realizar las integrales. Así, sustituyendo

$$(z^2 + y^2)^{-3/2} \Big|_{z=0} = \frac{1}{y^3} - \frac{3z^2}{2y^5} + O(z^3) \quad (23)$$

en (22), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Kq} E_x &= \frac{\langle z \rangle}{y^3} - \frac{3 \langle z^3 \rangle}{2y^5}, \\ \frac{1}{Kq} E_y &= \frac{1}{y^2} - \frac{3 \langle z^2 \rangle}{2y^4}, \end{aligned} \quad (24)$$

donde $\langle z^n \rangle \equiv \int z^n |\Psi(z)|^2 dz$ para $n=0, 1, 2, 3$. En el caso $n=0$ se obtiene $\langle z^0 \rangle = 1$ pues el paquete está normalizado.

Si ubicamos al paquete de ondas (distribución de carga) sobre el eje X de tal forma que su centroide $\langle n \rangle$ coincida con el origen del eje X, entonces $\langle z \rangle = 0$. A continuación definamos $d \equiv y |E_x/E_y|$ como la posición del centro efectivo de interacción eléctrica n_q con respecto al centroide del paquete, es decir, $d = n_q - \langle n \rangle$. Así entonces, de (24) se tiene que

$$d = \left| \frac{\langle z^3 \rangle}{\langle z^2 \rangle - \frac{2}{3}y^2} \right| \Big|_{y \gg z} \frac{3 \langle z^3 \rangle}{2 y^2}. \quad (25)$$

El numerador de d en (25) se reconoce como el sesgo de una distribución de probabilidad (Freund and Wanpole 1980). Ya que en este trabajo dichas distribuciones o paquetes de onda son gaussianas asimétricas, entonces la distancia d es una medida de dicho sesgo. En efecto, para el paquete inicial que es gaussiano,

el sesgo es cero y por lo tanto $d=0$, lo que significa que el centro efectivo de interacción eléctrica n_q y el centro de masa $\langle n \rangle$ coinciden, pero a medida que el paquete “avanza”, n_q se adelanta a $\langle n \rangle$ por una distancia d que crece a medida que el paquete se hace más asimétrico, i.e., a medida que el sesgo aumenta. Nótese que dada la aproximación (23) para $y \gg z$, el término dominante de E_y en (25) es Kq/y^2 (ley de Coulomb), así que el denominador en (25) no puede ser cero.

5. UN EXPERIMENTO PENSADO

La Fig. 7 ilustra un posible escenario experimental que permitiría —en principio— observar un fenómeno muy interesante asociado al adelanto del centro efectivo de interacción eléctrica con respecto al centro de masa.

Supongamos un cristal 2D ideal en el que se inyecta un electrón ((1)) y se le da un impulso ((2)) inicial a través de un campo eléctrico muy intenso pero muy breve (a la manera de una delta de Dirac). A partir de este instante, el electrón se propaga libremente mientras su centro efectivo de interacción eléctrica $-n_q$ se va adelantando al centro de masa $-n_m$ ((3)). En un cierto instante posterior, se aplica de nuevo un impulso tipo delta ((4)) que actúa sobre n_q , lo que provoca la aparición de un momento angular de n_q en torno a n_m que se propaga en una nueva dirección del cristal 2D. Dicho momento angular daría lugar a un momento dipolar magnético orientado en la dirección perpendicular al plano del cristal. Si en la posición ((5)) se halla una impureza, el paquete de ondas se dispersaría significativamente sólo si las posiciones de n_q y de la impureza coinciden exactamente, en cuyo caso el dipolo magnético se debilitará sig-

nificativamente (si no se destruye del todo); de otro modo, el paquete probablemente no se disperse mucho y se mantenga el dipolo. Así, en el caso del debilitamiento del dipolo, el solenoide ((6)) no detectaría una mayor variación del flujo magnético, pero si el paquete no fue dispersado por la impureza, entonces el solenoide detectará el campo magnético del dipolo.

6. EL PROBLEMA EN 2D

El experimento pensado descrito en la sección anterior naturalmente se podría estudiar desde un principio como un problema dinámico en 2D. La forma más general de extender (3) a un número de dimensiones $3N$ (con N un número natural) es (Sanjinés 2001)

$$C_{\mathbf{R}'}^{p+1} = \sum_{\mathbf{R}} C_{\mathbf{R}}^p \exp[-i\lambda(1 + \lambda\partial_t)(V_{\mathbf{R}}^p + V_{\mathbf{R}'}^p)] \times \exp\left\{i(\pi/2) \sum_{j=1}^N [(n_j - n'_j) + (m_j - m'_j) + (p_j - p'_j)]\right\} \times \prod_{j=1}^N J_{n_j - n'_j}(4\lambda A_{x_j}) J_{m_j - m'_j}(4\lambda A_{y_j}) J_{p_j - p'_j}(4\lambda A_{z_j}), \quad (26)$$

donde los índices \mathbf{R} y \mathbf{R}' se suman sobre toda la red de Bravais. Asimismo se puede obtener de manera directa el caso correspondiente a una red en 2D con celda unitaria cuadrada (constante de red $a=1$ en las direcciones de X y Y):

$$C_{r,s}^{p+1} = \sum_{n,m} C_{n,m}^p i^{n+m-r-s} \exp[-i\lambda(1 + \lambda\partial_t)(V_{n,m}^p + V_{r,s}^p)] J_{n-r}(4\lambda A_x) J_{m-s}(4\lambda A_y), \quad (27)$$

cuya aplicación se puede simplificar aún considerando una red isotrópica ($A_x=A_y=A$). Esta fórmula constituirá el punto de partida de la investigación sobre la dinámica del paquete gaussiano en 2D. Es importante señalar que si bien la evolución es “libre” ($V(x,y)=0$) antes y después del instante indicado por ((4)) en la Fig. 7, la variación temporal de $V(x,y)$ en dicho instante es muy grande, pues corresponde a un “pulso” del campo eléctrico externo que desviaría al paquete de ondas hacia otra dirección. Tal variación de $V(x,y)$ estará pues ya incorporada en la evolución temporal del paquete expresada por (27), por lo que cabría esperar alguna evidencia más sólida que revele el fenómeno predicho en este trabajo: la rotación de una carga eléctrica en torno al centro de masa del paquete y la subsecuente formación de un momento dipolar magnético.

7. PERSPECTIVAS

Así como las ondas planas $\exp(ikx)$ son las eigenfunciones del hamiltoniano $\hat{p}^2/2m$ para la partícula libre en el continuo, las funciones de Bloch $\exp(ikx)u(x)$ son las eigenfunciones del hamiltoniano de enlace fuerte $-2A \cos a\hat{p}$ para la partícula “libre” en la red, con $u(x+a)=u(x)$. Además, ya que tanto las ondas planas como las funciones de Bloch forman conjuntos completos de funciones (Ashcroft and Mermin 1976, cap. 10), entonces un paquete de ondas —como ser el paquete gaussiano— se puede representar como una integral sobre dichas funciones multiplicadas por factores de peso (o amplitudes de probabilidad de momentum) que, en el caso del continuo, se sabe que también corresponde a una distribución gaussiana (Liboff 1980,

cap. 6). De esta forma es posible entender la causa de la evolución típica de un paquete de ondas gaussiano en el continuo: la deformación simétrica de este paquete se debe a la propagación también simétrica de sus componentes $\exp(\pm i|k|x)$ cuya amplitud de probabilidad de momentum es la misma.

En el caso de la red, cabe preguntarse asimismo cual será la correspondiente amplitud de probabilidad de momentum que, en el caso de no ser simétrica como en el continuo, podría explicar por qué las componentes $\exp(\pm i|k|x)u(x)$ con la misma magnitud de velocidad de fase deforman al paquete de una manera asimétrica. Esta especulación será motivo de una investigación posterior.

Por otra parte, en un próximo trabajo se implementará numéricamente el algoritmo dado por (27) a fin de investigar el comportamiento dinámico del paquete gaussiano en el caso del experimento pensado en 2D referido arriba. Se investigará sobre la cuestión de la validez del hamiltoniano de enlace fuerte correspondiente a una banda $H(\hat{p}, \hat{x}) = -2A \cos a\hat{p} + V(\hat{x})$ en el preciso instante ((4)) de la variación súbita de $V(x)$. Igualmente, en dicho trabajo anunciado se conservará las unidades físicas de las constantes y parámetros relevantes a fin de lograr alguna estimación numérica de la magnitud del momento dipolar magnético referido arriba comparado, por ejemplo, con el magnetón de Bohr.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco la cordial invitación del Dr. Pedro Pereyra (Grupo de Física Teórica de la Universidad Autónoma Metropolitana-A; México, DF) con quien tuve la oportunidad de intercambiar puntos de vista sobre el tema de este trabajo y otros temas relacio-

nados. Asimismo agradezco el interés del Dr. César Flores (Instituto de Alta Investigación de la Universidad Tarapacá de Arica, Chile) quien en reciente visita me ofreció sugerencias útiles para mejorar y ampliar este trabajo.

APÉNDICE

A.

Si bien (18) ya es una expresión analítica para $I(z)$, la dependencia relevante de z se encuentra en los límites de integración de $I(z)$, lo que puede no ser muy práctico a efectos de su tratamiento analítico (por ejemplo, para integrarse). Así, en este trabajo proporcionamos otra forma analítica aproximada para $I(z)$ que se obtiene de la definición de la función error (o integral de probabilidad, Abramowitz and Stegun 1965), usando las mismas variables definidas para (18):

$$I(z) \cong B \left\{ \operatorname{sgn}(u_2) \left(1 - P_2 e^{-u_2^2} \right) - \operatorname{sgn}(u_1) \left(1 - P_1 e^{-u_1^2} \right) \right\}, \quad (\text{A1})$$

donde además se definió

$$P_j(z) \equiv \sum_{i=1}^5 a_i z_j^i(z), \quad (\text{A2})$$

- N. Ashcroft and N. Mermin, *Solid State Physics* (Saunders College, 1976).
 O. Madelung, *Introduction to Solid State Theory* (Springer, 1978).
 F. Bloch, *Z. Physik* **52**, 555 (1928).
 T. Hartmann et al., *New Journal of Physics* **6**, 2 (2004).
 D. Sanjinés, *Tesis doctoral* (Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela, 2001).
 D. H. Dunlap and V. M. Kenkre, *Phys. Rev. B* **34**, 3625 (1986).

junto con

$$z_j(z) \equiv \frac{1}{1 + p |u_j(z)|} \quad (\text{A3})$$

y las constantes $p=0.32759$, $a_1=0.25482$, $a_2=-0.28449$, $a_3=1.42141$, $a_4=-1.45315$, $a_5=1.06140$. Aún en las ecs. (A1)—(A3) la variable z está restringida al intervalo $0 \leq z \leq 1$. Aunque (A1) ofrece un tratamiento analítico relativamente más cómodo, la función discontinua $\operatorname{sgn}(u_i)$ puede resultar inconveniente. Por ello, ofrecemos aun otra forma analítica para $I(z)$ donde la variable z ya se puede extender a todos los reales, $-\infty \leq z \leq \infty$:

$$I(z) \cong B e^{-11(z-0.95)^2} e^{-0.7(z+0.036)^{20}}. \quad (\text{A4})$$

Si graficamos la densidad de probabilidad $|I(z)|^2$ según (A1) con $B=1$ y la comparamos con $|I(z)|^2$ según (A4) con $B=\sqrt{2}$, obtenemos esencialmente el mismo carácter cualitativo que se observa en la Fig. 6.

REFERENCIAS

- J. Freund and R. Wanpole, *Mathematical Statistics* (Prentice-Hall, 1980).
 R. Liboff, *Introductory Quantum Mechanics* (Holden-Day, 1980).
 M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1965).
 D. Sanjinés and J.-P. Gallinar, *Phys. Rev. B* **64**, 054301 (2001).

EL POTENCIAL EÓLICO DE LAS JUNTAS THE WIND POTENTIAL OF LAS JUNTAS

R. TORREZ S.[†], F. GHEZZI, E. PALENQUE
Laboratorio de Física de la Atmósfera
Instituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz–Bolivia

RESUMEN

El sitio denominado “Las Juntas” (16°.78 S, 67°.68 W) se encuentra hacia lo más profundo que se interna el río de La Paz por la región que se denomina Río Abajo, en el punto de confluencia con el río Caracato. En el cañadón a partir de este punto hasta lo profundo del valle hacia el río Beni, donde el lecho del río se encuentra a menos de 2000 msnm y los picos de los montes y la cordillera se encuentran alrededor de los 4000 msnm, se observan flujos intensos de viento que alcanzan en ráfagas, velocidades superiores a 25 m/s ó 90 km/h. Este flujo que básicamente se manifiesta sobre el lecho del río, tiene su origen en el calentamiento de las masas de aire confinados en el valle, que encuentran como salida en su expansión el curso de los ríos, principalmente hacia arriba de los valles de La Paz y Caracato.

Considerando que la energía que lleva una corriente de aire es proporcional al cubo de la velocidad, estos intensos vientos se constituyen en una fuente muy importante de energía. Por lo datos registrados hasta el momento la potencia máxima aprovechable es superior a los 100 W/m², de modo que con un aerogenerador de palas de dos metros de radio se puede obtener hasta 1 KW de potencia para uso doméstico. Sin embargo, la aplicación más interesante radica en su aprovechamiento en gran escala. Este trabajo, a nivel introductorio, presenta estas consideraciones sobre la base de una descripción de las características del viento y otros parámetros meteorológicos relacionados, que se están monitoreando actualmente en la región.

Descriptores: física de la atmósfera — dinámica de fluidos — registro y procesamiento de datos

Código(s) PACS: 92.70.Cp, 47.85.Gj, 07.05.Hd

ABSTRACT

The “Las Juntas site” (16°.78 S, 67°.68 W) is found in the furthest reaches of area known as Rio Abajo and consists of a river delta within a wind swept canyon at the convergence point of the La Paz and Caracato Rivers. Las Juntas experiences intense wind flows and squalls reaching wind speeds above 25 m/s ó 90 km/h. The wind flow patterns observed at the riverbed originate from the warming of the air confined within the canyon (valley). The energy of an air current is proportional to *velocity*³. Measurements so far obtained at Las Juntas record a maximum wind energy value above 100 W/m², This means that a wind turbine with 2 meter radius propellers could produce up to 1 KW of energy suitable for domestic use. The intense winds found at Las Juntas if converted to energy at a large scale could provide an important source of renewable energy. This preliminary study using initial data obtained from fieldwork at Las Juntas describes the wind characteristics and other related meteorological parameters that are important to establish the site’s wind patterns and energy potential.

Subject headings: atmosphere physics — fluid dynamics — observation and data reduction techniques

1. INTRODUCCIÓN

El año 2003 se dio inicio a un proyecto de cooperación entre la Universidad Mayor de San Andrés de La Paz-Bolivia, con la Universidad de Munich de Alemania, para el estudio de la influencia de los vientos que se originan en los valles y cruzan la cordillera hacia el Altiplano, así como la naturaleza de los vientos que se manifiestan en sentido contrario. En el desarrollo de este proyecto, denominado Jupit’aya, se han realizado varias experiencias en los principales pasos de montaña, tales como en: Tres Ríos, Huayna Potosí, Silole, Chume y los que hasta el momento continúan en evaluación por sus resultados favorables como son Tambo Quemado y “Las Juntas”.

Es particularmente interesante el flujo de viento ascendente por el río “La Paz” desde lo profundo del valle, más abajo de la localidad de “Lurata”, en el punto de confluencia con el río Caracato. Este punto denominado “Las Juntas” es un punto de

bifurcación de la corriente principal que asciende por el interior del valle con intensidades excepcionales. El presente trabajo es una evaluación preliminar de las características del viento en este punto, luego que desde hace sólo cuatro meses hemos realizado la instalación de una estación meteorológica en dicho punto.

2. EL SITIO “LAS JUNTAS”

“Las Juntas” está situado a 16°.78 de latitud sur, 67°.68 de longitud oeste, y a 1720 m sobre el nivel del mar. El lugar está casi sobre el lecho del río “La Paz”, continuación del río Choqueyapu, que a poco de unirse con el río Caracato, duplica su caudal y penetra por entre los cerros hasta transformarse en el río Beni. Los cerros que sirven como guía de su curso se manifiestan con pendientes de más de 70° y lucen completamente desnudos. En los días de invierno la radiación solar incide de pleno en el cañadón en gran parte del día, “encerrándose entre los cerros” (la radiación incidente y sus reflexiones) determinando el calentamiento de sus paredes de manera excepcional por su alta composición en reflexiones múltiples de tipo infrarrojo.

[†]Email: reneto_lp@yahoo.com.



FIG. 1.— El sitio “Las Juntas”. Al fondo el cerro que divide los flujos de viento por las regiones de Río Abajo y Caracato.

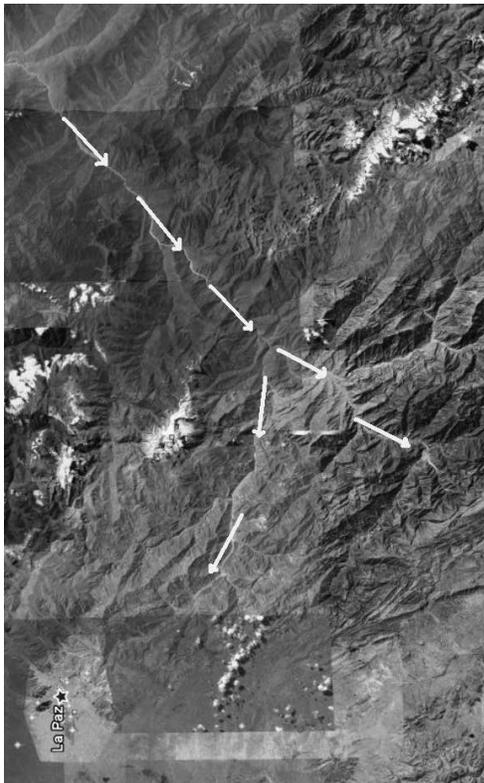


FIG. 2.— El curso de los ríos “La Paz” y “Caracato” que confluyen en el sitio “Las Juntas” y se internan a los llanos del Beni.

Simultáneamente, el aire confinado entre los cerros se calienta de manera excepcional, por la intrínseca relación establecida entre la radiación solar y la temperatura del aire superficial, según un trabajo realizado con anterioridad por el autor (Torrez 2008). Este calentamiento del aire da como consecuencia un gran movimiento de las masas de aire aguas arriba y sobre el lecho del río. No se conoce exactamente el perfil de las velocidades del viento en altitud, aunque se ha observado que éstas fluyen prácticamente paralelas al lecho del río, a pocos metros sobre su superficie.

Las Fig. 1 muestra el cerro que divide los vientos en el sitio “Las Juntas”. Se puede observar también la profundidad de los valles, así como la escasa cobertura vegetal de sus cerros. Los ríos “La Paz” y “Caracato” en esta época del año llevan una muy reducida corriente, siguen trayectorias sinuosas, aunque van disminuyendo suavemente en altitud cambian de curso repentinamente por la presencia de muros de roca que varias veces obligan al cambio de su curso, se presentan a lo largo de su curso



FIG. 3.— Crecimiento de las plantas y arbustos orientado en la dirección de los vientos. La inclinación permite apreciar la intensidad de los mismos.



FIG. 4.— Nuestra estación meteorológica en el cañadón de “Las Juntas”. Al fondo se puede apreciar el interior del valle.

numerosos pequeños afluentes que provienen de valles con similares características. Las fotografías satelitales de la Fig. 2 permite apreciar la trayectoria de estos ríos por entre los cerros.

El aire caliente que se desestabilice en cualquier parte de la región da lugar a la formación de intensas corrientes de aire a lo largo de los valles, resultando las de máxima velocidad y fuerza las que precisamente emergen desde lo profundo del valle de “Las Juntas” hasta el punto de bifurcación en la confluencia de ambos ríos. En la primera expedición realizada por el río “Caracato” hasta este punto se ha podido registrar intensidades de viento superiores a los 80 km/h . Las fotografías obtenidas de los arbustos que crecen sobre las orillas del río muestran este efecto, que debido a su persistencia durante todo el año orientan su crecimiento en dirección de estos vientos. Efectos similares en árboles y otra vegetación se pueden observar río arriba en los valles que forman los ríos La Paz y Caracato (Fig. 3).

3. METEOROLOGÍA EN LAS JUNTAS

La intensidad y persistencia de los vientos descubiertos, ha dado lugar a la presentación de un proyecto de investigación para el monitoreo y caracterización de este fenómeno en el Instituto de investigaciones Físicas de la UMSA, aprovechando el interés y los objetivos del proyecto Juipit'aya. De ese modo, en el mes de octubre del año anterior el grupo de meteorología del Laboratorio de Física de la Atmósfera ha procedido a la instalación de una estación meteorológica en las proximidades del punto denominado “Las Juntas”. Este sitio que se encuentra aproximadamente a un kilómetro más abajo y sobre el puente que permite la conexión con la localidad de Araca, es una pequeña planicie dotada artificialmente de agua que deriva de la cordillera del Illimani. Está habitada por un comunario dedicado a labores agrícolas, el mismo que ahora funge como vigilante de nuestra estación. La Fig. 4 muestra la instalación de esta estación y permite apreciar sus características.

La estación meteorológica, de procedencia alemana, está cons-

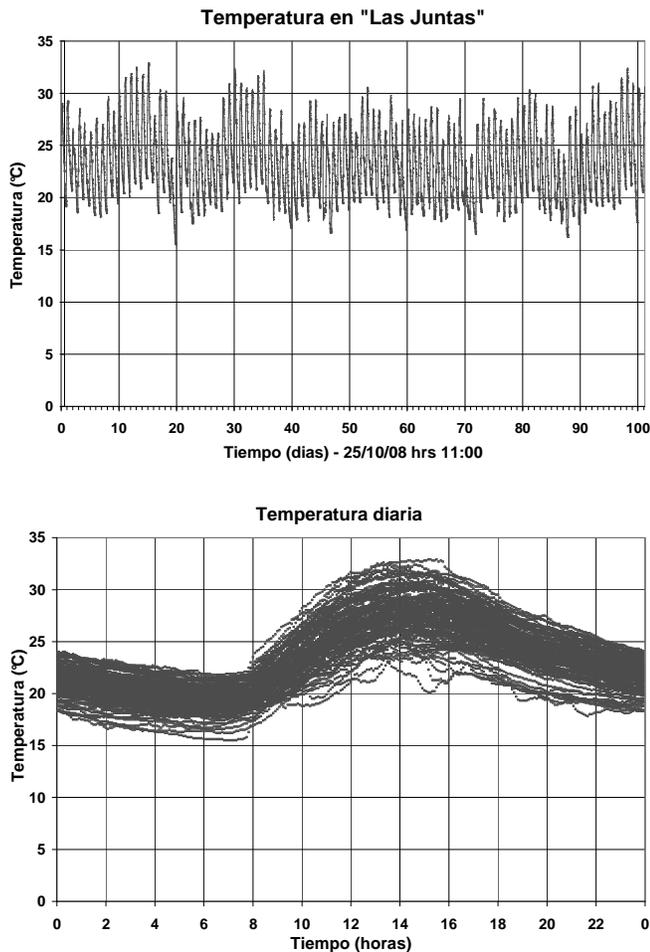


FIG. 5.— Las variaciones de la temperatura en el periodo y las características diarias en el sitio "Las Juntas".

tituida por un panel de control con un sistema de alimentación energizado por un panel solar, regulado y sostenido por una batería. Alberga un sistema de adquisición de datos y dos sensores de precisión atmosférica, todo dispuesto en una caja de acero herméticamente cerrada. En el exterior consta de una torre soporte para los sensores de radiación solar, temperatura y humedad, velocidad y dirección de viento. Su sólida estructura está reforzada adicionalmente con cuatro cables de acero, y toda la estación está protegida por una cerca.

Los primeros datos obtenidos con una frecuencia de cinco minutos durante aproximadamente cien días nos permiten confirmar la fuerza de los vientos, así como su persistencia, con excepción de un intervalo de aproximadamente dos semanas, a poco de instalarse la estación, que muestra extrañamente muy poco o casi ningún flujo de viento. Este intervalo de tiempo, así como los parámetros meteorológicos registrados están siendo estudiados con particular interés.

A modo de primera evaluación de las características meteorológicas de esta región en estos primeros cien días se tiene lo siguiente: La temperatura media del periodo se sitúa alrededor de 23 °C, alcanzando máximos de 32 °C sobre las 16 horas, y mínimos de 17 °C hacia las 6 de la mañana, que se corresponden con la hora de entrada y salida del sol por los cerros.

En cuanto a la humedad relativa, aunque la región es muy árida presenta un promedio diario de aproximadamente 52 %, con valores máximos del 80 % alrededor de las 7 de la mañana y mínimos del 20 % sobre las 14 horas. Las Figs. 5 y 6 muestran todos los registros del periodo en lo que corresponde a la temperatura y la humedad, respectivamente, pudiendo observarse

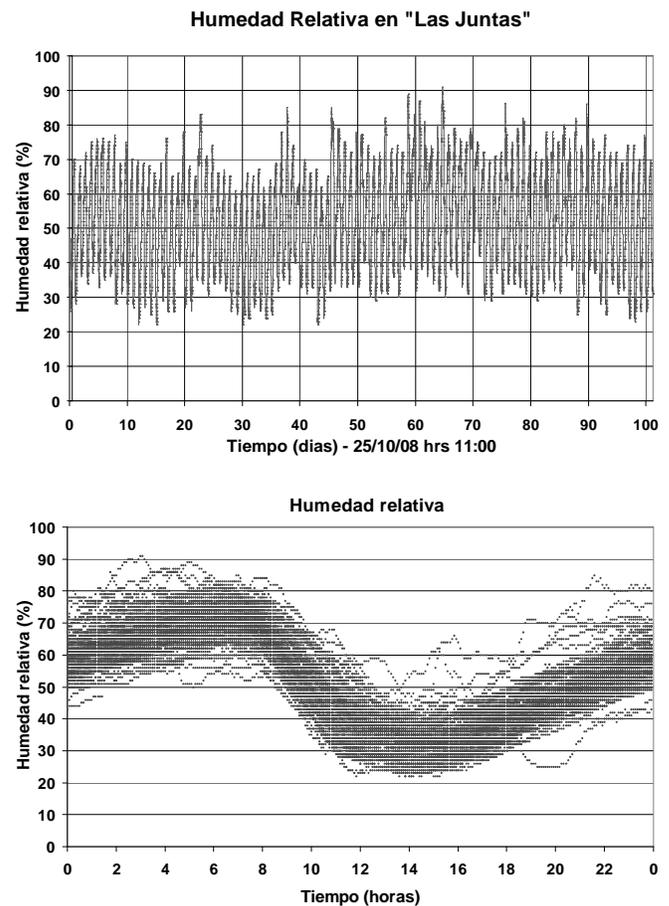


FIG. 6.— Las variaciones de la humedad relativa en el periodo y las características diarias en el sitio "Las Juntas".

gráficamente los valores máximos y mínimos a lo largo de los días.

En cuanto a la radiación solar, Fig. 7, el promedio diario que corresponde sólo a las horas de sol se sitúa alrededor de los 550 W/m^2 , con máximos que superan los 1100 W/m^2 , y como se puede observar en esta gráfica superpuesta de todo el periodo, el número de días con alta nubosidad es bastante numeroso, típicos de este periodo del año. Por otra parte, la gráfica permite apreciar que los cerros acortan y distorsionan apreciablemente las horas de sol directa, y se puede apreciar también la gran participación de la radiación difusa, como efecto de la reflexión sobre los cerros.

La velocidad del viento, que en el presente trabajo es de nuestro máximo interés, presenta en general grandes intensidades alrededor de las 16 horas con valores que superan los 22 m/s , o sea alrededor de los 80 km/h , y obviamente, valores de calma localizados mayormente al inicio del día. El promedio diario de la velocidad del viento en este periodo se sitúa alrededor de los 5 m/s (Fig. 8).

A pesar de lo regular que aparenta ser el comportamiento del viento, la gráfica del registro histórico del periodo (Fig. 8) muestra el intervalo de tiempo entre el 4 y 18 de noviembre con un comportamiento completamente extraño: la velocidad del viento se presenta completamente disminuida, mientras que los demás parámetros meteorológicos permanecen en el límite de sus valores habituales. Este aspecto se encuentra al momento en etapa especial de investigación.

4. EL POTENCIAL ENERGÉTICO

Es bien sabido que la potencia contenida en el flujo de viento es proporcional al cubo de la velocidad instantánea que lleva, así

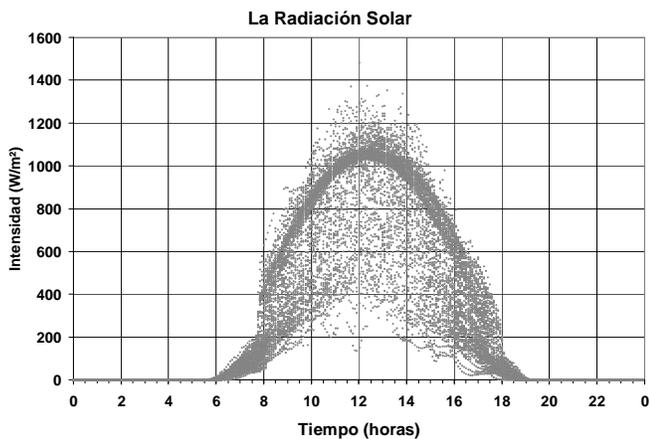
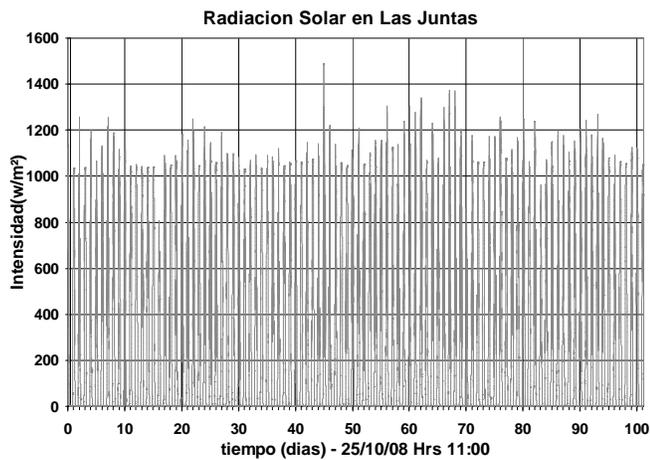


FIG. 7.— Las variaciones de la radiación solar en el periodo y las características diarias en el sitio “Las Juntas”.

como a la densidad del aire que lo compone y a la sección transversal que atraviesa; ésto define la potencia eólica instantánea disponible:

$$P_d = \frac{1}{2} A \rho V^3. \quad (1)$$

Luego, el potencial eólico disponible del lugar vendrá dado como la potencia media eólica por unidad de superficie evaluada sobre un tiempo suficientemente largo (mínimo un año). Para nuestro caso, con sólo tres meses de datos, sólo podremos obtener una tendencia de este potencial, ésto es:

$$\langle P_d \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{2} A \rho V_i^3. \quad (2)$$

Este valor para el sitio “Las Juntas” es de aproximadamente $200 \text{ W}/\text{m}^2$. Luego, la potencia máxima aprovechable por unidad de área, debida a limitaciones físicas que hacen imposible convertir todo la energía cinética en energía útil, será:

$$P_{\max} = \frac{16}{27} P_d \approx 120 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (3)$$

Otro factor muy importante para el aprovechamiento energético del viento es el denominado factor de potencia eólico o factor de irregularidad que se define como:

$$F_e = \frac{\langle V^3 \rangle}{\langle V \rangle^3} \approx 2.98. \quad (4)$$

Que se interpreta como vientos de moderada a alta variabilidad. Finalmente, el índice de turbulencia para el periodo analizado

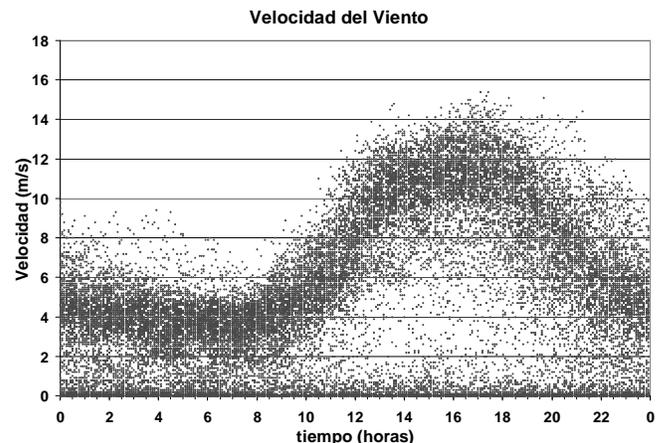
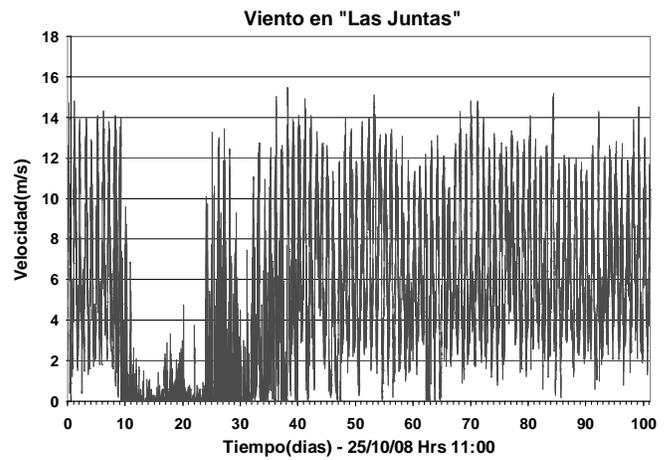


FIG. 8.— Las variaciones de la velocidad del viento en el periodo y sus características diarias en el sitio “Las Juntas”.

resulta en:

$$I_t = \frac{\sigma}{\langle V \rangle} \approx 0.77. \quad (5)$$

Que significa presencia de alta turbulencia.

No obstante los anteriores índices, el flujo de viento por estos valles tiene una particularidad muy importante, es casi unidireccional, es decir tiene una dirección constante (Fig. 10) que en casi todos los casos coincide con la dirección del curso del río y hacia arriba del mismo, y por los experimentos realizados fluye casi de manera horizontal, por lo que, como fuente de energía, es muy conveniente.

Los valores calculados para la potencia media diaria y para la potencia máxima disponible están basados en los datos promediados en el intervalo de medición, es decir cada cinco minutos. Sin embargo, aprovechando la capacidad de registro de valores máximos y mínimos que tiene el sistema de adquisición de datos, también se han registrado las velocidades máximas por intervalo de medición (Fig. 9). En estos registros se pueden observar ráfagas fuertes y muy fuertes que tienen mucha importancia al momento de diseñar un sistema de aprovechamiento.

En la misma forma, el registro de direcciones del viento confirma que siguen una orientación casi permanente. Esta constancia, al igual que las ráfagas, deben tomarse muy en cuenta en los sistemas de conversión, que afortunadamente en este caso pueden resultar en una gran ventaja económica y técnica.

5. CONCLUSIONES

Por los resultados parciales obtenidos hasta la fecha, es posible concluir que el sitio denominado “Las Juntas” presenta condiciones muy favorables al objetivo de aprovechamiento energético

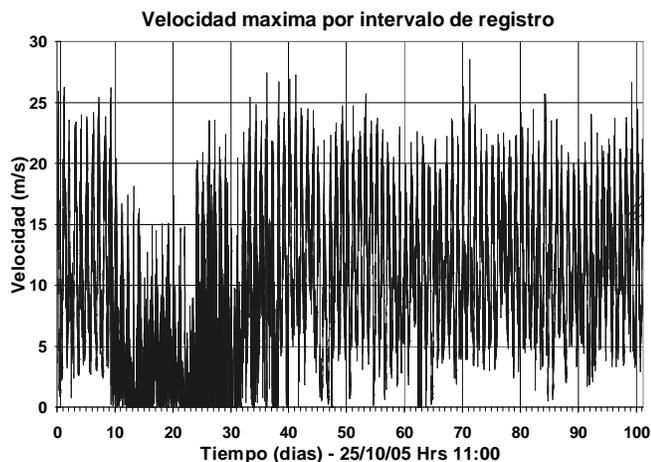


FIG. 9.— Registro de las ráfagas de viento por intervalo de medición. Se puede observar que algunos registros superan los 100 km/h.

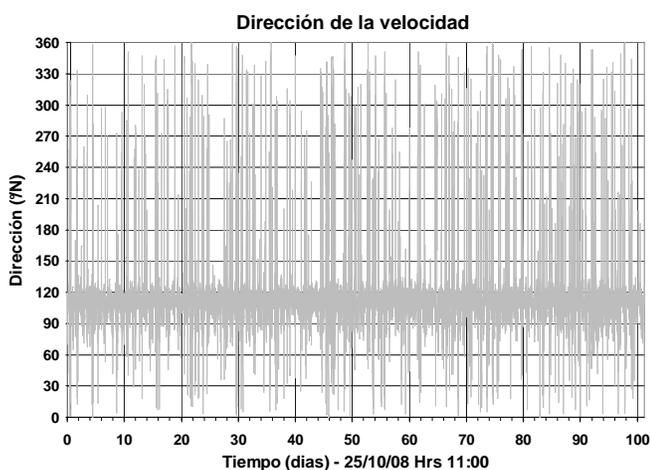


FIG. 10.— Registro de direcciones del viento en el “cañadón de Las Juntas”. Se puede observar que la dirección predominante se sitúa aproximadamente a los 115°, que coincide con la dirección del cañadón con respecto al Norte.

en forma de energía eléctrica. Algunas de éstas son: Se encuentra relativamente próximo a los principales centros poblados del país como las ciudades de La Paz y Cochabamba y algunas poblaciones intermedias en el altiplano. Que en caso de aprovechamiento a gran escala podría también beneficiar a numerosas comunidades asentadas sobre sus valles permitiendo la industrialización de su producción agrícola. Excedentes de esta energía podrían descargarse en el sistema interconectado, principalmente en las horas de mayor demanda, donde coincidentemente se presentan los máximos de la energía del viento. Finalmente podría constituirse en un atractivo turístico dadas las diversas prácticas deportivas, de entretenimiento y recreación que se desarrollan con el viento.

Sin embargo, para transformar estas expectativas en una realidad será necesario ampliar y profundizar el monitoreo del recurso, disponiendo de más estaciones meteorológicas en más sitios, así como incorporar otros equipos para ampliar el estudio a la dimensión vertical, por ejemplo a través de aviones de aeromodelismo, globos sonda, globos anclados, etc., para así establecer también el perfil vertical del flujo de viento y los demás parámetros meteorológicos.

AGRADECIMIENTOS

El descubrimiento técnico del valle de “Las Juntas” y la instalación de nuestra estación meteorológica en este sitio, no hubieran sido posibles sin la ejecución del proyecto “Juipit’aya”, por ello merecen reconocimiento los participantes del Instituto de Meteorología de la Universidad de Munich, quienes nos han orientado sobre la existencia de vientos de valle muy importantes, además de habernos permitido contar con estaciones meteorológicas automáticas que son por ahora nuestro principal instrumento de investigación.

Agradecimiento especial al Sr. Marcelo Trujillo que se desempeña por ahora como vigilante de nuestra estación en este sitio, y del mismo modo a todo el personal del Instituto de Investigaciones Físicas de la UMSA.

REFERENCIAS

- Torrez, R. 2008, Revista Boliviana de Física, 14, 116
 Torrez, R., Ghezzi, F., & Palenque, E. 2006, Las Características del Viento en el Valle del Río de La Paz, Tech. rep., IIF-UMSA

- Villarubia, M. 2004, La Energía Eólica (CEAC)

ESTUDIO DE LA CORRELACIÓN FOTÓNICA EN LA CAVIDAD RADIANTE
UTILIZANDO LA MECÁNICA ESTADÍSTICA NO EXTENSIVA
STUDY OF THE PHOTONIC CORRELATION FOUND IN THE RADIANT CAVITY
USING NON EXTENSIVE STATISTICAL MECHANICS

M. J. ANDRADE & M. A. VISCARRA
Carrera de Física
Universidad Mayor de San Simón
Cochabamba – Bolivia

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo determinar si existe algún grado de correlación entre los fotones de una cavidad radiante utilizando la ley de radiación generalizada obtenida según el formalismo de la Mecánica Estadística No Extensiva. Para tal efecto, se usaron resultados de publicaciones sobre la ley generalizada de la radiación de cuerpo negro, con base a las cuales se estimó un índice entrópico q muy próximo a uno ($q = 0.9999$), coincidiendo con investigaciones similares. Se realizó la evaluación numérica del modelo generalizado y se lo comparó con el modelo convencional de Planck para dos temperaturas diferentes: $2,75\text{ K}$ (radiación cósmica de fondo) y 5777 K (radiación solar). En el primer caso se vio que para que el modelo generalizado se ajuste mejor a los datos que el modelo de Planck, era necesario un valor de q aún más próximo a la unidad. En el segundo caso, sin embargo, con $q = 0.9999$ se obtuvo un mejor ajuste que con el modelo de Planck. Esta comparación condujo a dos conclusiones: 1) A temperaturas bajas la correlación fotónica es muy débil o simplemente no existe. 2) A medida que se incrementa la temperatura, podría comenzar a aparecer, levemente, cierta correlación, expresada en un valor de q que difiere cada vez más de la unidad.

Descriptor: mecánica estadística no-extensiva — mecánica cuántica estadística — termodinámica

Código(s) PACS: 05.90.+m, 05.30.d, 05.70.a

ABSTRACT

This study seeks to determine if there exists a correlation between the photons of a radiant cavity using the generalized law of radiation obtained from non extensive statistical mechanics. Results were used from publications on the general radiation law of black body to estimate an entropic index q close to the unit ($q = 0.9999$). These coincide with similar studies. A numerical evaluation of the generalized model was carried out and compared with the conventional Planck model for two different temperatures: $2,75\text{ K}$ (lower cosmic radiation) and 5777 K (solar radiation). In the first case it was found that the generalized model adjusts better to the data than the Planck model. A value q , even closer to the unit, was needed. In the second case with a value of $q = 0.9999$ a better adjustment to the data was found compared to the Planck model. The following conclusions were drawn from these results: 1) At lower temperatures the photonic correlation is very weak or non existent. 2) With an increase in temperature a slight correlation expressed by q is seen which differs more each time from the unit.

Subject headings: non-extensive statistical mechanics — statistical quantum mechanics — thermodynamics

1. INTRODUCCIÓN

La Mecánica Estadística No Extensiva (o de Tsallis), es un intento de generalizar la estadística convencional teniendo a esta última como caso particular. Su principal característica es que presta atención a la correlación existente entre los entes que componen un sistema termodinámico, a diferencia de la estadística convencional en la que se desprecia dicha correlación. Esto puede verse con más claridad si se habla en términos de la entropía del sistema (Tsallis 1998): si se considera un sistema compuesto por los subsistemas A y B , donde $S_q(A)$ representa la entropía de A y $S_q(B)$ la entropía de B , según la estadística no extensiva la entropía del sistema compuesto estará dada por:

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q) S_q(A) S_q(B), \quad (1)$$

donde el último término de la derecha mide el grado de no extensividad ó de correlación, y depende de un índice q conocido como índice entrópico. Para q igual a uno el último término se anula y la entropía del sistema compuesto es simplemente la suma de las entropías individuales tal como en el caso de la estadística convencional. Pero para valores de q diferentes de uno la no extensividad del sistema se hace evidente, por lo que no se

puede despreciar la correlación entre sus componentes. Con base a esta idea Tsallis desarrolló el formalismo de la estadística no extensiva.¹

Dado que esta nueva teoría es una estadística más general, tiene como casos especiales a las de Boltzmann-Gibbs, que incluye a las de Bose-Einstein y Fermi-Dirac², de modo análogo a la teoría de la relatividad que tiene como caso especial a la mecánica newtoniana (Tsallis 1998). Cabe entonces la pregunta de qué forma tendría la ley de radiación en el entorno no extensivo, y qué diferencia habría con la ley de Planck. La primera interrogante ya fue abordada en diferentes investigaciones, siguiendo procedimientos diversos pero arribando a resultados si-

¹ Hablando estrictamente, la Ec. (1) denota no aditividad en lugar de no extensividad. Sin embargo, esta imprecisión cometida por Tsallis fue aceptada y en la actualidad le da el nombre a la nueva estadística.

² Las estadísticas de Bose-Einstein y Fermi-Dirac no son estrictamente estadísticas diferentes, sólo son los mismos conceptos de la estadística de Boltzmann-Gibbs aplicados a partículas cuánticas indistinguibles. Las mismas consideraciones que se toman en cuenta sobre la indistinguibilidad de partículas cuánticas, bosones o fermiones, se pueden aplicar al razonamiento de Tsallis llevándonos a la versión cuántica de la estadística de Tsallis.

milares (Lenzi & Mendes 1998; Martinez et al. 2001; Buyukkilic et al. 2000; Tirnakli & Torres 1999; Chamati et al. 2004). Es la segunda interrogante la que motiva el presente trabajo. Se plantea que la ley de radiación en el marco no extensivo, por tener una forma más general que la ley de Planck, es aún más precisa y se ajusta mejor a los datos experimentales.

En ese sentido, para fines de comparación se va a utilizar la ley de Planck convencional expresada en términos de frecuencia angular (Huang 1987):

$$u = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{w^3}{e^{\frac{\hbar w}{kT}} - 1}. \quad (2)$$

En cuanto a la ley generalizada, se han recopilado los resultados mostrados en la Ec. (3), donde: CT corresponde a la ley

de radiación obtenida según el procedimiento de Curado-Tsallis (Lenzi & Mendes 1998), OLM corresponde al procedimiento de los Multiplicadores de Lagrange Optimizados (Martinez et al. 2001), y BE-G corresponde al procedimiento de Bose Einstein generalizado (Buyukkilic et al. 2000). Se sabe que los tres procedimientos mencionados son, matemáticamente, equivalentes entre sí (Ferri et al. 2005). Sin embargo, cabe mencionar que los procedimientos CT y OLM son analíticos en tanto que el BE-G viene de una aproximación.

En cuanto a los datos experimentales, se dispone de datos de radiación solar extraterrestre (NASA —) y de radiación cósmica de fondo (MTECH —). La temperatura aceptada en el primer caso es de 5777 K y en el segundo de 2,75 K.

Modelo

Densidad de energía generalizada

$$\begin{aligned} \text{CT:} \quad u_q &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right) \hbar A_n w^n}{Z_q^q} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_{\max}} \frac{1}{s!} \left(\frac{I_n A_n}{[\hbar(1-q)\beta]^n} \right)^s \frac{(1 - (1-q)\beta \hbar w m)^{\frac{q}{1-q} + ns}}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} + ns\right)} \\ \text{OLM:} \quad u_q &= \hbar A_n w^n \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\xi_n^m}{m!} \frac{(1 + (1-q)\beta U_q - \beta(1-q)\hbar w s)^{\frac{q}{1-q} + nm}}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} + nm\right)}}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi_n^m}{m!} \frac{(1 + (1-q)\beta U_q)^{\frac{q}{1-q} + nm}}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q} + nm\right)}} \\ \text{BE-G:} \quad u_q &= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{w^3}{[1 - (1-q)\beta \hbar w]^{\frac{1}{q-1}} - 1} \end{aligned} \quad (3)$$

2. METODOLOGÍA

Por razones de cómputo se ha utilizado el modelo analítico CT y, para la aproximación de partida, el modelo simplificado BE-G. De lo que se trata es de hallar el valor de q que mejor represente a los datos experimentales de radiación solar y de radiación cósmica de fondo. Una vez obtenidos los índices, se analiza en qué caso el valor de q se aproxima más a la unidad (si es que fueran diferentes) y se discuten las posibles causas.

El procedimiento detallado fue el siguiente:

i) Sabiendo que el modelo de Planck se ajusta bastante bien a los datos experimentales de radiación solar para una temperatura de 5777 K, se utiliza el modelo BE-G, por su simplicidad, para hallar el índice entrópico q de partida. Como referencia se tiene que $|q - 1| < 0,0001$ (Tirnakli & Torres 1999; Velazquez & Guzman 2001; Tsallis et al. 1995).

ii) Con el índice adoptado $q = 0.9999$ se procede a evaluar el modelo CT para una temperatura de 5777 K y se lo compara con los datos experimentales de radiación solar. Asimismo, se realiza la contrastación de la ecuación de Planck con los mismos datos experimentales. En ambos casos, se evalúa el grado de ajuste y de esta forma se realiza una primera comparación entre el modelo generalizado y el modelo de Planck.

iii) Para el caso de la radiación cósmica de fondo se sigue el mismo procedimiento que en (ii) pero evaluando en este caso para una temperatura de 2,75 K.

iv) Observando los resultados de (ii) y (iii) se busca el valor de

q que mejor ajuste el modelo CT en comparación con el modelo de Planck. Es decir, se modifica q de manera tal que el modelo generalizado represente a los datos experimentales de mejor manera que el modelo de Planck (si es que fuera posible).

v) Se comparan los índices entrópicos hallados en ambos casos.

3. RESULTADOS

Las curvas de radiación para distintos valores de q según el modelo BE-G se presentan en la Fig. 1.

A partir de las gráficas queda claro que el valor de q debe estar entre 0,9 y 1. Dado que la ley de Planck convencional ($q = 1$) se ajusta muy bien a los datos experimentales es de esperar que el mejor valor de q sea próximo a ese valor. Para probar esta suposición se ha incluido la curva correspondiente a $q = 0,99$ observándose una gran discrepancia con $q = 1$ (en el orden de magnitud) a pesar de haber una diferencia a la centésima en el índice de no extensividad. Esto quiere decir que el valor de q debe ser aun más próximo a la unidad. En ese sentido, y tomando en cuenta las Refs. Tirnakli & Torres 1999; Velazquez & Guzman 2001; Tsallis et al. 1995, se asume como valor de partida $q = 0.9999$.

El siguiente paso es la contrastación de la ley de Planck con los datos de radiación solar y la contrastación del modelo generalizado CT con los mismos datos experimentales. (Fig. 2).

El modelo de Planck presenta una correlación de 99.05% en tanto que el modelo CT una correlación de 99.07%. Ya que el

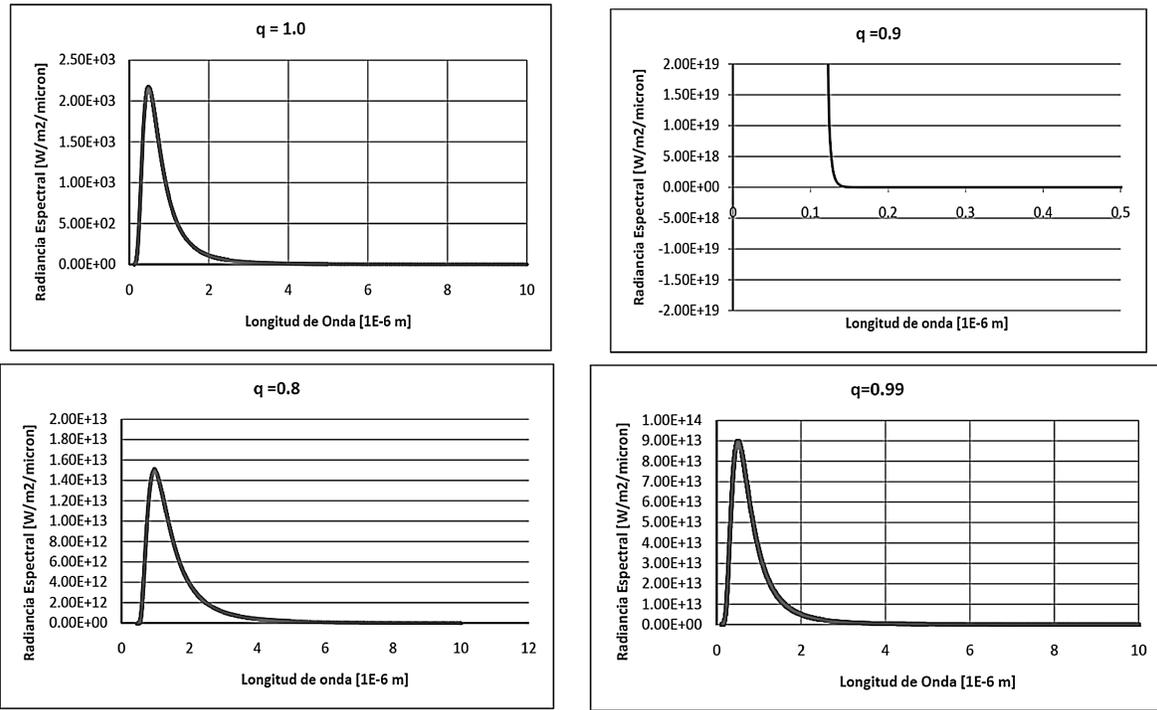


FIG. 1.— Leyes de radiación generalizadas según BE-G para distintos índices q .

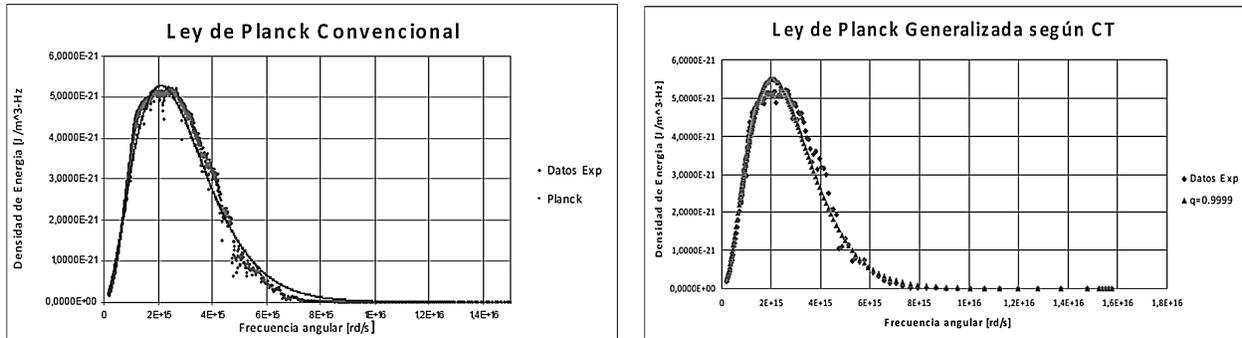


FIG. 2.— Contraste del modelo convencional y del generalizado con datos experimentales de un cuerpo negro a 5777 K (radiación solar).

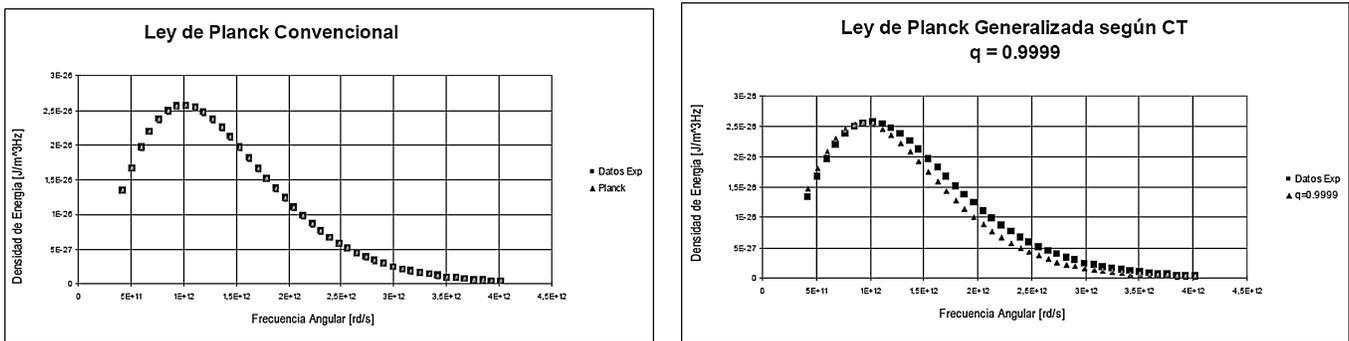


FIG. 3.— Contraste del modelo convencional y del generalizado con datos experimentales de un cuerpo negro a 2,75 K (radiación cósmica de fondo).

ajuste del modelo generalizado es mejor que el de Planck, no se modifica el valor de q .

Ahora, se repite el procedimiento para la radiación cósmica de fondo (Fig. 3).

El modelo de Planck presenta una correlación de 99.9996% en tanto que el modelo CT una correlación de 99.3134%. En este

caso el ajuste de Planck es superior al del modelo generalizado. En consecuencia se busca un valor de q que mejore el ajuste. Se repitió el cálculo con $q = 0.99999$ y se obtuvo un coeficiente de correlación de 99.9994% que prácticamente reproduce el modelo de Planck. (Fig. 4).

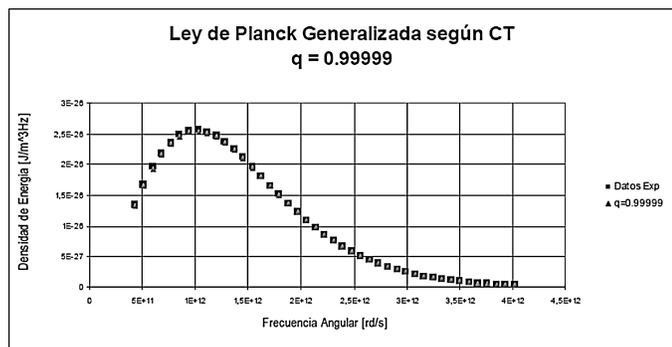


FIG. 4.— Contrastación del modelo generalizado con datos experimentales de un cuerpo negro a $2,75\text{ K}$ (radiación cósmica de fondo).

4. CONCLUSIONES

Queda claro que para la radiación de cuerpo negro el parámetro de no extensividad q debe ser muy próximo a 1, lo que equivale a decir que la interacción fotónica en la cavidad radiante es prácticamente despreciable. Esta es la razón por la que la estadística extensiva obtiene una ley de radiación tan precisa (la ley de Planck convencional). Sin embargo, se ha visto que no hay motivos suficientes para descartar el modelo generalizado con,

³ Nota de los editores: En opinión de uno de los árbitros, la conclusión debería ser que, en este caso, la generalización de Tsallis no se aplica en realidad.

por ejemplo $q = 0,9999$, que si bien es muy próximo no es igual a la unidad. Entretanto no se realicen evaluaciones numéricas más finas ni se obtengan datos experimentales en distintas regiones del espectro electromagnético (además de las analizadas en este documento), ambas soluciones podrían considerarse igualmente válidas.³

Queda aún la posibilidad de una pequeña correlación entre fotones que podría encontrarse en frecuencias mayores al ultravioleta. Esta suposición se basa en los resultados de la comparación del modelo generalizado con los datos experimentales: a bajas temperaturas ($2,75\text{ K}$) la ecuación de Planck se ajusta mejor que el modelo generalizado, pero a mayor temperatura (5777 K) el modelo generalizado mejora y su ajuste es ligeramente superior al de Planck. Si esa tendencia se mantiene, se podría esperar que a mayores temperaturas la no extensividad del gas de fotones se hiciera más evidente, lo que implicaría un cierto grado de correlación fotónica expresado en términos de un índice entrópico q cada vez más alejado de la unidad. Sin embargo, una conclusión definitiva sólo podría darse tras comparar el modelo generalizado con un mayor número de datos experimentales con frecuencias dominantes en el rango de energías altas.

REFERENCIAS

- Buyukkilic, F., Sokmen, I., & Demirhan, D. 2000, NONEXTENSIVE THERMOSTATISTICAL INVESTIGATION OF THE BLACKBODY RADIATION (Faculty of Sciences, Ege University, Turkey)
- Chamati, H., Djankova, A., & Tonchev, N. 2004, BLACKBODY RADIATION IN TSALLIS STATISTICS (Institute of Solid State Physics, Sofia-Bulgaria)
- Ferri, Martinez, & Plastino. 2005, EQUIVALENCE OF THE FOUR VERSIONS OF TSALLIS STATISTICS (IFLP)
- Huang, K. 1987, STATISTICAL MECHANICS (2nd Edition)
- Lenzi, E. & Mendes, R. 1998, Physics Letters A, 250, 270
- Martinez, S., Pennini, F., Plastino, A., & Tessone, C. 2001, Physics A, 295, 224 MTECH. —, http://www.mtech.edu/clsp/~/Cosmic_Radiation_Background.doc
- NASA. —, LINEAR PLOT ETR ASTM E-490, ASTM, NASA
- Tirnakli, U. & Torres, D. 1999, EXACT AND APPROXIMATE RESULTS OF NON-EXTENSIVE QUANTUM STATISTICS (CBPF, Rio de Janeiro, Brazil)
- Tsallis, C. 1998, NONEXTENSIVE STATISTICAL MECHANICS AND THERMODYNAMICS: HISTORICAL BACKGROUND AND PRESENT STATUS (CBPF Rio de Janeiro, Brazil)
- Tsallis, C., Barreto, F. S., & Loh, E. 1995, Physical Review E, 52 No. 2
- Velazquez, L. & Guzman, F. 2001, MICROCANONICAL THERMOSTATISTICAL INVESTIGATION OF THE BLACKBODY RADIATION (Universidad de Pinar del Rio, Cuba)

CRISIS DEL OZONO Y CRISIS CLIMÁTICA: SIMILITUDES Y DIFERENCIAS* THE OZONE CRISIS, THE CLIMATE CRISIS: SIMILARITIES AND DIFFERENCES

FRANCESCO ZARATTI[†]

Laboratorio de Física de la Atmósfera
Instituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz–Bolivia

RESUMEN

La crisis del ozono, generada a partir del invento de unas sustancias industriales no tóxicas (CFC) estalló en la década de los '80, pero rápidamente se llegó a un consenso en cuanto a sus causas, antropogénicas, y a su solución, la interdicción de los CFC. Con base en el concepto de desarrollo sostenible se tomaron de inmediato medidas de carácter político y económico para frenar el daño hecho y restaurar, en tiempos razonables, las condiciones normales de la capa de ozono. El éxito se obtuvo con un raro consenso de científicos, políticos y operadores económicos en torno a las soluciones.

El calentamiento global, a pesar de la evidencia acumulada, sigue suscitando controversias en cuanto a sus causas y dubitaciones en cuanto a las soluciones. Se trata de una crisis más global que la del ozono, con una diferente escala de costos y con implicaciones profundas para el estilo de vida de los países más industrializados, aspectos que hacen más compleja su solución.

Descriptor: cambios globales — física de la atmósfera — interacción y composición químicas

Código(s) PACS: 92.70.j, 92.70.Cp, 92.60.Hp

ABSTRACT

The ozone crisis which arose out of the invention and mass use of CFCs, non toxic industrial substances, came to a turning point in the 80's when a rapid consensus was reached as to its human causes and solution. Based on the concept of sustainable development immediate economic and political measures were taken to stop the damage to the ozone and restore the ozone layer to its normal conditions. Success was obtained through an all too rare consensus held between scientists, politicians and economists. On the other hand global warming despite a growing body of evidence continues to be subject to controversy as to its causes and surrounded by doubts regarding solutions. The climate crisis is more global in nature than that of the ozone. It also has more profound cost and lifestyle implications for the industrialized world. These factors make the solution to the climate crisis more complex.

Subject headings: global changes — atmosphere physics — interaction and chemical composition

1. INTRODUCCIÓN

No es una casualidad que la Ecología, o ciencia del ambiente, haya tenido una verdadera explosión en el seno de las ciencias naturales, a partir y como consecuencia del acelerado desarrollo económico del siglo XX.

Por una serie de causas, crecimiento poblacional y avances tecnológicos, grandes guerras y largos períodos de paz, la globalización cultural y el comercio internacional, para citar algunos, el planeta ha vivido un período de consumo acelerado de sus recursos, con varios efectos colaterales que han tardado un poco en ser entendidos en todos sus alcances por la opinión pública y los gobiernos.

Como consecuencia de ese período de consumo y derroche de los recursos naturales, el mundo ha vivido y sigue viviendo dos grandes crisis globales, de contenido similar, pero de significación muy diferente, una más sencilla, la del ozono, y otra más compleja, la crisis climática.

2. DESCRIPCIÓN DE LA CRISIS DEL OZONO

El origen de la crisis del ozono (Zaratti & Forno 2003) se remonta a los años '30 del siglo XX, cuando en unos laboratorios

industriales se inventaron unos compuestos químicos (a base de cloro, fluoro y carbono), útiles para la industria de la refrigeración, que tenían algo de milagroso: eran inocuos para la salud, no interactuaban con el agua ni con las sustancias más comunes, sobre todo no reaccionaban con los gases atmosféricos y, además eran económicos. Por esas razones los CFC tuvieron un enorme éxito en la industria de refrigeradores, espumas y spray y su producción creció exponencialmente en la posguerra, paralelamente al incremento del nivel de vida de los países desarrollados.

Recién en la década de los '70, investigaciones de laboratorio, a cargo de los químicos Rowland y Molina, pusieron en evidencia una debilidad de esos compuestos: su descomposición en presencia de la radiación ultravioleta y la consecuente alta reactividad del cloro liberado.

Sin embargo, las observaciones atmosféricas no llamaban la atención de los científicos, hasta que en la primavera austral del año 1986 los científicos de la base antártica del Reino Unido detectaron una dramática disminución de la columna de ozono medida sobre su laboratorio. Ya existían, desde 1977, satélites que debían confirmar ese hallazgo, pero por motivos técnicos, no se tenía a la mano el registro de esos datos.

Sin embargo, el descubrimiento del hueco de la capa de ozono revivió la teoría de Rowland y Molina, obligó a la NASA a reconstruir los datos descartados y, gracias a los *media*, despertó la susceptibilidad de la opinión pública en torno al uso de los CFC,

* Conferencia Magistral dictada en el Simposio realizado en ocasión de los XXX años del Instituto de Ecología de la UMSA (La Paz, marzo 2009).

[†] Email: fzaratti@fumsa.edu.bo.

responsables de dañar la capa de ozono del planeta, provocando un incremento de la radiación ultravioleta con su secuela de efectos sobre la salud humana, la vida en general y los materiales.

Las pocas, aunque poderosas, industrias involucradas, opusieron una feroz resistencia, alquilando científicos para contrarrestar a la teoría más aceptada, mientras ganaban tiempo para encontrar sustitutos de los gases incriminados. Hubo dos iniciativas tempestivas y exitosas. Por un lado los científicos acordaron realizar experimentos clave para poner a prueba la teoría de Rowland y Molina en la atmósfera de la Antártica, al tiempo que perfeccionaban los detalles de la misma. Paralelamente, la comunidad internacional, motivada por la presión de la opinión pública, llegó a acuerdos (el primero fue el Protocolo de Montreal) que pueden considerarse el nacimiento del concepto de Desarrollo Sostenible en respuesta al primer riesgo ambiental global, para limitar la producción y emisión de los CFC a la atmósfera. Inclusive la industria del sector se sumó pronto a estas medidas ofreciendo sustitutos eficaces a las sustancias agotadoras de la capa de ozono.

Los padres de la teoría, Rowland, Molina y Crutzen, recibieron el Premio Nóbel de la química el año 1995. Mario Molina es actualmente asesor del Presidente Barak Obama.

Hay que tener cuidado, sin embargo, con los finales felices en la Ciencia.

La recuperación del ozono antártico no es todavía un hecho contundente, ya sea por la lentitud de la solución, ya sea por efectos colaterales del cambio climático

En conclusión, si bien la guerra no está ganada aún, se tienen las armas apropiadas: el conocimiento científico, la voluntad política, la conciencia de la opinión pública y el apoyo de la industria, para llegar a buen término.

3. DESCRIPCIÓN DE LA CRISIS CLIMÁTICA

También en este caso, el problema se origina a partir de datos experimentales anómalos: el incremento de dióxido de carbono en la atmósfera y el incremento de la temperatura promedio del planeta en las últimas décadas, o sea sobre una escala temporal corta.

Todo cambia, pero no todo cambio es bueno: Si bien la temperatura del planeta ha sufrido ciclos de variación bastante amplios en el curso de la historia geológica, inclusive reciente, el crecimiento sostenido de los últimos años ha sido relacionado con las actividades del hombre. Mencionaré, entre las principales, la quema de combustibles fósiles, que se ha disparado desde el siglo XVII, la sobrepoblación humana y el consumo acelerado de los recursos naturales.

No hay que confundir el efecto invernadero con el calentamiento global: el primero es el efecto benéfico de la atmósfera terrestre que retiene parte de la energía solar que impacta en la superficie del planeta para mantener una temperatura media constante a lo largo del tiempo, mientras el calentamiento global es una anomalía de ese efecto, cuando la energía retenida es mayor de la re-emitida al espacio provocando un crecimiento de la temperatura promedio.

Si bien es innegable la *correlación entre concentración de CO₂ y temperatura de la atmósfera*, como principal evidencia de esta teoría, sigue la controversia sobre si el incremento de la temperatura se debe a causas antropogénicas o naturales. La segunda posición sigue siendo minoritaria en el ámbito científico, aunque, es bueno recalcarlo, las industrias involucradas no parecen fomentar esa controversia, teniendo tal vez mejores argumentos en su defensa.

La opinión pública, gracias a los *media* y a iniciativas corporativas, como el video de Al Gore "Una verdad incómoda", ha percibido también en este caso los riesgos de la crisis climática, aunque con mayores elementos de confusión entre mitos y reali-

dades del cambio climático, como ha descrito muy bien Marcos Andrade en el último número de la Revista Boliviana de Física (Andrade 2008).

El aspecto más crítico está en la reacción de los gobiernos, al tiempo que las industrias muestran una actitud mezclada de *resignación* ante la evidencia científica y *soberbia* ante la complejidad de las soluciones a la crisis.

4. COMPARACIÓN ENTRE LAS DOS CRISIS

Repasamos ahora similitudes y diferencias de las grandes crisis globales, en busca de la respuesta a la pregunta: *¿por qué la crisis del ozono se resolvió rápida y globalmente, mientras la de la crisis climática (CC) sufre retrasos, dubitaciones y falta de consensos?*

4.1. Aspectos científicos

Entre las *similitudes* se puede mencionar que los dos son fenómenos globales, en cuanto afectan a todo el planeta. Además ambos dependen de datos experimentales creíbles y con series temporales largas, aunque el CC requiere de datos más amplios en tiempo, espacio y variedad de parámetros. Finalmente ambos requieren del uso de nociones científicas no convencionales: la química heterogénea, para el ozono, y la dinámica no lineal, para el clima.

Existen, sin embargo, diferencias importantes. Se trata de fenómenos físicos bastante diferentes, que no interactúan sustancialmente. Asimismo las causas de ambas crisis son muy diferentes: en un caso unos gases raros que afectan el ozono estratosférico (> 15 km de altura), en el CC unos gases comunes que afectan al balance energético de la troposfera. Además las implicaciones para la salud son más directas en el caso del ozono (efectos de la radiación UV) que en el caso del CC (subida de los mares, retroceso de glaciales, migraciones de seres vivientes, posibles carestías y hambrunas, etc.).

Otras diferencias: La interpretación de los datos es mucho más compleja en el caso del CC, debido a que tratamos con fluctuaciones sobre medias, las cuales, a su vez, tienen fuertes fluctuaciones espaciales y temporales. Es el caso de los registros de la temperatura del aeropuerto de El Alto que muestran una disminución. Además existen múltiples causas que pueden explicar un fenómeno: caso del nevado Chacaltaya y el crecimiento urbano de las ciudades de El Alto y La Paz (*urban warming*).

A diferencia del ozono, en la crisis del CC no se han diseñado experimentos claves. Esto se debe quien sabe a la localización del agujero de ozono en la Antártica, versus la globalización de las causas y de los efectos del CC.

Finalmente existe el riesgo de las exageraciones en ambos casos: ovejas ciegas de la Patagonia; rol de los glaciares en el abastecimiento del agua.

4.2. Aspectos económicos

Las dos crisis implican una *reconversión industrial* que tiene un costo. Pero, mientras la crisis del ozono interesó a un puñado de industrias químicas transnacionales y a programas de subvenciones e incentivos a corto plazo para los países en desarrollo para que pusieran en práctica esa reconversión, en el caso del CC las industrias involucradas son más, abarcan sectores más amplios e implican una escala de costos muchísimo mayor.

Si, además, consideramos que en la mitigación del CC están involucrados sectores como el *transporte*, con uso intensivo de mano de obra y un contorno económico extenso; o la industria de la *energía fósil* (gas, petróleo y carbón) en todas las fases de la cadena operativa y aplicativa, entendemos que lo que está en juego con el CC es un estilo de vida, basado en el consumo sin límites.

Algunas soluciones energéticas que apuntan al litio y los autos eléctricos han vuelto a poner en evidencia a los Recursos Naturales de Bolivia.

4.3. Aspectos políticos

En ambos casos existe un discurso de cooperación de los responsables de la crisis hacia las víctimas. En el caso del ozono, además de frenar la producción de los CFC en los países industrializados, se tuvo que subvencionar a los países menos desarrollados a llevar a cabo la reconversión de manera no traumática. Sin embargo, un programa similar para hacer frente al CC es simplemente quimérico. Por eso se ha optado por Protocolos, como el de Kyoto, que buscan por un lado compensar el consumo excesivo de los países industrializados a costa de la conservación de los recursos forestales en los países menos desarrollados y por el otro disminuir paulatinamente las emisiones de Gases de Efecto Invernadero mejorando la eficiencia de los motores y reemplazando energías fósiles con energías no convencionales.

Sin embargo, existe el grupo de países BRIC (Brasil, Rusia, India y China) que fueron excluidos de esas obligaciones de reducción a pesar de su gran contribución al problema.

En el fondo el problema es como conciliar el desarrollo de cada país con los intereses de la humanidad, sin que los habitantes de ese país resientan demasiado de la crisis en su nivel de vida. Ese problema tal vez no tenga solución.

4.4. Aspectos éticos

Ambas crisis tienen implicaciones éticas, tanto en el ámbito individual que colectivo. La conciencia de la limitación de los recursos de la Tierra, para uso de la presente y futuras generaciones, ha calado hondo desde la crisis del ozono. La gente estuvo dispuesta a renunciar a los spray o a pagar más por los productos sustitutos de los CFC para frenar el deterioro del planeta.

Pero, con el CC el cuestionamiento al estilo de vida consumista se ha hecho más profundo: el freno al deterioro del planeta pasa necesariamente por el freno al consumo, no sólo a un cambio en el consumo. Una manera eufemística de decir lo mismo es pregonar “el uso racional” de los bienes de la tierra. Por ejemplo, la energía. Esta actitud implica necesariamente un aprovechamiento más eficiente de los recursos naturales. El caso del

agua es sintomático.

El otro lado flaco del consumismo es la basura: el exceso de consumo produce un exceso de basura y el reto de sus efectos: manejo, costes y contaminación.

Hay un problema de ética social en las dos crisis. Los orígenes de las crisis están en los países industrializados y, en particular, en el hemisferio norte. Pero las consecuencias afectan a todo el planeta. De hecho, la crisis del ozono se manifestó en el extremo sur del planeta. Asimismo, los países más pobres son aún más castigados por su vulnerabilidad ante los desastres causados por el CC, por su pobreza y la fragilidad de la defensa territorial.

Está en discusión, además, el rol ético de los RRNN renovables (bosques): ¿Es un recurso nacional o planetario? En Inglaterra en el siglo XVIII fue considerado nacional pero para Brasil hoy se exige que sea planetario. El desarrollismo ciego y el conservacionismo secante son dos extremos nocivos. Por tanto, la cooperación más que dádiva es necesidad, compensación y reparación.

5. CONCLUSIONES

La crisis climática es más compleja, en las causas y en las soluciones, que la del ozono, pero es también más extensa y peligrosa.

No es posible excluir posibles vínculos entre los dos problemas, por los efectos sobre la recuperación del ozono que tiene la baja de la temperatura en la estratosfera.

La educación es una de las claves de la solución: mayor conciencia individual, mayor presión colectiva para actuar.

Actualmente se percibe, en la opinión pública y en la comunidad científica, un clima de escepticismo y resignación, debido a la complejidad del problema y a la poca seriedad con que lo enfrentan los países responsables del cambio climático.

Hay, sin embargo, una responsabilidad ineludible en la superación de la crisis actual de la investigación (eficiencia, adaptación, innovación tecnológica) y de la filosofía (comprender cuál es el papel del hombre en la Tierra y sus limitaciones). Como en otras ocasiones de la historia, es de esperar que la capacidad del hombre de investigar, pensar y actuar ante las crisis que amenazan su existencia sea garantía de la superación de las mismas.

REFERENCIAS

- Andrade, M. 2008, Revista Boliviana de Física, 14, 42
Zaratti, F. & Forno, R., eds. 2003, La Radiación Ultravioleta en Bolivia (OPS)

HALOS DE CONTAMINACIÓN EN LA SUB-CUENCA DEL RÍO ANTEQUERA
(PAZÑA – DEPARTAMENTO DE ORURO)
POLLUTION HALOS IN THE SUB WATERSHED OF THE ANTEQUERA RIVER
(PAZÑA, DEPARTMENT OF ORURO)

E. RICALDI[†]

Instituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz – Bolivia

RESUMEN

Mediciones de Sondeos Eléctricos Verticales (SEVs) practicados en la sub-cuenca del río Antequera en el municipio de Pazña del Departamento de Oruro fueron utilizadas para el estudio de problemas de contaminación ambiental por actividad minera. Se realizaron siete perfiles de medición de diferentes longitudes siendo los más extensos los de Avicaya y la Confluencia de Ríos, con 2800 y 1800 metros, respectivamente.

Los datos de superficie fueron utilizados para la definición preliminar de los “Halos de contaminación” en dos dimensiones (mapas). Todas las curvas de sondeo de resistividad eléctrica fueron reducidas a un “modelo de tres capas”, que permite una discusión, también preliminar, de las denominadas “plumas de contaminación” en tres dimensiones, es decir, los volúmenes de “contaminación subterránea”.

Estos datos y los resultados fueron contrastados con valores de mediciones de conductividad eléctrica puntuales, valores de *pH*, y resultados de análisis químicos de muestras de aguas y suelos puntuales medidos por grupos de investigación hidro-química y ampliados por observaciones visuales del estado de los suelos *in situ*.

Una primera interpretación nos permite indicar que aproximadamente el 60% de los terrenos, zona central longitudinal, de la llanura de la sub-cuenca del río Antequera se encuentra contaminada, distribuida entre áreas de alto hasta leve grado, por aguas con influencia minera, ácidas, en la parte norte y por la influencia de fuentes termales, alcalinas, en la parte sur. Un 40% de los terrenos de la sub-cuenca, especialmente el lado occidental y sus alrededores todavía se encuentran libres de la acción contaminadora de estas fuentes que creemos deben preservarse. Para mayor detalle observe el “mapa de riesgo ambiental” presentado al final.

Descriptor: geoelectricidad — inducción electromagnética y conductividad — estudios ambientales

Código(s) PACS: 91.25.-r, 91.25.Qi, 89.60.-k

ABSTRACT

Vertical electrical sounding measurements (VES) were taken at the sub watershed of the Antequera River located within the Pazña Municipality in the Department of Oruro. The results were used to study the environmental contamination problems caused by mining activity in the area. Seven profiles were obtained using measurements taken at different longitudes, from the most extensive at Avicaya to the confluence of the area's rivers at 2,800 and 1,800 metres respectively. Surface area data was used to form a preliminary definition of the “pollution halos” in two dimensions (maps). The curves of the electrical resistance soundings were converted to a three layer model that enables a preliminary discussion of the “pollution plumes” in three dimensions, i.e., the volume of subterranean pollution. Data and results were correlated with exact electrical conductivity measurements, *pH* values, and results from a chemical analysis of soil and water taken by a group of hydro-chemical researchers and complemented by visual observations of the state of the ground *in situ*. A first analysis and interpretation of the results indicates that approximately 60% of the lands in the central longitudinal zone of the planes of the sub watershed of the Antequera River are contaminated. The contaminated areas are distributed between high and low gradient areas in the north water bodies are affected by acidity produced through mining activity. In the south, water quality is affected by the alkaline properties of thermal waters. A percentage of 40% of the sub watershed, especially in the west and surroundings, remains free of contamination (we believe that it must be preserved). Greater detail is shown in the environmental risk map produced as part of the study.

Subject headings: geoelectricity — electromagnetic induction and conductivity — environmental studies

1. INTRODUCCIÓN

La base de la definición del concepto de “contaminación ambiental” es de carácter químico toxicológico. Se refiere a la *presencia de ciertos elementos y compuestos químicos en cantidades excesivas en un determinado medio*, especialmente aquellos elementos disueltos o en suspensión en el agua, puesto que el agua es el principal medio de transporte de sustancias alimenticias;

a su vez es la principal sustancia que es renovada permanentemente en el cuerpo de los seres vivientes (vegetales o animales) y es también el principal constituyente de los mismos.

Las aguas contaminadas resultan nocivas y hasta letales para la subsistencia de la vida en el medio ambiente en consideración.

Las cantidades de la mayoría de los elementos y sustancias químicas y el estado físico-químico admisibles por un ser viviente han sido determinados en arduo trabajo y todavía continúa el estudio de los que son desconocidos.

Estos valores límites se encuentran tabulados y mencionados

[†]Email: ericaldi@fiumsa.edu.bo.

TABLA 1
INDICADORES DE CONTAMINACIÓN POR ACTIVIDAD MINERA EN 1996.
PROMEDIOS NACIONALES.

Metal pesado	COMIBOL		COOPERATIVAS	
	pH	g/l	pH	g/l
estaño	5	1-9 (prom=5)	3	10-90 (prom=50)
wolfram	5	0,005 (bajo)	5	1-9 (prom=5)
antimonio	4	1-9 (prom=5)	5	0,005
zinc, plomo, plata	4	1-9 (prom=5)	5	0,005
oro	agua de concentración de mercurio: 20000 kilos			

en las diferentes leyes civiles para la conservación del medio ambiente que ya se han puesto en vigencia y que todo emprendimiento económico debe observar y cumplir, dimensionando el denominado “impacto ambiental del proyecto empresarial”, si éste es nuevo.

Naturalmente, durante la vida de un estado como el boliviano se han desarrollado emprendimientos económicos por parte de actores privados nacionales e internacionales y por empresas del estado que han producido y abandonado los denominados “pasivos ambientales” y los que actualmente están en desarrollo deben observar las leyes ambientales que el país ha señalado.

2. OBJETIVOS DEL TRABAJO

El presente trabajo está limitado al estudio de la contaminación ambiental por efectos de la actividad minera practicada y la que actualmente se desarrolla en la región de estudio, razón por la cual el concepto de contaminación tiene un fuerte carácter de contaminación sustancial, por sustancias, es decir, es de carácter químico.

Como objetivos específicos del presente trabajo se ha decidido la realización de *sondeos geo-eléctricos de los sedimentos que están rellenando la cuenca del río Antequera, con la finalidad de proporcionar información sobre problemas de contaminación de los posibles recipientes y conductores de aguas subterráneas y de los terrenos de superficie.*

Con este propósito se ha definido la realización de mediciones sobre los siguientes perfiles:

- (i) En el curso de la parte alta del río Antequera, en la subcuenca inicial del río Antequera, en una zona denominada *Totoral*.
- (ii) En la cuenca del río *Cucho Avicaya*.
- (iii) Un perfil transversal al río Antequera en su curso medio, parte más ancha del valle, dominada por una amplia llanura, que llamaremos perfil *Avicaya*.
- (iv) Sobre el curso bajo del río *Urmiri*.
- (v) Sobre el curso bajo del río *Antequera*.
- (vi) Una transversal al río Antequera a la altura de la *Confluencia de los Ríos Antequera y Urmiri*.
- (vii) Sobre el curso del río *Pazña*.

3. CONSIDERACIONES GENERALES

3.1. Fuentes de contaminación

Existen varias fuentes de contaminación minera:

- (a) El potencial contaminante de los yacimientos mineros, conocidos y desconocidos. Las minas Bolívar, Martha y otras operadas por Cooperativas, en el curso superior de la cuenca.
- (b) El potencial contaminante de los restos (pasivos ambientales), de los procesos mineros, desmontes de las minas y las colas de los ingenios, lagunas de decantación de las aguas copajira, los restos del dragado de la parte superior de la parte media de la cuenca; pié de monte, por parte, de la ex empresa minera Estalsa.
- (c) La contaminación por los procesos permanentes de enriquecimiento de los minerales en explotación.
- (d) El potencial contaminante de las fuentes de aguas termales de Urmiri y Pazña en la parte baja de la cuenca.



FIG. 1.— (1) El curso del río Antequera por la quebrada de Totoral, (2) la parte oriental de la parte media y ancha de la cuenca del río Antequera (zonas de remoción de sedimentos por la ex empresa minera ESTALSA), que incluye la laguna de decantación (manchas negras en la fotografía), y (3) la zona de manchas negras y grises de la parte media y baja de la misma, son las regiones de mayor contaminación superficial y de profundidad media.

En las fuentes primarias, en las minas, el o los minerales que en un determinado momento adquieren un valor económico notable, gozan de buena cotización, son los que se recuperan de los depósitos mineros y los que no estén en estas condiciones son los que se dejan como *residuos* o *pasivos ambientales*.

3.2. Contaminación ambiental

El concepto de contaminación ambiental en realidad corresponde a la idea de proceso de contaminación de una región por los elementos y sustancias químicas contaminantes liberados en las fuentes, estos son transportados, difundidos, diseminados y depositados a través de algún mecanismo, de alguna manera, especialmente por las aguas de los ríos y las tormentas en las épocas de lluvias, a niveles inferiores de una determinada cuenca hidrográfica, afectándolos en el sentido de salud ambiental.

Es por demás conocido que *no es posible una recuperación del 100% del mineral comerciable*.

En las faldas aledañas a las minas, yacimientos mineros, se depositan grandes cantidades de caja, roca que encajona las vetas minerales, desmenuzada incluyendo partes de la veta con minerales que no interesan y partes irrecuperables de las que sí interesan, separadas de buena proporción de los minerales con valor comercial por procesos simples de selección a mano o a máquina (por gravitación), pasando a constituir los denominados *desmontes de las minas*.

Los procesos tecnológicos de enriquecimiento de los minerales que se realizan en los ingenios por lo general trabajan con grandes cantidades de agua y reactivos químicos, hidrometalurgia, y generan sustancias contaminantes que pasan a constituir las denominadas *colas*.

Residuos que a futuro se convierten en fuentes de contaminación llegan a denominarse *fuentes de contaminación secundarias* o *pasivos ambientales*.

El agua de las precipitaciones pluviales y las corrientes de aguas permanentes se constituye entonces en el *principal agente de contaminación de un área geográfica*, como las cuencas de

TABLA 2
ANÁLISIS QUÍMICO MEDIANTE ICP-MS EN MUESTRAS DE AGUA TOMADAS
DEL RÍO ANTEQUERA Y LAS TERMAS DE PAZÑA. UNIDADES: mg/l.

Elemento	Límite de detección	Antequera	Termas
Na	0,005	74	2490,97*
Li	0,001	0,655	12,9*
Mg	0,001	27,5	38,4
Al	0,002	16,82*	0,45
Si	0,2	23	285,0
K	0,003	8,5	162,0
Ca	0,7	114,78	95,0
Cr	0,0005	0,003	-0,03
Mn	0,0001	8,5*	0,015
Fe	0,01	0,1	-0,5
Co	0,000005	0,103	0,0008
Ni	0,0003	0,1735	-0,015
Cu	0,0002	0,38	0,055
Zn	0,0005	74,62*	2,62*
As	0,00003	0,00175	0,005
Br	0,003	0,1	1,95
Sr	0,00004	0,625	2,285
Cd	0,00001	0,425*	0,0045
Sb	0,00001	0,0008	0,0235*
Hg	0,0002	-0,001	-0,01
Pb	0,00001	0,0239	0,233*

*Son valores por encima de los máximos permisibles, se los puede considerar como contaminantes.

TABLA 3
ANÁLISIS QUÍMICO DE SEDIMENTOS DEL RÍO ANTEQUERA. †

Elemento	Límite de detección (ppm)	Valores (ppm)
Cu	0,01	96,1—77,5
Zn	0,1	714,0—948,0
As	0,1	520,0—555,0
Cd	0,01	6,22—6,71
Pb	0,01	244,0—152,0

†Indicamos solamente los elementos químicos caracterizados por valores por encima de los máximos permitidos, es decir, los contaminantes.

los ríos donde éstas son descargadas. Las aguas reaccionan con las sustancias y minerales de los desmontes y colas, diluyendo algunas de ellas y transportando en suspensión otras.

Procesos contaminantes que pueden ser estimado, junto con la consideración de algunas otras variables, definen el llamado *impacto ambiental*.

3.3. Elementos y sustancias contaminantes

Para un detenido análisis del efecto toxicológico de los elementos y sustancias químicas, sus cantidades, se remite a los estudios desarrollados por especialistas en el tema. Inmediatamente nos interesan los límites de elementos y sustancias químicas soportables por la vida, vegetal y animal y sobre todo por el ser humano.

En este trabajo nos limitaremos a mencionar tres tipos de elementos y/o sustancias químicas que consideramos contaminantes dentro de ciertos límites:

Los metales pesados: Estos serían removidos de sus fuentes por el agua de las precipitaciones pluviales por percolación, a través de mecanismos químicos todavía no muy bien explicados, y son transportados hacia las zonas más bajas de una cuenca hidrográfica. Depositados sobre terrenos de cultivo representan una peligrosa fuente de contaminación especialmente para la actividad agropecuaria y la vida en general.

Las soluciones acuosas ácidas, que están caracterizadas por bajos valores del *pH*, se constituyen en una extraordinaria amenaza para las sustancias orgánicas, es decir, para el desarrollo de la vida.

TABLA 4
CLASIFICACIÓN DE LOS ELEMENTOS QUÍMICOS SEGÚN SU TOXICIDAD Y OTROS CRITERIOS.

No críticos	sodio (Na), carbono (C), fluor (F), potasio (K), fósforo (P), litio (Li), magnesio (Mg), hierro (Fe), rubidio (Rb), calcio (Ca), azufre (S), estroncio (Sr), hidrógeno (H), cloro (Cl), oxígeno (O), bromo (Br), silicio (Si), nitrógeno (N) y aluminio [‡] (Al)
Tóxicos (insolubles o no frecuentes)	titanio (Ti), galio (Ga), hafnio (Hf), La, Zr, Os, W, Rh, Nb, Ir, Ta, Ru, Re y el bario (Ba).
Muy tóxicos (relativamente disponibles)	berilio (Be), arsénico (As), oro (Au), cobalto (Co), selenio (Se), mercurio (Hg), níquel (Ni), telurio (Te), tantalio (Ta), cobre (Cu), paladio (Pd), plomo (Pb), estaño (Sn), cadmio (Cd), bismuto (Bi), cromo (Cr) y el platino (Pt).

[‡]Tóxico para organismos que viven en los suelos y el agua.

Las soluciones acuosas alcalinas (básicas), que están caracterizadas por altos valores de *pH*, también son consideradas como dañinas de manera general, pero todas las soluciones caracterizadas por valores no muy altos de *pH* son admitidas por una gran variedad de especies de vida tanto vegetal como animal, es decir, que ambientes básicos son tolerables por la vida.

4. LA CUENCA DEL RÍO ANTEQUERA, ZONA DE ESTUDIO

4.1. Ubicación

Se trata del estudio de la sub-cuenca, dentro del área de influencia de la Cuenca del Lago Poopó, del río Antequera, localizado dentro del Municipio de Pazña, del Departamento de Oruro. Los orígenes de este río se los encuentra en las alturas montañosas, falda occidental de la Cordillera de Livichuco. Para su rápida localización se pueden tomar en cuenta al norte el Cerro Soincharcomani, por cuya falda oriental discurre el río Antequera y al sur la línea de latitud que pasa por la localidad de Pazña.

Este terreno se encuentra entre 66° 40' y 67° 00' de longitud oeste y entre los 18° 30' y 18 45' de latitud sur geográficas, respectivamente.

4.2. Accesibilidad

La sub-cuenca del río Antequera es transitable durante todo el año y está muy bien comunicada con los grandes mercados, las grandes ciudades como Oruro y La Paz a través del camino de primera clase inter-departamental entre Oruro y Potosí que es pavimentada y en la parte interna se tienen los caminos que comunican Pazña con la mina Bolívar y el camino de Bolívar a la localidad de Poopó por la parte norte (ver Fig. 6).

4.3. Estrategia de trabajo

El estado de contaminación de los terrenos de la cuenca del río Antequera resultará definido en un momento determinado de tiempo por los resultados que arrojen:

(I) Los análisis químicos de por lo menos una muestra de agua correspondiente a los puntos de la red de medición planificada con este propósito, que tienen que ver con la identificación de los elementos y sustancias químicas y sus cantidades en las muestras, que pasan a ser comparadas con cantidades de estos mismos elementos y sustancias tomados como patrones, definirán cuáles de estas se encuentran en cantidades anómalas para su calificación como contaminantes o no.

(II) Los trabajos físicos (geo-físicos) consistentes en la medición de por los menos una magnitud, que sea índice del grado de contaminación del ambiente, es decir que, tenga relación con problemas de contaminación.

Indicadores químicos que se utilizan con este propósito son:

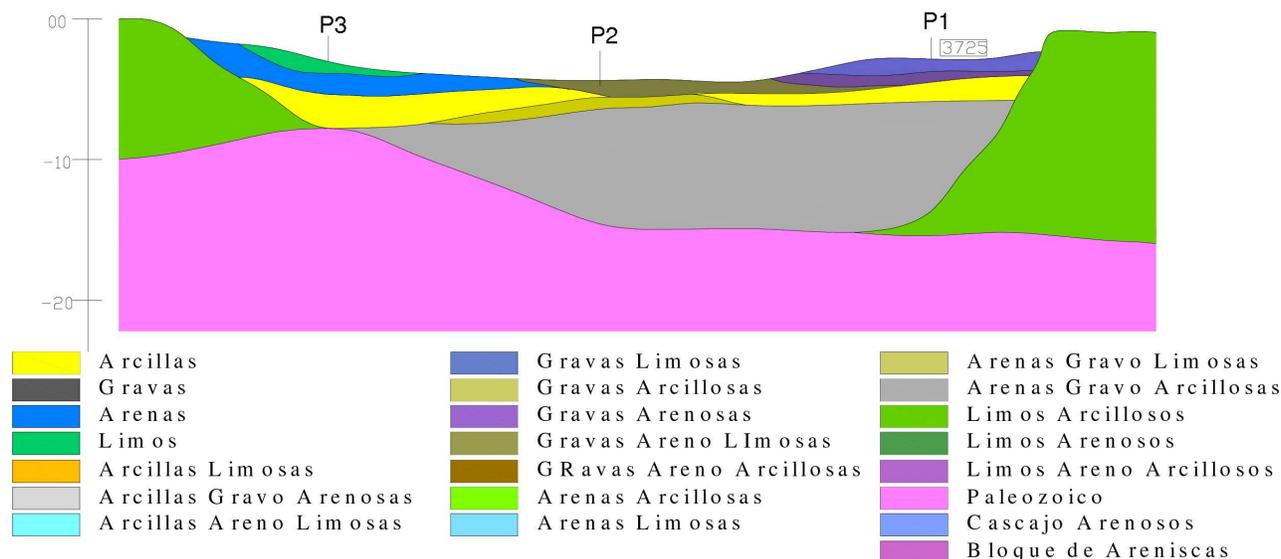


FIG. 2.— Sección geológica correspondiente al perfil del río Urmiri. Escala $H = 1 : 500$, $V = 1 : 500$. La versión a colores puede encontrarse en la página de la RBF en <http://fiumsa.edu.bo>.

mg/Kg ó *ppm*: Es la cantidad, en *mg*, de la sustancia considerada como contaminante contenida en un *Kg* de la muestra de material tomada del suelo de un terreno de cultivo o de una mina, y en *g/l* (gramos por litro) en muestras de agua.

El *pH*: El nivel de contaminación de los suelos y las aguas es rápidamente verificado al medir la magnitud denominada el *pH* de las muestras. El *pH* está definido por una escala logarítmica del equilibrio entre los iones de hidrógeno (H_3O^+) y los iones hidróxido (OH^-) en un líquido.

Un valor de *pH bajo* corresponde a una alta concentración de iones de hidrógeno, mientras más iones de hidrógeno estén presentes, menos iones de hidróxido habrá y la *solución* será más *ácida*.

Un *pH alto* corresponde a una baja concentración de iones de hidrógeno. En este caso habrá más iones hidróxido y la *solución* será más *básica*.

La determinación del *pH* se realiza midiendo diferencias de potencial producidas por dos líquidos separados por una membrana, debido a la actividad iónica del hidrógeno de la solución de la cual se desea averiguar su *pH*. En la Tabla 1 se presentan promedios nacionales del *pH* correspondientes a la actividad minera de 1996.

En las Tablas 2 y 3 se presentan resultados de estudios químicos realizados por el Departamento de Hidro-química de la Carrera de Química de la FCPN de la UMSA y otras instituciones, que son consideradas para la evaluación de los resultados del presente trabajo.

Y para clarificar mejor el concepto de contaminación, en la Tabla 4 se adjunta la importante clasificación de los elementos químicos según su toxicidad.

El plomo, zinc y el cadmio estarían presentes principalmente en las muestras de aguas superficiales de los ríos con influencia minera. El arsénico y el hierro en las aguas superficiales de todos los ríos, por lo menos en los ríos de la zona de estudio.

Aguas ácidas corresponden a aguas superficiales de los ríos con influencia minera. Un ejemplo notable se tiene en las aguas de la laguna de decantación en la zona de gravas revueltas por la ex empresa minera Estalsa, En este cuerpo de agua no se observan rastros de desarrollo de vida vegetal ni animal, en la parte central alta de la cuenca del río Antequera.

Aguas alcalinas son las que provienen de las fuentes termales de Urmiri en nuestro caso, del este de la parte central baja de la cuenca del río Antequera. Claramente se observa que estas aguas

permiten el desarrollo de ciertas especies de vida tanto vegetal como animal, aunque no en abundancia, o la inversa, que ciertas especies animales y vegetales soportan esta calidad de aguas.

Las aguas de mina, copajira, son ácidas, caracterizadas por valores bajos de *pH* y transportan metales pesados en medidas de gramos por litro, como ya se vio.

Indicadores físicos que con este propósito se utilizan son:

La *conductividad eléctrica*: Valores altos de esta magnitud son indicativos de un alto nivel de contaminación de las aguas, se mide en *Siemens/m* ó $\mu S/cm$.

La *resistividad eléctrica*: Calculada a partir de la realización de *Sondeos Eléctricos Verticales* (SEVs), se mide en *Ohm/m* y es otra magnitud apropiada para el estudio de problemas de contaminación ambiental.

5. TRABAJO EXPERIMENTAL: LA RESISTIVIDAD ELÉCTRICA DETERMINADA POR EL MÉTODO GEOELÉCTRICO

El presente trabajo está dedicado a la determinación de la distribución los valores de resistividad eléctrica sobre un corte, en sección, de un terreno. Distribución de la resistividad eléctrica sobre un plano, sección, con ejes *Z* y *X*, constituido por un perfil, línea *X*, de medición localizada sobre la superficie de la tierra, y la profundidad de inspección o exploración, eje *Z*, que de manera general es denominada *sección geoelectrica transversal* o simplemente *sección en corte*.

Sobre una línea simétrica al punto de medición en dirección de la línea del perfil, en su caso transversalmente, se disponen cuatro *electrodos*, dispositivos destinados a lograr el contacto entre el terreno y el instrumento de medición. *Dos electrodos son utilizados para introducir corriente eléctrica (Amperaje)* en el terreno y *dos para medir la diferencia de potencial (voltaje)* presente entre los mismos. De manera general, la distancia de separación de los electrodos de corriente es mucho mayor que la distancia de separación entre los electrodos de voltaje.

Cuando estamos realizando el *SONDEO*, la separación entre los electrodos de corriente es incrementada. Entonces, en un formulario, vamos registrando los valores de la corriente eléctrica (*I*, en amperios), el voltaje (*V*, en voltios) para cada nuevo valor de la mitad de la distancia de separación de los electrodos de corriente ($AB/2$, en metros) y en algunos casos, cuando se hace necesario, la nueva distancia de separación entre los electrodos de voltaje (MN , en metros).

Con base en estos datos y otro denominado factor geométrico, *K*, calculamos los *valores de las resistividades eléctricas para*

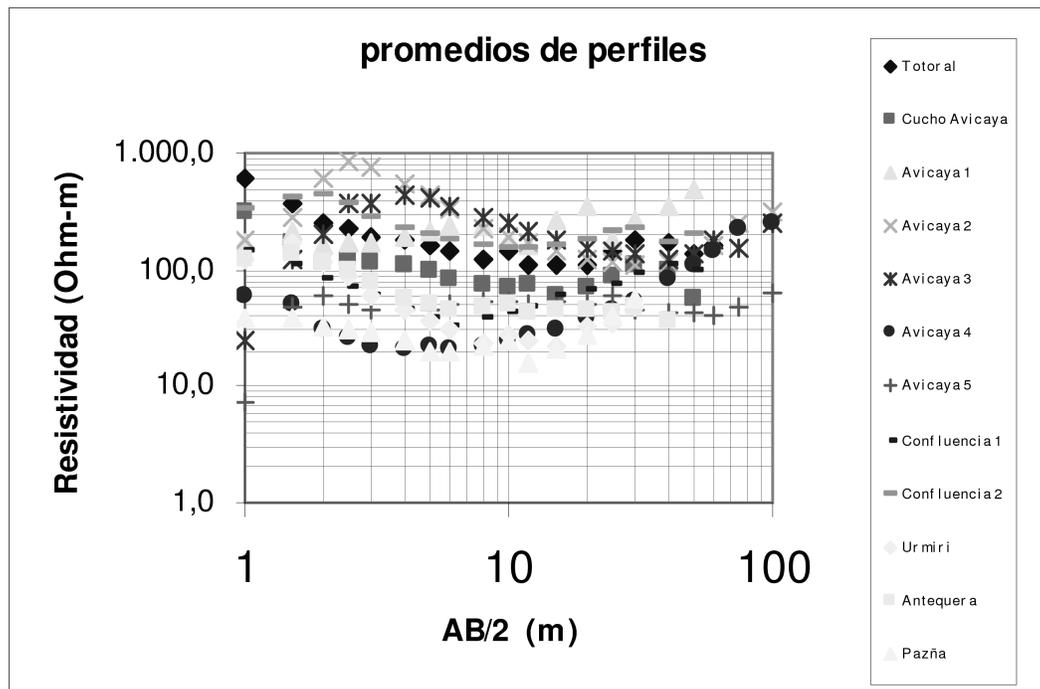


FIG. 3.— Curvas de resistividad para los siete perfiles practicados.

TABLA 5
CARACTERÍSTICAS DE LOS PERFILES.

Zona de perfil	Longitud del perfil (m)	No de puntos de sondeo
Totoral	100	6
Cucho Avicaya	80	4
Avicaya	2800	28
Confluencia de Ríos	1800	10
Urmiri	10	3
Antequera	10	3
Pazña	8	2

cada valor de $AB/2$.

5.1. Curvas de resistividad

Con el par de valores, del formulario, correspondientes a las distancias $AB/2$ y sus correspondientes resistividades eléctricas, en un sistema de coordenadas con escalas logarítmicas producimos una gráfica de distribución de resistividades en función de las pseudo profundidades ($AB/2$) para cada sondeo en cada punto de medición, denominadas *curvas de resistividades*.

Estas curvas constituyen uno de los productos de los resultados del trabajo experimental realizado en la zona de estudio que se utilizarán con propósitos de estudios de contaminación ambiental, en 1D.

Obtenemos la misma cantidad de “curvas de sondeo” por “puntos de medición” que contenga el perfil.

5.2. Secciones geoelectricas

Este método, además de resolver problemas de estructura geológica del terreno por debajo de la superficie de la tierra a lo largo del perfil de exploración, nos proporciona las denominadas *secciones geoelectricas*, una imagen de la distribución de la resistividad eléctrica (Ohm-metro) en función de la profundidad (Z), que se constituyen en otro de los productos, esta vez en 2D, que se adecúan para una interpretación de contaminación ambiental.

Los trabajos prácticos se realizaron del 1 al 15 de octubre de 2008, sobre los perfiles de medición indicados en los objetivos,

con equipos de medición proporcionados por el Instituto de Hidrología e Hidráulica (IHH-UMSA) de la Carrera de Ingeniería Civil de la Facultad de Ingeniería de la UMSA y de la empresa GEOFING Srl. La logística corrió por cuenta del Instituto de Investigaciones Físicas (IIF-UMSA) y el apoyo económico fue del Instituto de Investigaciones Químicas (IIQ-UMSA), ambas de la Facultad de Ciencias Puras y Naturales, todas de la UMSA.

5.3. Características de los perfiles

Las características correspondientes se muestran en la Tabla 5 y como ejemplo de una *sección geoelectrica* presentamos en la Fig. 2 una *sección geológica* que corresponde al perfil sobre el Río Urmiri.

6. RESULTADOS E INTERPRETACIÓN

6.1. Resultados

6.1.1. Inter-comparación de las curvas de resistividad eléctrica versus pseudo-profundidad

En la Fig. 3 se muestran las curvas de resistividad contra distancia $AB/2$ para los siete perfiles practicados: Cinco correspondientes a Avicaya, dos de Confluencia de ríos y una por cada perfil corto (Totoral, Cucho Avicaya, Urmiri, Antequera y Pazña), doce curvas en total.

Se observa que las mismas quedan definidas alrededor de diferentes niveles de valores de resistividad eléctrica, tómesese en cuenta que las escalas son logarítmicas.

En la Fig. 4(a): Los cinco tramos que conforman el gran perfil de Avicaya. La serie 1 corresponde al tramo del extremo occidental y la serie 5 al tramo del extremo oriental del perfil.

Se puede advertir variación en la distribución de los valores de la resistividad en superficie, valores alrededor de 100 Ohm – m a media profundidad y variación de estos valores en profundidad.

En la Fig. 4(b): Los dos tramos del perfil Confluencia de Ríos. La serie 1 corresponde al tramo occidental y la serie 2 al tramo oriental.

El tramo oriental a profundidad mantiene un valor constante de resistividad y cuenta con valores bajos en superficie. El tramo

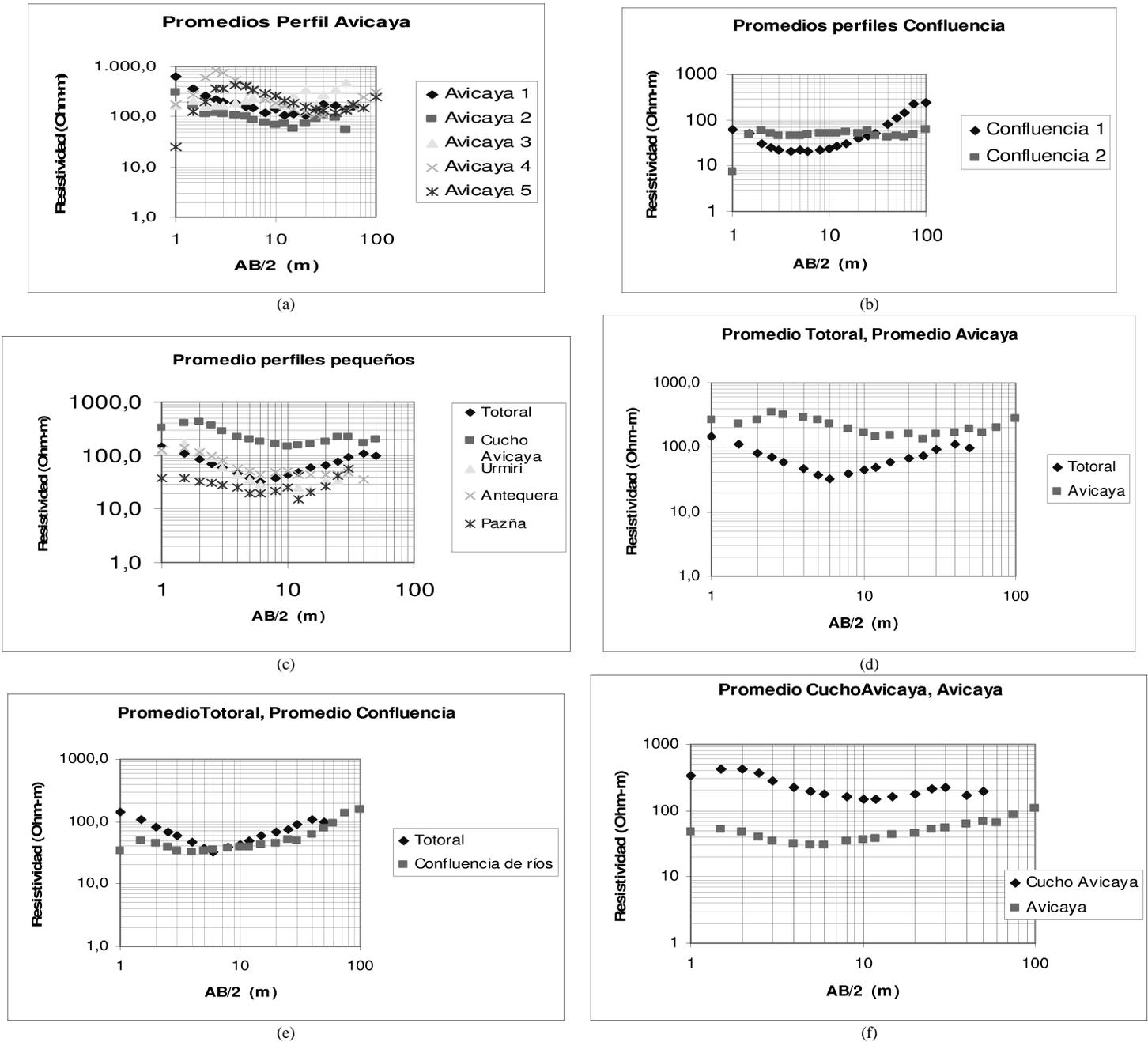


FIG. 4.— Curvas de resistividad contra distancia.

occidental es más variable, presenta valores bajos a mediana profundidad.

En la Fig. 4(c): Los perfiles cortos: La serie 2, correspondiente a Cucho Avicaya, se caracteriza por valores más altos de resistividad, indicativo que esta zona está menos contaminada que las otras. Acompañan las curvas de Ttotal, Urmiri, Antequera y Pazña.

En la Fig. 4(d): Curva promedio de Ttotal comparada con la curva promedio de Avicaya (de todas las cinco, anteriormente mencionadas). La serie 1, correspondiente a Ttotal, muestra valores menores que los correspondientes a Avicaya (serie 2).

La zona de Ttotal se encuentra más contaminada que la de Avicaya.

En la Fig. 4(e): La curva promedio de Ttotal (serie 1) comparada con la curva promedio de Confluencia de Ríos (de dos mencionadas líneas arriba, serie 2).

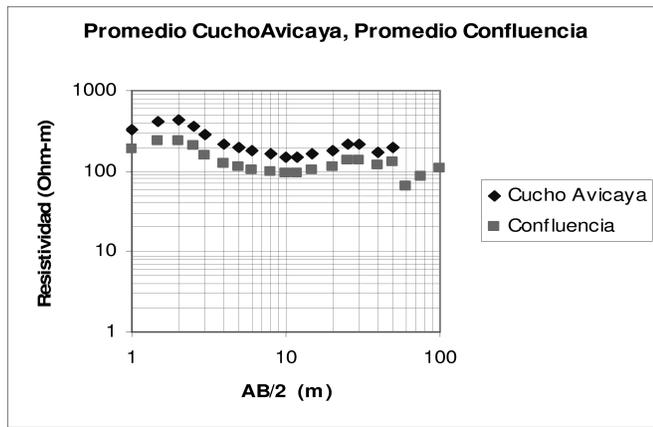
Confluencia de Ríos muestra valores menores, especialmente en superficie, por tanto estaría más contaminada que Ttotal, parte de los elementos contaminantes están dispersos en una amplia zona; la otra fracción está más concentrada en el curso actual del río Antequera. Posiblemente los elementos contaminantes ya no son los mismos que en la parte alta de la cuenca, pues en esta zona se observa un insipiente desarrollo tanto de la vida vegetal como animal.

En la Fig. 4(f): La curva de Cucho Avicaya (serie 1) tiene valores mayores que los de la curva correspondiente a Avicaya (serie 2).

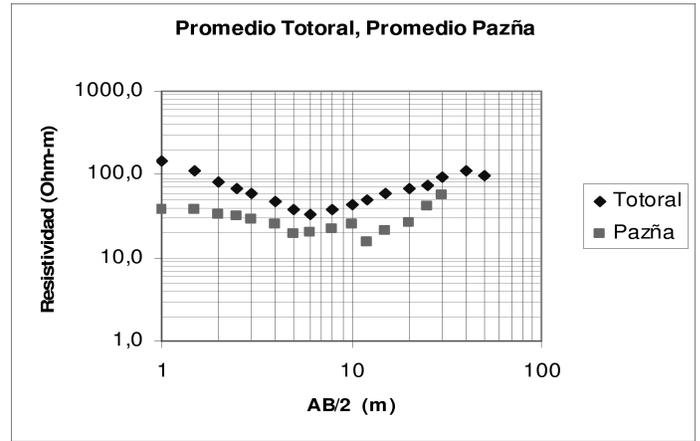
Claramente el área de Cucho Avicaya está libre de contaminación minera y no así los terrenos de Avicaya.

En la Fig. 5(a): La curva de Cucho Avicaya (serie 1) tiene valores mayores que los de la Confluencia de Ríos (serie 2).

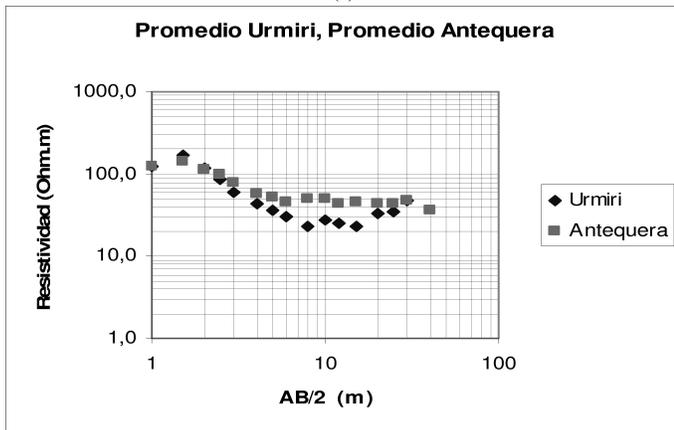
Se vuelve a confirmar la buena calidad de terrenos de Cucho



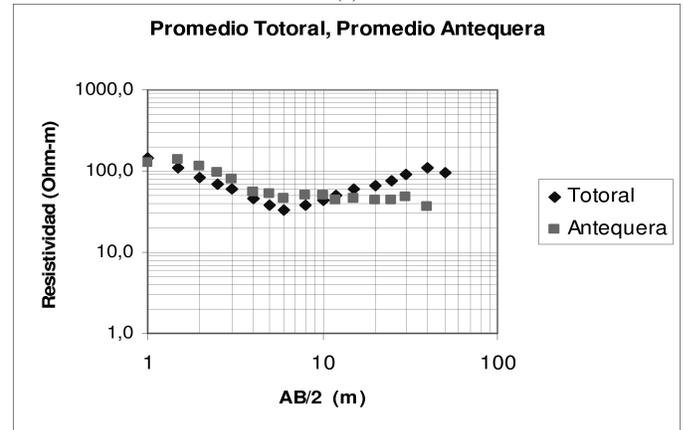
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 5.— Curvas de resistividad contra distancia (continuación).

Avicaya. El área de la región de Confluencia de Ríos está contaminada (de manera general y mucho más en su parte occidental).

En la Fig. 5(b): La serie 1, correspondiente a Totoral, indica que esta zona está menos contaminada que el área de Pazña (serie 2). Debe indicarse, no obstante, que los componentes contaminantes seguramente ya no son los mismos, pues se observa que la región (agua y tierra) de Pazña permite la subsistencia de cierto tipo de vegetales.

En la Fig. 5(c): Se observa que los niveles de contaminación en ambos ríos son idénticos, aunque difieren en profundidad, es mayor en Urmiri (serie 1) que en Antequera (serie 2).

Los elementos contaminantes en ambas sub-cuencas son diferentes.

En la Fig. 5(d): En superficie el grado de contaminación en ambos puntos es casi igual (menor en Antequera). En profundidad, la contaminación es mayor en Totoral que en Antequera.

Antequera puede ser considerada como una zona de concentración de material contaminante.

6.1.2. Modelo de tres capas – Modelo tridimensional. Subdivisión de la profundidad en partes de inspección

Se ha procedido a subdividir la profundidad de inspección en tres partes fundamentales, es decir, el o los modelos reales son reducidos en todos los casos a un modelo de tres capas.

Cada una de estas capas está caracterizada por su correspondiente valor promedio de resistividad eléctrica:

Parte superficial: De la superficie de la tierra hasta 1,5 m, aproximadamente.

Profundidad intermedia: Entre 1,5 y 10 m.

Parte profunda: De 10 m en adelante.

Los resultados obtenidos se reportan en la Tabla 6.

6.2. Interpretación

De la inter-comparación de las curvas de resistividad promedio de las distintas zonas de investigación sacamos las siguientes conclusiones particulares:

— Las curvas de resistividad eléctrica versus profundidad definen diferentes niveles de resistividad para las diferentes zonas de inspección.

— La curva promedio de resistividad del valle de Cucho Avicaya tiene los valores más altos, confirmando su calidad de zona no contaminada o de menor contaminación.

— La curva promedio de resistividad en la angostura del río Pazña tiene los valores más bajos, confirmando su calidad como zona más contaminada de la cuenca del río Antequera.

— La curva promedio de resistividad correspondiente al angosto valle de Totoral tiene valores tan altos como los del río Pazña, consolidando su calidad de segundo punto más contaminado de la cuenca.

— La curva promedio de resistividades de la zona de Confluencia de Ríos tiene valores mayores que el del perfil de Avicaya, indicando que la primera es menos contaminada que la segunda.

— Las curvas de resistividad promedio correspondientes al río Antequera y al río Urmiri son aproximadamente de igual nivel; sin embargo, sus aguas tienen diferentes orígenes y cursos lo que nos conduce a pensar que los elementos contaminantes en ambos ríos no son los mismos.

— Las curvas de resistividad promedio del río Antequera, del río Urmiri y del río Totoral tienen aproximadamente el mismo

TABLA 6
VALORES PROMEDIO DE RESISTIVIDAD ELÉCTRICA ($Ohm - m$) PARA
DISTINTAS PROFUNDIDADES CON EL MODELO DE TRES CAPAS.

zona	Profundidad		
	superficial	media	profunda
Totoral	205	7	140
Cucho Avicaya	300	129	213
Antequera	137	40	40
Urmiri	164	20	1600
Pazña	40	25	5000
Confluencia 1	79	18	6000
Confluencia 2	27	100	2500
Avicaya 1	747	100	180
Avicaya 2	239	100	50
Avicaya 3	105	15	1200
Avicaya 4	256	12	29000
Avicaya 5	94	20	228

nivel, sus aguas están contaminadas.

El ensayo de la distribución de resistividades promedios en un modelo de terreno de tres capas nos proporciona las siguientes conclusiones:

A. En la superficie, las zonas más contaminadas en orden de importancia, debido a los bajos valores de resistividad eléctrica que los caracteriza, son:

— La zona del río Pazña, confinado casi totalmente al curso del río, por aguas con influencia minera y aguas de origen termal.

— La región de la Confluencia de los Ríos, ambos lados tanto occidental como oriental, siendo la más contaminada la parte oriental. Representa áreas de terreno de tamaño mediano con influencia de aguas alcalinas, es decir de origen termal.

— Las zonas correspondientes a los tramos 4 y 5 del perfil de Avicaya, es decir, la zona más oriental del perfil, justo al este del camino que cruza el perfil, que conduce de Pazña a la mina Bolívar, que representan extensas áreas de terreno de la parte oriental de la llanura de la cuenca del río Antequera, están contaminadas por influencia de aguas ácidas generadas por actividad minera.

B. En profundidades medias, las regiones más contaminadas son:

— Totoral es la más contaminada. En esta zona se habrían concentrado las aguas con mayores índices de contaminación.

— Antequera es otra área crítica aunque con diferentes características; junto con Avicaya 5 son las que sufren por efectos de contaminación por actividad minera actual y pasada.

— Urmiri y Confluencia de Ríos 1 están contaminadas por aguas termales.

— Pazña sufre contaminación por la mezcla de aguas de ambos tipos de fuentes de contaminación.

C. A grandes profundidades se señalan a:

— Antequera, posiblemente contaminada por aguas provenientes de fuentes termales.

— Avicaya 2, por las mismas razones y en esta zona se ha detectado la presencia de una falla tectónica notable en la base del sinclinal que dio origen a la cuenca del río Antequera.

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

7.1. Conclusiones específicas

— La contaminación, por efecto de la actividad minera que se practica en la parte alta de la cuenca, es mayor justamente en esta parte y en la zona central alta (la cual es denominada pié de monte) comparada con la contaminación existente en las partes central baja y baja propiamente dicha.

La contaminación se torna mayor en las zonas donde la sección del conducto de fluidos se reduce, es decir, en las angosturas de los ríos y de la cuenca, seguramente por efectos de concentración —ejemplos: Totoral y Pazña—, y es menor en las

zonas donde la sección del ducto se hace ancha, por efectos de dispersión —por ejemplo en Avicaya y la zona de la Confluencia de Ríos.

Aparentemente no hay un fenómeno de dilución de elementos contaminantes, concentración de las sustancias en dependencia de la distancia a sus fuentes. Esto tiene que ser estudiado desde el punto de vista químico y si existiera dilución se tendrá que averiguar de cuáles elementos se trataría y por qué.

El valle del río Cucho Avicaya estaría libre de fenómenos de contaminación, especialmente por influencia de actividad minera, debido a que dentro de esta micro-cuenca no se han producido hasta el momento actividades de este tipo, pero para declararlas categóricamente como zona libre de contaminación hay que averiguar que en la misma no estén presentes otras fuentes de contaminación como la natural, aguas termales por ejemplo.

Las profundidades medias serían las más contaminadas en todas las regiones de manera general, esto se debería a fenómenos de percolación e infiltración de las aguas superficiales para pasar a constituir cuerpos de aguas subterráneas contaminadas y en otros casos, por filtración desde las profundidades de aguas termales, portadoras de elementos disueltos de carácter contaminante, por ejemplo, el caso del tramo de la Confluencia de Ríos y del río Urmiri en particular, y finalmente, como producto de la mezcla de ambos tipos de aguas, por ejemplo en el caso del río Pazña. (En este último caso, ¿debería producirse un proceso químico de neutralización de manera natural?)

Los elementos químicos contaminantes producidos por cada tipo de fuente de contaminación son diferentes. Los de origen de actividad minera tienen un efecto toxicológico letal para la vida comparados con los de origen termal. En los ríos con contribución de aguas de origen termal se observa desarrollo de ciertos tipos de vida, especialmente vegetal, lo que no ocurre donde los ríos tienen contribuciones de aguas contaminadas por actividad minera.

La actividad eléctrica de los iones disueltos en los líquidos no define el grado de contaminación de los mismos desde el punto de vista toxicológico. El análisis químico es de vital importancia en el problema de identificación de los elementos químicos y su grado de toxicidad.

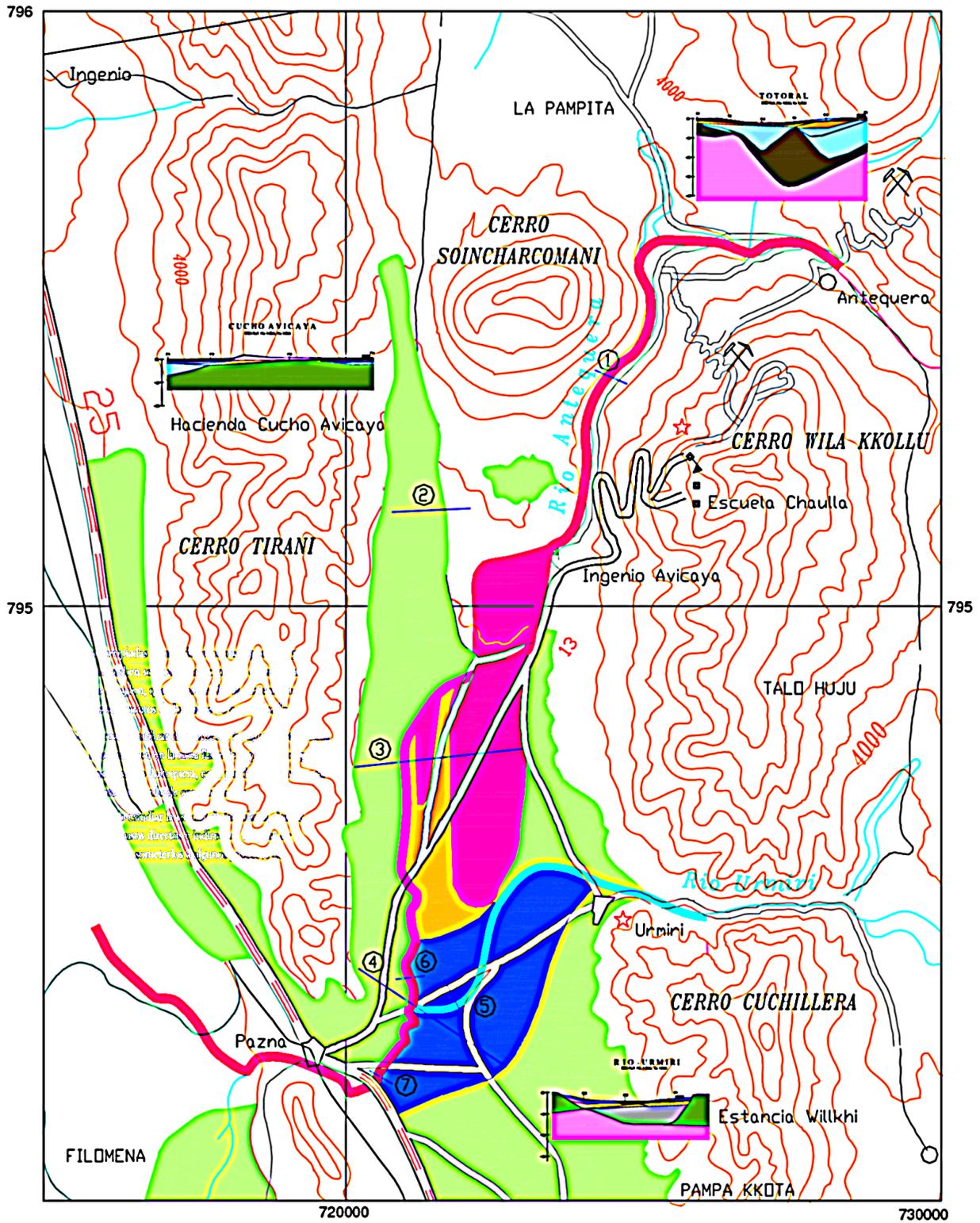
7.2. Conclusiones generales

Los análisis químicos realizados en muestras de aguas superficiales y sub-superficiales del área de estudio declaran que algunas de ellas transportan metales pesados como el hierro, plomo, arsénico, cadmio, manganeso, zinc y cobre en diferentes proporciones, cuyas fuentes se localizan en las minas de la parte alta de la cuenca del río Antequera, y al mismo tiempo, el material desmenuzado extraído de la mina al reaccionar con aguas de diferentes procedencias produce sustancias ácidas a las que se suman los reactivos que introducen los procesos tecnológicos de enriquecimiento de minerales que producen las aguas denominadas de mina o copajira, las que pasan a aumentar los caudales del río en consideración, convirtiéndolo en río con aguas contaminadas. Otras aguas son de carácter alcalino, básico, que están vinculadas a fuentes de aguas termales, con presencia de carbonatos y sales disueltas, principalmente.

Aunque ambos tipos de agua están caracterizados por diferentes valores de pH , provocan bajos valores de resistividad eléctrica, es decir, promueven la idea de alta contaminación ambiental.

Las aguas ácidas y los metales pesados son los elementos contaminantes letales para el desarrollo de la vida, como claramente se puede observar en el curso superior del río Antequera y la laguna de decantación abandonada por la ex empresa minera Estalsa, área donde no se observa rasgo alguno de vida.

Las aguas alcalinas no obstante de su alta actividad iónica,

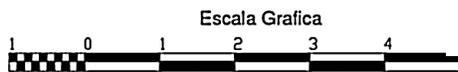


UNIVERSIDAD MAJOR DE SAN ANDRES
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FISICAS

AREA DE GEOFISICA

IHH - Asdi Sarec
IIQ - Caminar

ESCALA 1: 250000 FECHA: MARZO - 2008



AREAS , CONDICION AMBIENTAL

ORIGEN MINERO

ORIGEN TERMAL

- Contaminacion de alta a media por elementos acidos y metales pesados
- Contaminacion de ligera a baja por elementos acidos y metales pesados
- Contaminacion de alta a media por elementos alcalinos
- Contaminacion de ligera a baja por elementos alcalinos
- Areas agricolas no contaminadas

PERFILES GEOELECTRICOS

- 1.- Total
- 2.- Cucho Ayicaya
- 3.- Avicaya
- 4.- Confluencia de Rios
- 5.- Urmiri
- 6.- Antequera
- 7.- Pazña

FIG. 6.— Halos de contaminación en la cuenca del río Antequera (mapa de riesgo ambiental). Véase la versión a colores en la página de la RBF en <http://www.fiumsa.edu.bo>.

todavía son soportadas por algunas especies de vida.

La Fig. 6, *mapa de riesgo ambiental*, resume toda esta información, observaciones *in situ* propias, comunicaciones orales y consultas de artículos científicos referidos al tema en la zona de estudio. De la misma se pueden inferir una serie de conclusiones, como las siguientes: Delimita las zonas que han sido calificadas como alta, mediana, ligera o levemente contaminadas por actividad minera y por fuentes termales.

También señala zonas que todavía están libres de éstos procesos de contaminación (probablemente un 40% del área de la cuenca del río Antequera, que inicialmente era considerada como de vocación agrícola).

7.3. Recomendaciones

Para hacer sostenible el desarrollo humano en el municipio de Pazña es necesario *preservar los terrenos que todavía se encuentran aptos para el desarrollo de la actividad agropecuaria*. Los

cuales, aplicando tecnología altamente desarrollada, podrían lograr niveles de eficiencia productiva cada vez más aceptables en términos económicos.

La actividad minera, sin ser prohibida, debe ser seriamente restringida a determinadas zonas, para evitar la continuación de su acción contaminadora.

Aguas apropiadas para el desarrollo agropecuario y humano deben ser buscadas y captadas en las zonas altas de la región, quebradas y rellenos cuaternarios y en los sedimentos de los valles no contaminados.

No se aconseja utilizar directamente las aguas subterráneas que se encuentren en la zona llana de la parte principal de la cuenca del río Antequera, éstas pueden constituirse en una fuente y vehículo de contaminación. Es necesario estudiar la calidad de las mismas, definir sus posibles usos directos e indirectos, además de la posibilidad de someterlos a algunos procesos de limpieza.

REFERENCIAS

- 2007, Evaluación ambiental del lago Poopó y sus ríos tributarios 2005-2007, Publicación conjunta de la UTO, INCO srl, Worley Persons Komex y el Laboratorio de Limnología de la UMSA
- 2008, 3er Congreso internacional de agua subterránea para el desarrollo sostenible 2008, Publicación conjunta de la SIDA, UMSA, CEEDI, Embajada de Suecia, IRD, LIDEMA y la OEA
- Ahlfeld, F. & Schneider, S. A. 1964, Los yacimientos minerales y de hidrocarburos de Bolivia (Boletín No.5. Ministerio de Minas y Petróleo. La Paz – Bolivia)
- Capriles, V. O. 1977, Historia de la Minería Boliviana (Biblioteca BAMIN, La Paz – Bolivia)
- García, M. E. et al. 2008, Estudio de la distribución de metales pesados en las aguas superficiales y subterráneas en la cuenca del lago Poopó (IIQ – UMSA)
- Ormachea, M. et al. 2008, Evaluation of shallow groundwater quality and arsenic presence in the basin of lake Poopo – Bolivia (IIQ – UMSA)
- Peñaranda, S. J. 1996, Indicadores de contaminación (Instituto de Investigaciones Socio Económicas – UMSA)
- Suárez, R. S. et al. 1995, Compendio de Geología de Bolivia (Publicación de Yacimientos Petrolíferos Fiscales Bolivianos, YPF)
- Taquichiri, L. 2008, Juntuma aguas termales en el departamento de Oruro — Un potencial ignorado

PROYECTO LAGO BOLIVIA
LARGE APERTURE GAMMA RAY OBSERVATORY
THE LAGO PROJECT IN BOLIVIA

A. VELARDE[†], R. TICONA, P. MIRANDA, H. RIVERA & J. QUISPE
Instituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz – Bolivia

RESUMEN

LAGO es una red en tierra de detectores Cherenkov con agua (WCD) para detectar partículas secundarias remanentes de pequeños chubascos atmosféricos producidos por gammas provenientes de GRBs.

La red LAGO está constituida por estaciones que se han seleccionado en sitios de altura: Sierra La Negra (4.650 m.s.n.m.) en Puebla–México, Chacaltaya (5.230 m.s.n.m.), en La Paz–Bolivia, Pico Espejo (4.765 m.s.n.m.) en Mérida–Venezuela. También hacen parte de la red los 16.000m² de detectores Cherenkov de AUGER en Malargüe–Argentina (1.400 m.s.n.m.). En Perú se están ubicando posibles sitios de altura cerca de Cusco para instalar otra estación de la red LAGO y se ha presentado una propuesta para instalar detectores en la “Pirámide” del CNR en el Everest (5.050m.s.n.m.).

Se presentan los resultados de la instalación y puesta en marcha de la estación LAGO Bolivia en el Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya.

Descriptores: Gamma Ray Bursts (GRBs) — rayos cósmicos

Código(s) PACS: 95.85.Pw, 95.85.Ry, 95.45.-i

ABSTRACT

LAGO is a network of water Cherenkov detectors (WCD) which operate which detect secondary particles that are remnants of small atmospheric showers (storms) produced by gammas originating from GRBs. LAGO is made up of high altitude sites: Sierra La Negra (4,650 m asl.) in Puebla–Mexico, Chacaltaya (5,230 m asl.) in La Paz–Bolivia, Pico Espejo (4,765 m asl.) in Mrida–Venezuela. They also make up part of the 16,000m² AUGER Cherenkov detector network in Malarge–Argentina (1,400 m asl). In Peru a number of possible high altitude sites close to Cusco are being identified for the installation of a LAGO network. There is even a proposal to install detectors in Everests CNR Pyramid at (5,050 m asl). We present the results from the installation and operation of Bolivias LAGO station in the Cosmic Physics Laboratory at Chacaltaya.

Subject headings: Gamma Ray Bursts (GRBs) — cosmic Rays

1. INTRODUCCIÓN

Desde el descubrimiento de los Gamma Ray Bursts (GRBs), a fines de los años 60 por el satélite VELA (Klebesadel 1973), este fenómeno astrofísico ha despertado el mayor interés en el campo de la astrofísica.

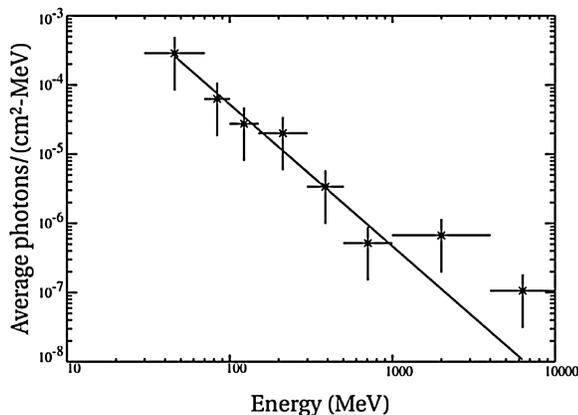


FIG. 1.— Espectro diferencial de energía de los fotones de los GRBs en el rango de los MeV. (B. L. Dingus, U. Utah, http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/objects/grbs/grb_spectrum.html.)

Se han diseñado e instalado varios instrumentos de detección en satélites y también en tierra para detectarlos (Meszaros 2006).

Los GRBs son explosiones súbitas de fotones de alta energía ($E > 10\text{KeV}$, Rayos X duros y Rayos Gamma), de corta duración (entre 0,01 a 100 segundos), seguidos por una radiación remanente más débil en rayos X conocida como posluminiscencia. Se detectan, en promedio, uno por día.

Se trata de los fenómenos físicos más luminosos del universo, produciendo una gran cantidad de energía en haces de rayos

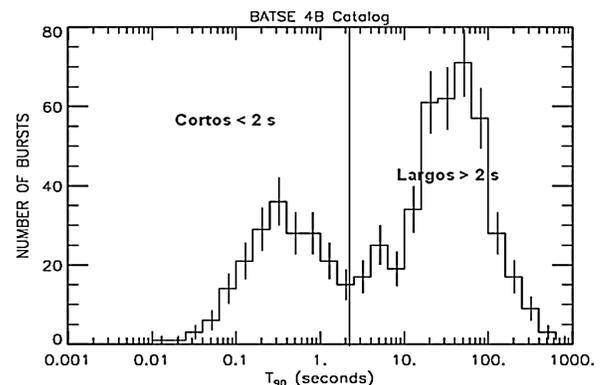


FIG. 2.— Distribución de la duración de los GRBs.

[†]avelarde@fiumsa.edu.bo, <http://www.fiumsa.edu.bo/investigacion/LAGO>.

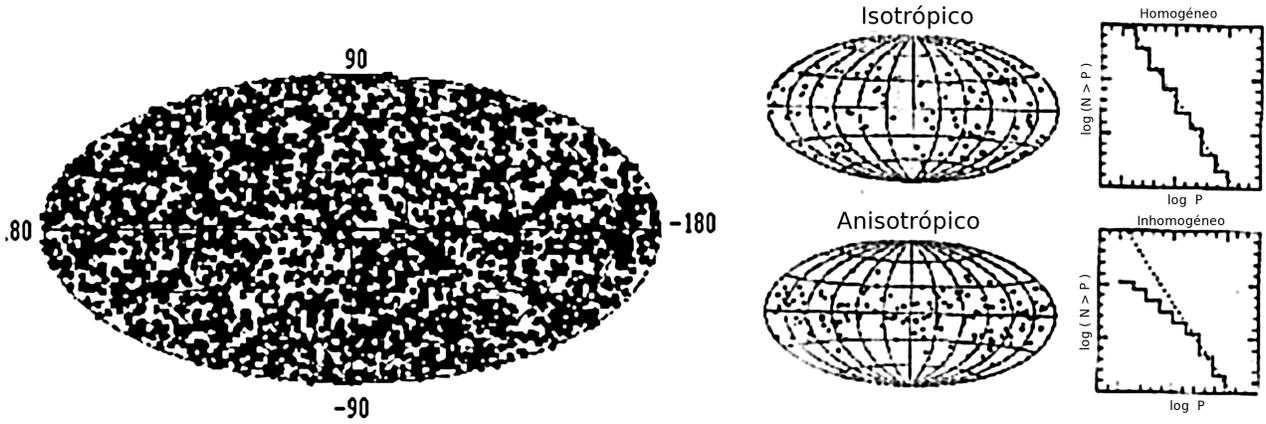


FIG. 3.— Mapa de las direcciones de arribo de los GRBs detectados por BATSE y déficit del número de GRBs de baja fluencia ($[P] = \text{erg}/\text{cm}^2$). Tomada de apod.nasa.gov/apod/ap000628.html.

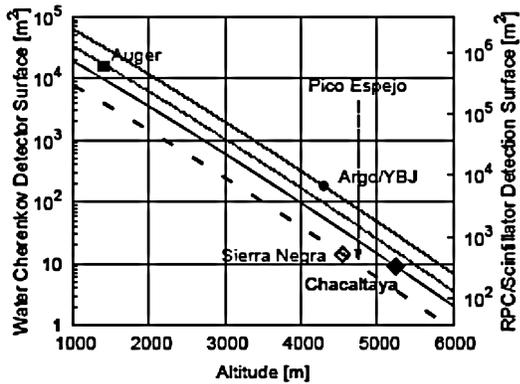


FIG. 4.— Líneas equisensibles para experimentos de diferente tamaño y altitud.



FIG. 6.— Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya. En círculo, la “Sala de Muones”.

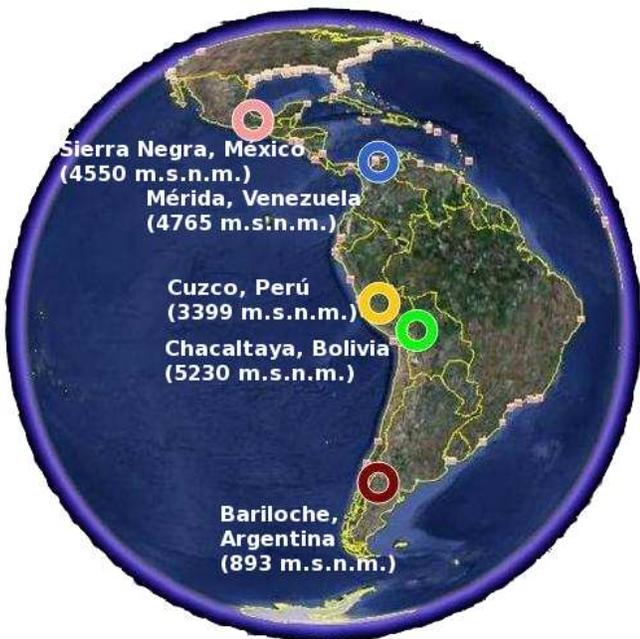


FIG. 5.— Red de estaciones LAGO.

gamma; su luminosidad se estima en $L_\gamma \sim 10^{52}$ erg/s (Ramirez & Fenimore 1999).

La mayoría de los fotones de los GRBs han sido observados en el rango de energías de los MeV, por detectores en satélites. Su espectro de energía típico sigue una ley de potencias $E^{-\alpha}$ con

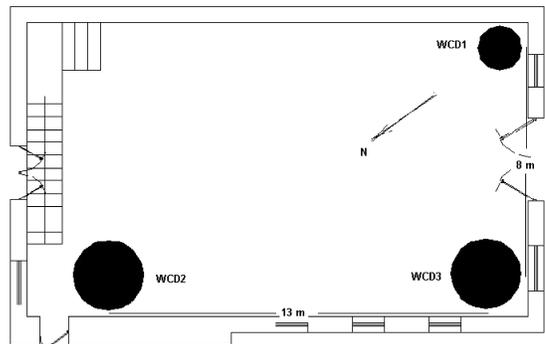


FIG. 7.— Disposición de los tres detectores dentro la “Sala de Muones”.

$\alpha \sim -2$ para el rango de energía $E < 1 \text{ GeV}$, como se muestra en la Fig. 1.

En la Fig. 2 se muestra la distribución de los GRBs según su duración. Se ve que es una distribución bimodal con dos poblaciones bien definidas. Los de corta duración ($< 2s$), centrada alrededor de $0.3s$ y los de larga duración ($> 2s$), centrada alrededor de los $30s$.¹

Algunos GRBs de larga duración ($> 2s$) se han asociado con hipernovas que corresponden a la muerte de estrellas supermasivas ($> 40 M_\odot$).² Su brillo es cientos de veces mayor al de una supernova típica.

Los GRBs de corta duración ($< 2s$) provienen de galaxias muy lejanas, prácticamente de los confines del universo.

¹ BATSE 4B Gamma-Ray Burst Catalog, www.batse.msfc.nasa.gov/batse/grb/duration.

² Gamma Ray Burst: “Introduction to a Mystery”, http://imagine.gsfc.nasa.gov/docs/science/know_11/bursts.html.

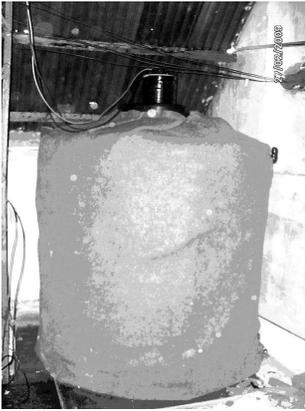


FIG. 8.— WCD1. Diámetro: 1,4m. Altura de agua: 1,4m. HV: 1.300V. Conteo de fondo: 6.000c/s.



FIG. 9.— WCD2. Diámetro 2,2m. Área: 3,8m². HV: 1.600V. Conteo de fondo: 12.000c/s.

Uno de los más espectaculares: el GRB 990123 de 23 de enero de 1999, muestra los siguientes datos:

Corrimiento al rojo $z = 1,6$ equivale a un $\Delta t \sim 7,6 \times 10^9$ años luz, una energía, $E \sim 3 \times 10^{54} \text{erg}$, y una luminosidad máxima, $L_{max} = 10^{53} \text{erg/s}$ (Blandford & Helfand 1999).

El GRB más lejano, recientemente detectado por el telescopio Fermi, es el del 23 de abril de 2009, (GRB090423) con un corrimiento al rojo $z = 8,2$ que corresponde a una distancia de 13×10^9 años luz, esto es, escasos 600 millones de años después del *Big Bang*.³

Los gammas de alta energía, al atravesar el espacio intergaláctico, son absorbidos por producción de pares al interactuar con la radiación de fondo infrarroja y de microondas; por ello, los gammas que llegan a la tierra son de baja energía.

En la Fig. 3, se muestra el mapa final de los GRBs detectados por BATSE, en el satélite Compton Gamma Ray Observatory que estuvo en operación de 1991 al 2000. La distribución es isotrópica, no se observa ninguna dirección preferente, provienen de todas las direcciones del universo. Sin embargo, las fluencias son incompatibles con un modelo de distribución uniforme de las fuentes, se observa una deficiencia de fotones de baja fluencia, como se muestra en la misma figura.

En el caso de una distribución isotrópica homogénea, el número de GRBs será proporcional al volumen y la fluencia es proporcional a la inversa de la distancia, de modo que el número de GRBs viene a ser proporcional a la fluencia elevada a $-3/2$:

$$N \propto r^3; \quad P \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow N \propto P^{-\frac{3}{2}}.$$

³ www.nasa.gov/mision_page/swift_burst/cosmic_record.html.



FIG. 10.— WCD3. Diámetro 2,2m. Área: 3,8m². HV: 1.200V. Conteo de fondo: 12.000c/s.

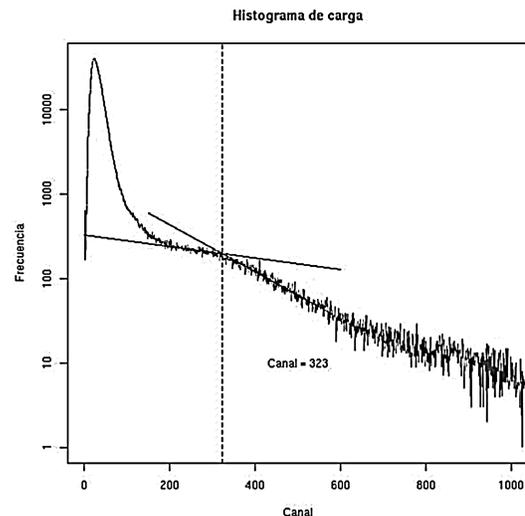


FIG. 11.— Espectro del WCD1 prototipo.

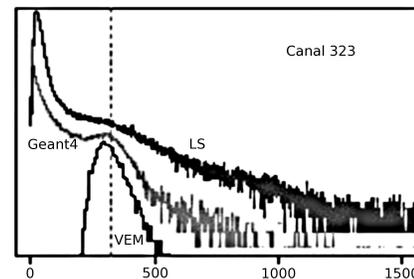


FIG. 12.— Comparación de espectros simulado y medido en Cota Cota (VEM: simulado).

2. DETECCIÓN DE GRBs EN TIERRA

Dada la baja energía de los fotones de los GRBs que llegan a la tierra, es necesario detectarlos mediante satélites fuera de la atmósfera (Bertou 2009). Sólo en unos cuantos GRBs se han observado fotones con energías mayores a 1GeV . La mayor observada fue de 18GeV (GRB 940217).

Para detectar fotones de alta energía en un GRB se requieren grandes áreas de detección, cosa que no se puede hacer en satélites. Es posible detectar fotones de alta energía mediante la técnica de las partículas individuales sobrevivientes de los pequeños chubascos atmosféricos producidos por fotones de energías mayores a 1GeV , mediante arreglos de detectores de

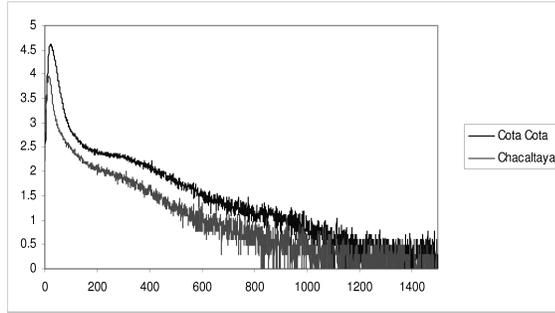


FIG. 13.— Comparación espectros Cota Cota–Chacaltaya. log (Frecuencia) vs. canal.

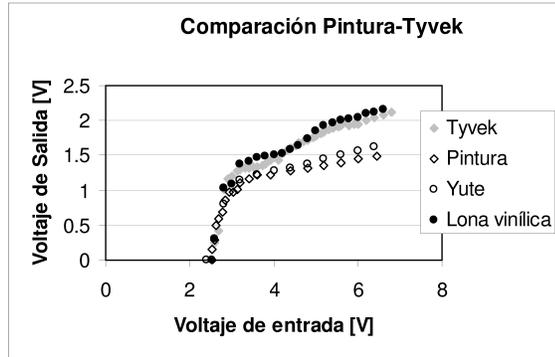


FIG. 14.— Comparación de la reflectividad.

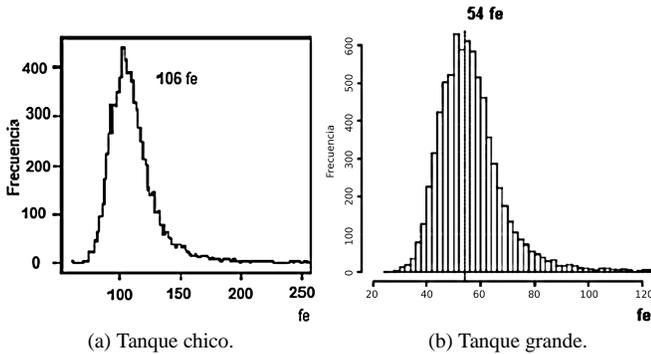


FIG. 15.— Comparación del VEM para los tanques chico y grandes.

partículas en tierra. Mientras más alto se coloquen estos detectores, mayor será su sensibilidad. En la Fig. 4 se muestra una simulación de la sensibilidad de un detector Cherenkov con agua en función de la altura (Bertou 2009).

La gran mayoría de las partículas secundarias remanentes producidas por un gamma primario, serán fotones. Por ello es que la utilización de detectores Cherenkov es preferible a los centelleadores u otros detectores de partículas cargadas.

Según esta simulación $20m^2$ de detectores Cherenkov con agua en Chacaltaya (5.200 m.s.n.m.) son equivalentes a los $16.000m^2$ de área afectiva del experimento AUGER en Malargüe, Argentina, a 1.400 m.s.n.m..

3. EL PROYECTO LAGO

Como ya señalamos, la detección de GRBs de energías del orden de los GeV , es posible en detectores en tierra correlacionados con los registros de satélite, mediante la técnica de la observación de las fluctuaciones de los registros temporales de la radiación de fondo de cada detector debido al arribo de partículas secundarias, mayoritariamente fotones, sobrevivientes del chu-

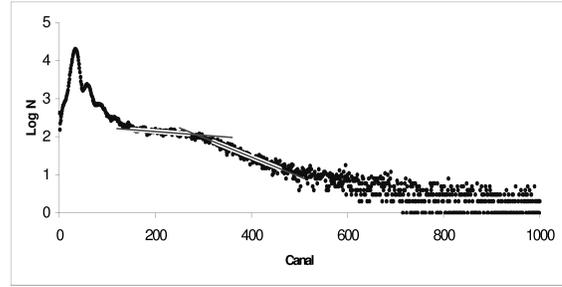


FIG. 16.— Calibración del tanque WCD2. El pico muón (intersección de las dos líneas) corresponde al canal 280. El VEM=273 y corresponde a $300MeV$.

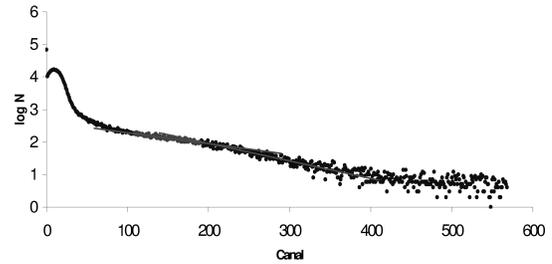


FIG. 17.— Espectro de carga del WCD3. VEM: Canal197= $300MeV$.

TABLA 1
PARÁMETROS DE LOS TANQUES.

Parámetros	WCD1	WCD2-3
Diámetro	1,4 m	2,2 m
Altura del agua	1,4 m	1,5 m
Material	plástico	Fibra de vidrio
Superficie reflectante	Tyvek	Lona vinílica

basco generado en el tope de la atmósfera por los rayos gamma de un GRB que llegan durante el corto periodo de tiempo de duración del mismo.

Este método se conoce como “Single Particle Technique” (SPT, Técnica de partículas individuales, Aglietta 1996). Cuando fotones de un GRB alcanzan la atmósfera, producen chubascos de rayos cósmicos, sin embargo, sus energías no son suficientes para producir chubascos detectables en tierra (ni siquiera a grandes alturas). Sin embargo, se espera que lleguen muchos fotones en un periodo corto de tiempo. Entonces se podrá ver un incremento en la razón de conteo de la radiación de fondo en los detectores durante ese periodo de tiempo. Esta técnica ya se aplicó en INCA (Vermetto 1999), en Chacaltaya, y en ARGO (Surdo 2003), en Tibet. Un estudio general de esta técnica puede encontrarse en Ref. Vermetto 2000.

El proyecto LAGO consiste en instalar una red de estaciones terrestres para detectar fotones de alta energía provenientes de las explosiones de rayos gamma (GRBs), utilizando la SPT con detectores Cherenkov con agua.

Para alcanzar una sensibilidad razonable, se han seleccionado sitios de altura en Sierra La Negra (4.650 m.s.n.m.) en Puebla-México, Chacaltaya (5.230 m.s.n.m.), en La Paz-Bolivia, Pico Espejo (4.765 m.s.n.m.) en Mérida-Venezuela. También hacen parte de la red los detectores de AUGER en Malargüe–Argentina (1.400 m.s.n.m.). En Perú se están ubicando posibles sitios de altura cerca de Cusco para instalar otra estación de la red LAGO y se ha presentado una propuesta para instalar detectores en la “Pirámide” del CNR en el Everest (5.050 m.s.n.m.).

4. LA ESTACIÓN DE CHACALTAYA

Actualmente se encuentran instalados y en operación tres detectores Cherenkov con agua; dos de 2,2 m de diámetro, ($3,8m^2$)

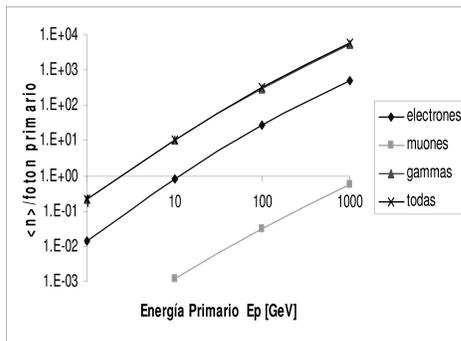


FIG. 18.— Número de partículas secundarias en función de la energía del gamma primario.

TABLA 2
NÚMERO MEDIO DE PARTÍCULAS SECUNDARIAS PARA DISTINTAS ENERGÍAS DE UN FOTÓN PRIMARIO VERTICAL.

E_p [GeV]	e^\pm	μ^\pm	γ	Total
1	0,014	0,0	0,21	0,224
10	0,774	0,0012	9,98	10,76
100	26,22	0,032	291,2	317,5
1.000	522,0	0,56	5.513,0	6.080,0

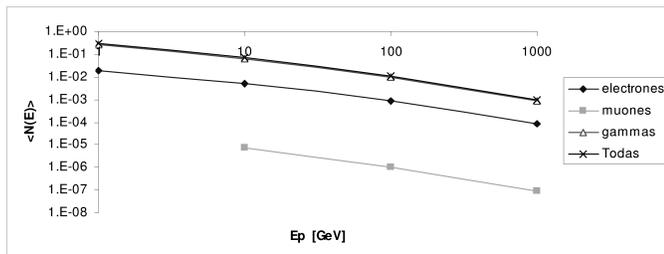


FIG. 19.— Frecuencia media de los secundarios que llegan a la estación de Chacaltaya en función de la energía de los primarios de un GRB.

TABLA 3
 $\langle N(E_p) \rangle$: NÚMERO MEDIO DE PARTÍCULAS SECUNDARIAS PARA DISTINTAS ENERGÍAS DE UN GAMMA PRIMARIO VERTICAL PONDERADAS AL ESPECTRO DE ENERGÍA DE LOS GRBS.

E_p [GeV]	e^\pm	μ^\pm	γ	Total
1	0,018	0,0	0,27	0,29
10	0,0050	$7,8 \times 10^{-6}$	0,065	0,07
100	0,00085	$1,0 \times 10^{-6}$	0,0095	0,01
1.000	$8,5 \times 10^{-5}$	$9,0 \times 10^{-8}$	0,00090	0,00099

y 1,5m de altura del agua y uno de 1,4m de diámetro, (1,5m²) y 1,4m de altura de agua. Han sido colocados en la “Sala de Muones” del Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya (ver Fig. 6).

La Fig. 7 muestra la disposición de los detectores y en las Figs. 8, 9 y 10 se muestran los detectores.

Los detectores han sido envueltos en cobertores de lana para evitar que el agua congele.

4.1. Calibración del Detector Prototipo WCD1

En la Tabla 1 se dan las características de este prototipo.

En la Fig. 11 se muestra el espectro de las señales en el WCD1 (prototipo), medido en Cota Cota (3.300 m.s.n.m.).

El pico que se observa, corresponde a los muones que atraviesan el tanque. Para determinar su posición en función de los canales del espectro, se tienden dos ajustes lineales antes y después del pico y se encuentra la intersección. En nuestro caso se ubica en el canal 323 (323±20).

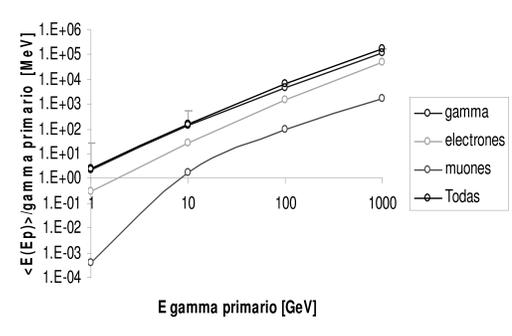


FIG. 20.— Energía media de los secundarios en función de la energía de un gamma primario vertical.

TABLA 4
 $\langle E \rangle$ [MeV]: ENERGÍA MEDIA DE LAS PARTÍCULAS SECUNDARIAS PARA DISTINTAS ENERGÍAS DE UN GAMMA PRIMARIO VERTICAL.

E_p [GeV]	e^\pm	μ^\pm	γ	Total
1	0,32	0,0004	2,19	2,52
10	28,4	1,72	130,1	160,5
100	1.538	99	4.860	6.500
1.000	50.500	1.700	122.100	174.000

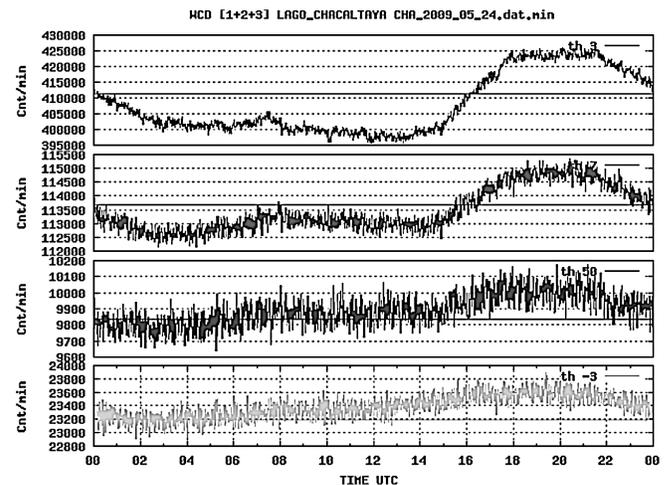


FIG. 21.— Registro diario, al minuto, de la suma de los tres detectores, para los cuatro niveles de discriminación.

Se busca determinar el VEM (“Vertical Equivalent Muon”). Sabiendo que un muón relativista deposita 2MeV/cm en agua y conociendo la profundidad del agua, se puede utilizar el VEM para calibrar el equipo en energía.

Para determinar el VEM se utilizó el programa Corsika para simular la radiación de fondo en Cota Cota y el programa Geant4 para simular el espectro en el tanque y el VEM (Rivera 2007).

En la Fig. 12, se muestra la comparación entre el espectro medido, el simulado y el VEM. Se hizo coincidir el pico muón de la simulación con el pico muón medido. El pico muón de la simulación corresponde a 109 fotoelectrones (fe) que se ajustan al canal 323 del espectro medido.

El VEM simulado corresponde a 106 fotoelectrones y equivale al canal 315, o sea, a 0,975Pico Muón.

4.2. Prototipo en Chacaltaya

La Fig. 13 muestra el espectro del prototipo (WCD1) en Chacaltaya, comparado con el espectro medido en Cota Cota. Se puede ver que el pico muón es menos destacado, sin embargo, coincide con el de Cota Cota. Naturalmente, la energía depositada por un muón al atravesar el tanque es independiente de la

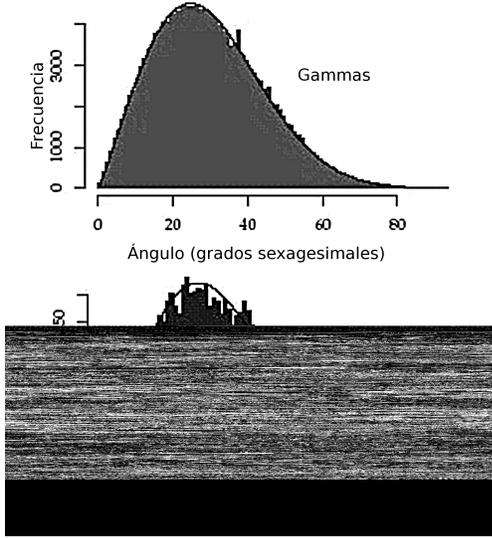


FIG. 22.— Distribución angular (zenital) de la radiación cósmica en Chacaltaya.

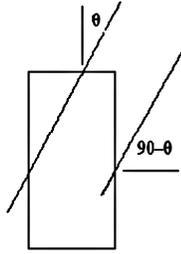


FIG. 23.— Detector cilíndrico.

altura.

Confirmamos, entonces que el canal (315 ± 20) corresponde al VEM y equivale a 280 MeV . El error se calcula con base en los errores del ajuste de las líneas cuya intersección se utilizó para determinar el pico muón. Ahora bien, se determinó el factor de $0,34 \text{ mV}/\text{canal}$, entonces corresponde a una señal de $(107 \pm 7 \text{ mV})$.

4.3. Tanques Grandes, WCD2 y WCD3

Las correspondientes características se dan en la Tabla 1.

Se hicieron medidas comparativas de la reflectividad de varios materiales mediante destellos de diferentes intensidades de un LED violeta dentro de una caja con un fotomultiplicador; comprobando que, como se muestra en la Fig. 14, la lona vinílica que se utiliza en las gigantografías tiene un comportamiento similar al Tyvek que utilizan en los tanques del proyecto AUGER.

4.4. Simulación del VEM

En la Fig. 15, se muestra la simulación del VEM para el tanque chico y el grande, en número de fotoelectrones (f_e).

Tanque chico: $106 f_e$.
Tanque grande: $54 f_e$.

Se observa que hay una relación de $\cong 1/2$ del tanque grande respecto al chico, esto se debe a la relación del área del fotomultiplicador al área reflectante. El número de fotoelectrones es proporcional a dicha relación A_{PM}/A_{Tanque} :

$$N_{f_e} = N_{fot/cm} \times H \times E_{fcuant} \times (A_{PM}/A_{Tanque}) \times r \times t, \quad (1)$$

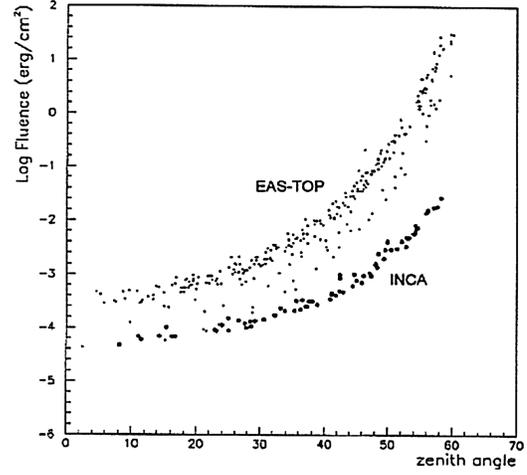


FIG. 24.— Límite inferior de la fluencia en función del ángulo zenital de los GRBs, determinado por los resultados del experimento INCA.

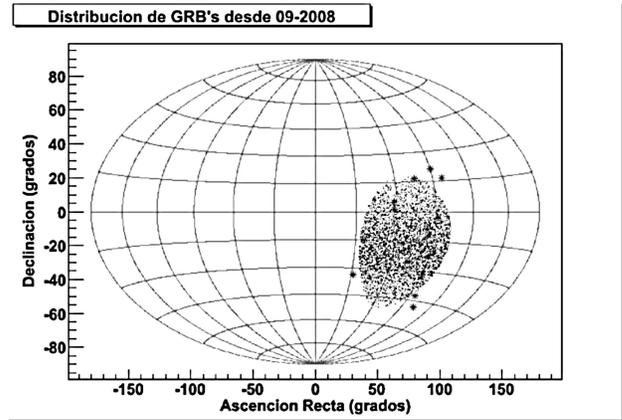


FIG. 25.— Direcciones de GRBs reportados sobre Chacaltaya (asteriscos) y direcciones de chubascos registrados (puntos).

donde $N_{fot/cm}$ es el número de fotones Cherenkov por cm , H es la altura de agua, E_{fcuant} es la Eficiencia Cuántica del fotomultiplicador, r es el coeficiente de reflexión en las paredes, y t es el coeficiente de transmisión del agua.

En ambos tanques se usa un sólo fotomultiplicador de 20 cm de diámetro; la relación A_{PM}/A_{Tanque} para el detector chico (WCD1) es $3,4 \times 10^{-3}$ y para los tanques grandes es $1,7 \times 10^{-3}$; la relación entre ambos da, efectivamente, $\cong 0,5$.

4.5. Calibración de los Tanques Grandes

La calibración de los tanques grandes resultó en lo siguiente: Para un conteo de fondo de 1.200 c/s :

WCD2: HV 1.600 V , VEM Canal $273 = 300 \text{ MeV}$.

WCD3: HV 1.200 V , VEM Canal $197 = 300 \text{ MeV}$.

En la Fig. 16 se muestra el espectro de carga del detector grande WCD2. Utilizando el método descrito, mediante la intersección de dos ajustes lineales en el cambio de pendiente del espectro, se encuentra que el pico muón corresponde al canal $280 (\pm 20)$. El VEM, siguiendo el dato de la simulación, corresponderá, entonces, al canal $280 \times 0,975 = 273$. Para una altura de agua de $1,5 \text{ m}$, la energía depositada por los muones es de 300 MeV .

De igual manera, se calibró el segundo tanque grande WCD3; en la Fig. 17 se muestra su espectro de carga.

En la Tabla 3, se muestran los valores numéricos resultantes de la simulación.

TABLA 5
 $F [10^{-4} \text{ erg/cm}^2]$: FLUENCIA MÍNIMA PARA LOS DETECTORES.

WCD1	WCD2-3	WCD1-2-3
1,9	1,4	0,8

4.6. Cálculo del número medio de partículas secundarias en función de la energía del fotón primario

En la Fig. 18 se muestra el número de partículas secundarias esperadas en la estación de Chacaltaya en función de la energía de un fotón primario vertical en el rango de 1 GeV a 1 TeV .⁴ En todos los casos la gran mayoría son fotones, por ello es que se han escogidos detectores Cherenkov que son sensibles a los fotones, además de las partículas cargadas.

En la Tabla 2 se muestran los valores numéricos resultantes de la simulación.

En la Fig. 18 se muestra el número de partículas secundarias en función de la energía del gamma primario vertical (E_p) que arriban a la estación de Chacaltaya, ponderadas al espectro de energía de los GRBs:⁴

$$\langle N(E_p) \rangle = \frac{\langle n(E_p) \rangle E_p^{-\alpha}}{1.000 \text{ GeV} \int_{1 \text{ GeV}} E_p^{-\alpha} dE_p} \quad (2)$$

En la Fig. 19, se muestra el resultado de la simulación. El número de fotones constituye la mayoría de las partículas que arriban y la gran mayoría de ellos corresponden a secundarios producidos por un primario vertical de 1 GeV .

4.7. Energía media en función de la energía del gamma primario

En la Fig. 20 se muestran los resultados de la simulación⁴ de la energía media de las partículas secundarias en función de la energía de un gamma primario vertical.

En la Tabla 4, se muestran los valores numéricos resultantes de la simulación.

Como vimos, casi la totalidad de las partículas secundarias son fotones provenientes de los gammas primarios de menor energía, 1 GeV , de manera que el nivel de discriminación de los detectores debe corresponder a $2,52 \text{ MeV}$. En el WCD1 y WCD2 corresponde al canal 3 y en el WCD3, al canal 4.

El sistema de detección tiene cuatro niveles de discriminación fijos 3, 7, 50 y -3 . En la Fig. 21 se muestran los registros por minuto de un día en estos cuatro niveles de discriminación.

4.8. Fluencia mínima de los GRBs detectables por la estación de Chacaltaya

Si esperamos una señal de cuatro desviaciones estándar sobre el conteo de fondo en el registro con nivel de discriminación 3,

⁴ Simulación en AIREs, Alexandra de Castro (LAGO Venezuela) y Javier Quispe (LAGO Bolivia).

entonces tenemos que el número de partículas secundarias provenientes de un gamma primario vertical será: $\langle n \rangle = 4\sigma$, luego:

$$4\sqrt{N} = K \Delta t \int_{1 \text{ GeV}}^{1 \text{ TeV}} A_{ef} \langle N(E, 0) \rangle dE, \quad (3)$$

donde N es el conteo de fondo ($\sim 12.000 \text{ c/s}$ para tanques grandes y 6000 c/s para el chico), $\Delta t \sim 10 \text{ s}$ es la duración típica de un GRB, A_{ef} es el área efectiva del detector que es un cilindro, $\langle N(E, 0) \rangle$ es la frecuencia media de partículas secundarias en función de la energía de un GRB vertical.

En la Fig. 22 se muestran las distribuciones angulares de las partículas secundarias en Chacaltaya,⁵ que se ajustan muy bien a una distribución de Weibull:

$$W(\theta) = 0,0647 \left(\frac{\theta}{33,76} \right)^{1,15} \exp \left[- \left(\frac{\theta}{33,76} \right)^{2,15} \right], \quad (4)$$

de donde podemos calcular el área efectiva de un cilindro (ver Fig. 23):

$$A_{ef} = \int_0^{90} (\pi r^2 \cos \theta + 2\pi r H \sin \theta) W(\theta) d\theta. \quad (5)$$

Entonces, de la ecuación (3), podemos obtener la constante de proporcionalidad K y luego calcular la fluencia mínima para los detectores:

$$F = K \Delta t \frac{\int_{1 \text{ GeV}}^{1 \text{ TeV}} E^{-\alpha+1} dE}{\int_{1 \text{ GeV}}^{1 \text{ TeV}} E^{-\alpha} dE}. \quad (6)$$

Los resultados son mostrados en la Tabla 5.

5. CONCLUSIONES

LAGO Bolivia podría detectar en tierra GRBs verticales con energías mayores a 1 GeV si su fluencia fuera superior a $\sim 0,8 \times 10^{-4} \text{ erg/cm}^2$.

Comparando con el resultado del experimento INCA (Vernetto 2000) (Fig. 24) que con el mismo propósito funcionó en Chacaltaya de 1995 al 2000 y que consistía de 48 m^2 de detectores plásticos de centelleo, los $\sim 10 \text{ m}^2$ de LAGO-Bolivia son equivalentes.

Para disminuir la fluencia de los GRBs verticales en un orden, necesitaríamos aproximadamente 100 detectores. En la Fig. 25 mostramos algunos GRBs reportados por los satélites que llegaron dentro del ángulo de visión de Chacaltaya. Ninguno produjo señal.

⁵ Simulación en Corsika, Hugo Rivera B., LAGO Bolivia

REFERENCIAS

- Aglietta, M. 1996, ApJ, 469, 305
 Bertou, X. 2009, Proceedings of the 13th ICRC, The Large Aperture GRB Observatory
 Blandford, R. D. & Helfand, D. J. 1999, MNRAS, 305, No 3
 Klebesadel, R. 1973, ApJ, 182, 85
 Meszaros, P. 2006, Rept. Prog. Phys., 69, 2259
 Ramirez, E. & Fenimore, E. 1999, Filling Factors: Hubble Relationship for Gamma Ray Bursts, T-04 Fifth Huntsville GRB Symposium, Huntsville, Alabama, USA, 18-22 octubre
 Rivera, H. 2007, Implementación de un Prototipo de Detector de Muones de Chubascos Atmosféricos. Tesis de Licenciatura en Física, Carrera de Física, UMSA. La Paz, Bolivia
 Surdo, A. 2003, 28th ICRC, Tsukuba, Japan
 Vernetto, S. 1999, A&AS, 138, 599
 —. 2000, Astropart. Phys., 13, 75

MODELADO DE SOMBREROS HAT MODELLING

R. FORNO
Laboratorio de Física de la Atmósfera
Instituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz–Bolivia

RESUMEN

Se desarrolló un procedimiento para modelar sombreros con el fin de poder compararlos en lo referente a su capacidad como elementos protectores de radiación ultravioleta solar.

Se realizó la validación del procedimiento de modelado desarrollado por comparación con resultados experimentales realizados con un maniquí puesto al sol. Una vez realizada la validación, se realizaron las simulaciones necesarias para poder entender cuáles son las principales variables que afectan a la eficiencia de los sombreros y en qué proporción lo hacen.

Luego de algunos análisis relacionados a la factibilidad económica y técnica de la fabricación de sombreros, se centró la atención en tres modelos de sombreros: la gorra tradicional, una gorra con solapa lateral y un sombrero con ala elíptica. Finalmente, para cada uno de estos modelos de sombreros se realizaron las simulaciones necesarias para poder compararlos.

Descriptor: monitoreo, control y seguridad de las radiaciones — aplicaciones interdisciplinarias de la física

Código(s) PACS: 87.52.g, 89.20.a

ABSTRACT

A method to model hats enabling the analysis and comparison of their physical qualities, such as, protection from UV solar radiation was developed. The modelling method was validated through experimental results obtained using a mannequin exposed to the sun. Simulations were run to better understand which are the main variables that affect the performance of the hats. After an analysis of the economic and technical feasibility of fabricating the different hats, three hat designs were chosen for further study and simulations: traditional baseball cap, a cap with side flaps (wings) and a cap with an elliptic flap.

Subject headings: radiation monitoring, control and safety — interdisciplinary applications of physics

1. CARACTERÍSTICAS DEL MODELADO

Se modelaron los sombreros considerando su uso en la ciudad de La Paz (16.5 Sud y 63.167 Oeste) en situaciones desfavorables de orientación del portador del sombrero. Por lo tanto, en la mayoría de los casos, se consideró que el portador del sombrero se encontraba quieto y mirando hacia el Norte. Por otro lado, todas las simulaciones se realizaron para días completamente despejados.

Puesto que se disponió de un tiempo relativamente limitado para desarrollar el modelado de los sombreros, el estudio se limitó a modelar la sombra sobre el rostro del individuo que utiliza el sombrero dejando a un lado el estudio más profundo de la intensidad de la radiación que incide sobre el rostro en función del mismo sombrero.

2. SELECCIÓN DEL SOFTWARE DE MODELADO

La duración del proyecto no permitió desarrollar un *software* específico para que realice las tareas de modelado, por lo tanto, se tenía que encontrar un *software* adecuado a nuestras necesidades. El *software* que se empleó para realizar el modelado tenía que cumplir con los siguientes requisitos:

- Permitir un modelado en tres dimensiones.
- Disponer de algoritmos para manejar las sombras en cuerpos de tres dimensiones, considerando la posición geográfica del modelo.
- El costo del software tenía que ser lo más bajo posible.
- La disponibilidad del *software* debía ser prácticamente inmediata.

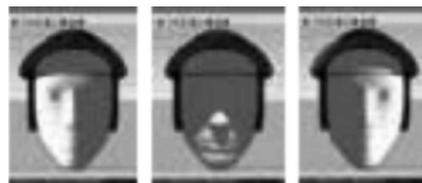


FIG. 1.— Ejemplos de imágenes generadas con “Google SketchUP” en diferentes horas del día.



FIG. 2.— Ejemplos de archivos de imagen ya procesados con “Adobe Photoshop”. Estas imágenes corresponden a las mostradas en la anterior figura.

e) Para evitar demoras para el proyecto, debía ser fácil su implementación y el aprendizaje de su uso.

Luego de una búsqueda de *software* que cumpla con los requisitos planteados se encontró uno que parcialmente resolvía el problema. Se trata de “Google SketchUP”, un *software* de uso libre, que se puede utilizar para crear, modificar y compartir modelos 3D. Es más fácil de aprender que otros programas de modelado 3D. Sin embargo, el mencionado *software* no resolvía el problema por completo y fue necesario emplear “Adobe Photoshop” y un programa de conteo de píxeles de un determinado color que lo desarrollé con el *software* “Mathematica”.

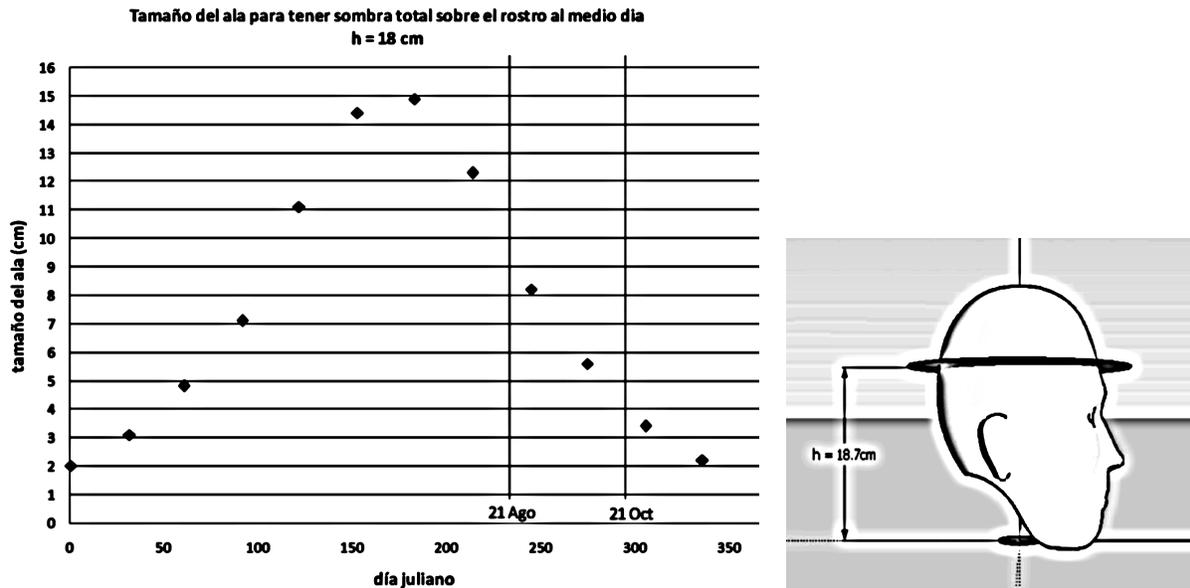


FIG. 3.— Tamaño del ala del sombrero para tener una sombra total sobre el rostro al medio día si se está en dirección norte. Se supone un ala horizontal que se encuentra a una altura h de 18 cm sobre el mentón.

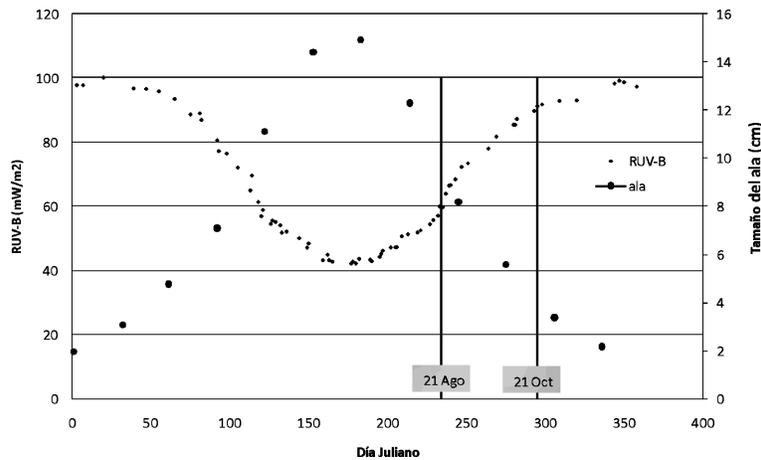


FIG. 4.— En puntos pequeños, se muestran los valores de la radiación ultravioleta durante el año en la ciudad de la Paz (Cota-Cota) y en puntos grandes, se muestra el tamaño del ala del sombrero para tener una sombra total sobre el rostro al medio día si se está en dirección norte. Las líneas verticales marcan los días seleccionados para el estudio (DJ: 234 y 295).

El procedimiento de simulación tiene los siguientes pasos:

- Con ayuda de “Google SketchUP” se desarrolla el sombrero y modelo a simular en tres dimensiones.
- Se referencia el modelo para la posición geográfica de interés (latitud y longitud).
- Se realizan variaciones de la hora. Para cada hora de interés se genera un archivo de imagen capturando la pantalla.
- Se utiliza “Adobe Photoshop” para recortar sólo los rostros en los archivos de imagen.
- Con ayuda del *software* desarrollado en “Mathematica”, se lee los archivos gráficos y se realiza un conteo de los píxeles con un color que corresponde a sombra. Como resultado del análisis, se tiene el porcentaje de sombra sobre el rostro para cada una de las simulaciones realizadas.

Es evidente que el procedimiento descrito para evaluar la sombra sobre el rostro es una aproximación, ya que al momento de contar los píxeles con un determinado color sólo se toma en cuenta imágenes bidimensionales.

3. SIMULACIONES

3.1. Tamaño del ala del sombrero para obtener una sombra total sobre el rostro al medio día

Con el fin de estudiar el efecto del tamaño del ala de un sombrero respecto a la eficiencia del mismo, se procedió a modelar el tamaño de ala necesario, considerando que el ala del sombrero está completamente horizontal y además que se encuentra a 18 cm sobre el mentón, para lograr que una persona que mira hacia el norte al medio día (12:00 local) tenga sombra total sobre su rostro. Es importante mencionar que aproximadamente al medio día se registran los valores mayores de radiación ultravioleta solar.

Los resultados de esta simulación se muestran en la Fig. 3. Como era de esperar existe una dependencia con el día del año. Afortunadamente, esta dependencia permite que el tamaño del ala necesario para cubrir el rostro sea menor en las épocas en las que el índice de radiación ultravioleta es mayor y viceversa. Es interesante comparar los meses de invierno, donde se necesita un ala de hasta 15 cm para tener la sombra total sobre el rostro al medio día, con los de verano, que en virtud de la altura del sol, se llega a necesitar un ala de sólo 2 cm para el mismo objetivo.

Haciendo un análisis del índice de radiación ultravioleta a lo largo del año (incluyendo la nubosidad) se eligieron dos días de particular interés para nuestro estudio (ver Fig. 4). Primero, el 21 de agosto (día juliano 234), por estar aproximadamente cen-

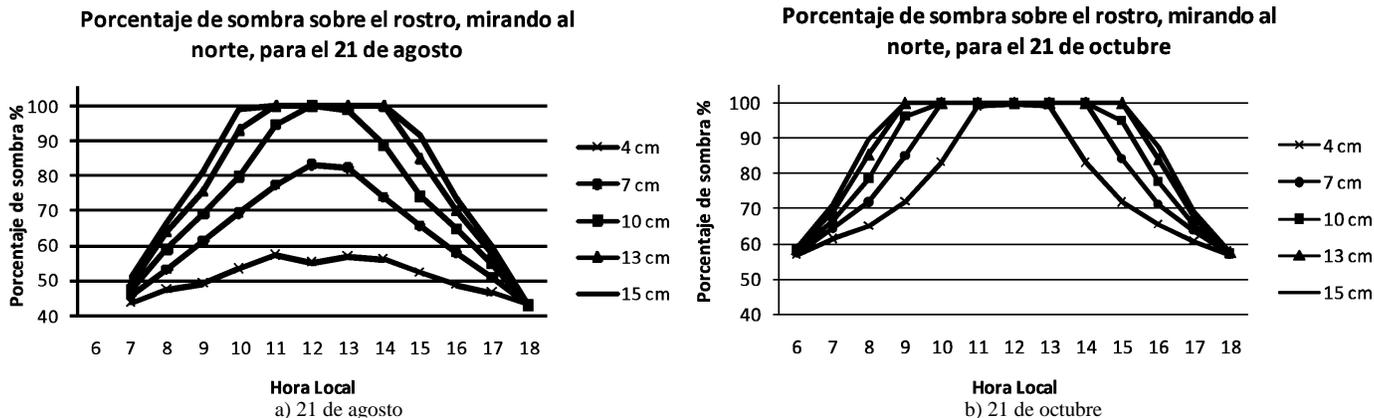


FIG. 5.— Porcentaje de sombra sobre un rostro que mira en todo momento en dirección norte, empleando sombreros cuya ala varía desde 4 cm hasta 15 cm para a) el 21 de agosto y b) el 21 de octubre.

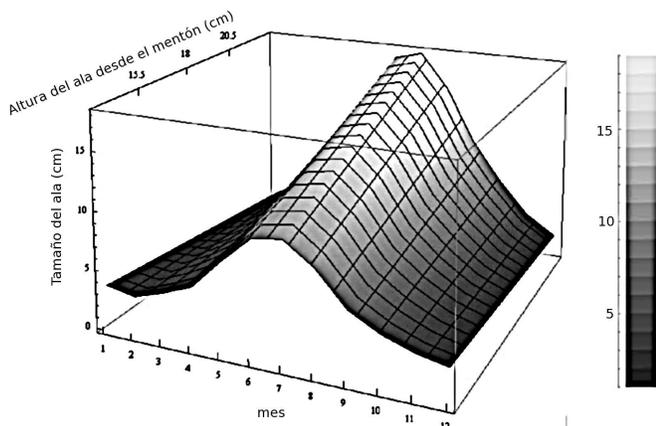


FIG. 6.— Tamaño del ala del sombrero para lograr 100% de sombra sobre el rostro al medio día en función de la profundidad del ala respecto al mentón y del día del año. Para la simulación se supuso que el individuo está mirando hacia el norte.

trado entre el máximo y mínimo de radiación, y estar además, centrado entre el ala mayor y menor para tener la sombra total sobre el rostro al medio día. El segundo día elegido fue el 21 de octubre (día juliano 295), donde la radiación ultravioleta es relativamente alta (del orden de los 90 mW/m^2) y la nubosidad aun no es demasiado elevada.

3.2. Modelado del porcentaje de sombra sobre el rostro para diferentes horas de un determinado día del año considerando diferentes tamaños del ala del sombrero

Se simuló la influencia del tamaño del ala del sombrero sobre el porcentaje de sombra que el mismo proporciona sobre el rostro. Para la simulación se consideró:

- a) El individuo portador del sombrero en todo momento ve en dirección norte.
- b) El ala del sombrero simulado es horizontal y se encuentra a 18.5 cm sobre el mentón.

Con estas consideraciones, se realizó la simulación, para los días 21 de agosto y 21 de octubre, desde las siete de la mañana hasta las seis de la tarde, para sombreros con alas que van desde los 4 cm hasta los 15 cm. Los resultados de las simulaciones se pueden ver en la Fig. 5. Es interesante resaltar lo siguiente:

- a) A medida que nos acercamos al verano se necesitan alas más pequeñas para lograr una sombra del 100% sobre el rostro. En efecto, en la Fig. 5b todos los sombreros logran una sombra del 100% al medio día.
- b) En todos los casos, como era de esperar, mientras más grande es el tamaño del ala, mayor es la sombra que genera sobre el rostro.

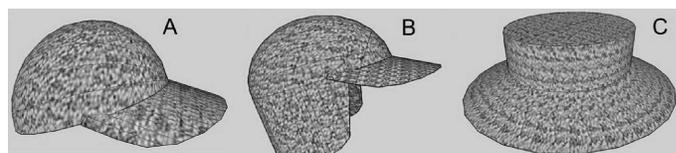


FIG. 7.— Tipos de sombreros seleccionados para el estudio de simulación: A) Gorra tradicional, B) Gorra con solapa lateral y C) Sombrero con ala elíptica.

- c) Existe, como era de esperar, una simetría mañana–tarde.
- d) En el 21 de agosto, el porcentaje inicial y final de sombra está alrededor del 45%, mientras que para el 21 de octubre este valor es de aproximadamente 60%.

3.3. Altura del ala del sombrero (respecto al mentón) necesaria para obtener una sombra total sobre el rostro al medio día para diferentes épocas del año

La eficiencia de un determinado sombrero varía de una época del año a otra. Por ejemplo, durante agosto, no todos los sombreros simulados muestran una sombra del 100% sobre el rostro al medio día, mientras que durante el mes de octubre, todos los sombrero estudiados tendrían, en cuanto a la radiación solar directa se refiere, una protección al medio día del 100%.

La posición del sombrero en la cabeza es un factor que influye fuertemente sobre la cantidad de radiación solar que llega al rostro de la persona, por lo tanto, se simuló, para cada mes del año, la eficiencia del sombrero en función de la profundidad del ala del mismo respecto al mentón de la persona. Los resultados de la mencionada simulación se pueden apreciar en la Fig. 6.

3.4. Modelado de distintos tipos de sombreros

Luego de un análisis preliminar realizado en el laboratorio de Física de la Atmósfera se decidió comparar la eficiencia de los tres tipos de sombreros siguientes:

- A) Gorra tradicional.
- B) Gorra con solapa lateral.
- C) Sombrero con ala elíptica.

Estos sombreros fueron modelados en escala 1:1 y en tres dimensiones con ayuda del programa “Google SketchUP”. En la Fig. 7 se puede apreciar una imagen que muestra estos sombreros.

La simulación para comparar estos tres modelos de sombreros se la realizó para el día 21 de agosto desde las siete de la mañana hasta las seis de la tarde. Por otro lado, el ala de los sombreros empleada para la simulación fue de 7 cm. La selección de este tamaño de ala responde a la idea de acercarnos (no completamente) a tener una sombra total sobre el rostro al medio día del 21 de agosto. Para cada uno de los tres sombreros se realizó una simulación con:

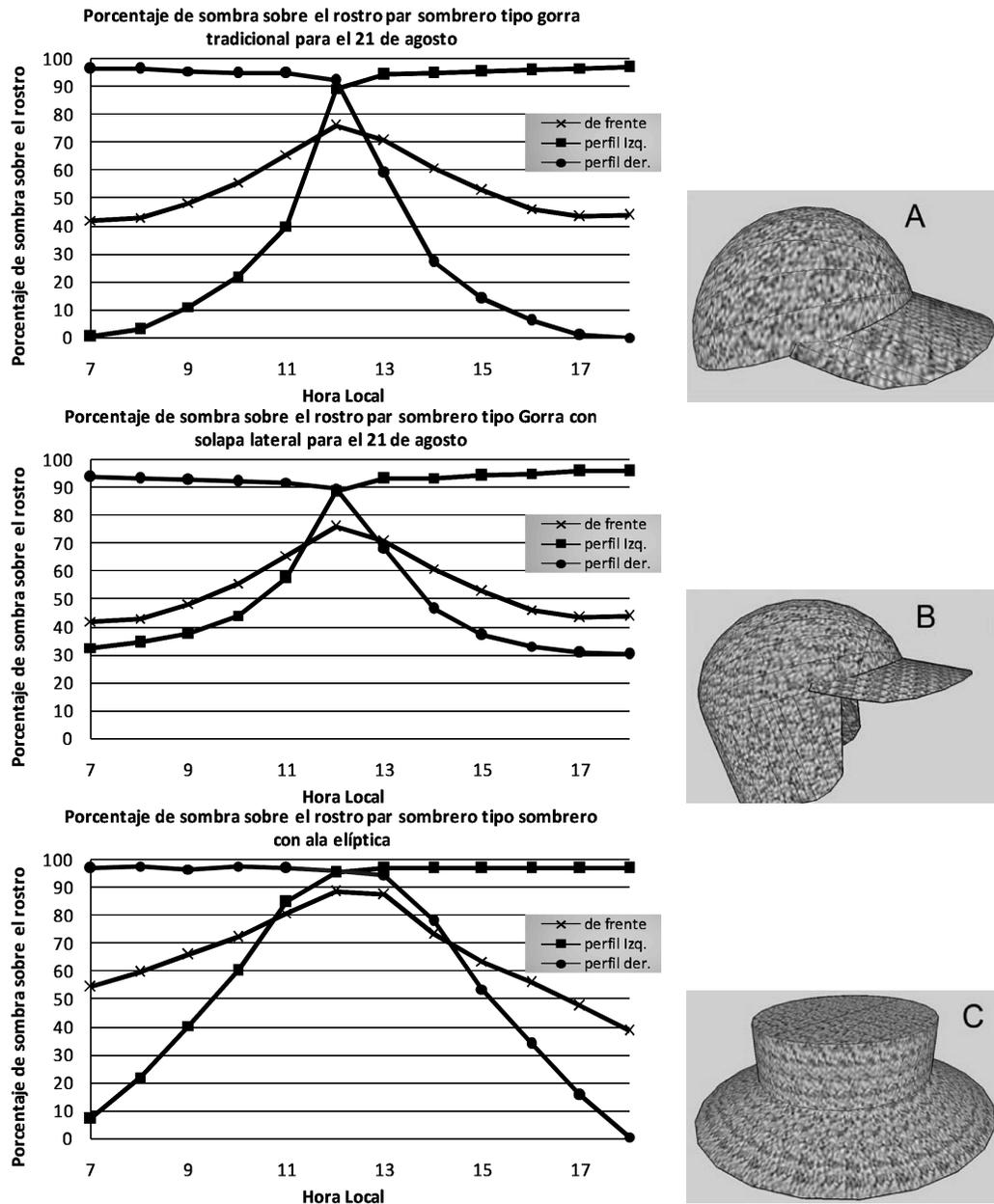


FIG. 8.— Tipos de sombreros seleccionados para el estudio de simulación y las curvas de simulación obtenidas. A) Gorra tradicional, B) Gorra con solapa lateral y C) Sombrero con ala elíptica.

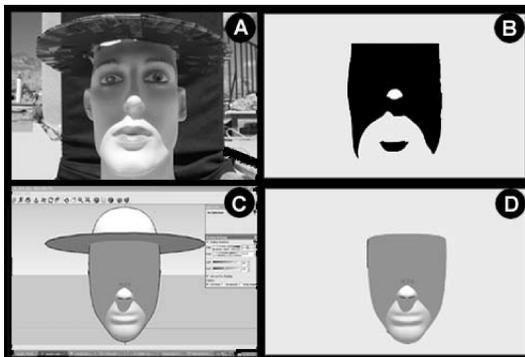


FIG. 9.— En A se ve la fotografía del maniquí tomada en la terraza del laboratorio para una determinada fecha y hora. En B se muestra la imagen correspondiente al maniquí ya procesada con “Adobe Photoshop”. En C se muestra la simulación correspondiente a la misma fecha y hora y para la misma ala de sombrero realizada con “Google SketchUP”. En D se muestra la imagen correspondiente a la simulación ya procesada con “Adobe Photoshop”.

- El individuo con el rostro de frente al norte (curvas con cruces en la Fig. 8).
- Con el perfil izquierdo en dirección al norte (curvas con cuadrados en la Fig. 8).
- Con el perfil derecho en dirección al norte (curvas con círculos en la Fig. 8).

Como se puede apreciar en la Fig. 8, la simetría de la sombra sobre el rostro alrededor del medio día es evidente en las curvas con cruces, mientras que las curvas con cuadrados y círculos muestran, como era de esperarse, una clara dependencia mañana–tarde.

El análisis comparativo de los resultados de estas simulaciones nos permite realizar los siguientes comentarios:

- a) Los tres sombreros seleccionados se comportan de modo similar cuando uno está de frente al sol (líneas con cruces en la Fig. 8). Sin embargo, el sombrero “C” tiene una pequeña ventaja al inicio de la mañana y al finalizar la tarde, ventaja que no es relevante debido a los bajos niveles de radiación ultravioleta a

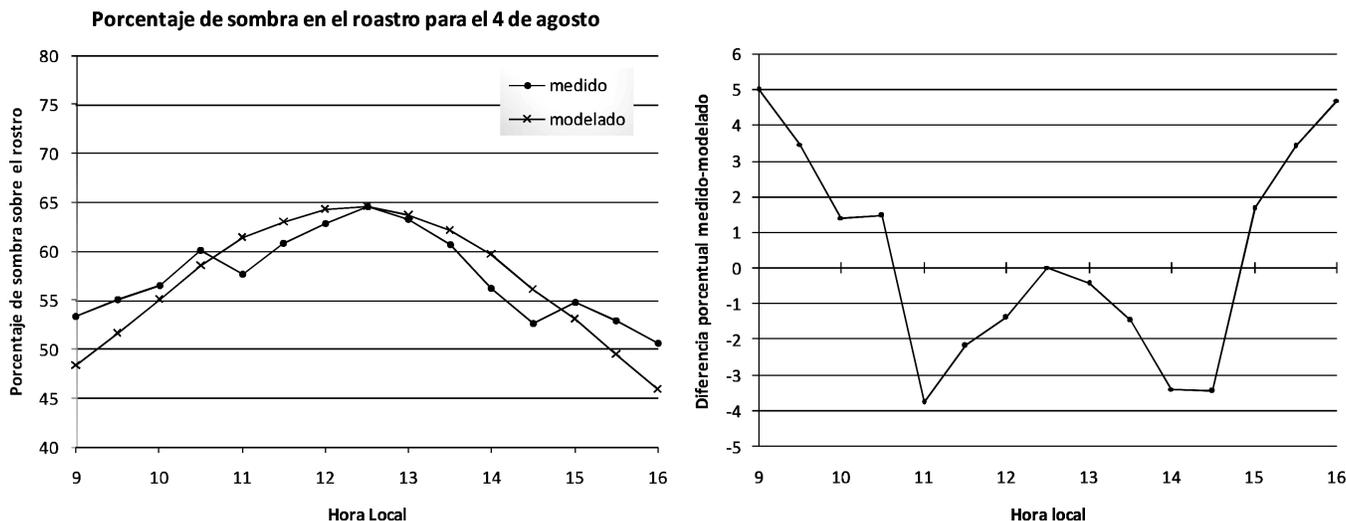


FIG. 10.— A la derecha se tiene la comparación, para el día 4 de agosto de 2008, entre los datos de sombra medidos experimentalmente con un maniquí (puntos) y lo modelado a través de nuestro procedimiento de modelación (cruces). A la izquierda se puede ver la diferencia porcentual entre lo medido y lo modelado para diferentes horas del día. Para fines de comparar ambas situaciones fue necesario normalizar el número de píxeles a las 12:30.

esas horas.

b) En el caso de exponer el perfil derecho (líneas con círculos en la Fig. 8), el comportamiento de los tres sombreros es similar por la mañana. Al medio día, el sombrero tipo “C” tiene un poco de ventaja (llega a aproximadamente 95% de sombra sobre el rostro) respecto a los otros sombreros. Luego del medio día y a lo largo de toda la tarde, el sombrero “B” muestra una clara ventaja relativa. En efecto, en ningún momento el sombrero “B” tiene valores de sombra sobre el rostro por debajo del 30%.

c) La situación al exponer el perfil izquierdo es, como era de esperarse, completamente análoga a la del perfil derecho (ver líneas con cuadrados en la Fig. 8). Durante toda la mañana hasta llegar al medio día, el sombrero “B” tiene una clara ventaja respecto a los otros sombreros. Al medio día, el sombrero “C” tiene una ligera ventaja relativa. Durante la tarde prácticamente los tres sombreros se comportan igual.

3.5. Comparación de los resultados obtenidos experimentalmente con los modelados

Con el fin de validar el protocolo de simulación desarrollado en el presente trabajo, se procedió a comparar las sombras sobre el rostro de un maniquí, con un sombrero horizontal de ala de 8 cm, y durante un día con cielo despejado (4 de agosto de 2008) con lo modelado para la misma situación. En la Fig. 9 se puede observar parte del procedimiento de comparación.

La comparación realizada entre lo modelado y lo medido con el maniquí muestra que nuestra técnica de modelado es satisfactoria (ver Fig. 10).

4. CRITERIOS PARA LA SELECCIÓN DEL SOMBRERO A SER FABRICADO

Sobre la base de las simulaciones y análisis realizados se puede llegar a las siguientes conclusiones:

a) Mientras más grande es el ala del sombrero, mejor es la protección. Sin embargo, un análisis de las simulaciones descritas en §3.3, ver Fig. 6, nos muestra que a partir de un determinado tamaño de ala y en una determinada época del año, se logra obtener la totalidad de sombra sobre el rostro. Por lo tanto, si se hacen sombreros con alas más grandes de lo necesario se malgastaría material.

Por lo comentado anteriormente y teniendo en cuenta las épocas del año en las cuales la radiación ultravioleta es más fuerte, un análisis de las simulaciones descritas en §3.3 nos per-

mite concluir que el ala del sombrero debería cumplir con la siguiente recomendación:

Tamaño del ala recomendado (cm) > 10 cm.

Con esta recomendación se tiene, por ejemplo, que para el día 21 de agosto se logre una sombra total sobre el rostro al medio día con cualquiera de los sombreros estudiados (ver Fig. 3).

b) Sin importar cuál de los sombreros se elija, se debe recomendar el uso apropiado del mismo. En la Fig. 6 se puede apreciar que la eficiencia del sombrero tiene una clara dependencia con la posición respecto al mentón.

Se recomienda un uso adecuado del sombrero.

c) El análisis realizado en las simulaciones del punto §3.4 nos permite concluir que el uso de la gorra tradicional es inadecuado en la mayoría de los escenarios posibles, teniendo utilidad solamente cuando el sol esta de frente y nos acercamos al medio día. Por lo descrito anteriormente, esta opción queda descartada.

d) El sombrero tipo “C” muestra características muy buenas prácticamente a lo largo de las horas de mayor riesgo (10:00 am a 15:00). Sin embargo, fuera del rango mencionado, no tiene un buen comportamiento cuando uno no está de frente al sol. Por otro lado, la confección de este tipo de sombrero resulta más cara que la de los otros dos.

e) El tipo de sombrero “B”, gorra con solapa lateral, es la recomendación de este trabajo.

Las simulaciones realizadas muestran que el comportamiento de este tipo de sombrero es bueno a lo largo de todo el día. Por ejemplo, para el día 21 de agosto (ver Fig. 8) se tiene una sombra sobre el rostro mayor al 30% para todo el día y, la sombra al medio día, con un ala de 7 cm (que es menor al tamaño recomendado por este trabajo) es mayor al 75% en todas las situaciones estudiadas.

Tipo de sombrero recomendado: Gorra con solapa lateral.

f) El tamaño de la solapa lateral guarda una directa relación con la eficiencia y la estética del sombrero. La recomendación del presente trabajo es hacer el sombrero con la solapa lateral lo más grande posible sin comprometer demasiado la estética.

UN MODELO DINÁMICO PARA EL CAMPO GEOMAGNÉTICO* A DYNAMIC GEOMAGNETIC FIELD MODEL

M. CALCINA[†]
Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz–Bolivia

RESUMEN

Se elabora un modelo que contempla solamente la influencia externa del ciclo magnético solar y el efecto de traslación de la Tierra sobre el campo geomagnético. Para ello se resuelve primero la ecuación de difusión homogénea de la magnetohidrodinámica, que se expresa en función del potencial magnético \vec{A} , considerando como factores influyentes del campo geomagnético al viento solar y la frecuencia de traslación de la Tierra alrededor del Sol. A continuación, se resuelve la ecuación de difusión inhomogénea que contempla como factor influyente al ciclo solar magnético (o equivalentemente, campo magnético interplanetario con origen solar), siendo este último introducido en la ecuación diferencial como una perturbación externa utilizando el criterio del oscilador armónico simple en cuanto a las oscilaciones de un sistema sometido a la acción de un campo exterior variable. Seguidamente, a fin de obtener las componentes geomagnéticas H y Z como función de la posición y del tiempo y contrastar los mismos con los datos observacionales, se hace el cambio del sistema de referencia de la solución homogénea al sistema de referencia de las componentes geomagnéticas y se ajusta esta solución a los datos de siete estaciones del mundo obteniendo un buen acuerdo. Finalmente, con estos ajustes se obtuvieron parámetros a través de los cuales se estima el momento magnético dipolar de la Tierra. No se hace el ajuste de la solución inhomogénea a consecuencia de la apreciable dispersión que presentan los datos comparados con el valor promedio del campo magnético interplanetario ($5nT$), lo cual hace que no exista la certeza de decir que esta solución representará adecuadamente las variaciones debidas a este campo externo.

Descriptores: geomagnetismo — magnetohidrodinámica

Código(s) PACS: 91.25.Cw, 52.65.Kj

ABSTRACT

A model was elaborated that considers the external influence of the solar magnetic cycle and the Earth's rotation effects on the geomagnetic field. This involved the solution of the magnetohydrodynamic homogenous diffusion equation. The equation is put as a function of the magnetic potential \vec{A} , and considers the influencing factors of solar wind, and the frequency of the Earth's rotation around the Sun. The non homogeneous equation was then solved using perturbation techniques where the influencing factor of the solar magnetic cycle was considered (interplanetary magnetic field of solar origin). This factor is introduced to the differential equation as an external factor using the harmonic oscillating criteria. To obtain the H and Z geomagnetic components as a function of time and location and to compare with observational data the homogenous solution's reference system is changed to that of the geomagnetic component system. The solution is compared with and adjusted to reflect data from seven world stations. Finally with these adjustments we obtain parameters and estimate the Earth's dipolar magnetic momentum. The adjustment of the non homogeneous solution is not carried out due to the significant dispersion of the data when compared with the average interplanetary magnetic field values. As such we cannot say that this solution represents the variations experienced due to the external magnetic field.

Subject headings: geomagnetism — magnetohydrodynamics

1. INTRODUCCIÓN

Es un hecho eminente que el campo magnético terrestre tiene variaciones temporales de largo y corto plazo. Esto debido a que éste es afectado por diferentes tipos de fuentes lo cual lo hace un fenómeno bastante complejo. Por otro lado el objetivo de los observatorios geomagnéticos es mantener un registro continuo y en el tiempo de éstas variaciones. Una de las varias fuentes responsables de las variaciones en el campo geomagnético es el Sol. Un ejemplo de esta influencia solar son las auroras, que son consecuencia de la interacción del viento solar (plasma emergente de la superficie solar) con la atmósfera terrestre en circunstan-

cias particulares a las cuales se las conoce como perturbaciones súbitas. El Sol no sólo influencia al campo geomagnético de ésta manera, sino que éste produce una variación periódica en el campo terrestre debido a su ciclo magnético y al viento solar. El objetivo del presente trabajo es elaborar un modelo que pueda describir las variaciones temporales del campo con origen en el ciclo solar magnético y la influencia del viento solar. Ello implica la construcción de un modelo para la magnetosfera, la cual es producto del impacto directo del viento solar (vínculo principal entre el Sol y la Tierra) con el campo geomagnético.

Existen diferentes trabajos que modelan la magnetosfera terrestre los cuales en su mayoría son estacionarios. Por ejemplo, Mead (1964) encuentra la deformación del campo geomagnético a partir del potencial geomagnético total que es producto de la ecuación de Laplace. Otros como Luhmann & Friesen (1979) lo

[†]Email: marcelmcn@gmail.com

*Tesis de Grado de la Carrera de Física de la UMSA, Mayo de 2009.
Tutores: Lic. Deterlino Urzagasti, Ing. Edgar Ricaldi.

hacen con base en la similitud existente entre la magnetosfera y la suposición de un campo constante con uno dipolar. Un modelo más sofisticado y el cual es base de éste trabajo fue realizado por Mendoza & Morales (2004) quienes construyen el modelo a partir de la ecuación de difusión de la magnetohidrodinámica. Siguiendo éstos mismos resultados se plantea una solución alternativa a la de Mendoza y Morales que busque explicar no solo la deformación del campo geomagnético a causa del viento solar sino también las fluctuaciones que existen en torno a éste campo a consecuencia de la influencia del Sol.

El trabajo de Tesis en esencia se constituye de cuatro partes primordiales. La primera parte describe aspectos teóricos fundamentales de la influencia que ejerce el Sol hacia la Tierra. En una segunda parte se detalla el planteamiento del modelo y la resolución del mismo. A fin de verificar el modelo, en una tercera parte se hace una comparación del mismo con los datos observacionales. Finalmente en la parte de conclusiones se analiza los resultados alcanzados por el modelo y sus limitaciones.

2. INTERACCIÓN SOL - TIERRA

Nuestro planeta se encuentra inmerso en un medio dominado por el material y la radiación que emite el Sol hacia el espacio, junto con el resto de los planetas del Sistema Solar, grandemente influenciados por este astro. El Sol ha mantenido su luminosidad prácticamente constante por varios miles de millones de años, permitiendo el desarrollo de la vida en la Tierra. El balance del ecosistema existente entre ambos es sumamente frágil por lo que aún pequeñas variaciones en la cantidad de radiación y partículas que recibimos del Sol, tienen un efecto significativo en nuestro medio ambiente.

El sistema Sol-Tierra puede considerarse como aquél constituido por cuatro componentes principales: el Sol, el medio interplanetario, la magnetosfera y la atmósfera terrestre. A este sistema hay que agregar toda una serie de agentes externos como los rayos cósmicos, -partículas de muy alta energía capaces de atravesar todo el medio interplanetario-, el campo geomagnético, el medio interestelar a través del cual se mueve nuestro sistema Solar, etc.

En general, la comprensión global del sistema constituido por la Tierra y sus alrededores en todas las escalas de tiempo es una cuestión sumamente compleja e interdisciplinaria. Cualquier cambio detectable en el sistema es, en última instancia, resultado de la interacción, la retroalimentación o incluso la posible amplificación de muchos factores causantes.

2.1. Estructura del Sol

El Sol es una gran esfera luminosa de gas capaz de enviar hacia el exterior toda clase de radiaciones: desde las de muy baja energía, como las ondas de radio, hasta las más penetrantes como los rayos gamma, así como partículas energéticas y plasma, este último en forma de haces (el viento solar) que llenan todo el Sistema Solar y se extienden hasta mucho más allá de sus límites, creando lo que se conoce como la heliosfera.

El Sol es una estrella enana de color amarillo, miembro de uno de los más numerosos tipos de estrellas, las del tipo espectral *G2*, que se mantiene unida por su propio campo gravitacional y presiones internas como la del plasma y la de radiación. Tiene un radio de 695980 km, es decir, 109 veces el radio de la Tierra, que tiene alrededor de 6371 km, y rota sobre su propio eje en aproximadamente 27 días. El interior está formado por tres capas: el núcleo, la zona radiativa y la zona convectiva, mientras que la atmósfera se divide en: fotosfera, cromosfera, zona de transición y corona. Todas estas regiones se ilustran en la Fig. 1.

— El Núcleo: En él, la densidad y la presión son tan altas que dan lugar a temperaturas de 15 a 16 millones de grados, suficiente para que se lleven a cabo reacciones nucleares. La fusión,

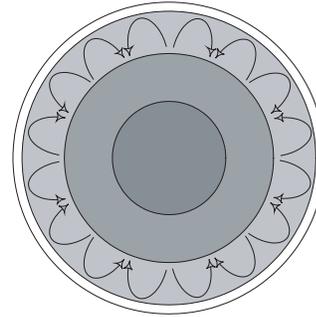


FIG. 1.— Estructura interna del Sol. Desde la parte más interna a la más externa: Núcleo, Zona Radiativa, Zona Convectiva y Atmósfera.

es decir la combinación nuclear de átomos ligeros para crear elementos más pesados, es la fuente de la enorme cantidad de energía que fluye a través de sucesivas capas hacia la fotosfera antes de que ella escape hacia el espacio como luz solar.

— Zona Radiativa: En esta capa el transporte de energía hacia el exterior se lleva a cabo mediante transferencia de radiación, es decir, al absorberse, dispersarse y remitirse la misma en esta parte del interior solar (de ahí el nombre de zona radiativa).

— Zona Convectiva: Esta zona está en la parte externa, por debajo de la superficie del Sol, donde la convección es más efectiva en la transferencia de energía que la zona radiativa. La energía es llevada hacia arriba por el gas caliente ascendente; la energía se difunde a medida que el gas ascendente se expande y entonces el gas se enfría y desciende.

— La atmósfera: La atmósfera solar es la región del Sol que puede ser observada desde afuera y desde la cual la energía es irradiada hacia el espacio. Una pequeña cantidad de energía solar es también perdida en la atmósfera en forma de energía cinética de partículas (el viento solar y los rayos cósmicos solares). La atmósfera a si misma se divide en cuatro regiones: La fotosfera, cromosfera, zona de transición y la corona.

2.2. Actividad Solar

La actividad solar se refiere a variaciones temporales de largo y corto periodo que ocurren en la atmósfera solar a consecuencia del complicado patrón de campo magnético emergente del interior del Sol el cual a su vez produce cambios en el medio plasmático donde se encuentra inmersa la Tierra (viento solar) y por ende afecta al campo geomagnético.

Una de las manifestaciones principales de la actividad solar son las manchas solares que presenta la superficie solar. Las manchas son regiones oscuras de la fotosfera, en donde el campo magnético es muy intenso. El número visible de manchas solares no es constante, la aparición y desaparición de éstas es un fenómeno cíclico con un periodo aproximado de 11 años, al que se conoce como ciclo solar. Durante el curso de un ciclo solar, la localización promedio de las manchas se mueve hacia el ecuador. Usualmente las manchas solares existen en pares con opuesta polaridad magnética. Además, las regiones polares del Sol tienen débiles campos pero todos ellos tienen una sola polaridad (opuesta en los dos hemisferios). Es así que, el promedio del campo solar a una muy grande escala es aproximadamente dipolar. El eje de este dipolo está en general inclinado con respecto al eje de rotación. La orientación del dipolo cambia cada ciclo, es por eso que, el verdadero periodo del campo magnético es de 22 años y no de 11 años. El cambio de polaridad del campo ocurre cuando la actividad solar es máxima (i.e., cuando el número de manchas solares es máximo).

2.3. El Medio Interplanetario (Viento Solar)

El viento solar, que no es más que la expansión supersónica de la atmósfera más alta del Sol (la corona), tiene una velocidad que

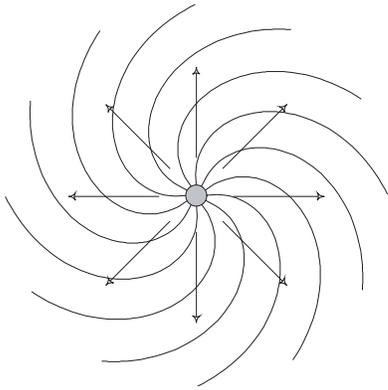


FIG. 2.— Configuración del campo magnético interplanetario en el plano del ecuador solar.

aumenta hasta alrededor de 400 km/s a una altura de un millón de kilómetros sobre la superficie solar (comparado con la velocidad de 30 km/s con la que se mueve la Tierra en su órbita alrededor del Sol), y se mantiene aproximadamente constante hasta los límites de la heliosfera. De esta manera, el viento solar transporta parte de la energía del Sol hacia el espacio. No obstante que esta energía sólo es de alrededor de una diez mil millonésima de toda la energía que emite el Sol en forma de radiación, la cual es del orden de $3.9 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$, pequeñas perturbaciones en el flujo del viento solar tienen consecuencias apreciables en el entorno terrestre.

Este plasma, constituido por partículas cargadas eléctricamente que normalmente se encuentran atrapadas por el Sol a causa de su gravedad, escapa de éste debido a la altísima temperatura que alcanza la corona, por arriba del millón de grados, y se precipita hacia afuera a velocidades supersónicas. En ocasiones, la velocidad del viento solar puede alcanzar los 1000 km/s o más a la altura de la órbita de la Tierra. Este flujo de alta velocidad envuelve nuestro planeta y perturba su campo magnético.

El plasma del viento solar es tan poco denso que sus partículas atraviesan la distancia del Sol a la Tierra (una unidad astronómica) casi sin colisiones. A la altura de la órbita de la Tierra el viento solar tiene una densidad de 10 partículas por cm^3 . Aunque fluye continuamente, su densidad y velocidad cambian constantemente.

De medidas realizadas por los satélites artificiales Viajero y Pionero, se sabe que la región del espacio que controla el Sol a través del viento solar, la heliosfera, se extiende más allá de 50 unidades astronómicas (es decir, más de cincuenta veces la distancia promedio del Sol a la Tierra).

2.4. Campo Magnético Interplanetario

Debido a que el plasma de viento solar tiene una conductividad eléctrica muy alta, el campo magnético del Sol se desplaza con el viento, siguiéndolo en su expansión por el medio interplanetario, como si se encontrara “pegado” a él. Así pues, el campo magnético que llega a la Tierra junto con el viento solar, al que se conoce como campo magnético interplanetario, no es más que la extensión del campo magnético del Sol.

El campo magnético general del Sol es, como ya indicamos, de tipo dipolar. El viento solar expande este campo radialmente hacia fuera del Sol. Podría esperarse que se estableciera un campo cuyas líneas fueran también radiales. Pero como el Sol gira y al girar traslada las líneas de campo emergentes del mismo, la geometría que finalmente resulta para las líneas del campo magnético interplanetario es la de una espiral. Eugene Parker fue quien demostró que así debería de ser, por eso a esta estructura se le llama la espiral de Parker. En el plano del ecuador solar, que es muy cercano al plano de la eclíptica (el plano de la órbita de

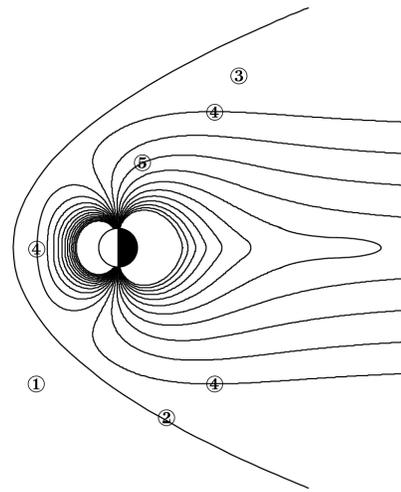


FIG. 3.— Sección transversal de la Magnetosfera terrestre. 1: Región Interplanetaria, 2: Onda de Choque, 3: Magnetofunda, 4: Magnetopausa, 5: Magnetosfera.

la Tierra alrededor del Sol), las líneas del campo interplanetario tienen la forma que se muestra en la Fig. 2, donde las flechas radiales muestran la dirección de flujo del viento solar, que en este caso tiene una velocidad promedio de 400 km/s . Fuera de este plano, la estructura de las líneas de campo es un poco más complicada, pero siempre es la combinación del movimiento radial del viento y la rotación del Sol.

Cerca del Sol, el ángulo que forma la línea de campo con la dirección radial es pequeño. Pero al aumentar la distancia, el ángulo aumenta y a la altura de la órbita de la Tierra es de unos 45° (Cravens 1997). Este ángulo, continúa aumentando con la distancia y en la órbita de Júpiter (unas 5 unidades astronómicas) ya tiene un valor cercano a 90° . La magnitud del campo transportado por el viento disminuye al alejarse del Sol, primero como el cuadrado de la distancia y luego ya solamente como $1/r$. Si el campo magnético del Sol no fuera transportado por el viento, decaería mucho más rápidamente, como $1/r^3$ (Bravo 1999). A la altura de la órbita de la Tierra, este campo tiene un valor de $5nT$. Por supuesto que estos valores son sólo promedios representativos. La dirección y la magnitud del campo magnético interplanetario varían dependiendo de la velocidad del viento solar y pueden tomar valores muy diversos en el viento transitorio originado por algún evento también transitorio de actividad del Sol.

2.5. La Magnetosfera de la Tierra

A su paso por el medio interplanetario ese plasma magnetizado que es el viento solar encuentra un obstáculo en el campo magnético de la Tierra, protegiendo a esta de su impacto directo. El viento solar no puede penetrar este escudo, por lo que sufre una deflexión que deja una cavidad en forma de cometa (véase la Fig. 3). En condiciones normales, el frente de la cavidad se encuentra a una distancia de alrededor de diez radios terrestres ($10r_T$) (Kivelson & Russell 1995) de la Tierra y su cola se extiende más allá de la órbita de la Luna, como a unos mil radios terrestres.

La cavidad del campo geomagnético o magnetosfera es una región de plasma que contiene partículas cargadas de un gran rango de energías, desde los cientos hasta los millones de electrón volts. Como puede apreciarse en la figura, frente a la magnetosfera se localiza una región muy extensa en la que la densidad, velocidad y presión del gas y del campo magnético sufren un salto brusco: una onda de choque. Ésta es una discontinuidad generada por el hecho de que el viento solar se mueve a velocidades supersónicas.

El campo geomagnético es empujado en la dirección del

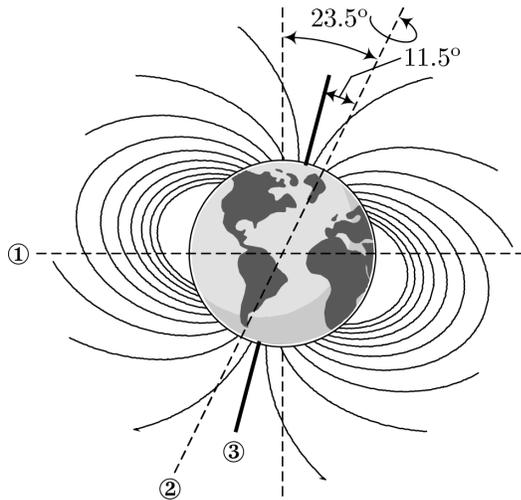


FIG. 4.— Campo geomagnético. En primera aproximación este puede ser considerado como el producido por un dipolo magnético. 1: Plano de la órbita de la Tierra, 2: Eje de rotación, 3: Eje magnético.

viento solar hasta que la presión de este iguale a la presión del campo geomagnético. La frontera donde estas dos presiones se balancean se denomina Magnetopausa. La Fig. 3 ilustra las principales regiones de la magnetosfera (Vilca Salinas 2001). Las regiones esquematizadas en la Fig. 3 son:

- Región Interplanetaria: Lugar donde las propiedades del medio no son afectadas por la Tierra y su campo magnético.
- La Magnetofunda: Es la región donde interactúan el viento solar con el campo geomagnético.
- Frente de choque: Separa la región interplanetaria de la magnetofunda.
- La Magnetopausa: El límite de la magnetosfera, separando el plasma unido a la Tierra del que viaja con el viento solar. Este se encuentra aproximadamente a una distancia de 10 radios terrestres ($10r_T$) a lo largo de una línea imaginaria Sol-Tierra.
- Magnetosfera: El ambiente más cercano de la Tierra, dominado por el campo magnético de la Tierra.

3. EL CAMPO GEOMAGNÉTICO

En primera aproximación el campo de la Tierra puede ser considerado como el producido por una barra de imán, con un momento magnético de $8.0 \times 10^{22} Am^2$, el cual estaría localizado cerca del centro de la Tierra. El campo en la superficie tiene una magnitud que va desde unos $30000 nT$ cerca del ecuador hasta unos $60000 nT$ cerca de los polos (Jankowski & Sucksdorff 1996). El eje a lo largo del imán se conoce como eje magnético que extendido hasta la superficie de la Tierra emerge en dos puntos llamados polos magnéticos. El eje magnético está inclinado aproximadamente 11.5° con respecto al eje de rotación de la Tierra (que a su vez forma un ángulo de 23.5° con la normal al plano de la órbita de la Tierra con respecto al Sol), de manera que el polo norte magnético se encuentra ubicado sobre la Tierra a 79.5° de latitud norte y 71.6° de longitud oeste, mientras que el polo sur magnético está a 79.5° de latitud sur y 108.4° de longitud este. En la Fig. 4 se muestra la forma de este campo magnético.

Si localizamos los polos en el globo terráqueo veremos que los puntos no son antípodas¹ y que el eje magnético, por lo tanto, no pasa por el centro de la Tierra. Se trata pues, de un dipolo que recibe el nombre de excéntrico. El eje magnético pasa por un punto que se encuentra directamente por debajo del Océano Pacífico medio, a unos $340 km$ del centro de la Tierra. El plano que se en-

¹ Definición para puntos diametralmente opuestos.

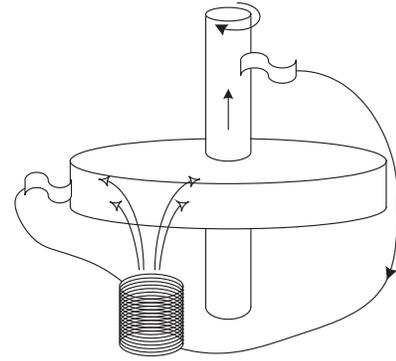


FIG. 5.— Dínamo auto-sustentado.

cuenta formando un ángulo recto con el eje geomagnético contiene lo que se conoce como ecuador magnético.

3.1. Origen del Campo Geomagnético

Actualmente es bien sabido que el 95% del campo magnético de la Tierra es producido en su interior. Por lo que, dentro de este existe un mecanismo que es capaz de generar y mantener el campo de un simple dipolo.

La explicación está en las propiedades y movimientos del núcleo de la Tierra, un cuerpo esférico de material metálico, probablemente de una composición níquel-hierro, cuya parte externa se encuentra en estado líquido. El diámetro del núcleo es de alrededor de $6920 km$, poco mayor que el radio terrestre. El núcleo se encuentra rodeado por el manto, consistente de roca semisólida y de un espesor de $2860 km$.

El magnetismo interno de la Tierra se explica por la llamada teoría del dínamo, según la cual el núcleo externo (de consistencia líquida) está dando vueltas lentamente, con respecto al manto semisólido, generando de esta manera corrientes eléctricas que rodean al núcleo. Estas corrientes generan a su vez un campo magnético, parte del cual escapa a la superficie de la Tierra, dándonos el campo magnético que observamos, y otra parte interactúa con el núcleo líquido que está en movimiento, sosteniendo de esta manera la acción del dínamo. La Fig. 5 muestra un esquema ilustrativo del funcionamiento del dínamo. Por algún mecanismo se pone a girar el disco (material conductor), entonces la presencia del campo magnético de un imán, inicialmente colocado cerca del disco, pone en movimiento las cargas libres del conductor gracias a la fuerza de Lorentz, produciéndose una corriente que circula por la bobina que a su vez genera un campo magnético el cual interactúa con el disco y así nuevamente se genera la corriente.

3.2. Componentes del campo Geomagnético

La intensidad del campo geomagnético es representada generalmente de dos maneras (Campbell 2003):

— Componentes *XYZ*: Tres componentes ortogonales entre sí, siendo *X* y *Y* componentes horizontales que apuntan hacia el Norte y Este respectivamente. *Z* es la componente que apunta hacia el centro de la Tierra.

— Componentes *HDI*: *H* es la magnitud de la componente horizontal que es considerada positiva cualquiera sea su dirección; *D* es la declinación magnética: ángulo que se mide desde la componente *X* hacia *H*; e *I* es el ángulo formado entre la intensidad total y la componente horizontal.

La gráfica de la Fig. 6 ilustra la relación existente entre estas componentes.

De la Fig. 6 por simple geometría la relación entre las variables

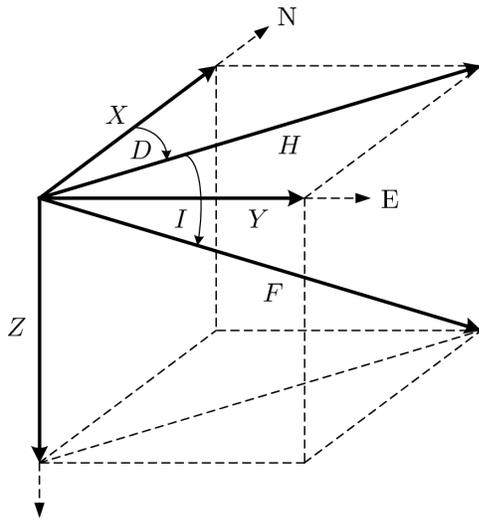


FIG. 6.— Componentes del campo geomagnético.

está dada por:

$$X = H \cos D \quad (1)$$

$$Y = H \sin D \quad (2)$$

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (3)$$

$$\tan I = \frac{Z}{H}. \quad (4)$$

En coordenadas esféricas, como se muestra en la Fig. 7, las direcciones más importantes son la colatitud θ , medida desde el polo norte geográfico a lo largo de una línea de longitud; el ángulo ϕ (longitud) que apunta hacia el este a lo largo de una línea de latitud, medida desde una longitud de referencia; y la dirección radial, r , que es medida desde el centro de la Tierra.

En la superficie de la tierra ($r = r_T$) el campo, \vec{B} , en coordenadas esféricas es

$$B_r \Big|_{r=r_T} = -Z, \quad B_\theta \Big|_{r=r_T} = -X \quad \text{y} \quad B_\phi \Big|_{r=r_T} = Y. \quad (5)$$

El sistema de referencia asociado a estas coordenadas es aquél cuyo eje z coincide con el eje de rotación de la Tierra.

3.2.1. Aproximación del Campo Geomagnético

Si suponemos que el polo norte geográfico coincide con el polo norte magnético, entonces, de acuerdo a la gráfica de la Fig. 6, la declinación es cero ($D = 0$). Por lo que las componentes geomagnéticas (ecuaciones (7)) se pueden aproximar a:

$$B_r \Big|_{r=r_T} = -Z, \quad B_\theta \Big|_{r=r_T} = -H \quad \text{y} \quad B_\phi \Big|_{r=r_T} = 0 \quad (6)$$

Esta aproximación será utilizada en una sección posterior (§4).

3.3. Variaciones del Campo Geomagnético

El campo geomagnético varía con el tiempo. La razón de cambio de las diferentes componentes no son uniformes y éstas pueden ser clasificadas de la siguiente manera (Cillis & Sciutto 2006):

— Variaciones Seculares: Son variaciones que se extienden durante varios años. Estos se originan por cambios en el interior de la Tierra y son generalmente incrementos y decrementos suaves y lentos. Los valores de la variación secular de las componentes del campo van desde $10nT$ por año a $150nT/\text{año}$.

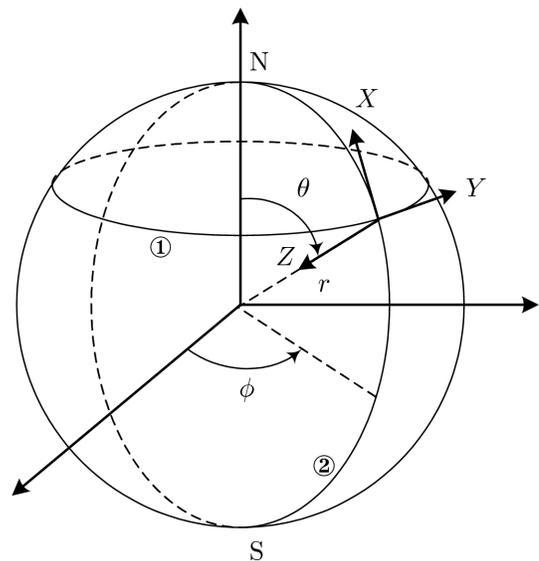


FIG. 7.— Componentes del campo geomagnético en coordenadas esféricas. 1: Línea de latitud, 2: Línea de longitud.

— Variaciones Periódicas: Se originan debido a la influencia de campos externos y en general equivalen a menos de $100nT$. Los periodos característicos son $12h$, 1 día , 27 días , 6 meses , 1 año , 11 años , 22 años , etc. Estas están relacionadas con la rotación de la tierra y la influencia del Sol y la Luna.

— Tormentas magnéticas: Son perturbaciones súbitas del campo magnético, las cuales pueden durar horas o varios días y modifican el campo en más de $500nT$.

Como puede apreciarse, el campo geomagnético principal es modificado por diferentes tipos de factores, razón por la cual es un tanto complicada la predicción en el tiempo del comportamiento de éste. Es por eso que el objetivo del presente trabajo es elaborar un modelo que pueda describir algunas de estas variaciones para cualquier punto del espacio.

Debido a la complejidad de tomar en cuenta todos los factores influyentes del campo, el modelo se restringirá a contemplar sólo las variaciones anuales y la influencia del campo magnético solar como una primera tentativa de describir las variaciones geomagnéticas.

Para poder darnos una idea del criterio utilizado en el planteamiento de la interacción Sol - Tierra, invocaremos al oscilador armónico simple, el cual se describe en la siguiente sección.

4. MODELO DE INTERACCIÓN

En la sección anterior se habló sobre el criterio que se utilizará para el planteamiento de la interacción Sol-Tierra, pero no se habló nada sobre cuáles son las ecuaciones homogénea e inhomogénea correspondientes al problema. Esta sección se dedica a esclarecer este tema además de describir las propuestas para las soluciones de estas ecuaciones.

La ecuación diferencial homogénea es la ecuación de difusión de la magnetohidrodinámica, la cual es resuelta a partir de los resultados de Mendoza & Morales (2004) quienes proponen un modelo estático ($\partial \vec{B} / \partial t = 0$) para la deformación del campo geomagnético debido a la presencia del viento solar. Específicamente, se introducen tres mejoras a este modelo; la variación en el tiempo del campo geomagnético (producto de la traslación de la Tierra); la inclinación del dipolo terrestre y la introducción de una solución inhomogénea como consecuencia de un agente perturbador.

Antes de empezar el planteamiento, es necesario recalcar qué factores se están tomando en cuenta en el modelo. Como se desea determinar las variaciones del campo geomagnético debidas a la

influencia magnética del Sol, esto significa que dentro del marco de trabajo están presentes sólo un dipolo magnético inclinado (campo geomagnético) afectado por un plasma (viento solar), el cual trae las variaciones magnéticas provenientes del Sol y es el vínculo entre los dos entes. Es decir que la ecuación diferencial a resolver debe contemplar estos factores.

A continuación se describe la construcción del modelo.

4.1. Ecuación Diferencial Homogénea

La ecuación de difusión de la Magnetohidrodinámica describe el comportamiento espacial y temporal de un campo magnético ligado a un medio de conductividad σ (plasma) el cual se mueve con velocidad \vec{v} , relativa a un observador fijo. Esta ecuación puede ser deducida de las ecuaciones de Maxwell y la ley de Ohm:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}, \quad (10)$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (11)$$

Combinando las ecuaciones anteriores obtenemos la ecuación de difusión.

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{B} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (12)$$

Ya que esta ecuación contempla características afines al problema, será la ecuación a resolver.

En nuestro caso \vec{v} es la velocidad del viento solar y σ la conductividad del mismo.

Por cuestiones de simplicidad se reescribirá la ecuación de difusión en función del potencial magnético \vec{A} . Para ello tomemos en cuenta que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi_e - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (13)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (14)$$

donde ϕ_e es el potencial escalar.

Reemplazando las ecuaciones (13), (14) y (11) en (10) tenemos:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{\mu_0 \sigma} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{v} + \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \phi_e \right) = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{A} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (15)$$

donde se ha supuesto $\vec{v} = ctte$.

Para resolver la ecuación (15) usaremos la condición

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{v} = 0 \quad (16)$$

para el potencial vector y la condición

$$\frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \phi_e = 0 \quad (17)$$

para el potencial escalar. De las soluciones obtenidas se escogerán aquellas que satisfagan la condición (16). Entonces, la ecuación a resolver para cada componente es:

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{A} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (18)$$

La ecuación (18) es la denominada ecuación homogénea² la cual debe contemplar solamente una frecuencia (la de rotación de la tierra alrededor del Sol).

Notemos que las ecuaciones (17) y (18) nos permiten hallar ϕ_e y \vec{A} con las cuales es posible obtener \vec{E} a través de la ecuación (13).

4.1.1. Solución

Para resolver la ecuación (18) se propone una solución para cada componente de la forma

$$A = A' e^{i(\omega t + \beta)}, \quad (19)$$

con la que se obtiene una ecuación para el espacio:

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 A' - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) A' - a_t A' = 0, \quad (20)$$

$$a_t = -\frac{\epsilon_0}{\sigma} \omega^2 + i\omega.$$

Ahora se propone una solución para esta ecuación (20), ésta es de la forma:

$$A' = \phi A''. \quad (21)$$

Además se asume que la velocidad del viento solar es constante y que puede ser escrita como el gradiente de un potencial escalar:

$$\vec{v} = -\vec{\nabla} \phi_v, \quad (22)$$

Trabajando con las ecuaciones (20), (21) y (22) obtenemos dos ecuaciones diferenciales

$$\vec{\nabla} \phi = -\frac{\phi}{2\eta} \vec{\nabla} \phi_v, \quad (23)$$

$$\nabla^2 A'' - j^2 A'' = 0 \quad (24)$$

donde $\eta = 1/\mu_0 \sigma$ (viscosidad magnética) y $j^2 = (v/2\eta)^2 + a_t/\eta$. La ecuación (24) es conocida como la ecuación de Helmholtz modificada, cuyas soluciones están dadas en términos de los funciones esféricas de Bessel modificadas y los armónicos esféricos.

$$A'' = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm} i_l(jr) + b_{lm} k_l(jr)] Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (25)$$

La solución de la ecuación (23) puede ser hallada por integración directa e igualando componentes. Esta solución es:

$$\phi = c_1 e^{(v/2\eta)x}, \quad (26)$$

donde se ha asumido $\vec{v} = v\hat{e}_x$, ya que como veremos mas adelante, \hat{e}_x es asumida como la dirección del viento solar.

Haciendo $k = v/2\eta$, la solución general es

$$A = c_1 e^{kx} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm} i_l(jr) + b_{lm} k_l(jr)] Y_{lm}(\theta, \phi) e^{i(\omega t + \beta)}. \quad (27)$$

Como deseamos soluciones convergentes podemos hacer $a_{lm} = 0$.

² A diferencia de este trabajo, Mendoza & Morales (2004) se abocan a resolver la parte estacionaria de la ecuación (18) ($\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{A} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = 0$).

$$A = c_1 e^{kx} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l b_{lm} k_l(jr) Y_{lm}(\theta, \phi) e^{i(\omega t + \beta)}. \quad (28)$$

El parámetro k es un eigenvalor del problema, dependiente de v y η que son parámetros para cada punto del espacio. Estricta-

mente la ecuación (28) debe contemplar una integral sobre k con $b_{lm}(k)$. Pero esto dificultaría en gran manera la resolución pues se necesitaría $\vec{v}(\vec{r})$ y $\eta(\vec{r})$. Entonces, por simplicidad asumiremos dados los valores para v y η o bien para k en cada punto del espacio.

Expandiendo la ecuación (28) desde $l = 0$ hasta $l = 1$

$$A = c_1 e^{kx} \left\{ b_{00} \frac{e^{-jr}}{jr} e^{i(\omega t + \beta)} + b_{1-1} \frac{e^{-jr-i\phi}(jr+1)\sin\theta}{j^2 r^2} e^{i(\omega t + \beta)} + b_{10} \frac{e^{-jr}(jr+1)\cos\theta}{j^2 r^2} e^{i(\omega t + \beta)} - b_{11} \frac{e^{-jr+i\phi}(jr+1)\sin\theta}{j^2 r^2} e^{i(\omega t + \beta)} \dots \right\}. \quad (29)$$

La solución (28) contempla una infinidad de soluciones, muchas de las cuales no son de nuestro interés, por lo que es necesario seleccionar soluciones apropiadas, las cuales deban obedecer ciertas propiedades del problema.

4.1.2. Selección de las Soluciones

El procedimiento usual, una vez determinada la solución general de cualquier ecuación diferencial, es aplicar las condiciones de contorno del problema en particular. Lo que se hará a continuación es hacer un procedimiento semejante a este, utilizando un punto de vista más didáctico, de tal modo de escoger soluciones que describen las variaciones temporales del potencial geomagnético.

Cuando la Tierra da una vuelta completa alrededor del Sol, un observador en un sistema de referencia de la Fig. 8, donde el eje x es en todo momento paralelo a la dirección del viento solar, ve un dipolo geomagnético precesar alrededor del eje z con un periodo de un año. Esto significa que la componente en la dirección z del momento dipolar geomagnético no varía en el tiempo mientras que las dos componentes restantes sí lo hacen. Es decir,

$$\begin{aligned} m_x &= m \sin \alpha \cos(\omega t + \beta) \\ m_y &= m \sin \alpha \sin(\omega t + \beta) \\ m_z &= m \cos \alpha. \end{aligned} \quad (30)$$

Todo esto nos da una idea de lo que uno esperaría, en el supuesto caso que tuviésemos un dipolo puro como campo geomagnético. Esto es, en el sistema de referencia mencionado, la forma del potencial dipolar es (Jackson 1999):

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} (-\cos \alpha \sin \theta \sin \phi + \sin \alpha \sin(\omega t + \beta) \cos \theta) \\ A_y &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} (\cos \alpha \sin \theta \cos \phi - \sin \alpha \cos(\omega t + \beta) \cos \theta) \\ A_z &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin \alpha \sin \theta (\cos(\omega t + \beta) \sin \phi - \sin(\omega t + \beta) \cos \phi) \end{aligned} \quad (31)$$

donde ω es la frecuencia de traslación de la Tierra, α la inclinación del momento dipolar y β una fase cualquiera. Es esta la forma que deben tener las soluciones que se buscan para cada componente. Es decir, según las ecuaciones (31), en las soluciones buscadas:

— Todos los términos deben tener dependencia $1/r^2$.

— El primer término de las componentes A_x y A_y no debe tener dependencia temporal ($\omega = 0$), mientras que los restantes términos de todas las componentes si presentan esta dependencia.

— Los términos de las componentes A_x , A_y y A_z del modelo tienen que tener la misma dependencia angular que presentan los términos de las componentes respectivas del dipolo puro.

— Los términos deben satisfacer la condición expresada en la ecuación (16).

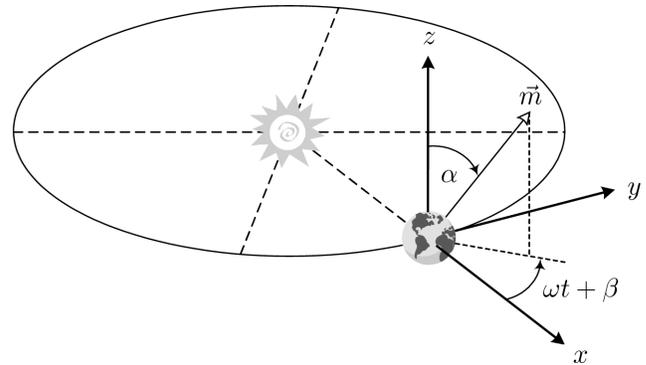


FIG. 8.— Sistema de referencia asociado al potencial geomagnético.

Tomando en cuenta las consideraciones recién mencionadas, los términos escogidos para cada componente son:

$$\begin{aligned} A_x &= M \left(-\frac{e^{k(x-r)} y (kr+1) \cos \alpha}{r^3} + \frac{e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} z (jr+1) \sin \alpha}{r^3} \right), \\ A_y &= M \left(e^{k(x-r)} \left(\frac{x(kr+1)}{r^3} + \frac{k}{r} \right) \cos \alpha - \frac{e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} z (jr+1) \sin \alpha}{r^3} \right), \\ A_z &= M \left(\frac{e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} y (jr+1) \sin \alpha}{r^3} - e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} \left(\frac{x(jr+1)}{r^3} + \frac{k}{r} \right) \sin \alpha \right), \end{aligned} \quad (32)$$

donde $M = \frac{\mu_0 m}{4\pi}$.

4.1.3. Partes Real e Imaginaria

El conducto regular en la obtención de la solución final es tomar la parte real de la solución compleja, este no será el caso, debido al proceso seguido en la sección anterior de Selección de las Soluciones. En esta sección, esencialmente se busca, en la solución general, la forma de un dipolo magnético, por lo tanto, siguiendo este mismo procedimiento se toma la parte real o imaginaria de cada término de las ecuaciones (32) que tenga forma compleja. La condición de tomar la parte real o imaginaria es que

el término final tiene que tomar la forma del término respectivo del dipolo magnético (ecuaciones 31), esto esencialmente en lo que respecta a la parte temporal. Es así que

$$\begin{aligned} A_x &= A_{x1} + \text{Im}[A_{x2}] \\ A_y &= A_{y1} + \text{Re}[A_{y2}] \\ A_z &= \text{Re}[A_{z1}] + \text{Im}[A_{z2}]. \end{aligned} \quad (33)$$

O bien, explícitamente:

$$\begin{aligned} A_x &= Me^{kx} \left(-\frac{e^{-kr}(kr+1)y \cos \alpha}{r^3} + \frac{e^{-ar}z \sin \alpha (br \cos(br-\beta-\omega t) - (ar+1) \sin(br-\beta-\omega t))}{r^3} \right) \\ A_y &= Me^{kx} \left(e^{-kr} \left(\frac{k}{r} + \frac{(kr+1)x}{r^3} \right) \cos \alpha - \frac{e^{-ar}z \sin \alpha ((ar+1) \cos(br-\beta-\omega t) + br \sin(br-\beta-\omega t))}{r^3} \right) \\ A_z &= Me^{kx-ar} \sin \alpha \left(\frac{y((ar+1) \cos(br-\beta-\omega t) + br \sin(br-\beta-\omega t))}{r^3} - \frac{brx \cos(br-\beta-\omega t) - (kr^2 + axr + x) \sin(br-\beta-\omega t)}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2}(k^2 - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega^2}{\eta^2} + (k^2 - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2)^2}} \\ b &= \sqrt{\frac{1}{2}(\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - k^2) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega^2}{\eta^2} + (k^2 - \mu_0 \epsilon_0 \omega^2)^2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Nótese que en el límite de $\omega = 0$ (no existe movimiento de traslación) y $k = 0$ (no hay viento solar) las ecuaciones (34) se reducen a las ecuaciones (31).

4.1.4. Sistema de Referencia

El potencial (34) describe el comportamiento espacial y temporal del campo magnético para un observador en el sistema de referencia de la Fig. 8. Por esta razón y con el fin de hacer comparaciones con los datos observacionales, se hará el cambio de este sistema al sistema de los datos. El sistema de referencia de los datos es aquél descrito en la sección 3.2 donde el eje z de este coincide con el eje de rotación de la Tierra. Debe mencionarse, por otro lado, que el momento dipolar magnético de la Tierra durante el transcurso de un día da una vuelta alrededor del eje de rotación, lo cual como es de esperarse, también produce variaciones en el campo geomagnético. Pero como el presente trabajo solo se dedica a estudiar variaciones del campo durante periodos largos de tiempo, entonces, la variación diaria no es de nuestro interés y por ende no se tomará en cuenta.

Es por eso que en este punto debemos invocar a la aproximación del campo geomagnético descrita en la subsección 3.2.1. Esta aproximación esta relacionada con el hecho de que en el transcurso de un día, en promedio, la ubicación espacial del eje magnético coincide con el eje de rotación de la Tierra, por lo que

el ángulo del momento dipolar respecto de la normal a la órbita terrestre será de aproximadamente $\alpha = 23^\circ.5$.

En la Fig. 9 se ilustran dos sistemas de referencia. El Primer sistema xyz es el sistema de la Fig. 8 mientras que el segundo $x'y'z'$ es el sistema aproximado de los datos, según lo descrito recientemente. El eje z' coincide con el eje de rotación de la Tierra y el eje magnético.

Podemos hacer la transformación del sistema xyz al sistema $x'y'z'$ por medio de tres rotaciones sucesivas (Goldstein et al.

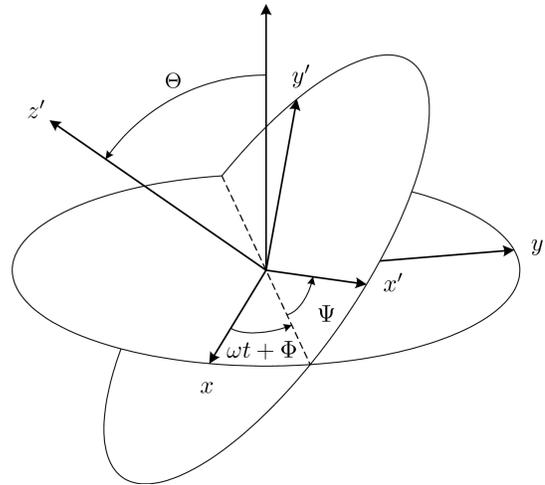


FIG. 9.— Sistema de referencia primado: asociado a las componentes geomagnéticas. Sistema de referencia no primado: sistema de la Fig. 8.

2000). Cada paso implica una rotación descrita por un ángulo de Euler. La transformación final E será el producto de tres matrices de rotación:

$$E = \begin{pmatrix} \cos \Psi \cos(\omega t + \Phi) - \cos \Theta \sin \Psi \sin(\omega t + \Phi) & \cos \Theta \cos(\omega t + \Phi) \sin \Psi + \cos \Psi \sin(\omega t + \Phi) & \sin \Theta \sin \Psi \\ -\cos(\omega t + \Phi) \sin \Psi - \cos \Theta \cos \Psi \sin(\omega t + \Phi) & \cos \Theta \cos \Psi \cos(\omega t + \Phi) - \sin \Psi \sin(\omega t + \Phi) & \cos \Psi \sin \Theta \\ \sin \Theta \sin(\omega t + \Phi) & -\cos(\omega t + \Phi) \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (36)$$

Es decir que el potencial magnético en el sistema de referencia primado es:

$$\vec{A}' = E\vec{A}, \quad (37)$$

y la transformación de las componentes x , y y z es:

$$\vec{r} = E^{-1}\vec{r}'. \quad (38)$$

Puede apreciarse, comparando las Figs. 8 y 9, que $\alpha = \Theta$ y $\beta = \Phi + 3\pi/2$.

Utilizando las anteriores ecuaciones, el potencial en el sistema primado y en coordenadas esféricas será:

$$A_r = M \frac{e^{kx} k}{r} \{ e^{-kr} \cos(\Phi + \omega t) \sin \theta \sin(\phi + \Psi) \cos^2 \Theta + e^{-ar} \cos \theta \cos(br - \Phi - t\omega) \sin \Theta \cos \Theta - e^{-kr} \cos \theta \cos(\Phi + \omega t) \sin \Theta \cos \Theta + e^{-kr} \cos(\phi + \Psi) \sin \theta \sin(\Phi + \omega t) \cos \Theta + e^{-ar} \cos(br - \Phi - \omega t) \sin \theta \sin^2 \Theta \sin(\phi + \Psi) \} \quad (39)$$

$$A_\theta = M e^{kx} \left\{ \frac{e^{-kr} k}{r} \cos \theta \cos(\Phi + \omega t) \sin(\phi + \Psi) \cos^2 \Theta + \frac{e^{-kr} (kr + 1)}{r^2} \cos(\phi + \Psi) \sin \Theta \cos \Theta - \frac{e^{-ar} (ar + 1)}{r^2} \cos(br) \cos(\phi + \Psi) \sin \Theta \cos \Theta - \frac{be^{-ar}}{r} \cos(\phi + \Psi) \sin(br) \sin \Theta \cos \Theta - \frac{e^{-ar} k}{r} \cos(br - \Phi - \omega t) \sin \theta \sin \Theta \cos \Theta + \frac{e^{-kr} k}{r} \cos(\Phi + \omega t) \sin \theta \sin \Theta \cos \Theta + \frac{e^{-kr} k}{r} \cos \theta \cos(\phi + \Psi) \sin(\Phi + \omega t) \cos \Theta + \frac{e^{-ar} k}{r} \cos \theta \cos(br - \Phi - \omega t) \sin^2 \Theta \sin(\phi + \Psi) - \frac{be^{-ar}}{r} \cos(br) \sin \Theta \sin(\phi + \Psi) + \frac{e^{-ar} (ar + 1)}{r^2} \sin(br) \sin \Theta \sin(\phi + \Psi) \right\} \quad (40)$$

$$A_\phi = M e^{kx} \left\{ \frac{e^{-kr} k}{r} \cos(\phi + \Psi) \cos(\Phi + \omega t) \cos^2 \Theta + \frac{e^{-kr} (kr + 1)}{r^2} \sin \theta \cos^2 \Theta - \frac{e^{-kr} (kr + 1)}{r^2} \cos \theta \sin \Theta \sin(\phi + \Psi) \cos \Theta + \frac{e^{-ar} (ar + 1)}{r^2} \cos(br) \cos \theta \sin \Theta \sin(\phi + \Psi) \cos \Theta + \frac{be^{-ar}}{r} \cos \theta \sin(br) \sin \Theta \sin(\phi + \Psi) \cos \Theta - \frac{e^{-kr} k}{r} \sin(\phi + \Psi) \sin(\Phi + \omega t) \cos \Theta + \frac{e^{-ar} k}{r} \cos(\phi + \Psi) \cos(br - \Phi - \omega t) \sin^2 \Theta + \frac{e^{-ar}}{r^2} (ar + 1) \cos(br) \sin \theta \sin^2 \Theta + \frac{be^{-ar}}{r} \sin(br) \sin \theta \sin^2 \Theta - \frac{be^{-ar}}{r} \cos(br) \cos \theta \cos(\phi + \Psi) \sin \Theta + \frac{e^{-ar} (ar + 1)}{r^2} \cos \theta \cos(\phi + \Psi) \sin(br) \sin \Theta \right\} \quad (41)$$

Debe tomarse en cuenta que A_r , A_θ , A_ϕ además de las variables r , θ y ϕ de las ecuaciones anteriores son variables primadas correspondientes al sistema $x'y'z'$.

Utilizando la relación $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ obtenemos el campo magnético en el sistema deseado. No se toma en cuenta la componente B_ϕ debido a la aproximación de la subsección 3.2.1.

Normalizamos las componentes del campo magnético en unidades de radios terrestres (r_T). Este cálculo da como resultado las mismas ecuaciones, excepto que los parámetros k , a , b , M y r son redefinidos como:

$$k \rightarrow k', \quad a \rightarrow a', \quad b \rightarrow b', \quad M \rightarrow M', \quad r \rightarrow r', \quad (42)$$

donde estos nuevos parámetros se definen como

$$k' = kr_T, \quad a' = ar_T, \quad b' = br_T, \quad M' = M/r_T^3, \quad r' = r/r_T. \quad (43)$$

Además que las ecuaciones (35) se convierten en

$$a'^2 = \frac{1}{2} \left(k'^2 - \frac{\omega^2 r_T^2}{c^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2\omega r_T k'}{v} \right)^2 + \left(k'^2 - \frac{\omega^2 r_T^2}{c^2} \right)^2} \\ b'^2 = -\frac{1}{2} \left(k'^2 - \frac{\omega^2 r_T^2}{c^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2\omega r_T k'}{v} \right)^2 + \left(k'^2 - \frac{\omega^2 r_T^2}{c^2} \right)^2}, \quad (44)$$

donde se ha utilizado $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ y $k = v/2\eta$.

4.1.5. Aproximación³

Con el fin de obtener un modelo simple que a la vez responda adecuadamente a las variaciones que se quiere modelar, se aproximarán las ecuaciones a una forma más sencilla.

En las ecuaciones (44), veamos como es el parámetro k' en comparación con los otros parámetros físicos:

³ Debe mencionarse en este punto que esta aproximación es producto de un tratamiento *a posteriori*, consecuencia del análisis y el contraste de los datos observacionales con el modelo final completo.

Tomado en cuenta que $k' \sim 10^{-4}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, $r_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, $\omega = 2\pi/a\tilde{n}o$ y $v = 400 \text{ km/s}$ (velocidad promedio del plasma) el orden de magnitud de los términos es;

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 r_T^2}{c^2} &\sim 10^{-17} \\ \left(\frac{2\omega r_T k'}{v}\right)^2 &\sim 10^{-10}. \end{aligned} \quad (45)$$

Esto nos dice claramente que k' es grande comparado con los términos (45), por lo que las ecuaciones (44) se pueden aproximar como

$$\begin{aligned} a' &\approx k' \\ b' &\approx 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Utilizando la aproximación anterior, las componentes B_r y B_θ se reducen a:

$$\begin{aligned} B_r = Z = -M' \frac{2 \cos \theta}{r'^3} e^{k' r' u(t)} \left\{ 1 + k' r' + \frac{1}{2} k'^2 r'^2 (\cos^2 \Theta + \cos^2(\omega t + \Phi) \sin^2 \Theta - \right. \\ \left. \sin \Theta \sin(\omega t + \Phi) (\cos \xi \cos(\omega t + \Phi) - \right. \\ \left. \cos \Theta \sin \xi \sin(\omega t + \Phi)) \tan \theta) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} k' r' (k' r' + 1) (\cos \xi \cos(\omega t + \Phi) \sin \theta - \right. \\ \left. \sin \theta \sin(\omega t + \Phi) (\cos \Theta \sin \xi + \sin \Theta \tan \theta)) \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} B_\theta = H = -M' \frac{\sin \theta}{r'^3} e^{k' r' u(t)} \left\{ 1 + k' r' + \right. \\ \left. k' r' ((k' r' + 1) \cos \theta - k' r' \sin \Theta \sin(\omega t + \Phi)) \right. \\ \left. (\cos \xi \cot \theta \cos(\omega t + \Phi) - \right. \\ \left. (\sin \Theta + \cos \Theta \cot \theta \sin \xi) \sin(\omega t + \Phi)) \right\} \end{aligned} \quad (48)$$

siendo

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos \xi \sin \theta \cos(\omega t + \Phi) + \\ &(\cos \theta \sin \Theta - \cos \Theta \sin \theta \sin \xi) \sin(\omega t + \Phi) - 1 \\ \text{y} \quad \xi &= \phi + \Psi \end{aligned} \quad (49)$$

4.1.6. Ecuación de Ajuste

Una de las variaciones que presenta los datos observacionales es la tendencia secular. La tendencia secular es el incremento o disminución de las componentes geomagnéticas a lo largo de varios años, relacionado principalmente con el geodínamo interno. Esta variación no está contemplada por el modelo lo cual en el futuro exigirá un tratamiento adecuado de los datos de tal manera que estos queden desafectados de variación secular. Dando por hecho este tratamiento, el proceso arrojaría como resultado componentes H y Z sin campo principal⁴, quedando solo las fluctuaciones alrededor de este campo. Entonces, adecuando el modelo a esta futura situación restamos a H y Z el valor del campo principal que está dado por las componentes dipolares respectivas:

$$B_r = \frac{\mu_0 m}{4\pi r_T^3} \frac{2 \cos \theta}{r'^3}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r_T^3} \frac{\sin \theta}{r'^3}. \quad (50)$$

Por lo que el modelo final normalizado que representa las fluctuaciones anuales alrededor del campo principal es:

⁴ En primera aproximación mas del 90% del campo principal de la Tierra puede ser considerado como dipolar (Jankowski & Sucksdorf 1996).

$$\begin{aligned} Z = -M' \frac{2 \cos \theta}{r'^3} \left\{ e^{k' r' u(t)} \left[1 + k' r' + \frac{1}{2} k'^2 r'^2 (\cos^2 \Theta + \right. \right. \\ \left. \left. \cos^2(\omega t + \Phi) \sin^2 \Theta - \right. \right. \\ \left. \left. \sin \Theta \sin(\omega t + \Phi) (\cos \xi \cos(\omega t + \Phi) - \right. \right. \\ \left. \left. \cos \Theta \sin \xi \sin(\omega t + \Phi)) \tan \theta) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2} k' r' (k' r' + 1) (\cos \xi \cos(\omega t + \Phi) \sin \theta - \right. \right. \\ \left. \left. \sin \theta \sin(\omega t + \Phi) (\cos \Theta \sin \xi + \sin \Theta \tan \theta)) \right] - 1 \right\} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} H = -M' \frac{\sin \theta}{r'^3} \left\{ e^{k' r' u(t)} \left[1 + k' r' + \right. \right. \\ \left. \left. k' r' ((k' r' + 1) \cos \theta - k' r' \sin \Theta \sin(\omega t + \Phi)) \right. \right. \\ \left. \left. (\cos \xi \cot \theta \cos(\omega t + \Phi) - \right. \right. \\ \left. \left. (\sin \Theta + \cos \Theta \cot \theta \sin \xi) \sin(\omega t + \Phi)) \right] - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (52)$$

donde $M' = \frac{\mu_0 m}{4\pi r_T^3}$ y $r' = r_T$.

Utilizando el parámetro M' podemos obtener el momento dipolar magnético

$$m = \frac{4\pi r_T^3 M'}{\mu_0}. \quad (53)$$

4.1.7. Líneas de Campo

Ahora que se tiene la forma final del potencial geomagnético, utilizando $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ en las ecuaciones (34), veamos cual es la forma de las líneas del campo magnético en el sistema de referencia xyz . Para ello utilizaremos la misma normalización de la sección 4.1.4 y la aproximación de la sección 4.1.5.

Una línea de cualquier campo magnético \vec{B} es definida como una curva que es tangente en cualquier lugar a la magnitud \vec{B} (Parks 2004). Si \vec{dl} es una longitud de arco, las líneas de campo son definidas por la ecuación diferencial

$$\vec{dl} \times \vec{B} = 0. \quad (54)$$

En coordenadas cartesianas (54) se reduce a:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}. \quad (55)$$

Las gráficas de la Figs. 10—12 muestran la solución numérica de (55) para diferentes valores de k' y t .

Notemos que en esencia el potencial (34) obtenido es un dipolo modificado por la presencia del viento solar. Las líneas de campo son arrastradas en la dirección del viento solar que en todos los casos es la dirección del eje x positivo.

4.2. Ecuación Diferencial Inhomogénea

Para poder determinar una función que pueda describir la variación del campo principal geomagnético debida a la influencia del Sol, como se mencionó antes se utilizará el criterio del oscilador armónico simple en cuanto a la existencia de un agente perturbador sobre la oscilación natural.

Entonces la ecuación inhomogénea a resolver es:

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \vec{A} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = F(t) \quad (56)$$

Como se ve, queda el problema de averiguar cuál es la forma $F(t)$ de la perturbación externa. Para ello nos apoyamos en el artículo de Benevolenskaya (1998), el cual propone un modelo

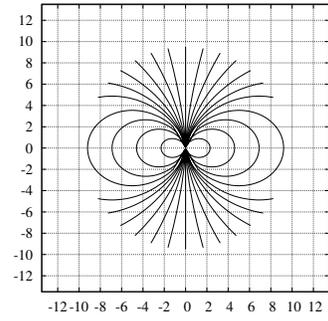
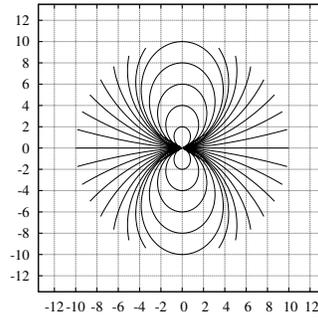
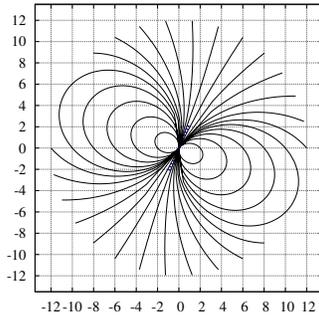
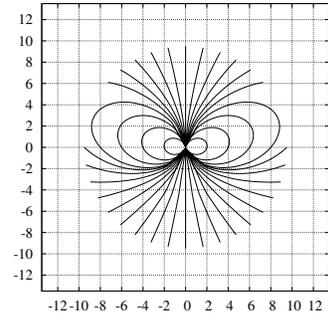
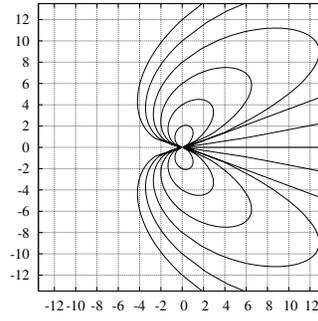
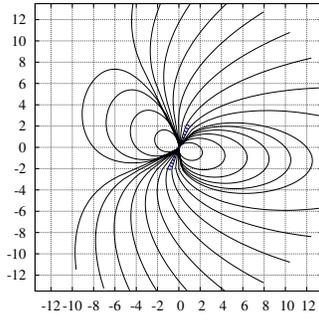
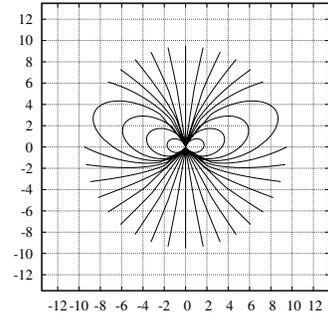
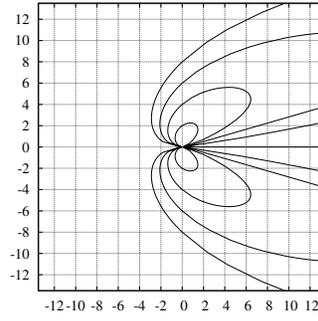
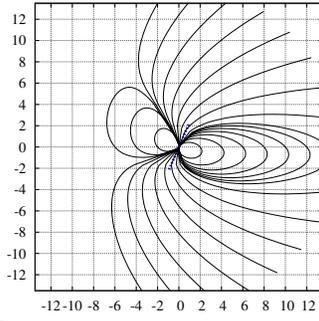
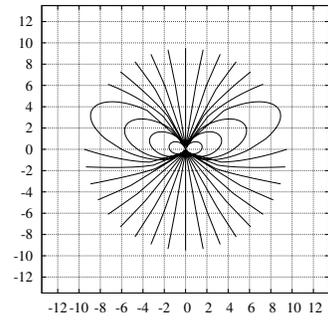
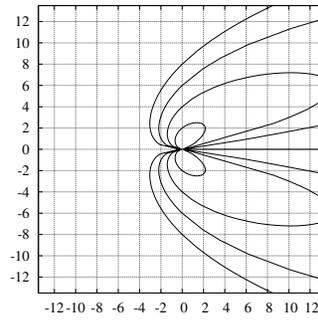
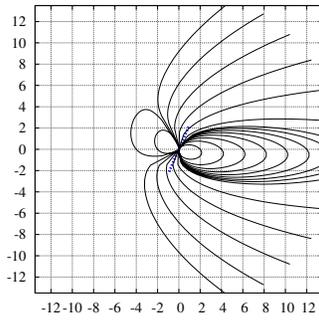
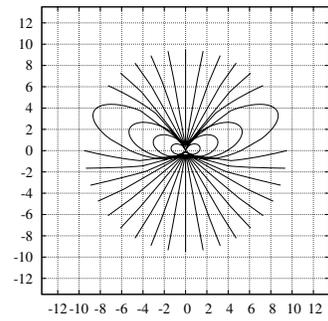
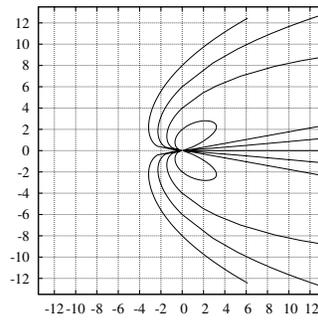
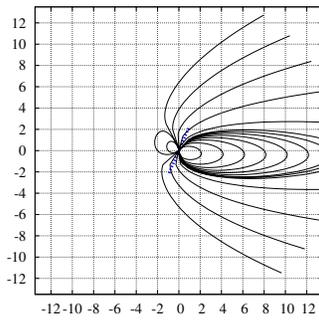
$k' = 0$  $k' = 0.25$  $k' = 0.5$  $k' = 0.75$  $k' = 1$ Plano $x-z$ Plano $x-y$ Plano $y-z$

FIG. 10.— Comportamiento de las líneas de campo del modelo para diferentes valores de k' . Todas las gráficas están dadas para $M' = 30100nT$, $\omega = 2\pi/año$, $\alpha = 23^\circ.5$, $\beta = 0$ y $t = 1$ año. Las unidades de los ejes de los diferentes planos están dadas en radios terrestres. En los planos $x-z$ y $x-y$ el Sol está situado a la izquierda del origen; en el plano $y-z$ el Sol se encuentra al frente de éste. En el plano $x-z$ se denota con una línea punteada la dirección del momento dipolar.

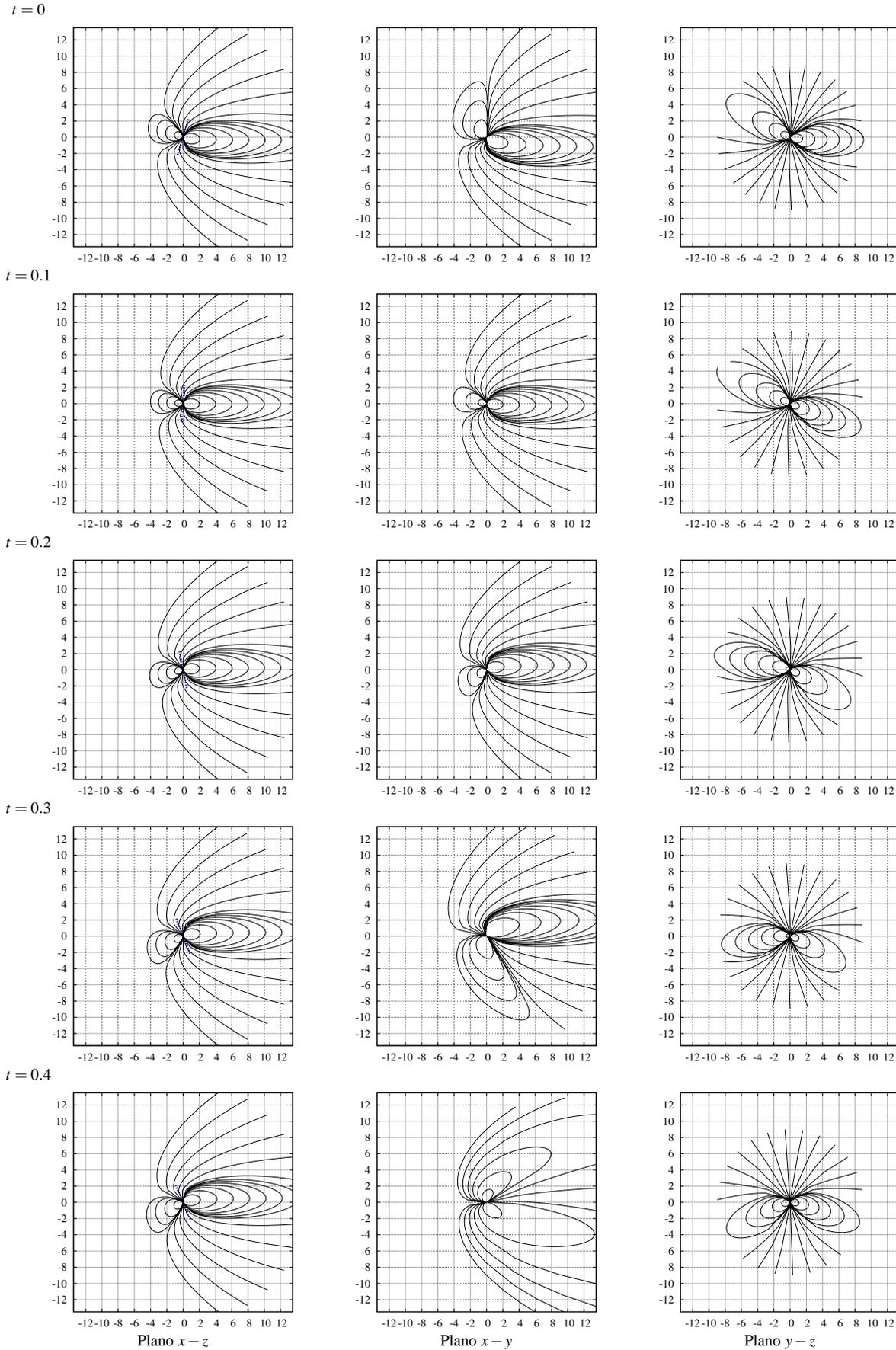


FIG. 11.— Comportamiento de las líneas de campo del modelo en el transcurso de un año. Todas las gráficas están dadas para $M' = 30100nT$, $k' = 0.75$, $\omega = 2\pi/año$, $\alpha = 23^\circ.5$ y $\beta = 45^\circ$. Las unidades de los ejes de los diferentes planos están dadas en radios terrestres. Las unidades del tiempo t están en años. En los planos $x-z$ y $x-y$ el Sol está situado a la izquierda del origen; en el plano $y-z$ el Sol se encuentra al frente de éste. En el plano $x-z$ se denota con una línea punteada la dirección del momento dipolar.

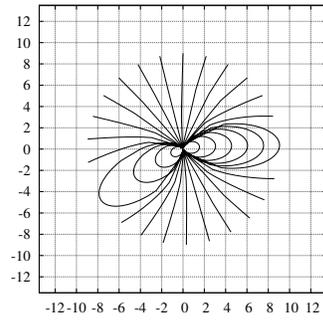
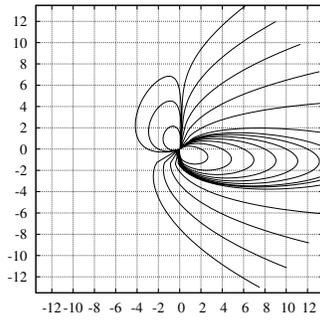
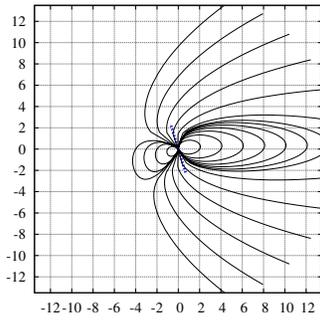
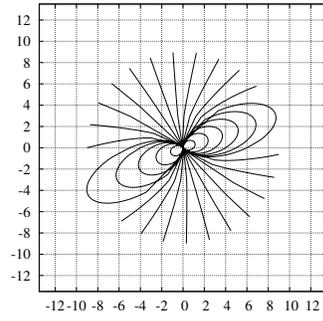
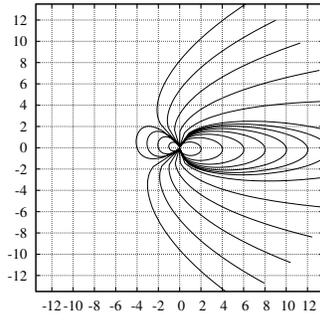
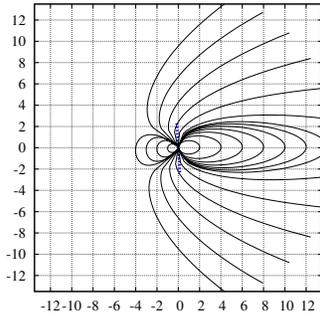
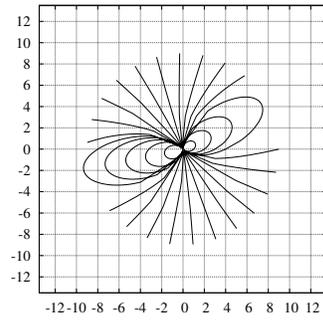
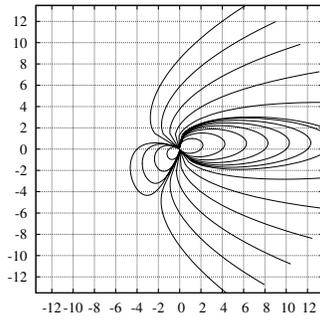
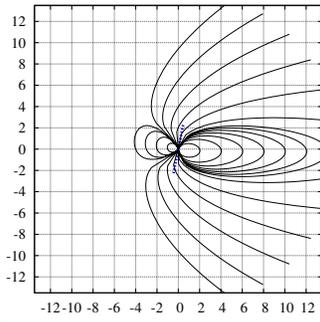
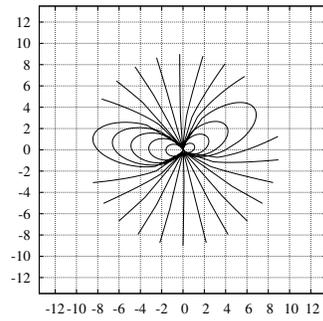
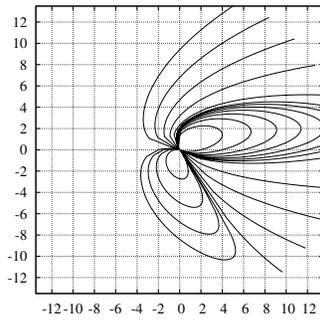
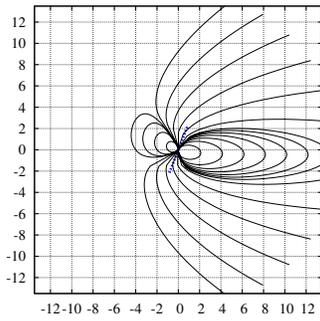
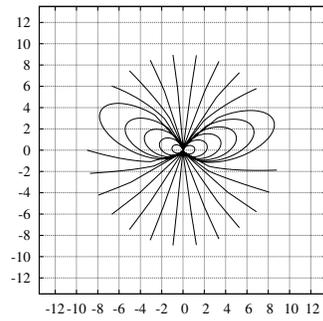
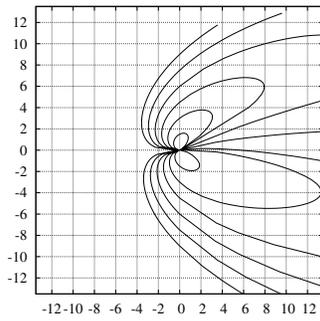
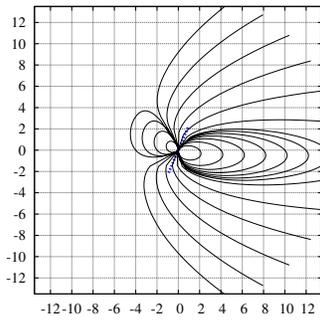
$t = 0.5$  $t = 0.6$  $t = 0.7$  $t = 0.8$  $t = 0.9$ Plano $x-z$ Plano $x-y$ Plano $y-z$

FIG. 12.— Comportamiento de las líneas de campo del modelo en el transcurso de un año (continuación). Todas las gráficas están dadas para $M' = 30100nT$, $k' = 0.75$, $\omega = 2\pi/\text{año}$, $\alpha = 23^\circ.5$ y $\beta = 45^\circ$. Las unidades de los ejes de los diferentes planos están dadas en radios terrestres. Las unidades del tiempo t están en años. En los planos $x-z$ y $x-y$ el Sol está situado a la izquierda del origen; en el plano $y-z$ el Sol se encuentra al frente de éste. En el plano $x-z$ se denota con una línea punteada la dirección del momento dipolar.

para el ciclo magnético doble del Sol. Este ciclo magnético consiste de dos principales componentes periódicas, una componente de baja frecuencia (22 años) y una componente de alta frecuencia (2 años). El modelo está basado en la idea de dos dínamos separados en el espacio, la acción del primer dínamo está localizada cerca de la base de la zona convectiva en el Sol y el segundo opera cerca de la parte superior. Según este artículo, la componente radial del campo magnético poloidal solar puede ser expresada como

$$B_r = b_r(\theta) \sin \omega_1 t + \frac{b_r(\theta)}{A} \sin(\omega_2 t + \varphi), \quad (57)$$

donde $b_r(\theta)$ es la amplitud de la componente radial de baja frecuencia del campo magnético; A es la razón entre amplitudes de baja y alta frecuencia; ω_1 es la frecuencia del ciclo solar de 22 años, ω_2 la frecuencia bienal y φ una fase cualquiera, además se toma que $B_\theta \cong 0$. Es decir, se asumirá que la perturbación externa $F(t)$ tiene la forma

$$F(t) = B(\sin \omega_1 t + \frac{1}{A} \sin(\omega_2 t + \varphi)) A_h \quad (58)$$

donde A , B son parámetros adicionales a determinar y A_h es la solución homogénea hallada en la sección anterior.

4.2.1. Solución

Para hallar la solución particular de la ecuación inhomogénea se propone una solución de la forma

$$A_p = A_h(r, \theta, \phi, t) \varphi(t), \quad (59)$$

la cual nos dice que la solución particular (A_p) tiene que tener la misma forma que la solución de la ecuación homogénea exceptuando la función $\varphi(t)$ que representa la variación temporal debida a la presencia del Sol.

Cabe mencionar que anteriormente en la resolución de la ecuación homogénea se hizo un trabajo de comparación de los términos de un dipolo con los términos de la solución, lo que significó la selección individual de términos. Siguiendo la misma metodología de trabajo, para la resolución de la ecuación inhomogénea se procederá de la misma manera, es decir, construiremos la solución particular trabajando individualmente con cada término.

Reemplazando $A_p = A_h(r, \theta, \phi, t) \varphi(t)$ en la ecuación (56) se tiene

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} A_h \varphi'' + (2 \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial A_h}{\partial t} + A_h) \varphi' = -F(t) A_h. \quad (60)$$

Ya que se trabajará individualmente con cada término, A_h representa cada uno de los términos de las diferentes componentes en la solución homogénea. Las soluciones particulares de la ecuación (60) para cada componente son:

$$A_x = M \left(- \frac{e^{k(x-r)} y(kr+1) \cos \alpha}{r^3} \varphi_1(t) + \frac{e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} z(jr+1) \sin \alpha}{r^3} \varphi_2(t) \right) \quad (61)$$

$$A_y = M \left(e^{k(x-r)} \left(\frac{x(kr+1)}{r^3} + \frac{k}{r} \right) \cos \alpha \varphi_1(t) - \frac{e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} z(jr+1) \sin \alpha}{r^3} \varphi_2(t) \right) \quad (62)$$

$$A_z = M \left(\frac{e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} y(jr+1) \sin \alpha}{r^3} \varphi_2(t) - e^{kx-jr} e^{i(\beta+\omega t)} \left(\frac{x(jr+1)}{r^3} + \frac{k}{r} \right) \sin \alpha \varphi_2(t) \right), \quad (63)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= c e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} + \frac{B e^{i \omega_1 t}}{\omega_1 (\omega_1 \frac{\varepsilon}{\sigma} - i)} + \frac{B e^{i(\omega_2 t + \psi)}}{A \omega_2 (\omega_2 \frac{\varepsilon}{\sigma} - i)} \\ \varphi_2(t) &= c e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t + 2i \omega t} + \frac{B e^{i \omega_1 t}}{\omega_1 ((2\omega + \omega_1) \frac{\varepsilon}{\sigma} - i)} \\ &\quad + \frac{B e^{i(\omega_2 t + \psi)}}{A \omega_2 ((2\omega + \omega_2) \frac{\varepsilon}{\sigma} - i)}. \end{aligned} \quad (64)$$

Notemos que la solución inhomogénea tiene la misma forma que la solución homogénea excepto por las funciones $\varphi_i(t)$ que representan esa modificación temporal del dipolo.

Como las soluciones particulares están en su forma compleja, se extrae ya sea la parte real o imaginaria de cada término, procediendo de la misma manera que en la obtención de la solución homogénea (ecuaciones (33)):

$$\begin{aligned} A_x &= A_{x1} \text{Re}[\varphi_1(t)] + (\text{Re}[A_{x2}] \text{Im}[\varphi_2(t)] + \text{Im}[A_{x2}] \text{Re}[\varphi_2(t)]) \\ A_y &= A_{y1} \text{Re}[\varphi_1(t)] + (\text{Re}[A_{y2}] \text{Re}[\varphi_2(t)] - \text{Im}[A_{y2}] \text{Im}[\varphi_2(t)]) \\ A_z &= (\text{Re}[A_{z1}] \text{Re}[\varphi_2(t)] - \text{Im}[A_{z1}] \text{Im}[\varphi_2(t)]) + \\ &\quad (\text{Re}[A_{z2}] \text{Im}[\varphi_2(t)] + \text{Im}[A_{z2}] \text{Re}[\varphi_2(t)]) \end{aligned} \quad (65)$$

donde A_{x1} representa el primer término de la componente A_x en la solución homogénea, A_{x2} el segundo término, A_{y1} el primer término de la componente A_y , etc.

La solución general será la superposición de las soluciones homogénea (A_h) e inhomogénea (A_p).

$$\begin{aligned} A_x &= A_{xh} + A_{xp} \\ A_y &= A_{yh} + A_{yp} \\ A_z &= A_{zh} + A_{zp} \end{aligned} \quad (66)$$

Para hallar el campo magnético usamos $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ y nuevamente es necesario hacer el mismo cambio de sistema de referencia hecho para la solución homogénea.

Ahora que se tiene el modelo analítico final para el campo geomagnético, el cual está compuesto por dos soluciones una homogénea A_h que contempla la frecuencia anual debida a la rotación de la Tierra alrededor del Sol y otra inhomogénea A_p que corresponde a la influencia del ciclo magnético solar con las frecuencias de 22 y 2 años, corresponde hacer una validación de éste con los datos observacionales. La siguiente sección es dedicada a este tema.

5. ANÁLISIS DE DATOS

En esta parte del trabajo se busca hacer una validación del modelo teórico contrastando éste con los datos observacionales. Específicamente se hace un ajuste a los datos de diferentes estaciones del mundo, utilizando el método de Levenberg-Marquardt (Press et al. 1997) a través del cual se determinan los parámetros del modelo.

5.1. Datos

— Se toma datos del World Data Center (2008) de diferentes estaciones del mundo.

— Ya que el modelo contempla periodos largos de tiempo se trabaja con medidas representativas de cada día (medias diarias).

TABLA 1
ESTACIONES Y COMPONENTES SELECCIONADAS PARA
EL AJUSTE DEL MODELO.

Estación	Latitud θ	Longitud ξ	Componente
Huancayo (hua)	12°.5S	284°.7E	Z
Chambon la Foret (clf)	48°N	2.3°E	H
Cape Chelyuskin (ccs)	77°.72N	104°.28E	H
Barrow (brw)	71°.32N	203°.38E	H
Guam (gua)	13°.59N	215°.13W	Z
Belsk (bel)	51°.84N	20°.79E	H
Baker Lake (blc)	64°.33N	263°.97E	H

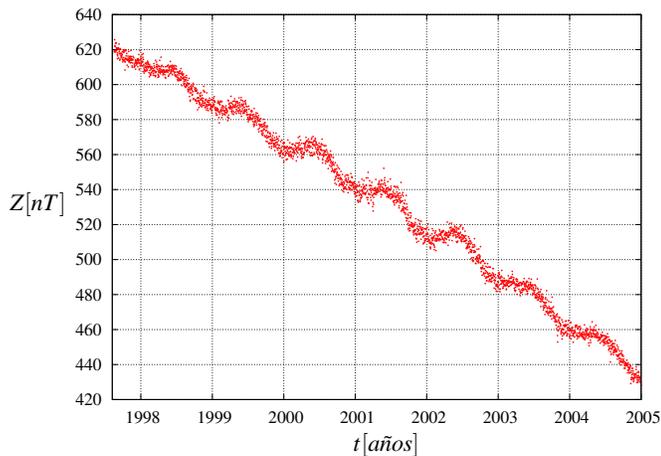


FIG. 13.— Tendencia secular (estación de Huancayo).

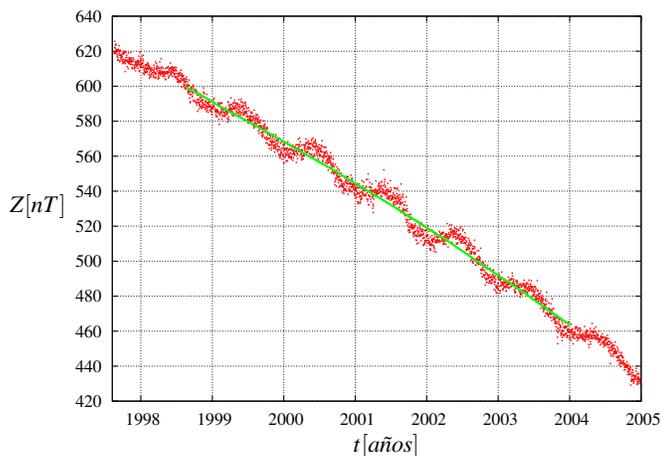


FIG. 14.— Estación Huancayo: componente Z. Los datos en la línea continua representan la tendencia secular.

— A consecuencia de la aproximación de §3.2.1, se trabaja solamente con las componentes H y Z .

— Se seleccionan solamente aquellas componentes que presenten gráficamente una apreciable regularidad en la variación anual.

Las estaciones y componentes seleccionadas para el ajuste del modelo se muestran en la Tabla 1.

5.1.1. Preparación de Datos

Como se mencionó anteriormente, los conjuntos de datos están modulados con diferentes variaciones, una de ellas, y a la vez la más sobresaliente, es la tendencia secular. La variación secular sólo es apreciable en periodos largos de tiempo. La Fig. 13 muestra un ejemplo de esta variación para la componente Z de la estación de Huancayo, donde podemos apreciar la disminución

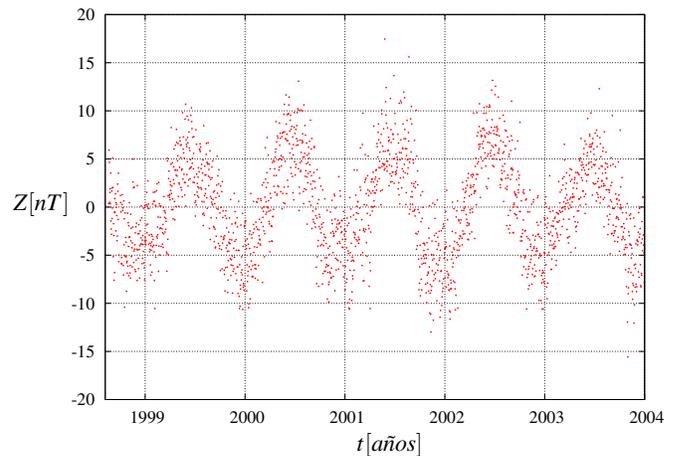


FIG. 15.— Estación Huancayo: componente Z sin tendencia secular.

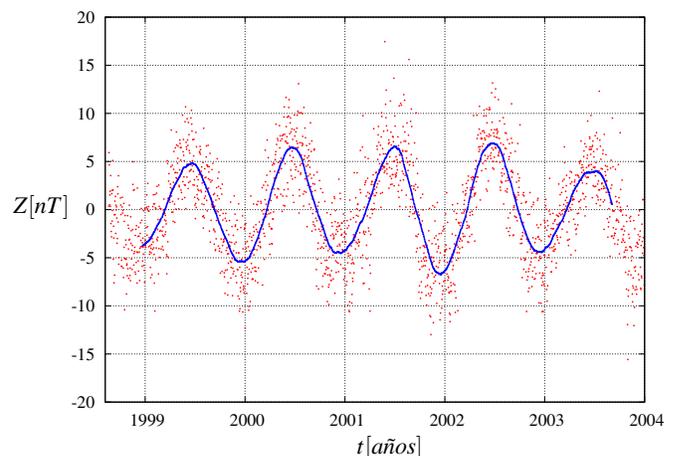


FIG. 16.— Estación de Huancayo: componente Z, segundo filtrado (datos en línea continua).

de la componente a través del tiempo. Una manera de modelar la tendencia secular es ajustar una recta a este conjunto de datos. Esta recta representaría la variación secular, sobre la cual, como podemos apreciar, existen variaciones periódicas.

Debido a que el modelo no contempla la variación secular, es necesario quitar la misma de los datos. Para ello utilizamos la siguiente ecuación:

$$B = y_i - y(t_i), \quad (67)$$

donde y representa la forma de la tendencia secular, y_i la variaciones alrededor de esta tendencia y B la componente H o Z desafectada de variación secular. Notemos que necesitamos conocer la forma de $y(t)$, para ello utilizamos el método de Savitzky-Golay (Press et al. 1997) para el filtrado de datos. Este método calculan promedios locales a través del ajuste de polinomios ($a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$) en determinados intervalos logrando de este modo reducir el grado de dispersión de los datos. Como la variación secular es apreciable en periodos largos de tiempo, hallaremos la forma de $y(t)$ ajustando rectas ($n = 1$) en intervalos de un año de tal modo que obtengamos la tendencia de la curva a lo largo de varios años. La Fig. 14 muestra un ejemplo para la estación de Huancayo.

En la Fig. 14, los datos dispersos representan los datos sin tratar y los datos en línea continua la tendencia secular obtenida a través del filtro Savitzky-Golay. Aplicando la ecuación (67) obtenemos datos de la componente sin tendencia secular como se muestra en la Fig. 15.

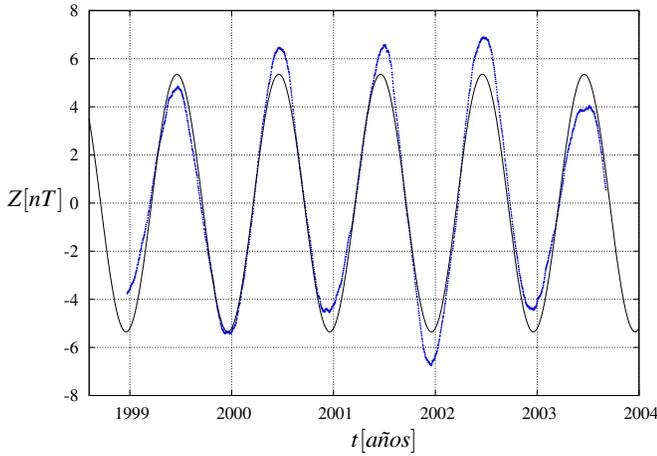


FIG. 17.— Huancayo [Z]. Los parámetros del modelo son: $M' = 27841.1$, $k' = 2 \times 10^{-4}$, $\Phi = 4.8$, $m = 7.2 \times 10^{22} Am^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

Notemos que en la Fig. 15 existe una dispersión bastante apreciable. Esta dispersión podría ser una pequeña dificultad en el ajuste, debido a que el programa de ajuste necesita como entrada parámetros iniciales, que uno mismo estima gráficamente cuidando que la curva se aproxime lo mejor posible a los datos (luego el programa realiza una estimación más precisa de los parámetros). Esto significa que los datos deben tener una apreciable regularidad de tal modo que sea más cómodo estimar los parámetros, no sólo para uno, sino también para el programa. Para salvar esta dificultad, se hará un segundo filtrado. Este proceso mostrará de mejor manera la forma de la curva en el tiempo.

En el segundo filtrado se utiliza el mismo método del primero pero esta vez se toma promedios de 120 días y se ajusta polinomios de segundo grado ($n = 2$). El resultado de este último procedimiento se muestra en la Fig. 16.

Podemos apreciar en la Fig. 16 que el segundo filtrado (datos en línea continua) muestra mejor la tendencia de la curva, lo cual hace que los datos filtrados sean más adecuados para el ajuste.

La preparación de datos es hecha para las siete estaciones de la Tabla 1.

5.2. Ajuste con la Solución Homogénea

El ajuste se realiza con los datos sin tendencia secular filtrados. Se toman como parámetros a determinar a M' , k' y Φ , mientras que ξ , ω , r' , θ y Θ son constantes que toman diferentes valores dependiendo de la estación.

La descripción de estas constantes es la siguiente:

$$\begin{aligned} \xi &= \text{Longitud} \\ \omega &= 2\pi/\text{año} \\ r' &= r_T \quad (\text{un radio terrestre}) \\ \theta &= \text{Latitud} \\ \Theta &= 23^\circ.5 \quad (\text{inclinación del dipolo}) \end{aligned} \quad (68)$$

5.2.1. Técnica

— Se estiman los parámetros M' , k' y Φ visualmente de tal modo que estos ajusten la curva lo mejor posible a los datos.

— Utilizando un programa se ajusta solamente un parámetro manteniendo fijos los dos restantes.

— Se repite este último procedimiento para cada parámetro, de este modo tendremos una estimación más precisa de los parámetros.

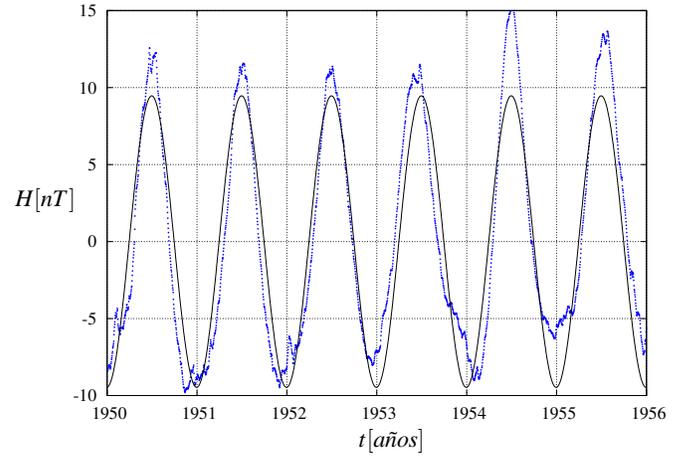


FIG. 18.— Chambon la Foret [H]. Los parámetros del modelo son: $M' = 30261.7$, $k' = 3 \times 10^{-4}$, $\Phi = 6.3$, $m = 7.8 \times 10^{22} Am^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

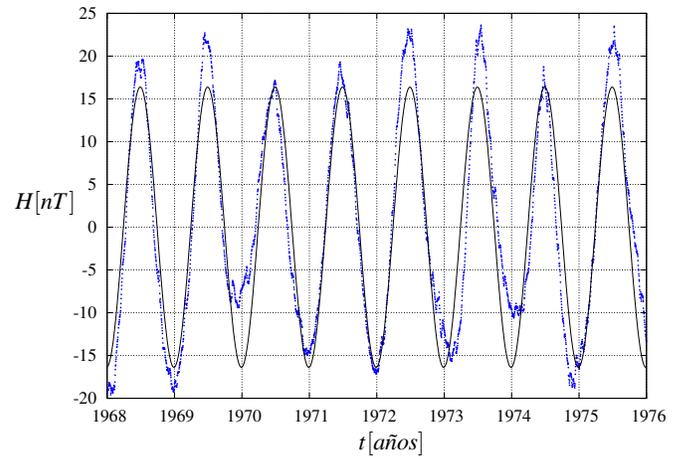


FIG. 19.— Cape Chelyuskin [H]. Los parámetros del modelo son: $M' = 30434.8$, $k' = 6 \times 10^{-4}$, $\Phi = 4.5$, $m = 7.9 \times 10^{22} Am^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

— Finalmente, utilizando como parámetros iniciales los valores estimados en los pasos 2 y 3 se ajustan los tres parámetros al mismo tiempo.

En el ajuste, en todos los casos se asume un error para la ordenada de

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i)]^2}{N}}, \quad (69)$$

donde los y_i son los datos sin tendencia secular no filtrados (en la Fig. 16, datos dispersos) y los $y(x_i)$ los datos sin tendencia secular filtrados (en la Fig. 16, datos en línea continua).

Respecto al tiempo de cómputo requerido en el cálculo de cada parámetro, éste fue de aproximadamente 1 – 3s, dependiendo de cuán precisa fue la estimación visual inicial. El equipo utilizado contaba con un procesador de 1.69GHz y 256Mb de RAM.

En las gráficas de las Figs. 17–23 se ilustran los ajustes logrados para siete estaciones.

La Tabla 2 muestra un resumen de los parámetros obtenidos, además del valor del momento dipolar magnético de la tierra estimado con la ecuación (53).

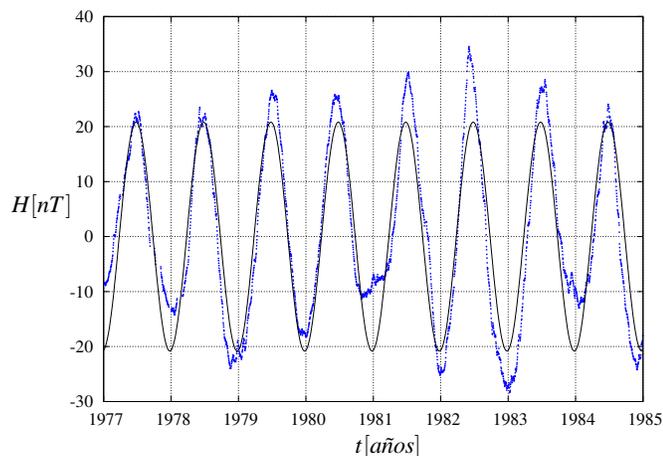


FIG. 20.— Barrow $[H]$. Los parámetros del modelo son: $M' = 30830.7$, $k' = 7 \times 10^{-4}$, $\Phi = 2.9$, $m = 8.0 \times 10^{22} \text{Am}^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

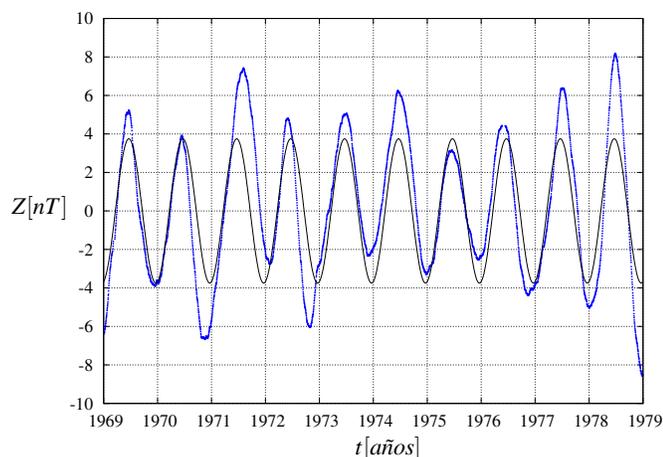


FIG. 21.— Guam $[Z]$. Los parámetros del modelo son: $M' = 28549.8$, $k' = 1 \times 10^{-4}$, $\Phi = 4.2$, $m = 7.4 \times 10^{22} \text{Am}^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

5.3. Ajuste con la Solución Inhomogénea

Anteriormente se mencionó que la solución inhomogénea corresponde a la modificación del campo geomagnético alrededor de la oscilación natural del sistema (en nuestro caso oscilación anual), por lo que para poder hacer el ajuste de esta solución necesitamos que los datos estén desafectados de la variación anual. Esto se logra nuevamente con la ayuda de la ecuación (67), donde en este caso $y(t)$ representa la forma de la variación anual (solución homogénea) y y_i las fluctuaciones alrededor de esta variación. La gráfica de la Fig. 24 muestra un ejemplo para la estación de Chambon la Foret. Los dos conjuntos de datos (púrpura y rojo), son resultado de la aplicación de la ecuación (67). Estos datos están desafectados de variación anual y secular.

Sobre estos datos se debe hacer el ajuste de la solución inhomogénea. A diferencia de las gráficas de las Figs. 17—23, esta no presenta una marcada tendencia que pueda decirnos sobre la posibilidad de ajuste de alguna curva. Para esclarecer esta duda haremos un pequeño análisis de la dispersión de los datos.

En el hipotético caso de un ajuste de la solución inhomogénea a los datos de la Fig. 24, uno puede aproximar como error para la ordenada a la dispersión σ —ecuación (69)— con respecto a la media, que en el caso de la estación de Chambon la Foret, su valor es de aproximadamente 11nT (Tabla 2). Esto significa que un punto de la curva ajustada y_i puede estar en el rango de

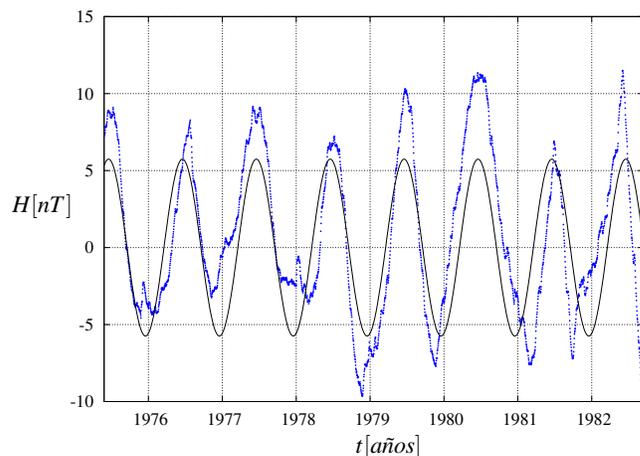


FIG. 22.— Belsk $[H]$. Los parámetros del modelo son: $M' = 31677.5$, $k' = 2 \times 10^{-4}$, $\Phi = 6.2$, $m = 8.2 \times 10^{22} \text{Am}^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

$y_i(t) \pm 11 \text{nT}$ como máximo. Por otro lado el campo magnético proveniente del Sol (campo magnético interplanetario) tiene un valor promedio de 5nT , aproximadamente, lo que significa que y_i podría variar de 0 a 5nT (ya que es una oscilación con frecuencias ω_1 y ω_2), entonces, en el mejor de los casos, el error para la ordenada sería de

$$E\% \cong \frac{11}{5} = 220\%. \quad (70)$$

Esto nos dice que no existe la certeza de decir que la curva a ajustar representará adecuadamente las variaciones geomagnéticas debidas a la influencia externa del campo magnético solar, razón suficiente para desistir en el ajuste correspondiente de la solución inhomogénea.

Cabe mencionar que éste último análisis fue realizado para todas las componentes seleccionadas, lo cual nos llevó a la misma conclusión.

En este punto tal vez el lector se pregunte si valió la pena elaborar el modelo para la ecuación inhomogénea. La respuesta es si y una explicación razonable del por qué es válido el modelo se da en la parte final de la siguiente sección que resume las conclusiones acerca del trabajo.

6. CONCLUSIONES Y DISCUSIONES

En la primera parte del trabajo se elabora un modelo dinámico para las componentes geomagnéticas H y Z , siendo la razón principal de la variación temporal el viento solar y la traslación de la Tierra alrededor del Sol. Ésto se logra a partir de la resolución de la ecuación de difusión homogénea de la Magnetohidrodinámica, la cual es colocada en función del potencial magnético \vec{A} . A fin de contrastar la solución (modelo) con los datos observacionales (dado que el sistema de referencia de la solución homogénea es aquél cuyo eje z es perpendicular al plano de la órbita terrestre), se hace un cambio del sistema de referencia de esta manera determinar las componentes geomagnéticas H y Z como función de la posición y del tiempo. Por cuestiones de simplicidad, en la resolución y en la forma del modelo se procede a realizar aproximaciones. Primero, en la solución final de la ecuación diferencial, se asumen dados valores para los parámetros v y η (siendo v la velocidad del viento solar y η la viscosidad magnética del mismo) o bien para $k(v, \eta)$ (eigenvalor del problema) en cada punto del espacio lo cual significó salvar la necesidad de precisar las funciones $\vec{v}(\vec{r})$ y $\eta(\vec{r})$ logrando de esta manera una resolución más simple. Segundo, en las compo-

TABLA 2
PARÁMETROS OBTENIDOS PARA SIETE ESTACIONES DEL MUNDO. LOS VALORES ESTÁN DADOS PARA $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ Y $\Theta = 23^\circ.5$.

Estación	M' [nT]	k'	Φ	σ	χ^2	$m \times 10^{22}$ [Am ²]
hua	[Z] 27841.1	2×10^{-4}	4.8	3.0	126.2	7.2
clf	[H] 30261.7	3×10^{-4}	6.3	10.9	118.0	7.8
ccs	[H] 30434.8	6×10^{-4}	4.5	26.1	79.8	7.9
brw	[H] 30830.7	7×10^{-4}	2.9	35.4	82.4	8.0
gua	[Z] 28549.8	1×10^{-4}	4.2	3.0	2663.3	7.4
bel	[H] 31677.5	2×10^{-4}	6.2	15.0	129.8	8.2
blc	[H] 30661.3	7×10^{-4}	4.4	20.2	137.3	7.9

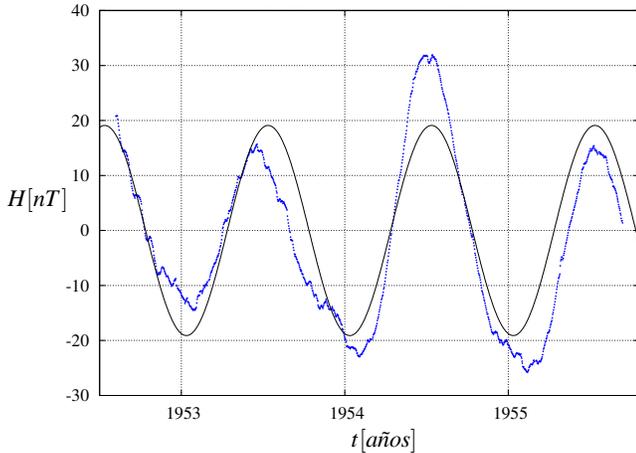


FIG. 23.— Baker Lake [H]. Los parámetros del modelo son: $M' = 30661.3$, $k' = 7 \times 10^{-4}$, $\Phi = 4.4$, $m = 7.9 \times 10^{22} \text{Am}^2$. Los valores están dados para $r' = r_T$, $\omega = 2\pi/\text{año}$ y $\Theta = 23^\circ.5$.

mentos H y Z se considera que el eje magnético de la Tierra coincide con el eje de rotación a fin de obtener una forma más simple para el modelo. Por último, producto de contrastar el modelo con los datos observacionales, se advierte que la modificación de los valores de ciertos parámetros no repercute de manera notable en el modelo.

Con el fin de apreciar mejor el comportamiento del modelo en el espacio-tiempo, se esquematizan las líneas de campo magnético para diferentes valores de los parámetros k' (parámetro espacial k normalizado) y t (tiempo), y en los diferentes planos. Según estos, el campo geomagnético es modificado por la presencia del viento solar comprimiendo las líneas de campo en el hemisferio que confronta directamente con el Sol y a la vez estira las líneas de campo en el hemisferio que está en oposición al mismo. A medida que la Tierra da una vuelta completa alrededor del Sol, el aumento y descenso de la presión que ejerce el campo geomagnético sobre el viento solar es muy evidente.

El modelo es comparado con magnetogramas de siete estaciones del mundo encontrando un ajuste razonable. Según el modelo, las variaciones anuales que presenta el campo geomagnético son debidas específicamente a la presión magnética que ejerce el viento solar sobre el campo durante el transcurso de un año. Esta presión magnética, según un observador sobre la tierra, varía en el transcurso de las diferentes estaciones del año. Un observatorio presentará un máximo en la componente geomagnética cuando éste confronte directamente al viento solar ya que la presión magnética es máxima en ese caso. Por otro lado, el mínimo se dará cuando el observatorio esté en el hemisferio que está en oposición al Sol.

Se obtuvieron en el ajuste tres parámetros: M' , k' y Φ . El parámetro k' representa la modificación de las líneas del campo

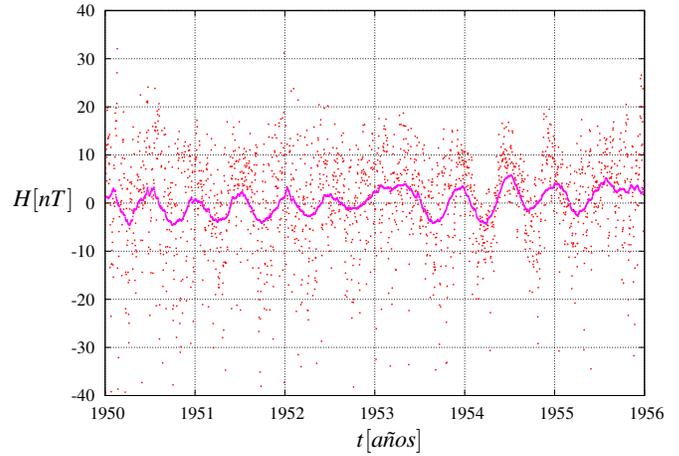


FIG. 24.— Estación Chambon la Foret, componente H . Los datos están desafectados de variación anual y secular. En el primer caso (datos dispersos), se ha tomado como valores para y_i los datos sin tendencia secular no filtrados. En el segundo caso (datos en línea continua), se ha tomado para y_i los datos sin tendencia secular filtrados. En ambos casos, $y(t)$ representa la solución homogénea.

magnético principal y por ende la amplitud de las oscilación alrededor del campo principal (dipolo), conteniendo ésta la información del viento solar. Según la Tabla 2, los valores de k' son del orden de 10^{-4} en todos los casos. Ésto significa que existe poca influencia del viento solar sobre el observatorio respectivo, debido a la pequeñez del valor, lo cual es razonablemente aceptable ya que el ajuste en todos los casos fue realizado sobre la superficie terrestre, en donde se sabe que el campo es predominantemente dipolar, por lo que la forma de las líneas de campo en esta región son de ese tipo.

El límite de la magnetosfera se encuentra a una distancia promedio de diez radios terrestres ($10r_T$) del centro de la Tierra. Es natural pensar que para los parámetros obtenidos ($k' \sim 10^{-4}$) uno esperaría una deformación de las líneas de campo parecida a la magnetosfera real, este no es el caso, ya que el parámetro k' es sólo una de las componentes de un espectro de eigenvalores, por lo que éste toma diferentes valores principales para diferentes radios debido a la diferencia que hay en la deformación de líneas de campo en los diferentes radios. Ésto significa, a la vez, que existe una limitante en la extrapolación de las componentes H y Z para valores relativamente lejanos a un radio terrestre. Todo esto no significa que el modelo no sea adecuado para valores cercanos a diez radios terrestres ($10r_T$). La solución está en ajustar el modelo a datos medidos en el espacio de la magnetosfera. Si este fuera el caso se esperaría que el modelo represente también de buena forma las fluctuaciones del campo en esta región, como lo hace en las regiones cercanas a $1r_T$.

El parámetro M' fue utilizado para determinar el momento dipolar magnético de la Tierra (m). Según la Tabla 2, los valores obtenidos para m se aproximan bastante al valor teórico $m = 8.02 \times 10^{22} \text{Am}^2$ (Zombeck 2007). Esto significa que el modelo es adecuado para determinar el momento dipolar para algún intervalo de tiempo, lo cual da fe de la validez del modelo. La interpretación física del parámetro M' está relacionada con el orden de magnitud del campo geomagnético, éste está encargado de fijar el grado de intensidad del campo sobre el cual existe variación, dependiendo de la posición en la que uno desea conocer el campo. En cuanto a la fase Φ , ésta representa solamente la elección del origen del tiempo.

En la segunda parte del trabajo se resuelve la ecuación de difusión inhomogénea la cual puede representar las variaciones periódicas del campo geomagnético con origen en el ciclo magnético solar (con periodos, uno de 2 años y otro de 22 años).

El agente perturbador es introducido en la ecuación de difusión inhomogénea utilizando el criterio del oscilador armónico simple en cuanto a las variaciones de un sistema sometido a la acción de un campo exterior variable. No pudo realizarse el ajuste de la solución inhomogénea obtenida debido al hecho de que el campo geomagnético es modificado por diferentes tipos de factores ya sea de carácter interno o externo (geodínamo interno, tormentas magnéticas, ionosfera, etc.). Todo este conjunto de factores hacen que el campo magnético, medido por las estaciones, presente una dispersión bastante grande en torno al campo principal comparada con la influencia externa del ciclo solar magnético (campo magnético interplanetario), cuya amplitud máxima promedio en la órbita terrestre es de $5nT$, aproximadamente, lo cual nos lleva a la conclusión de que la posible curva ajustada no representaría adecuadamente las variaciones del campo geomagnético debida a la influencia magnética solar.

A pesar de que el modelo inhomogéneo no fue verificado con los datos experimentales, éste sigue siendo una propuesta razonablemente aceptable que podría describir el comportamiento del campo geomagnético debido a la influencia externa con origen en la periodicidad intrínseca del campo magnético solar. La dificultad en el ajuste como se mencionó anteriormente está en la apreciable dispersión de los datos, por lo que para salvar este problema es necesario hacer un tratamiento a los datos de tal

modo que estos queden desafectados de variaciones ajenas al modelo. Una segunda opción es ajustar el modelo a datos medidos en el espacio de la magnetosfera donde estos presentarían poca dispersión (ya que en esta región existen menos factores que influyen en el campo geomagnético). Ello implicaría adquirir una base de datos satelital la cual está disponible en el World Data Center (2008), pero a la vez implicaría realizar un tratamiento adecuado a estos de tal manera que estén dispuestos en el sistema de referencia del presente modelo lo cual constituye una tarea muy complicada ya que los satélites en general sólo miden la magnitud del campo y además lo hacen en diferentes órbitas. Otra opción más radical es replantear las ecuaciones diferenciales introduciendo términos de ruido en los coeficientes de éstas. Estos términos de ruido contemplarían desde un principio aquellos factores influyentes del campo geomagnético cuyo comportamiento preciso es desconocido. Lo único que se conocería de los factores influyentes es la distribución de probabilidad. De esta manera el modelo sería más realista convirtiéndose en una ecuación diferencial parcial estocástica. Entonces queda como sugerencia, para posibles estudios posteriores la realización del tratamiento de los datos satelitales o el replanteamiento de ecuaciones a fin de que sirvan como objeto de aplicación o verificación del presente modelo no sólo en su parte inhomogénea sino también en su parte homogénea.

REFERENCIAS

- Benevolenskaya, E. E. 1998, A Model of Double Magnetic Cycle of the Sun, Tech. rep., Pulkovo Astronomical Observatory, W.W. Hansen Experimental Physics Laboratory, Petersburg 196140 Russia
- Bravo, S. 1999, El Campo Magnético Interplanetario, Tech. rep., Departamento de Física Espacial, Instituto de Geofísica, UNAM
- Campbell, W. H. 2003, Introduction to Geomagnetic Fields, 2nd edn. (Press Syndicate of the University of Cambridge)
- Cillis, A. & Scitutto, S. J. 2006, Geomagnetic Field and Air Shower Simulations, Tech. rep., Departamento de Física, Universidad Nacional de La Plata
- Cravens, T. E. 1997, Physics of Solar System Plasmas (University of Cambridge)
- Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. 2000, Classical Mechanics, 3rd edn. (Addison Wesley)
- Jackson, J. D. 1999, Classical Electrodynamics, 3rd edn. (John Wiley & Sons, Inc.)
- Jankowski, J. & Sucksdorff, C. 1996, Guide for Magnetic Measurements and Observatory Practice (International Association of Geomagnetism and Aeronomy)
- Kivelson, M. G. & Russell, C. T., eds. 1995, Introduction to Space Physics (40 West 20th Street, New York: University of Cambridge)
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 1960, Mechanics, Vol. 1 (Pergamon Press)
- Luhmann, J. G. & Friesen, L. M. 1979, Journal of Geophysical Research, 84, 4405
- Mead, G. D. 1964, Journal of Geophysical Research, 69, 1181
- Mendoza, M. & Morales, J. 2004, Analysis of the Interaction of the Solar Wind with the Terrestrial Magnetosphere, Tech. rep., Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Ciudad Universitaria, Bogota, D.C., Colombia
- Parks, G. K. 2004, Physics of Space Plasmas An Introduction, 2nd edn. (Wesview Press)
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1997, Numerical Recipes in Fortran 77, 2nd edn., Vol. 1 (Press Syndicate of the University of Cambridge)
- Vilca Salinas, R. 2001, Master's thesis, Carrera de Física, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia
- World Data Center. 2008, <http://spidr.ngdc.noaa.gov/spidr>
- Zombeck, M. V. 2007, Handbook of Space Astronomy and Astrophysics, 3rd edn. (Cambridge University Press)

XX REUNIÓN NACIONAL DE LA SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA
DEL 6 AL 8 DE NOVIEMBRE DE 2008
LA PAZ–BOLIVIA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

RESUMEN

Se presenta la relación de ponencias de la XX Reunión Nacional de Física realizada en La Paz entre el 6 y el 8 de Noviembre de 2008.

Subject headings: physics workshops

Título:

LA INVESTIGACIÓN Y LO REAL

Autor:

Marco A. Córdova, Cristian Gantier

Resumen:

Exponemos un sistema de adquisición de datos con base en sensores eléctricos que a su vez son manipulados por el sistema computacional, así como el internet.

Título:

LA RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO EN LA MECÁNICA ESTADÍSTICA NO-EXTENSIVA: ANÁLISIS COMPARATIVO

Autor:

Marko J. Andrade

Resumen:

La mecánica estadística no-extensiva (o estadística de Tsallis) es una generalización de la estadística convencional que permite encarar problemas en los que los componentes del sistema de estudio presentan cierta correlación entre sí. El grado de correlación está definido por el coeficiente de no-extensividad q tal que $q = 1$ representa ausencia total de correlación y $q > 1$ ó $q < 1$ indican que el sistema tiene correlación. El caso de $q = 1$ corresponde pues a la estadística convencional que es, en consecuencia, un caso particular de la teoría generalizada. En ese marco se obtiene en el presente trabajo la ley de radiación de cuerpo negro generalizada y se estima el grado de correlación fotónica en la cavidad radiante. Para ello se utilizó tres de los modelos más aceptados en la actualidad en la estadística no-extensiva (Curado-Tsallis, OLM y Buyukulick) arribando a resultados similares. Se comparó los modelos entre sí y se contrastó con el modelo de Planck convencional. Se vio que el mejor valor del coeficiente de no-extensividad es $q = 0.9999$, lo que implica una correlación prácticamente nula y reduce la ley generalizada hacia la ley de Planck, que es ampliamente conocida. A pesar de la baja correlación, se busca aquellas regiones del espectro electromagnético en las que la discrepancia entre el modelo generalizado y el de Planck se hagan más evidentes observándose que a bajas frecuencias la discrepancia es mayor.

Título:

CÁLCULO DE LA ENERGÍA TOTAL Y CARGA NUCLEAR EFECTIVA DEL ESTADO FUNDAMENTAL DE SISTEMAS ATÓMICOS

Autores:

Freddy Flores

Resumen:

En este trabajo se implementa un programa computacional para realizar cálculos numéricos a fin de obtener la energía total (no relativista) de átomos desde 2 hasta 18 electrones y la carga nuclear efectiva de átomos desde 2 hasta 36 electrones, todo ello en el estado fundamental. Para esto se utiliza el Programa de Campo Autoconsistente Atómico, que utiliza el método de expansión de funciones base (Combinación Lineal de Orbitales Atómicos) escrito por R. Pitzer (en Fortran 90) con base en el código escrito por C. Roothaan y P. Bagus (lenguaje Assembler 1963). En el cálculo de los exponentes orbitales se empleó funciones base mínimo tipo Slater. Para obtener buenas aproximaciones a las energías atómicas totales de Hartree-Fock con el método de Roothaan, se requieren varias funciones base; se sabe asimismo que al incrementar Z , aumenta el número de estados (configuración electrónica), lo que implica una mayor cantidad de coeficientes de expansión y exponentes orbitales. El éxito de este método depende mucho de los valores de prueba que se ingresen. Según el teorema de Koopmans, es posible calcular las primeras energías de ionización. Todos los resultados obtenidos están de acuerdo a los que publicaron otros autores (Bunge et al., 1992 y Roetti-Clemen, 1974).

Título:

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES POR SALTOS ALEATORIOS

Autor:

Franz Suxo

Resumen:

La ecuación del calor y la ecuación de Laplace son modelos matemáticos que describen la distribución de la temperatura en estados estacionarios; dichos modelos consisten de ecuaciones diferenciales parciales que se pueden resolver por el método de saltos aleatorios. Para ello se debe discretizar la ecuación y obtener las probabilidades (coeficientes de los puntos vecinos) de las direcciones de los

saltos aleatorios. Para un número pequeño de simulaciones (partículas que salen de un determinado punto de solución) se puede obtener una solución cualitativa, pero a medida que se aumenta el número de simulaciones la solución es más exacta.

Título:

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA CÁMARA HIPERBÁRICA MONOPLAZA

Autor:

Eduardo Choque

Resumen:

Se trata sobre la implementación de una cámara hiperbárica (recinto herméticamente cerrado) a una presión mayor que la presión externa, donde el paciente será tratado por una desadaptación aguda a la altura (mal de altura). Los parámetros internos de una cámara hiperbárica se controlarán automáticamente por un dispositivo electrónico digital, con el fin de elevar la presión interna a una presión mayor, por ejemplo, de 480 mmHg (Potosí) a 567 mmHg (Sucre).

Título:

EL TEMPLO DE KALASASAYA COMO UN OBSERVATORIO ASTRONÓMICO

Autor:

Franz Suxo

Resumen:

Se realiza una simulación de las trayectorias solares de los solsticios y equinoccios sobre dos posiciones distintas estratégicas dentro del templo de Kalasasaya, con el fin de observar el carácter astronómico de las dimensiones y posición de los muros, específicamente del muro éste y la pared balconera del muro oeste.

Título:

ESTIMACIÓN DE LA RADIACIÓN GLOBAL ANUAL EN EL DEPARTAMENTO DE COCHABAMBA UTILIZANDO TÉCNICAS DE INTERPOLACIÓN EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN GEOGRÁFICA (SIG) Y REGISTROS DE HELIOFANIA

Autor:

Marcelo Lucano

Resumen:

El conocimiento de la radiación solar es muy importante para diseñar sistemas solares, tanto térmicos como fotovoltaicos; sin embargo, para hacer este proceso eficiente, es necesario conocer los niveles de radiación en la zona de estudio. En este trabajo se han estimado valores de radiación solar en lugares en donde no existen mediciones e través de radiómetros, utilizando para ello técnicas de interpolación de Sistemas de Información Geográfica (SIG)

para el Departamento de Cochabamba. Para la interpolación se utilizó el método de *media móvil, distancia inversa y de peso igual a la unidad*, que es el más apropiado para la interpolación de la radiación en Cochabamba con un coeficiente de correlación entre datos modelados y datos experimentales medidos en superficie de $R^2 = 1$, y por consiguiente es el método más apropiado para la elaboración de los mapas solares.

Título:

MODELO MONTE CARLO PARA IRRADIANCIA UV-B

Autor:

V. Miguel Peñafiel

Resumen:

Se simula el comportamiento diario de la irradiancia para UV-B en cielo claro, mediante el método Monte Carlo aplicado a fotones en dispersión elástica en atmósfera homogénea.

Título:

BIFURCACIONES Y CAOS

Autor:

Marcelo Ramírez

Resumen:

Se presenta una revisión de los conceptos de bifurcación y caos, y se analiza una bifurcación de codimensión 2 para las ecuaciones del circuito de Chua. Se muestran estructuras de estabilidad denominadas "camareros" y cómo se forman espirales de estas estructuras a partir de un hub.

Título:

LOS SUPERCONDUCTORES CERÁMICOS

Autor:

Eduardo Palenque

Resumen:

Se presentan las bases de la caracterización y modelaje de los superconductores cerámicos, con las respectivas proyecciones técnicas y aplicaciones actuales. También se proponen diversas líneas de investigación.

Título:

SIMULACIONES COMPUTACIONALES DE PÉNDULOS ACOPLADOS

Autor:

Armando Ticona

Resumen:

Mediante un modelo computacional de péndulos amortiguados, estudiamos las interacciones de dos péndulos acoplados en sus ejes por un hilo elástico. Analizamos los diferentes comportamientos en función a las diferentes características de los dos péndulos.

Título:

PROYECTO LAGO

Autor:

Alfonso Velarde

Resumen:

El proyecto LAGO busca detectar en tierra Gamma Ray Bursts (GRBs) de energías mayores a 1 GeV.

Título:

PRESENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DEL GRUPO ASTRONÁUTICO BOLIVIANO KALPANA CHAWLLA

Autor:

Oscar Lazcano, Roger Apaza

Resumen:

Se presenta el artículo “Cohetes propulsados con agua”, así como un resumen de las actividades realizadas por el Grupo Astronáutico Boliviano Kalpana Chawlla. Se hace una demostración de cohetes propulsados por agua.

Título:

MODELO DE INTERACCIONES ELÉCTRICAS EN UN SISTEMA CONFINADO DE ESFERAS CARGADAS

Autores:

Flavio Ghezzi, Diego Sanjinés

Resumen:

Se reporta los resultados experimentales en un sistema de varias esferas metálicas pequeñas que reposan sobre la placa inferior de un capacitor de placas paralelas cuadradas; el sistema de esferas está confinado lateralmente por un contorno cuadrado cargado eléctricamente que impide que las esferas se dispersen en 2D. El objetivo de este trabajo surge de una gran y creciente evidencia de datos experimentales sobre fases condensadas en 2D que aún carece de un modelo teórico definitivo que permita interpretar tales resultados (por ejemplo, el proceso de liquefacción en 2D). En este trabajo se desarrolló un sistema de

validación para establecer las interacciones entre esferitas cargadas y el contorno de confinamiento. La investigación comprendió el montaje experimental, su calibración y la adquisición de datos. Se muestra que el modelo de interacción coulombiano es razonable para interpretar los resultados experimentales de este trabajo, aunque también es posible una interacción dipolar debido a la formación de cargas imagen en los platos del capacitor.

Título:

LA MAGIA DE LA FÍSICA

Autores:

Ariel Brañez

Resumen:

La Magia de la Física es un proyecto de interacción social que presenta al público en general experimentos demostrativos de física de una manera amena. Los integrantes de este proyecto son en su mayoría estudiantes que explican los experimentos en forma de exposición.

Título:

EL EXPERIMENTO DE LA SEMANA

Autores:

Diego Sanjinés, Ariel Brañez

Resumen:

El *Experimento de la Semana* es uno de los proyectos dentro de *La Magia de la Física*, que consiste de realizar una presentación semanal (de 10 minutos) en vivo de algún experimento de física en el canal 4 de televisión (sistema RTP, La Paz). Esta demostración es realizada por un docente y uno o más estudiantes de la Carrera de Física de la UMSA. El proyecto contempla la realización de 40 experimentos distribuidos a lo largo de una gestión académica (1 año).

1^{RA} OLIMPIADA ANDINA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

BUSTOS R.¹, DE LA TORRE M.², RAMIREZ M.¹, ZUBIETA V.¹, BRAÑEZ A.¹, MIRANDA P.¹, MUÑOZ R.¹, RALJEVIC M.¹, GARCIA J.¹, CENTENO E.¹, POMA J.¹, MAYTA R.¹, PEÑAFIEL M.¹, CORDERO M.², TAVERA W.³, CARVAJAL R.⁴, CABRERA S.⁴, LANDIVAR M.⁴, CERRUTO I.⁴, ORELLANA W.⁴, SANTALLA I.⁵, PEREYRA S.⁵, ANDRADE M.⁶, VALLEJOS V.⁷

¹ Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), Carrera de Física, La Paz

² Asociación Boliviana para el Avance de la Ciencia (ABAC)

³ Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)

⁴ Ministerio de Planificación para el Desarrollo, Viceministerio de Ciencia y Tecnología

⁵ Estudiantes exolímpicos

⁶ Universidad Mayor de San Simón (UMSS), Carrera de Física, Cochabamba

⁷ Astrónomo, UMSA

RESUMEN

La 1^{ra} Olimpiada Andina de Astronomía y Astrofísica (1^{ra} OAAA) nace de la necesidad de dar una urgente respuesta al desafío sobre: ¿Cómo incentivar a la juventud de nuestros países al estudio de la Astronomía y la Astrofísica? De esta manera se pretende generar mayores capacidades científicas y tecnológicas como aporte al desarrollo tanto cultural como económico y social de nuestros pueblos. La 1^a OAAA en el contexto anterior, constituye un importante estímulo en los estudiantes para el estudio de los astros y las leyes que rigen sus comportamientos.

La 1^a OAAA se llevó a cabo, con el éxito esperado, a orillas del lago Titikaka, La Paz, Bolivia, del 19 al 23 de Junio de 2009, coincidiendo con el Solsticio de Invierno en el hemisferio Sur. Se contó con la presencia de 4 países: Argentina, Brasil, Bolivia y México. Se tuvieron dos modalidades de evaluación, Teórica y Práctica.



Descriptor: Olimpiadas de Física

Subject headings: Physics Olympiads

En la 1^a OAAA se concentraron 35 personas entre estudiantes y profesores, quienes compartieron sus experiencias, costumbres y culturas.

La lista de los ganadores se muestra en la Tabla 1.

¡Felicidades a los países participantes y a todos los jóvenes participantes y ganadores!

A continuación se presentan los exámenes teórico y experimental resueltos, de la 1^{ra} OAAA.

TABLA 1
MEDALLERO DE LA 1^{RA} OLIMPIADA ANDINA DE
ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

Nombre	Puesto	País
Agustín Di Paolo	MEDALLA DE ORO	Argentina
Alvaro Hurtado	MEDALLA DE ORO	Bolivia
Mariano Coraccini	MEDALLA DE PLATA	Argentina
Hugo Roberto Gutierrez	MEDALLA DE PLATA	Bolivia
Otilio García	MEDALLA DE BRONCE	México
Hesser Taboada	MEDALLA DE BRONCE	Bolivia
Gustavo Tobalin	MENTIÓN DE HONOR	Bolivia
Anita Padilla	MENTIÓN DE HONOR	Bolivia

SOLUCIONES DEL EXAMEN TEÓRICO
1ª Olimpiada Andina de Astronomía y Astrofísica
Lago Titikaka - La Paz - Bolivia, 22 de Junio de 2009

DATOS ÚTILES

Velocidad de la luz:	$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ [m/s]}$
Masa del protón	$m_p = 1.6726 \times 10^{-27} \text{ [kg]}$
Masa del helio:	$m_{He} = 6.643 \times 10^{-27} \text{ [kg]}$
Masa del electrón:	$m_e = 9.1094 \times 10^{-31} \text{ [kg]}$
Masa del neutrino:	$m_\nu = 0 \text{ [kg]}$
Un electronvoltio:	$1 \text{ eV} = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ [J]}$
Un mega electronvoltio:	$1 \text{ MeV} = 1 \times 10^6 \text{ [eV]}$

PREGUNTA 1:

Las estrellas pueden considerarse como cuerpos negros (emisividad $\varepsilon = 1$) cuya superficie emite energía en forma de radiación electromagnética, siguiendo la ley de Stephan-Boltzmann $H = A\varepsilon\sigma T^4$, donde H es la corriente de calor debida a la radiación de una superficie A, T es la temperatura absoluta en °K y $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ [Wm}^{-2}\text{K}^{-4}]$ es la constante de Stephan-Boltzmann. El Sol tiene una masa aproximada de $1.99 \times 10^{30} \text{ [Kg]}$ y una densidad de $2.0 \text{ [g/cm}^3]$. Por otra parte, se sabe que en promedio la luz del Sol tarda en llegar a la tierra 8 minutos. Además, sabiendo que la magnitud de Rigel es de 0.34 y la de Proción B es de 13.5 y con toda la información anterior responda las siguientes preguntas:

- ¿Pueden ambas estrellas verse a simple vista (sin utilizar ningún telescopio)? Justifique su respuesta.
- Sabiendo que las temperaturas superficiales de Rigel y Proción B son de $1800 \text{ [}^\circ\text{C]}$ y $9800 \text{ [}^\circ\text{C]}$, respectivamente, y que Rigel radia energía a una tasa de $2.7 \times 10^{32} \text{ [W]}$ y Proción B a una tasa de $2.1 \times 10^{23} \text{ [W]}$, determine los radios de ambas estrellas. Considere que las estrellas son esféricas.
- Compare los radios de ambas estrellas con el radio del Sol y con la distancia media Tierra-Sol.

SOLUCIÓN

- Sólo Rigel puede verse a simple vista puesto que la magnitud límite estelar en el mejor de los casos alcanza a 6.0, por lo que para observar Proción B se necesita un telescopio.
- Para calcular los radios de Rigel (R) y Proción B se utiliza $H = A\sigma T^4$ puesto que $\varepsilon = 1$.

$$H_R = A_R \sigma T_R^4, \text{ donde para calcular } A_R = 4\pi R_R^2$$

$$H_R = 2.7 \times 10^{32} \text{ W} \quad \text{y} \quad H_p = 2.1 \times 10^{23} \text{ W}$$

$$T_r = 11073 \text{ }^\circ\text{K} \quad \text{y} \quad T_p = 10073 \text{ }^\circ\text{K},$$

de donde:

$$H_R = 4\pi R_R^2 \sigma T_R^4.$$

Entonces:

$$R_R = \sqrt{\frac{H_R}{4\pi\sigma T_R^4}} = 1.59 \times 10^{11} \text{ m}.$$

Similarmente:

$$R_p = \sqrt{\frac{H_p}{4\pi\sigma T_p^4}} = 5.35 \times 10^6 \text{ m}.$$

- Para la comparación con el radio del sol, se debe determinar el mismo a partir de:

$$\rho_\odot = \frac{M_\odot}{V_\odot} = \frac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3}.$$

Entonces:

$$R_\odot = \sqrt[3]{\frac{3 \times 1.99 \times 10^{30} \text{ Kg}}{4\pi \times 2 \times 10^{-3} \text{ Kg m}^{-3}}} = 6.19 \times 10^{10} \text{ m},$$

y la distancia media Tierra-Sol se puede calcular a partir de: $C = \frac{d}{t}$. Entonces, de aquí,

$$d = Ct = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 480 \text{ s} = 1.44 \times 10^{11} \text{ m}.$$

De este modo:

$$\frac{R_R}{R_\odot} = 2.57 \Rightarrow R_R = 2.57 R_\odot,$$

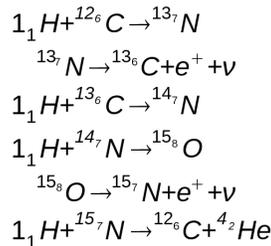
$$\frac{R_R}{d} = 1.10 \Rightarrow R_R = 1.10 d,$$

$$\frac{R_P}{R_\odot} = 8.64 \times 10^{-5} \Rightarrow R_P = 8.64 \times 10^{-5} R_\odot \text{ y}$$

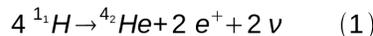
$$\frac{R_P}{d} = 3.72 \times 10^{-5} \Rightarrow R_P = 3.72 \times 10^{-5} d$$

PREGUNTA 2:

En 1938 Hans Albrecht Bethe (1906-2005) en Estados Unidos y Karl Friedrich von Weizsäcker (1912-), en Alemania, simultánea e independientemente encontraron el hecho notable de que un grupo de reacciones en las que intervienen el carbono y el nitrógeno como catalizadores constituyen un ciclo, que se repite una y otra vez, mientras dura el hidrógeno. A este grupo de reacciones se las conoce como "ciclo de Bethe o del carbono" (a veces ciclo CNO), y es equivalente a la fusión de cuatro protones en un núcleo de helio. Este ciclo está caracterizado por las siguientes ecuaciones:



Sumando éstas miembro a miembro se obtiene:



Como se puede observar, este ciclo es equivalente a la transformación de cuatro protones en un átomo de Helio más dos positrones (antipartícula del electrón, igual masa, pero carga de signo contrario) y más dos neutrinos (necesarios para satisfacer las leyes de conservación de la cantidad de movimiento y del momento angular, aquí se supone que los neutrinos no tienen masa).

Se define a Q , como la diferencia de energía cinética $Q = \Delta E_k$ del proceso. Mediante operaciones algebraicas se llega a: $Q = -\Delta m c^2 = (\sum_{\text{inicio}} m_i - \sum_{\text{final}} m_i) c^2$.

Determine el Q de la ecuación (1) en unidades [Mev] ($1 \text{ Mev} = 1 \times 10^6 \text{ [eV]}$).

SOLUCIÓN:

Por definición:

$$Q = [4 m_p - (m_{\text{He}} + 2 m_e)] c^2 = 4.060346 \times 10^{-12} \text{ J}$$

Nuevamente se ha supuesto que la masa del neutrino es cero, lo cual está en entredicho por las últimas investigaciones. Para llevar este resultado a las unidades pedidas, simplemente se utilizan factores de conversión:

$$Q = 4.060346 \times 10^{-12} \text{ J} \times \frac{1 \text{ ev}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ J}} \times \frac{1 \text{ Mev}}{106 \text{ ev}}$$

Entonces:

$$Q = 25.3455 \text{ Mev}$$

PREGUNTA 3:

La masa del planeta Júpiter es aproximadamente 300 veces mayor que la de la Tierra, por lo que parecería que el peso de un objeto en la superficie de Júpiter fuera 300 veces mayor que su peso en la Tierra. Pero resulta ser que un objeto en la superficie de Júpiter pesa apenas 3 veces más que en la superficie de la Tierra.

- Dé una explicación de este hecho (guie su razonamiento con ayuda de los términos de la ecuación de fuerza gravitatoria).
- Estime el diámetro de Júpiter en términos del de la Tierra.

SOLUCIÓN:

a) Al ser la masa mayor, la fuerza gravitatoria (F_g) se incrementa en forma lineal respecto a ésta, pero el radio de Júpiter (j) también es mayor que el de la Tierra T , y como la F_g es inversamente proporcional al cuadrado de este radio, esto hace que el peso de un objeto en la superficie Júpiter sea del mismo orden que su peso en la superficie de la Tierra.

b) Si el peso en Júpiter es aproximadamente 3 veces el de la Tierra T:

$$F_{gj} = 3 F_{gT}$$

$$(M_j m_{obj})/R_j^2 = 3 (M_T m_{obj})/R_T^2$$

Como $M_j = 300 M_T$

$$(300 M_T)/R_j^2 = (3 M_T)/R_T^2$$

$$100 R_T^2 = R_j^2$$

$$10 R_T = R_j$$

Entonces el R_j es aproximadamente $10 R_T$.

PREGUNTA 4:

En las capas más profundas del Sol, simultáneamente con el aumento de la temperatura, debe crecer la presión, determinada por el peso de todas las capas suprayacentes. Por lo tanto, la densidad también aumentará. Además de que en cada punto interior del Sol se debe cumplir la denominada condición del equilibrio hidrostático ($P=\rho gH$).

a) Con base en el siguiente esquema:

donde:

P_1 es la presión en la capa A,

P_2 es la presión en la capa B,

ρ es la densidad media entre las capas A y B.

Y con la expresión $RT/ug = H_0$ que tiene unidades de longitud. Halle la relación aproximada entre las presiones de las capas entre A y B.

Nota.- la mayoría de los objetos astronómicos constan de un gas que se puede considerar perfecto, siendo así, la ecuación fundamental de estado correspondiente es:

$$P = (\rho RT)/u \quad (\text{tomar en cuenta que } H_0 \approx H),$$

donde: P, es la presión interna del gas; ρ , su densidad; u, la masa molecular relativa, y T la temperatura absoluta del gas expresada en °K; $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{°K})$ (considere los valores medios de presión y densidad entre las dos capas).

SOLUCIÓN:

Recordemos que la ecuación de estado es:

$$P = \frac{\rho RT}{u} \dots\dots\dots(1)$$

Además también recordemos que la densidad y la presión media entre las capas A y B viene dada por:

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \quad \text{y} \quad P = \frac{P_1 + P_2}{2}.$$

Ahora, reemplazando las dos anteriores ecuaciones en (1) tenemos:

$$\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right) = \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right) \frac{RT}{u} \quad . \text{ De donde obtenemos:}$$

$$\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right) \frac{u}{RT} = \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right) = \rho \quad \dots\dots\dots(2)$$

Por otro lado, recordemos que para que se cumpla la denominada condición del equilibrio hidrostático, se tiene que:

$$P_2 - P_1 = \rho gH \quad \dots\dots\dots(3)$$

Ahora, reemplazando la ecuación (2) en (3):

$$P_2 - P_1 = \left(\frac{P_2 + P_1}{2}\right) \frac{u}{RT} gH \Rightarrow \frac{RT}{ug} (P_2 - P_1) = \left(\frac{P_2 + P_1}{2}\right) H$$

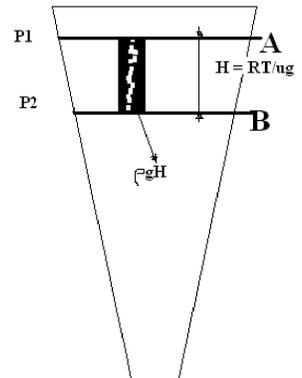
Pero recordemos que:

$$\frac{RT}{ug} = H_0, \quad \text{y además sabemos que } H_0 = H, \quad \text{con lo que tenemos:}$$

$$P_2 - P_1 = \frac{P_2 + P_1}{2}$$

y con lo que finalmente obtenemos:

$$P_2 = 3P_1, \quad \text{que es la relación buscada.}$$



PREGUNTA 5.

Si mal no recuerdo, hace un tiempo en un canal de ciencia se hacía la propaganda de especiales referidos a un gran telescopio en la superficie de la Tierra, y decía algo así: Con este telescopio podrá verse el logotipo de la NASA en el Telescopio Espacial Hubble, si éste se encuentra en órbita circular alrededor de la Tierra a 593 km sobre el nivel del mar, y si suponemos que el logotipo tiene letras de 2 metros de alto. ¿Cuál debería ser el diámetro del telescopio en la superficie?. ¿Cuál es el telescopio, de los que Ud. Conozca, que más se aproxime al cálculo realizado? (Ayuda: utilice la longitud de onda del punto medio del visible, 550 nm).

Respuesta

El poder de resolución de un telescopio es: $RP=1/\Theta_{\min}$, donde Θ_{\min} es el ángulo mínimo entre dos puntos, y $\Theta_{\min} = 206\,265 \lambda/d$, donde λ es la longitud de onda de la luz y d es el diámetro del objetivo. Si consideramos la difracción de una apertura circular, debemos multiplicar este valor por 1.22, entonces para la longitud de onda del visible tenemos:

$$1.22 \times \Theta_{\min} = 1.22 \times 206265 \times (5,5 \times 10^{-7}) / d$$

$$1.22 \times \Theta_{\min} \approx 0.14/d$$

Ahora, si el telescopio tiene letras de 2 m y está a 593 km, el ángulo que deberíamos poder ver sería

$$\Theta/2 = \tan^{-1}(2/593.000)$$

$$\Theta = 6.74 \times 10^{-6}$$

Luego: $d = 0.14/\Theta = 0.14 / 6.74 \times 10^{-6} = 20.75 \text{ m}$

El telescopio terrestre más grande de la superficie terrestre es el Very Large Telescope, en Atacama, Chile. Se trata de 4 espejos de 8 metros de diámetro. En modo interferométrico, el telescopio tiene una resolución igual a la de un telescopio de un diámetro igual a la distancia entre los espejos, es decir, 100 metros. Con lo que este telescopio fácilmente resolvería este objeto.

PREGUNTA 6. Responda con falso o verdadero:

- La gran mayoría de las fuentes de rayos gamma consiste de estrellas binarias de Rayos X.
F V
- La mejor manera de diferenciar si un chubasco atmosférico ha sido generado por un rayo gamma o por una partícula cargada es medir el bajo contenido muónico del mismo (muón=partícula de masa media entre un electrón y un protón).
F V
- De acuerdo a las teorías actuales, se cree que el Sol existirá tal y como es ahora unos 10.000 millones de años más.
F V
- Los típicos cúmulos de galaxias pueden tener un diámetro de 10^7 años luz y contener unas 10^3 galaxias con un tamaño de 10^5 años luz separadas por 10^6 años luz siendo las velocidades típicas galácticas de 10^3 km/s.
F V
- Las estrellas que vemos en la vía láctea constituyen parte de un gran disco de estrellas y gas en rotación, que constituyen nuestra galaxia. En la constelación Andrómeda es posible visualizar, con binoculares, a la galaxia espiral llamada Andrómeda o galaxia M31, la cual probablemente se asemeja en su forma a nuestra galaxia si la pudiéramos ver desde lejos. M31 está a 2×10^6 años luz de nosotros.
F V
- La pérdida de masa solar es de 5 millones de toneladas por segundo.
F V
- El orden de las Lunas Galileanas, desde el interior y alejándose del planeta Júpiter es: IO, EUROPA, GANÍMEDES, CALIXTO.
F V

SOLUCIÓN DEL EXAMEN EXPERIMENTAL

PARTE I: USE EL PUNTERO LÁSER PROPORCIONADO (15 PUNTOS)

1. Ubique los objetos conocidos como “Corona Austral y Corona Boreal” X
 2. Dirija el puntero en dirección hacia el Centro de la Galaxia. X
 3. Mueva el puntero a lo largo de la eclíptica. X
 4. Dirija el puntero a la estrella llamada Gamma Cruz. X
 5. En el sur una brillante constelación es el triángulo austral, dirija el puntero a la estrella más brillante del triángulo. X
- R.- La estrella más brillante es *Alfa Triángulo* de magnitud 1.9, trazo espectral BV y a una distancia de 415.5 años luz.
6. Inicie en la estrella Antares (Alfa-Scorpius) en la constelación del escorpión, mueva el puntero 40° hacia al oeste, seguido de 30° hacia el sur (en coordenadas ecuatoriales). Ahora reconozca a la constelación en el campo de visión. X
- R.- La constelación es VELA

PARTE II: USE LOS BINOCULARES O EL TELESCOPIO (25 PUNTOS)

1. Utilizando el telescopio adecuadamente ubique dos tipos de Cúmulos e indique su nombre. X
2. Encuentre la nebulosa laguna (M8). X
3. Encuentre un planeta. X
4. Utilizando el telescopio adecuadamente ubique dos tipos de Cúmulos o Nebulosas e indique el nombre de los mismos.

Resp.: Cúmulos Globulares: NGC5139 (Omega del Centauro), Centauro, M80 Escorpión, M4-NGC6121 Escorpión. **Cúmulos Abiertos:** NGC4755 (El Boyero), M6 (Mariposa) Escorpión, M7-NGC6475, Escorpión-Sagitario. **Nebulosas:** M8 (Nebulosa de la Laguna) Sagitario, M80.

5. Observe las nebulosas laguna (M8) y Trífida (N20) y dibuje su forma y tamaño aproximados que ve a través de los binoculares en el cuadro siguiente con la correcta orientación.

13^{ra} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA,
3^{ra} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

BUSTOS R.¹, JUSTINIANO I.², JAILLITA J. C.³, ARGANDOÑA A.⁴, RAMIREZ M.¹, ZUBIETA V.¹, SANJINÉS D.¹, BRAÑEZ A.¹,
ESPINOZA W.¹, APAZA R.¹, VARGAS CH.¹, MAYTA R.¹, CORDERO M.⁵, TAVERA W.⁶, ANDRADE M.⁷, GUZMÁN R.⁷,
VALLEJOS V.⁸, GUAYGUA T.⁹, CASTELO J. J.⁹, JEMIO C.⁹, PAYLLO P.¹⁰, MAMANI R.¹¹, COCA N.¹², GUTIERREZ V. H.¹³,
MARTINEZ L.¹⁴, CHAVARRIA V.¹⁵, COPA O.¹⁶, CONDORI V. H.¹⁷, CONDORI H.¹⁸, SALVATIERRA R.¹⁸,
CENTENO E.¹, MIRANDA J.¹, IBIETA J. P.¹, MENDOZA N.¹⁹, CORONEL A.¹⁹

¹ Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), Carrera de Física, La Paz

² Colegio María Auxiliadora, Cobija, Pando

³ Colegio Instituto Americano, Cobija, Pando

⁴ Área de Ciencias Puras, Universidad Amazónica de Pando, Pando

⁵ Asociación Boliviana para el Avance de la Ciencia (ABAC)

⁶ Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)

⁷ Universidad Mayor de San Simón (UMSS), Carrera de Física, Cochabamba

⁸ Astrónomo, Planetario de Física, UMSA

⁹ Facultad Nacional de Ingeniería, Universidad Técnica de Oruro, Oruro

¹⁰ Colegio Yacuiba, Yacuiba, Tarija

¹¹ Universidad Autónoma Tomás Frias, Carrera de Física, Potosí

¹² Universidad Autónoma San Francisco Xavier de Chuquisaca, Facultad de Ingeniería, Sucre

¹³ Colegio Juan Enrique Pestalozzi, Sucre

¹⁴ Universidad Privada de Santa Cruz (UPSA), Santa Cruz de la Sierra

¹⁵ Universidad Autónoma Gabriel René Moreno (UAGRM), Santa Cruz de la Sierra

¹⁶ Colegio Ave María, Sucre

¹⁷ Colegio Basil Miller, El Alto, La Paz

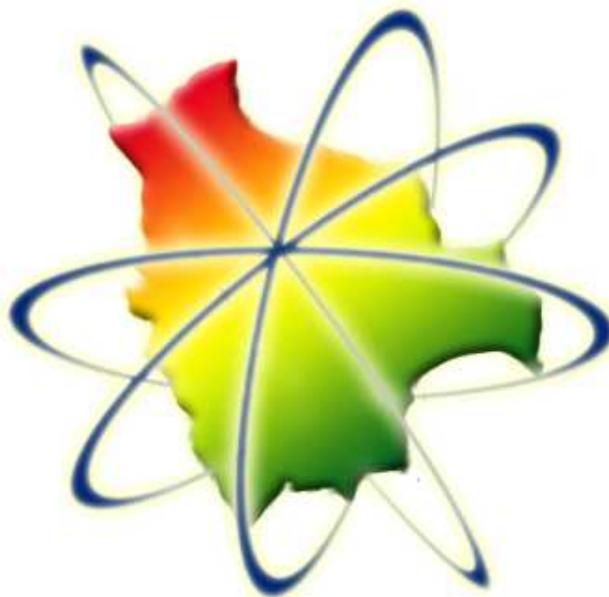
¹⁸ Estudiantes Ex – Olímpicos

¹⁹ Universidad Mayor de San Andrés, Facultad de Ciencias Puras y Naturales, Aula Virtual

RESUMEN

La 13^{ra} Olimpiada Boliviana de Física (13^{ra} OBF) y 3^{ra} Olimpiada Boliviana de Astronomía y Astrofísica (3^{ra} OBAA) se llevaron a cabo simultáneamente y con éxito del 28 de Noviembre al 1 de Diciembre de 2008 en la ciudad de Cobija, Pando, en los ambientes de de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Amazónica de Pando (UAP).

La organización del evento contó con la participación de los siguientes organismos e instituciones: COMITE OLÍMPICO DE FÍSICA, ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA, PREFECTURA DE PANDO, SOBOFI, la Asociación de profesores de Física, Química, Biología y Matemáticas, agrupados en AMEC (Asociación para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias), la Dirección distrital de Cobija; SEDUCA–Pando, el Área de Ciencias Puras de la UAP y el Gobierno Municipal de Cobija.



Descriptor: Olimpiadas de Física, Astronomía y Astrofísica

Subject headings: Physics, Astronomy & Astrophysics Olympiads

TABLA 1
MEDALLERO DE LA 13^{ra} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA.

Nombre	Colegio / Ciudad	PREMIO
13 ^{ra} OBF - 6o de Primaria		
Giovanni Everth Alvarez Mamani	Marien Garden/La Paz	ORO
Jose Ivan Challapa Condori	La Salle / Oruro	PLATA
Erick Rejas Escudero	Pestalozzi/ Sucre	BRONCE
Bruno Enrique Samael Bustos A.	La Salle / La Paz	HONOR
13 ^{ra} OBF - 7o de Primaria		
Adriana Herrera Velasco	Amor De Dios / La Paz	ORO
Santiago Perez Trujillo	Fransiscano/Potosi	PLATA
Ghislaine Aguilar Olea	S. Agustín / Cochabamba	BRONCE
Adrian Choquevilca	Cushing / Santa Cruz	HONOR
13 ^{ra} OBF - 8o de Primaria		
Monica Alejandra Sanjinez Ortiz	Cushing / Santa Cruz	ORO
Mariana M. Vasquez Sanchez	Amor de Dios / La Paz	PLATA
Erick Antero Maraz Zuñiga	Pestalozzi / Sucre	BRONCE
Cesar Tapia Mercado	S. Francisco / Oruro	HONOR
13 ^{ra} OBF - 1o de Secundaria		
Ibelice del Pilar Ramirez Sahonero	Alemán / Oruro	ORO
Lusmila Alejandra Quispe Flores	Sur / El Alto - La Paz	PLATA
Diego Gabriel Nuñez Duran	San Agustín / Cochabamba	BRONCE
Vicente Rodriguez	San Agustín / Cochabamba	HONOR
13 ^{ra} OBF - 2o de Secundaria		
Rodrigo Vargas Godoy	San Agustín / Cochabamba	ORO
Pamela Yesica Castro Condori	La Salle / Oruro	PLATA
Pamela Y. Huayllani Gutierrez	La Salle (T) / Oruro	BRONCE
Andrea Videla Vargas	Pestalozzi / Sucre	HONOR
13 ^{ra} OBF - 3o de Secundaria		
Hugo Ignacio Mobarec Sarabia	San Ignacio / La Paz	ORO
Karla Mariela Quispe Flores	Sur / El Alto - La Paz	ORO
Carlos Mauricio Ibañez Ocaña	Instituto Americano /La Paz	PLATA
Carlos Fernandez	San Agustín / Cochabamba	PLATA
Ever Veimar Huanca Lucero	Basil Miller / El Alto-LP	BRONCE
Gabriel Wayer de la Quintana	Palazón / Tarija	BRONCE
Maria M. Salame Gonzales	Pestalozzi / Sucre	HONOR
Abigail Coraiti Ovando	La Salle / Oruro	HONOR

Se contó con la presencia de ocho delegaciones departamentales: Chuquisaca, Cochabamba, La Paz, Oruro, Pando, Potosi, Santa Cruz y Tarija. En ambas olimpiadas se evaluaron las categorías de 6o, 7o, 8o de Primaria, 1o, 2o y 3o de Secundaria. La categoría de 4o de Secundaria no participó en Pando, ellos participaron en las dos etapas previas de clasificación para la 13a OBF-3a OBAA y los ganadores de esta categoría tienen como principal premio el ingreso libre y directo a las universidades comprometidas con el proyecto.

En Cobija se concentraron cerca de 200 personas entre estudiantes, profesores y madres/padres de familia que acompañaron a sus hijos, quienes compartieron sus experiencias, costumbres, y culturas.

El evento se realizó con la presencia de dos importantes físicos bolivianos, el Dr. Marcelo Ramírez y el Dr. Diego Sanjinés, quienes compartieron sus conocimientos a través de conferencias para los estudiantes olímpicos, profesores asistentes y público en general, así como también formaron parte del comité evaluador y demostraron conceptos físicos, en coordinación con estudiantes universitarios, en la actividad titulada La Magia de la Física (proyecto desarrollado por estudiantes de la Carrera de Física de la Facultad de Ciencias Puras y Naturales de la Universidad Mayor de San Andrés, La Paz).

Las categorías de 6o, 7o y 8o de Primaria se evaluaron en la modalidad de Examen Teórico y las categorías de 1o, 2o, 3o de Secundaria tuvieron dos modalidades de evaluación: Teórica y Experimental.

TABLA 2
MEDALLERO DE LA 3^{ra} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA.

Nombre	Colegio / Ciudad	PREMIO
3 ^{ra} OBAA - 6o de Primaria		
Erick Rojas	Pestalozzi / Sucre	ORO
Erick Petersen	Pestalozzi / Sucre	PLATA
Carlos Mendoza Maldonado	Lourdes / La Paz	BRONCE
Kaleb Yrahuela Azul	Americano / Pando	HONOR
3 ^{ra} OBAA - 7o de Primaria		
Eddil Alejandro Larrazabal Frias	Americano / Pando	ORO
Lizeth Romina Espada	Pestalozzi / Sucre	PLATA
Adrian Choquevilca	Cushing / Santa Cruz	BRONCE
Tetsuo Murakami Alvarez	Americano / Pando	HONOR
3 ^{ra} OBAA - 8o de Primaria		
Erick Antero Maraz Zuñiga	Pestalozzi / Sucre	ORO
Alejandro Rodrigo Sandoval Valencia	San Andrés / La Paz	PLATA
Andrea Aguirre Pereira	Pestalozzi / Sucre	BRONCE
Estefanny Mariel Eumiel Chavez	Americano / Pando	HONOR
3 ^{ra} OBAA - 1o de Secundaria		
Gustavo Gabriel Velez Soliz	Pestalozzi Sucre	ORO
Yara Estefanie Vascope Aguada	Santa Eufracia/La Paz	PLATA
Mauricio Mesa Arrevilla	Americano/Santa Cruz	BRONCE
Sergio Castillo	Ave María / Sucre	HONOR
3 ^{ra} OBAA - 2o de Secundaria		
Stefany Coco	Cushing / Santa Cruz	ORO
Hugo Ignacio Movarec Saravia	San Ignacio / La Paz	PLATA
Mauricio Angulo	Pestalozzi / Sucre	BRONCE
Cristian Chambi Paco	A. Arce / Oruro	HONOR
3 ^{ra} OBAA - 3o de Secundaria		
Alvaro Ruben Hurtado Maldonado	A Arce / Oruro	ORO
Gabriel Wayar de la Quintana	Palazón / Tarija	ORO
Abigail Coraite Ovando	La Salle / Oruro	PLATA
Hugo Roberto Gutierrez	Pestalozzi / Sucre	PLATA
Anita Carol Padilla Vaca	Cushing / Santa Cruz	BRONCE
Gustavo Tabalin Cardenas	A. Arce / Oruro	BRONCE
Hesser Russell Michel	Palazón / Tarija	HONOR

Los ganadores de 2o, 1o de Secundaria, 8o, 7o y 6o de Primaria forman los *equipos preseleccionados* postulantes a futuros eventos olímpicos: Andinos, Iberoamericanos e Internacionales a llevarse a cabo las gestiones 2010, 2011, 2012, 2013 y 2014, respectivamente.

Los ganadores de la categoría de 3o de Secundaria, en las dos olimpiadas: OBF y OBAA, forman los equipos base que representarán al país en los siguientes eventos (sin embargo, ellos deberán seguir el intenso ciclo de entrenamiento para confirmar su plaza en su respectiva delegación):

1^{ra} Olimpiada Andina de Astronomía y Astrofísica, 1^{ra} OAAA, Bolivia, Junio, 2009.

40^a Olimpiada Internacional de Física, México, Julio, 2009.

XIV Olimpiada Iberoamericana de Física (sc XIII OIBF), Chile, Septiembre, 2009.

3^{ra} Olimpiada Internacional de Astronomía y Astrofísica, Iran, Octubre, 2009.

¡Felicidades! a todos los jóvenes participantes y ganadores de las distintas etapas y categorías así como también a todos los establecimientos fiscales y particulares de todo el país que se animaron a participar en el apasionante mundo de la Física, la Astronomía y la Astrofísica por que están dando un digno ejemplo a seguir por otros establecimientos, profesores, estudiantes contemporáneos y para todas las generaciones venideras.

La lista de GANADORES se muestra en las Tablas 1 y 2. A continuación se presentan los exámenes teórico y experimental resueltos, de la 13^{ra} OBF y la 3^{ra} OBAA.

Sol. Observando el calentamiento del agua con un cronometro en mano, se nota que el agua tarda más en calentarse de 80°C a 90°C, que de 10°C a 20°C, el calor de la llama no solo se invierte en la evaporación intensa del agua, sino también en la transmisión de calor al ambiente, a temperaturas altas (de 80°C a 90°C) el agua emite mayor cantidad de energía que a temperaturas bajas (de 10°C a 20°C), por ello a pesar de que el agua recibe calor uniformemente del mechero, su temperatura aumentará más despacio tanto más caliente esté.

6. Una pieza de cobre se coloca en un vaso de agua. Si sube la temperatura del agua, ¿qué ocurre con la temperatura del cobre? ¿Bajo que condiciones están el agua y el cobre en equilibrio térmico?

Sol. La temperatura del cobre desciende y la temperatura del agua sube hasta que las temperaturas sean las mismas. Entonces el metal y el agua están en equilibrio térmico.

7. Las tapas metálicas de frascos de vidrio a veces se pueden aflojar al pasarlos en agua caliente. ¿Cómo es esto posible? Explique.

Sol. El coeficiente de expansión del metal es mayor que la de vidrio. Cuando el agua caliente se hecha sobre el frasco, tanto el vidrio y la tapa se amplian, pero a ritmos diferentes.

8. Si la velocidad promedio de un objeto es cero en algún intervalo, ¿qué se puede decir acerca del desplazamiento del objeto para ese intervalo?

Sol. Se puede decir que el desplazamiento es cero.

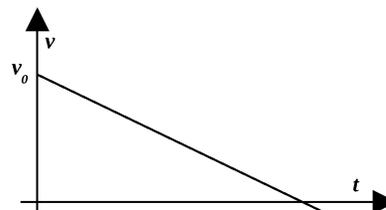
9. ¿Es posible que la velocidad y la aceleración de un objeto tengan signos contrarios? Si no es así, de una prueba; si lo es, dé un ejemplo de tal situación y trace una gráfica de velocidad – tiempo para demostrar su punto de vista.

Sol. Si. Considere una bola que sube.

En un grafica se puede observar lo siguiente:

10. Cuando un objeto en caída libre llega a la mitad de su altura, ¿Cuánto vale la aceleración del objeto en esa posición?

Sol. Su aceleración es 9.81 m/s² sobre el nivel del mar. Ya que en caída libre la aceleración es constante.



Parte práctica (60%)

1) Un punto material comienza a moverse por una recta con aceleración constante "a". Después de un tiempo t, de iniciado el movimiento la aceleración cambia de signo, en sentido opuesto, pero sin cambiar de módulo. Determine al cabo de cuanto tiempo "t" después de iniciado su movimiento, la partícula pasa por el punto de partida.

Sol.

Representemos gráficamente el problema:

El punto material recorre una distancia d en un tiempo t_1 y comienza a frenar hasta detenerse en un tiempo t_1 , luego cambia de sentido su movimiento y cuando pasa por el punto B ha transcurrido un tiempo t_2 , ahora necesitamos determinar el tiempo que tarda en recorrer la distancia d.

Cuando el punto se dirige de A hacia B, tenemos: $v=at$ y $d=\frac{at_1^2}{2}$

Cuando el punto se dirige a B hacia A, tenemos $d=vt_2+\frac{at_2^2}{2}$

Igualando las dos ecuaciones de la "d" y sustituyendo el valor de la velocidad, obtenemos: $\frac{at_1^2}{2}=(at_1)t_2+\frac{at_2^2}{2}$; $\frac{at_1^2}{2}=at_1t_2+\frac{at_2^2}{2}$; de donde

$\frac{at_2^2}{2}+at_1t_2-\frac{at_1^2}{2}=0$. Consideremos la ecuación de 2o grado cuya incognita es t_2 y apliquemos la formula general:

$t_2=\frac{-at_1\pm\sqrt{a^2t_1^2+a^2t_1^2}}{a}=\frac{-at_1\pm\sqrt{2a^2t_1^2}}{a}$. La solución que tiene sentido físico es la que tiene el signo positivo, es decir:

$$t_2=-t_1+\sqrt{2}t_1; t_2=3t_1-t_1+\sqrt{2}t_1=2t_1+\sqrt{2}t_1; t_2=t_1(2+\sqrt{2})$$

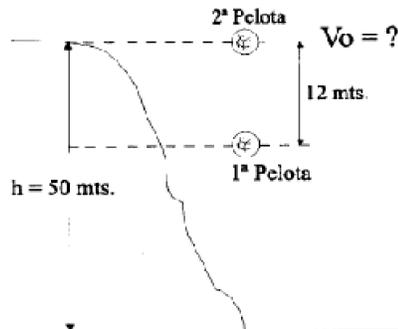
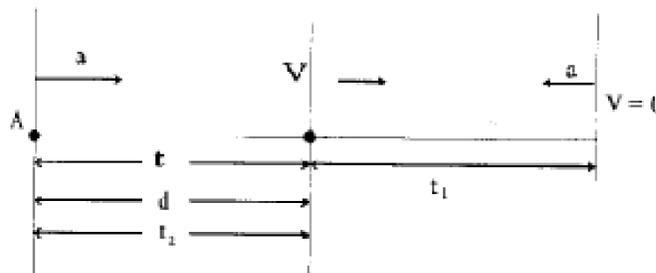
2. Una pelota se deja caer desde un acantilado. Después que ha pasado por un punto 12m abajo del borde de las piedras, se arroja hacia abajo una segunda pelota. La altura del barranco es de 50 m. ¿Cuál debe ser la velocidad inicial de la segunda pelota para que ambas lleguen al suelo al mismo tiempo?

Sol.

La velocidad de la primera pelota al llegar a los 120 [m] es:

$$v=\sqrt{2(9.8[m/s^2])(12[m])}, \quad v=15.34[m/s]$$

El tiempo que tarda la primera pelota en recorrer los 38 [m] que faltan para llegar al suelo, es el mismo tiempo que tardara lo segunda pelota parar recorrer los 50 [m] y llegar iguales:



$$38[m] = 15.34[m]t + \frac{9.8[m/s^2]t^2}{2}, \quad 4.9[m/s^2]t^2 + 15.34[m/s]t - 38 = 0$$

$$t = \frac{-15.34 \pm \sqrt{235.32 + 744.8}}{9.8}, \text{ de donde: } t = 1.63[\text{seg}]$$

Ahora, $d = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, de donde: $v_0 = \frac{d}{t} - \frac{gt}{2}$; reemplazando datos:

$$v_0 = \frac{50[m]}{1.63[s]} - \frac{9.8[m/s^2] * 1.63[s]}{2}, \text{ y finalmente: } v_0 = 22.68[m/s].$$

3. Un calorímetro de aluminio con masa de 100 g contiene 250 g de agua. El calorímetro y el agua están en equilibrio térmico a 10 °C. Dos bloques metálicos se ponen en el agua. Uno es una pieza de cobre de 50 g a 80 °C. El otro bloque tiene una masa de 70 g y está originalmente a una temperatura de 100 °C. Todo el sistema se estabiliza a una temperatura final de 20 °C. Determine el calor específico de la muestra desconocida.

Sol.

$$Q_{\text{frio}} = Q_{\text{caliente}}$$

$$(m_{H_2O} C_{H_2O} + m_c C_c)(T_f - T_c) = m_{Cu} C_{Cu}(T_f - T_{Cu}) - m_x C_x(T_f - T_x)$$

Donde H_2O es agua, c es el calorímetro, Cu es el cobre y x es la muestra desconocida

$$[250g * 1 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C} + 100g * 0.215 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}](20 - 10)^\circ\text{C} = -(50g * 0.0924 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C})(20 - 80)^\circ\text{C} - 70g * C_x * (20 - 100)^\circ\text{C}$$

$$\text{de donde: } 2.44 \times 10^3 [\text{cal}] = 5.6 \times 10^3 [\text{g} \cdot ^\circ\text{C}] * C_x, \text{ y finalmente: } C_x = 0.435 [\text{cal/g} \cdot ^\circ\text{C}]$$

13^a OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

Solución 2^o de Secundaria

Parte Teórica (40%)

1) Una nave espacial vuela en el espacio a velocidad constante. De pronto una fuga de gas en el costado de la nave le da una aceleración constante en una dirección perpendicular a la velocidad inicial. La orientación de la nave no cambia, de modo que la aceleración permanece perpendicular a la dirección original de la velocidad. ¿Cuál es la forma de la trayectoria seguida por la nave en esta situación?

Sol. Una parábola.

2) Una piedra se deja caer en el mismo instante que una pelota, a la misma elevación, se lanza horizontalmente. ¿Cuál tendrá la mayor velocidad cuando llegue al nivel del suelo?

Sol. La pelota tendrá la mayor velocidad.

3) En el extremo de un arco de péndulo, su velocidad es cero. ¿Su aceleración también es cero en ese punto?

Sol. La aceleración no puede ser cero porque el péndulo no permanece en reposo al final del arco.

4) Cuando se desplaza una onda en una cuerda tensa, ¿siempre se invierte un pulso al reflejarse?. Explique.

Sol. Esto depende de lo que refleja la onda. Si se refleja en una cuerda menos densa, se refleja parte de la onda

5) Si se estira una manguera de caucho y se le da un tirón, se puede observar que un pulso sube y baja por la manguera. ¿Qué le pasa a la rapidez del pulso si se estira aun más la manguera?

Sol. Si la tensión es más grande entonces la velocidad de la onda es también mayor.

6) Con referencia a la anterior pregunta ¿Qué le pasa a la rapidez si se llena la manguera con agua?

Sol. Si se llena con agua la manguera entonces la onda se mueve más lentamente porque la densidad lineal es mayor en este caso.

7) Una lente forma la imagen de un objeto sobre una pantalla. ¿Qué le ocurre a la imagen si tapa la mitad superior de la lente utilizando papel?

Sol. La imagen es visible, pero sólo en la mitad de la intensidad.

8) En una novela de Julio Verne, un trozo de hielo se talla para formar una lupa que permita enfocar la luz solar e iniciar una fogata. ¿Es esto posible?

Sol. Absolutamente. Sólo absorbe la luz, no se transmite la luz, el interior de la energía contribuye a la transparencia objeto.

9) Una bolsa de plástico para sándwich llena de agua puede funcionar como una burda lente convergente en el aire. Si la bolsa se llena de aire y se coloca bajo el agua, ¿será la lente convergente o divergente?

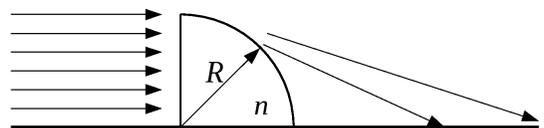
Sol. En este caso, el índice de refracción del material de la lente es menor que el del medio circundante. En estas condiciones, una lente biconvexa se puede volver divergente.

10) Explique la razón por la cual un pez en una pecera esférica para carpas japonesas doradas, se ve mayor de lo que realmente es.

Sol. Al igual que en el diagrama, que con el centro de curvatura C de la pecera y la parte inferior del pez se puede definir el eje óptico, interrelacionadas con la pecera en el vértice V. Un rayo de la parte superior de los peces a V es refractada doblada lejos de la normal. Su extensión hacia adentro de la pecera determina la ubicación de la imagen y las características de la imagen. La imagen es vertical, virtual, y ampliada.

Parte práctica (60%)

1. Una pieza de vidrio cuya forma es de $\frac{1}{4}$ de cilindro y con un índice de refracción $n = 1.5$ y un radio $R = 5\text{cm}$, descansa sobre una mesa horizontal. Su superficie plana vertical es iluminada por un haz luminoso horizontal y uniforme. Sobre la mesa, a la derecha del cilindro, aparece la mancha de luz difractada por el cuarto de cilindro.



¿Entre qué y qué punto medidos del extremo derecho del cilindro, aparece la mancha de luz?

Ayuda: El punto más alejado puede ser determinado con la fórmula de los lentes.

Sol. Los rayos cruzan la cara vertical de la pieza de vidrio sin desviarse. Después inciden sobre la superficie cóncava del cilindro a diferentes ángulos. La normal a la superficie curva es siempre perpendicular a su tangente.

Mientras más alto se encuentre un rayo de luz, mayor será el ángulo de incidencia que haga con la superficie curva del cilindro.

El ángulo mostrado en la figura representa el ángulo crítico de reflexión total interna. Es decir el rayo es reflejado, así todos los rayos que estén por debajo de este rayo "crítico" pueden atravesar el $\frac{1}{4}$ de cilindro.

De la figura:

$$\sin \alpha = \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{R+x}$$

El ángulo α :

$$\alpha = \sin^{-1}(2/3) = 41.81^\circ$$

Despejando x se tiene:

$$x = \frac{R}{\cos \alpha} - R = 1.71 \text{ cm}$$

Esta es la distancia mínima a la cuál se observa la mancha de luz.

Al ir disminuyendo el ángulo de incidencia de los rayos, éstos se desvían cada vez menos. Por lo tanto inciden sobre la mesa a mayor distancia.

Considerando al $\frac{1}{4}$ de cilindro como la mitad de una lente plana convexa, la distancia focal de la lente puede ser calculada usando la fórmula para las

lentes delgadas: $\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}$, de donde: $f = 10 \text{ cm}$

Esta distancia focal representa la distancia más alejada a la que llega la mancha de luz.

- Desde el punto A, situado en el extremo superior del diámetro vertical de cierta circunferencia, por unos canales colocados a lo largo de distintas cuerdas de aquella, empiezan a deslizarse simultáneamente varios cuerpos. ¿Al cabo de cuanto tiempo llegan estos cuerpos a la circunferencia? ¿Como depende el tiempo del ángulo de inclinación α de la cuerda respecto a la vertical? Despreciese el rozamiento.

Sol.

Cuando $\alpha = 0^\circ$, $a = g = 9.8 \text{ m/s}^2$, si $0 < \alpha < 90^\circ$ entonces $a = g \cos \alpha$

La pregunta esencial del problema sería: ¿Llegan todos los cuerpos al mismo tiempo?

Para contestarla consideremos lo siguiente: La velocidad con que llegan a la circunferencia es: $v = g \cos \alpha$

La distancia recorrida es $x = \frac{(g \cos \alpha)^2}{2g \cos \alpha} = \frac{g \cos \alpha^2}{2}$ y el tiempo se obtiene por medio de $t = \sqrt{\frac{2D}{a}}$

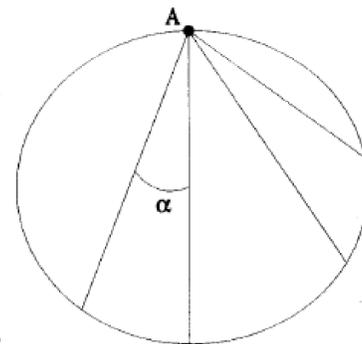
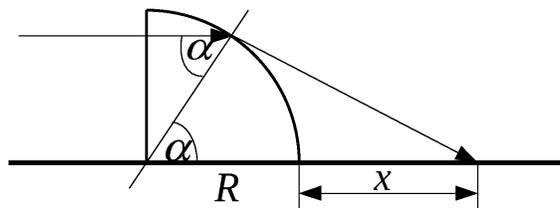
de donde $t = t$, lo cual nos indica que el tiempo es constante y no depende del ángulo α de acuerdo a lo

anterior el tiempo será: $t = \sqrt{\frac{2D}{g}}$, donde D es el diámetro de la circunferencia.

- Una onda senoidal está viajando a lo largo de una cuerda. El oscilador que genera la onda completa produce 40 vibraciones en 30 s. También, un máximo dado viaja 425 cm a lo largo de la cuerda en 10 s. ¿Cuál es la longitud de onda?.

Sol.

$$f = \frac{40.0 \text{ vibraciones}}{30.0 \text{ s}} = \frac{4}{3} \text{ Hz}; \text{ con } v = \frac{425 \text{ cm}}{10.0} = 42.5 \text{ cm/s}, \text{ por tanto } \lambda = \frac{v}{f} = \frac{42.5 \text{ cm/s}}{4/3 \text{ Hz}} = 31.9 \text{ cm} = 0.319 \text{ m}$$



13ª OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

Solución 3º de Secundaria

Parte Teórica (40%)

- Dos cilindros de masas y diámetros iguales, uno de aluminio y otro de plomo están sumergidos en mercurio en posición vertical. ¿Cuál de ellos está hundido a mayor profundidad?

Sol. Esto simplemente es observando las densidades de los objetos, por tanto el más denso es el plomo en comparación al aluminio. Por tanto quien se hunde más es el plomo.

- Normalmente para enfriar una jarra de agua rápidamente, se le agrega hielo. Si colocamos hielo sobre la superficie del agua en una jarra, y si se coloca en otra jarra la misma cantidad de hielo pero este se encuentra en el fondo de la jarra. ¿En cuál jarra se enfriará más rápido el agua?

Sol. En ninguno de los casos.

- Una pieza de madera porosa sin pintar flota en un recipiente parcialmente lleno de agua. Si el recipiente se sella y presuriza arriba de la presión atmosférica, la madera ¿sube, baja o sigue en el mismo nivel?

Sol. El exceso de presión se transmite en todo el contenedor. Esto puede comprimir el aire dentro de la madera. El agua que esta dentro de la madera aumenta su densidad promedio y hace que flote muy débilmente en el agua.

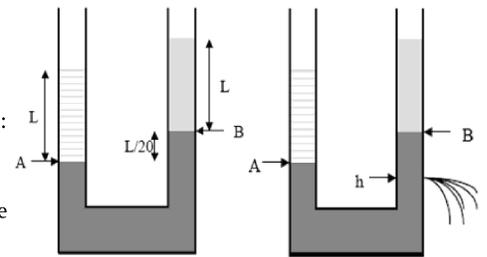
- Que característica tendrán 3 vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} , tales que: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

Sol. En que son todos los vectores ortogonales entre sí.

- Si sólo una fuerza externa actúa sobre una partícula, ¿necesariamente cambia la (a) energía cinética de la partícula? (b) ¿Cambia la velocidad de la partícula?
Sol. Para ambos, no necesariamente, ya que la fuerza gravitacional actúa como una fuerza externa sobre un objeto. Por tanto no existiría un cambio de energía cinética o un cambio de velocidad.
- Una pelota de arcilla se lanza contra una pared de ladrillo. La arcilla se detiene y se queda pegada en la pared. ¿Se viola el principio de conservación de la cantidad de movimiento en este ejemplo?
Sol. La conservación del momentum no se viola, si nosotros consideramos un sistema donde se incluya la Tierra y la arcilla.
- Se ha sugerido llevar al espacio cilindros giratorios de unas 10 millas de largo, 5 millas de diámetro y usarlos como colonias. El propósito de la rotación es simular la gravedad para los habitantes. Explique este concepto para producir una imitación efectiva de la gravedad.
Sol. Esto es el mismo principio que la centrifuga.
- ¿Bajo qué circunstancias un vector diferente de cero, que está en el plano xy, tendría componentes de igual magnitud?
Sol. cualquier vector que apunta a lo largo de una línea a 45° con respecto al eje x o eje y tiene componentes iguales en magnitud.
- ¿En qué circunstancias está el componente x de un vector dado por la magnitud del vector por el seno de su ángulo de dirección?
Sol. Si la dirección de un vector se especifica por el ángulo del vector medido en sentido horario a partir del eje positivo y, luego la componente x del vector es igual al seno del ángulo multiplicado por la magnitud del vector.
- La energía cinética de un objeto depende del marco de referencia en el que se mide su movimiento. Dé un ejemplo para ilustrar este punto.
Sol. Si tu te imaginas que subes a un tren, y colocas en tus pies una mochila notarás que esta no tiene energía cinética porque no se mueve. Pero si un observador fuera del tren, observará que la mochila se mueve y por tanto está tiene energía cinética.

Parte práctica (60%)

1) Dos tubos comunicantes contienen mercurio, tal y como muestra la figura. Se vierte agua por el tubo izquierdo hasta llenarlo una longitud L y por el de la derecha se vierte un líquido desconocido hasta llenarlo la misma longitud L. El nivel de mercurio en el tubo de la derecha queda L/20 por encima del nivel del de la izquierda. Si la densidad del mercurio es 13.6 g/cm³, y se abre un pequeño agujero en el tubo del líquido desconocido a una profundidad h = 5 cm por debajo del nivel del mercurio y si L = 10 cm (ver figura), ¿cuál es la velocidad de salida del fluido?
Sol.



Por la ecuación fundamental de la hidrostática $P_A - P_B = \rho_{Hg} g \frac{L}{20}$
 Teniendo en cuenta que en las superficies libres la presión es la atmosférica:
 $(P_A - P_{atm}) - (P_B - P_{atm}) = \rho_{H_2O} g L - \rho_{liq} g L$, de donde:
 $\rho_{liq} = \rho_{H_2O} - \frac{P_A - P_B}{g L} = \rho_{H_2O} - \frac{\rho_{Hg}}{20} = 0,32 \frac{g}{cc}$. Ahora, apliquemos la ecuación de Bernoulli a la salida del orificio y al punto B $P_{atm} + \rho_{liq} g L + \rho_{Hg} g h = P_{atm} + \frac{\rho_{Hg} V^2}{2}$, de

donde, $v = \sqrt{\frac{\rho_{liq} g L + \rho_{Hg} g h}{\rho_{Hg} / 2}} = 1,01 m/s$

2) Un cuerpo "A" se desliza por un canal helicoidal con una separación h y radio R como se muestra en la figura, determine al final de la enésima vuelta la magnitud de la aceleración. Desprecie cualquier tipo de rozamiento.
Sol.

Si desarrollamos la longitud de la trayectoria podemos ver que su movimiento al dar n vueltas equivale al movimiento a lo largo de un plano inclinado de altura nh y base 2πRn, como se muestra en la figura 1.

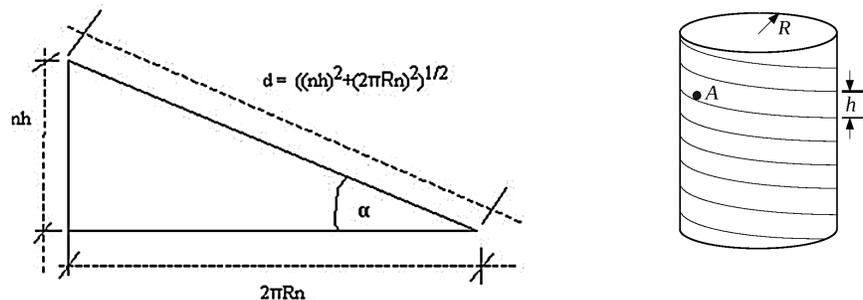


Figura 1. – Plano inclinado.

Por lo que la longitud de la trayectoria es: $d = \sqrt{(nh)^2 + (2\pi Rn)^2}$
 Para calcular la rapidez del cuerpo, podemos usar el principio de la conservación de la energía.
 Como el cuerpo parte del reposo desde una altura nh, se tiene: $mghn = \frac{1}{2} m v^2$, de donde, $v = \sqrt{2ghn}$

De la figura 2 se observa que la aceleración del cuerpo tiene dos componentes a_r y a_t .

Una de estas a lo largo del plano inclinado, dada por : $a_t = g \sin \alpha = g \frac{h}{\sqrt{4\pi^2 R^2 + h^2}}$

La otra componente de la aceleración es la centrípeta puesto que el cuerpo da vueltas alrededor del eje de la hélice esta es:

$$a_r = \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{R} = \frac{8\pi^2 R n g h}{4\pi^2 R^2 + h^2}$$

Finalmente la magnitud de la aceleración total del cuerpo es:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = gh \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2 + 64\pi^4 n^2 R^2}}{h^2 + 4\pi^2 R^2}$$

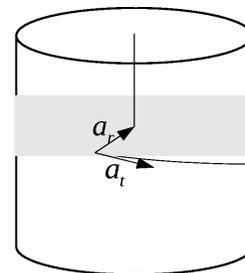


Figura 2.- Componentes de la aceleración.

3) Dos bolitas elásticas penden de sendos hilos delgados de modo tal que se hallan a la misma altura y están en contacto. Las longitudes de los hilos son $L_1 = 10 \text{ cm}$ y $L_2 = 6 \text{ cm}$. Las masas de las bolitas son $m_1 = 8 \text{ g}$ y $m_2 = 20 \text{ g}$. La bolita de masa m_1 es desviada en un ángulo de 60° y después se suelta. Determine el ángulo máximo de las bolitas después de la colisión. Suponga que el choque es perfectamente elástico.

Sol.

La velocidad de la bolita con masa m_1 antes del choque, es igual a: $v_0^2 = 2gh$ pero

$$h = L_1 - L_1 \cos \alpha = L_1 (1 - \cos \alpha) \text{ y } \cos 60^\circ = \cos \alpha = \frac{1}{2} \text{ entonces } h = \frac{L_1}{2}, \text{ por lo tanto: } v_0^2 = gL_1;$$

Por la ley de la conservación de la cantidad de movimiento: $m_1 v_0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2$

Notemos que, como $m_1 < m_2$ el sentido de v_1 es opuesto al de v_2 .

$$\text{Aplicando la ley de conservación de la energía mecánica: } \frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_2 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$$\text{De estas relaciones se obtiene: } \frac{m_1 v_0 + m_1 v_1}{m_2} = v_2$$

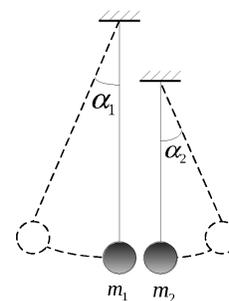
$$\text{Substituyendo datos del problema se llega a: } v_2 = 0.396 + 0.4v_1,$$

$$\text{Elevando esta expresión al cuadrado y despejando en función de } v_1 \text{ se encuentra que: } v_1 = \frac{-6.34 \pm \sqrt{40.2 + 210.56}}{22.4}$$

De donde $v_1 = 0.99 \text{ m/seg}$ y por tanto $v_2 = 0.792 \text{ m/seg}$.

Después del choque las bolitas se elevan hasta una altura $h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = 0.05 \text{ m}$ y $h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = 0.03 \text{ m}$ respectivamente. Finalmente:

$$\cos \alpha_1 = \frac{(L_1 - h_1)}{L_1} = \frac{5 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0.5 \text{ de donde } \alpha_1 = 60^\circ, \cos \alpha_2 = \frac{(L_2 - h_2)}{L_2} = \frac{3 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 0.5 \text{ de donde } \alpha_2 = 60^\circ.$$



3ª OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

Solución 6º de Primaria

Parte Teórica

1. Explique los verdaderos movimientos de la Tierra, de los planetas y de la Luna y quien desarrollo tales afirmaciones.
Sol.- Copérnico hizo las siguientes afirmaciones: En el centro del mundo se encuentra el Sol, la Tierra gira alrededor de su eje y esta rotación explica el movimiento aparente diurno de todos los astros; la Tierra al igual que los planetas, gira alrededor del Sol y esta rotación explica el movimiento aparente del Sol entre las estrellas. Copérnico además considero que la Luna se mueve alrededor de la Tierra.
2. ¿Que son los asteroides y donde se ubican?
Sol.- Los asteroides son pequeños planetas que no están considerados en el Sistema Solar y estos se ubican entre las orbitas de Marte y Júpiter.
3. ¿Que es la Atmósfera y de que esta compuesto?
Sol.- La atmósfera se compone de una mezcla de gases. Estos elementos Son: Oxígeno, Nitrógeno, Argon, Neon, metano, Xenón, Ozono, vapor de agua y Dióxido de carbono.
4. Describa las características de un Cráter Lunar.
Sol.- El cráter lunar consta del circo, dentro del cual se encuentra una planicie (el fondo), y en el centro de la planicie esta el montículo central, cuya altura generalmente es menor que del circo. Los cráteres mayores tienen un diámetro de hasta 100 Km.

ENCIERRE EN UN CÍRCULO, SI ES FALSO (F) Y SI ES VERDADERO (V)

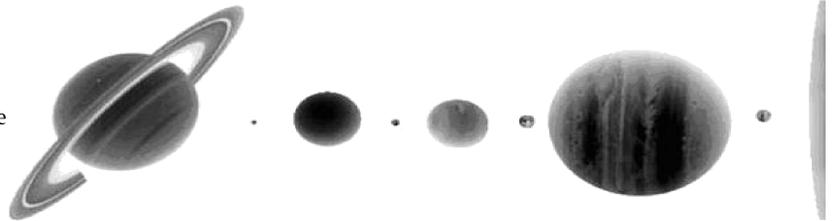
- 1) La tierra es inmóvil con respecto a su eje, sin embargo, este se traslada alrededor de la Luna y que a su vez estos se mueven alrededor del astro Sol. V **F**
- 2) La Luna se mueve alrededor de la Tierra y la Tierra rota alrededor del Sol pero no la Luna alrededor del Sol V **F**
- 3) Al principio Kepler compartía la convicción tradicional de que los cuerpos celestes solamente podían forma elíptica. V **F**
- 4) Las observaciones de los movimientos de los planetas y su análisis concluyeron con uno de los acontecimientos científicos más grandes de la época del Renacimiento es la Creación del sistema heliocéntrico de Copérnico. **V** F
- 5) Uno de los enigmas del Sistema Solar es el déficit de agua en Venus. En el no hay agua líquida debido a la baja temperatura. V **F**
- 6) La estructura del átomo es: Una porción central, NUCLEO, que se encuentra formado por protones (p^+) de carga eléctrica positiva igual +1 y los neutrones (n^0) que tienen carga negativa. Y la parte externa llamada ENVOLTURA constituida por electrones (e^-) de carga negativa igual a -1. V **F**
- 7) El intervalo de tiempo entre dos fases sucesivas homónimas (por ejemplo, entre dos lunas llenas) se denomina *mes sinódico*. Mediante las observaciones se ha establecido que el mes sinódico es igual, por término medio, a 29.53 días solares medios. **V** F
- 8) La galaxia en la que se encuentra el Sol acompañado de todo su conjunto de planetas, se llama VIA LACTEA. **V** F
- 9) Dentro del Sistema Solar se adopta como unidades para medir las distancias las Unidades Astronómicas [UA] y también los pársec [pc]. **V** F
- 10) Marte fue el primer cuerpo celeste natural en el que desembarcaron los astronautas N. Armstrong y E. Aldrin en julio de 1969. V **F**

Parte Práctica

1. En el siguiente gráfico identifica los planetas y enuméralos de acuerdo a su posición.

2. En la siguiente gráfica

- a) Identifique a la Tierra, al Sol y a la Luna
- b) Cual es el ciclo de traslación de la Tierra y de la Luna
- b) En que fase se encuentra la Luna y que eclipses se observa, en las posiciones que muestra el gráfico



3ª OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

Solución 7º de Primaria

Parte Teórica

1. ¿Que planetas son visibles a simple vista?

Sol.- Mercurio, Venus, Marte Júpiter y Saturno

2. ¿Quien descubrió el movimiento de los planetas? ¿En que forma orbitan los planetas alrededor del Sol?

Sol.- Después de cálculos que duraron muchos años, Kepler descubrió tres leyes del movimiento de los planetas en la que una de ellas formula la forma en que orbitan los planetas. “Todos los planetas se mueven en forma de elipses en uno de cuyos focos se encuentra el Sol”.

3. ¿Porque un hemisferio distinto de la Tierra queda expuesto cada seis meses al Sol?

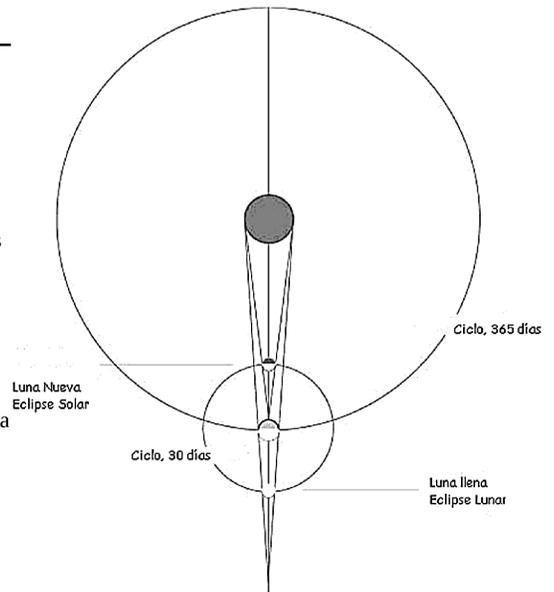
Sol.- Al desplazarse la Tierra en torno al Sol, la inclinación de su eje no varía (23°), pero el plano de la orbita de la Tierra, debiendo a esa inclinación, no coincide con su ecuador. Por esta razón, cada seis meses queda expuesto al Sol un hemisferio distinto.

4. ¿Cómo se origina una aurora Boreal o polar?

Sol.- Ocurren cuando partículas cargadas (protones y electrones) procedentes del Sol, son guiadas por el campo magnético de la Tierra e inciden en la atmósfera cerca de los polos. Cuando esas partículas chocan con los átomos y moléculas de oxígeno y nitrógeno, que constituyen los componentes más abundantes del aire, parte de la energía de la colisión excita esos átomos a niveles de energía tales que cuando se desexcitan devuelven esa energía en forma de luz visible.

5. ¿Que son los asteroides y donde se ubican la mayor parte de estos?

Sol.- Los asteroides o también llamados planetas menores son cuerpos rocosos más pequeños que un planeta y la mayor parte de los asteroides se encuentran entre las orbitas de Marte y Júpiter.



ENCIERRE EN UN CÍRCULO SI ES FALSO F Y SI ES VERDADERO V:

- | | | |
|---|----------|----------|
| 1. La Luna y el Sol al ser vistos desde la Tierra, parecen tener el mismo tamaño, sin embargo esto es falso esto se puede comprobar fácilmente en un eclipse de Luna. | V | F |
| 2. La marea es un movimiento constante y no así un movimiento periódico. Esto se debe a la atracción que la Luna y el Sol ejercen sobre la Tierra. | V | F |
| 3. Mercurio es un planeta que no tiene atmósfera y esta cubierto de cráteres. | V | F |
| 4. Un día sideral es equivalente a decir un día solar medio. | V | F |
| 5. La medición del tiempo se basa en la rotación de nuestro planeta Tierra sobre su eje y en su movimiento de traslación alrededor del sol | V | F |
| 6. Un eclipse total de Luna se produce cuando la Luna atraviesa el cono de sombra de la Tierra. | V | F |
| 7. Un cráter es un tipo de meteorito que llega a la Tierra. | V | F |
| 3. Los cometas se clasifican de acuerdo a sus periodos orbitales. | V | F |
| 3. La mayoría de los meteoroides se desintegran con la fricción en la atmósfera, por esa razón no tienen suficiente tamaño como para llegar al suelo. | V | F |
| 0. No hay ninguna evidencia de que los cometas hayan chocado contra la Tierra en el pasado. | V | F |

PARTE PRÁCTICA:

- 1) En el gráfico 1 identifique y/o responda:
- La penumbra, la antumbra y umbra.
 - ¿Que eclipse se produce en la grafica?
 - Los tipos de eclipses que se producen y explique.

Sol.-

Existen tres tipos de eclipse solar:

- Parcial:** la Luna no cubre por completo el disco solar que aparece como un creciente.
- Total:** desde una franja (banda de totalidad) en la superficie de la Tierra, la Luna cubre totalmente el Sol. Fuera de la banda de totalidad el eclipse es parcial. Se verá un eclipse total para los observadores situados en la Tierra que se encuentren dentro del cono de sombra lunar, cuyo diámetro máximo sobre la superficie de nuestro planeta no superará los 270 km, y que se desplaza en dirección este a unos 3.200 km/h. La duración de la fase de totalidad puede durar varios minutos, entre 2 y 7.5, alcanzando algo más de las 2 h todo el fenómeno, si bien en los eclipses anulares la máxima duración alcanza los 12 minutos y llega a más de 4 h en los parciales, teniendo esta zona de totalidad una anchura máxima de 272 km y una longitud máxima de 15.000 km.

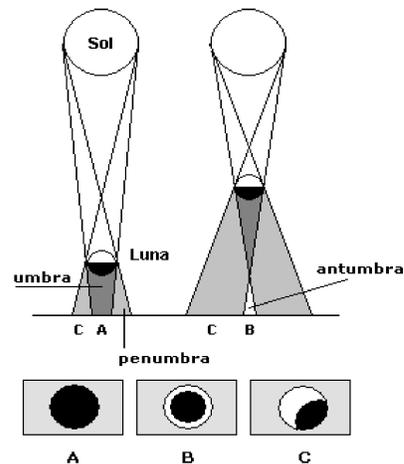
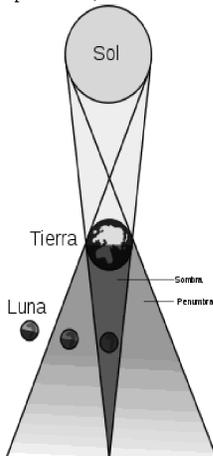


Fig 1.- Cuando la Luna nueva se encuentra más próxima a la Tierra (izquierda), la **umbra** alcanza la superficie de ésta y un observador en **A** verá un **eclipse total**. Si la Luna nueva está más lejos (derecha) la umbra no llega a la Tierra, y un observador en **B**, en la **antumbra**, verá un **eclipse anular**. Los observadores en **C**, en la **penumbra**, apreciarán **eclipses parciales**.

- Anular:** ocurre cuando la Luna se encuentra cerca del apogeo y su diámetro angular es menor que el solar, de manera que en la fase máxima, permanece.
- 2) En la gráfica de la izquierda:
- ¿Qué tipo de eclipse se observa?
 - Identifique la sombra y la penumbra.
- Este es un eclipse Lunar
 - Se muestran en la gráfica

3ª OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

Solución 8º de Primaria

Parte Teórica**ENCIERRE EN UN CÍRCULO SI ES FALSO F o SI ES VERDADERO V**

- | | | |
|--|----------|----------|
| 1. Los planetas menores se ubican cerca del Sol y su densidad es menor, su estructura es sólida y están constituidos principalmente de Hierro, silicio y Magnesio. | V | F |
| 2. A grandes distancias de la Tierra la forma de su campo magnético se desfigura bajo la acción del viento solar. | V | F |
| 3. La brújula señala siempre al Sur porque el campo magnético se parece a un imán de barra. | V | F |
| 4. La Luna no tiene ni atmósfera, ni campo magnético. | V | F |
| 5. Un rayo de luz que sale del Sol recorre una distancia en 8 minutos y 19 segundos hasta llegar a la Tierra. | V | F |
| 6. Todos los planetas giran alrededor del Sol describiendo exactamente orbitas circulares. | V | F |
| 7. Los neutrinos son partículas con masa ínfima en reposo, que casi no interaccionan con la sustancia. Por esto los neutrinos atraviesan con facilidad todo el Sol y, a la velocidad de la | V | F |

luz, se esparcen en el espacio interplanetario.

8. La liberación de energías en el Sol son debidos a las reacciones nucleares que ocurren en la sección de la corona V **F**
9. El brillo de la corona Solar es muchas veces menor que el de la fotosfera. Por esto, la corona solar se puede observar durante la fase total de los eclipses solares. **V** F
10. Las manchas solares son regiones más calientes de la superficie del Sol, su temperatura se estima en unos 4000 grados Kelvin. V **F**

RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS DE FORMA CLARA:

1. ¿El Sistema Solar esta en movimiento? Justifique su respuesta.

Sol.- Si. El sistema Solar se encuentra en uno de los brazos de la galaxia el cual esta rotando, alrededor de su eje central, a una velocidad tangencial de 220 km/s.

2. ¿De que elementos químicos esta compuesto el Sol y en que proporción?

Sol.- El hidrogeno es el elemento que prevalece en el Sol con un 70% de toda la masa del Sol el segundo elemento es el helio con el 29% y el 1 % corresponde a todos los restantes elementos

3. Un planeta del sistema solar debe satisfacer cuatro características fundamentales. ¿Cuáles son?

Sol.- - Debe estar en orbita alrededor del Sol. - No debe ser un satélite. - Debe tener suficiente masa como para poseer una gravedad propia que mantenga su forma redonda. - Debe ser lo suficientemente grande como para dominar su órbita.

4. ¿Cuál es el origen del campo magnético de la Tierra y de otros planetas?

Sol.- El origen del campo magnético es generado por el núcleo que actúa como un dínamo, que transforma la energía mecánica en corriente eléctrica, generadora del campo magnético.

PREGUNTAS CON DESARROLLO

1.- Si una enana blanca tiene el tamaño de la Tierra y la masa del Sol. Entonces ¿Cual es aproximadamente su densidad?

$$(r_{tierra} = 6,378 \times 10^6 [m] \quad M_{sol} = 1,98 \times 10^{30} [kg])$$

Sol.- El volumen de la Tierra, suponiendo que ésta es una esfera perfecta, es: $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (6,378 \times 10^6 [m])^3$

$$V = 3,459 \pi \times 10^{20} [m^3]$$

La masa del Sol contenida en un volumen de la Tierra correspondiente a una densidad de: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{1,98 \times 10^{30} [kg]}{3,459 \pi \times 10^{20} [m^3]}$

de donde: $\rho = 1,8 \times 10^9 [kg/m^3]$

2. Sabiendo que la velocidad de la luz es igual a la distancia recorrida entre el tiempo total transcurrido. Entonces ¿Cuantos minutos tarda la luz solar en llegar a la Tierra?. Tome el valor de la velocidad de la Luz $c = 299792458 [m/s]$ y la distancia de la Tierra - Sol es $d = 149.600.000.000 [m]$.

Sol.- De la relación: $c = \frac{d}{t}$ despejamos t: $t = \frac{d}{c} = \frac{149.600.000.000 [m]}{299792458 [m/s]} = 499,012 [s]$

Ahora convertimos los segundos a minutos: $t = 499,012 [s] \times \frac{1 [min]}{60 [s]} = 8,32 [min]$

3ª OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

Solución 1º de Secundaria

Parte Teórica

RESPONDE A LAS SIGUIENTES PREGUNTAS EN FORMA CLARA Y DETALLADA: (7,5 puntos c/u)

1. ¿Qué ocurre con los restos de una Supernova?

Sol.- Cuando una masa residual de la explosión de de $3 M_{sol}$ y además esta confinada en un diámetro de 10 a 30 [km], los restos de la supernova forman una estrella de neutrones.

2. ¿Como se clasifican a las estrellas? Clasifique a las estrellas de mayor a menor temperatura.

Sol.- La clasificación de las estrellas se basa en espectros.

Clase O: estrellas azules $T \approx (30 - 55) \times 10^3 [K]$

Clase B: estrellas blanco-azuladas $T \approx (12 - 30) \times 10^3 [K]$

Clase A: estrellas blancas $T \approx (8 - 12) \times 10^3 [K]$

Clase F: estrellas blanco-amarillentas. $T \approx (6 - 8) \times 10^3 [K]$

Clase G: estrellas amarillas $T \approx (5 - 6) \times 10^3 [K]$

Clase K: estrellas anaranjadas rojizas $T \approx (3500 - 5000) [K]$

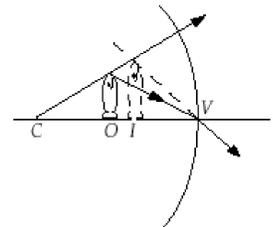
Clase M: estrellas rojas $T \approx (2500 - 3500) [K]$

3. ¿Qué es una magnitud estelar?

Sol.- La magnitud estelar, m, es la cantidad que nos permite cuantificar el flujo provenientes de las estrellas, y hace posible clasificar los flujos estelares.

4. Entre la 1^{ra} y 6^{ta} magnitud diga cual es la más brillante y la menos brillante según a la sensibilidad del ojo:

La 1^{ra} magnitud es la más brillante y la 6^{ta} magnitud es la menos brillante



ENCIERRE EN UN CÍRCULO, SI ES FALSO (F) Y SI ES VERDADERO (V):

- 1. Cuando el Sol se mueve lentamente en la Elíptica, haciendo un viaje completo en un año, lo cual significa que debe cruzar por la línea del ecuador celeste dos veces al año, estas dos ocasiones se llaman *solsticios* V **F**
- 2. La luminosidad L es equivalente a la potencia [$\text{Watt}=W$] que una determinada fuente emite al espacio, es decir, es la energía total emitida por unidad de tiempo en todas las direcciones. **V** F
- 3. Las estrellas circumpolares son aquellas que permanecen todo el tiempo visibles en la esfera celeste moviéndose, en el hemisferio sur terrestre, alrededor del Polo Norte Celeste V **F**
- 4. La unidad denominada *Ángstrom*, denotada por \AA y cuya equivalencia en centímetros es $=10^{-10}[m]$ V **F**
- 5. Los círculos de altura son círculos en la esfera celeste paralelos al horizonte. Son conocidos también como *almucantarantes* o paralelos de altura. **V** F
- 6. El sol y la Luna permanecen todo el tiempo en una misma constelación. V **F**
- 7. El ecuador celeste es el círculo máximo en el cual la prolongación del ecuador terrestre se interfecta con la esfera celeste. **V** F
- 8. El gran círculo de la Eclíptica tiene un cierto ángulo de 45° con respecto a la línea del ecuador. V **F**
- 9. Las constelaciones son grupos de estrellas que, al ser unidas por líneas imaginarias dan la impresión de formar figuras netamente geométricas. V **F**
- 10. La cantidad de estrellas que se ve a simple vista es de alrededor de 2000 a 2500 estrellas. **V** F

PREGUNTAS CON DESARROLLO:

1. Para expresar las magnitudes de los planetas del Sistema solar es útil, en algunos casos, hacer que las magnitudes de la Tierra funcionen como unidad de medida. Por ejemplo, podemos expresar la masa del planeta considerando que la masa de la Tierra es la unidad. ¿Cuál es la masa de Venus en masas -Tierra?. ($m_v = 4,87 \times 10^{24} [Kg]$)

Sol.- $m_{venus} = 4,87 \times 10^{24} [kg] \Rightarrow m_{venus} = 4,87 \times 10^{24} [kg] \frac{1 [masa - Tierra]}{5,90 \times 10^{24} [kg]}$ de donde:

$m_{venus} = 0,83 [masa - Tierra]$

2. Para una estrella de radio R y, en consecuencia, superficie $S = 4\pi R^2$, el flujo saliente de toda la superficie es: $\phi(R) = \frac{L}{S} = \frac{L}{4\pi R^2}$

Y si buscamos calcular el flujo a una cierta distancia r de la estrella, este será: $\phi(r) = \frac{L}{S} = \frac{L}{4\pi r^2}$

Entonces, con los datos constantes del flujo y la luminosidad total del Sol. ¿Cuál es la distancia entre la Tierra y el Sol?

($\phi = 1360 [W/m^2]$ y $L = (3,846 \pm 0,008) \times 10^{26} [W]$, constantes del Sol).

Sol.-

El flujo que emite el Sol hasta la Tierra esta dada por la ecuación: $\phi(r) = \frac{L}{S} = \frac{L}{4\pi r^2}$

Ahora si despejamos r que es la distancia Tierra-Sol tendremos: $r = \sqrt{\frac{L_{Sol}}{4\pi \phi_{Sol}}} = \sqrt{\frac{3,846 \times 10^{26} [W]}{4\pi 1360 [W/m^2]}}$, de donde: $r = 1,50 \times 10^{11}$

3º OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

Solución 2º de Secundaria

Parte Teórica

1. ¿Cómo se clasifican las galaxias? Descríbalas.

Sol.- Las galaxias espirales son las comunes. Tienen forma de discos achatados. Contienen algunas estrellas viejas y una gran cantidad de estrellas jóvenes. La Vía Láctea y Andrómeda son de ese tipo. Las galaxias elípticas tienen una estructura muy regular. Contienen una gran población de estrellas viejas y algunas nuevas en formación. Las galaxias irregulares tienen un tamaño muy inferior a las anteriores, parecen no haber desarrollado una estructura muy definida tienen muchas estrellas jóvenes y estrellas en formación. Las Nubes de Magallanes visibles desde el hemisferio Sur, son de este tipo.

2. ¿Cuál es la diferencia entre cúmulos abiertos y globulares?

Sol.- Los cúmulos abiertos son muy numerosos en el firmamento pero tienen pocas estrellas y estas son jóvenes en cambio los cúmulos globulares son más escasos y el número de estrellas que albergan son exorbitantes y son viejas se cree que estos cúmulos son los más viejos del universo.

3. ¿Qué es el núcleo galáctico y de qué está compuesto?

Sol.- El núcleo galáctico es la parte más interna de nuestra galaxia, de unos 1,5 a 1 kpc de diámetro, comprende una gran variedad de estructuras. En este núcleo existe una acumulación extraordinaria de estrellas con una distribución espacial achatada.

4. ¿Qué son los rayos cósmicos?

Sol.- Son partículas de energía muy alta, tanto electrones como núcleos, desde los protones hasta los núcleos de los elementos más pesados conocidos y están por toda nuestra galaxia.

5. ¿Qué es el paralaje?

Sol.- Designamos paralaje al ángulo bajo el cual, desde la estrella se vería el radio medio de la órbita terrestre, con la condición de que la dirección a la estrella sea perpendicular al radio.

ENCIERRE EN UN CÍRCULO, SI ES FALSO (F) o SI ES VERDADERO (V):

- | | | |
|---|----------|----------|
| 1. La formación de imágenes por medio de lentes se debe al fenómeno de reflexión. | V | F |
| 2. En las lentes, si la imagen se forma del mismo lado del objeto, es real; para verla se debe mirar a través de la lente. | V | F |
| 3. En el vacío, las ondas de luz de cualquier longitud de onda viajan a la misma velocidad c. Pero, dentro de un medio material, a medida que la longitud de onda aumenta la velocidad de la luz también aumenta. | V | F |
| 4. La elección de un mapa estelar viene determinada por la estación y la hora. | V | F |
| 5. Los rayos gamma son fotones muy energéticos de longitud de onda típica 0,1 . | V | F |
| 6. La amplitud es un extensión máxima, normalmente de una cantidad fluctuante, como el brillo Estelar ,con respecto a la media. | V | F |
| 7. Existen solo dos tipos de telescopios: los refractores y los reflectores. | V | F |
| 8. El telescopio nos proporciona un poder de resolución es decir nos permite separar dos objetos que parecen ser uno solo a simple vista. | V | F |
| 9. No existen nubes de materia interestelar absorbente, o sea que ocultan la luz de las estrellas situadas detrás. | V | F |
| 10. La nebulosa es una nube de gas, visible a simple vista o detectable mediante telescopios en la luz visible. | V | F |

PREGUNTAS DE DESARROLLO:

1. En 1838 el astrónomo Thomas Henderson logró determinar por el método de paralaje la distancia de la estrella Alfa Centauro. Si la paralaje heliocéntrica de Alfa Centauro es de 0,75 segundos de arco. ¿A que distancia se halla en años luz?

Sol.-

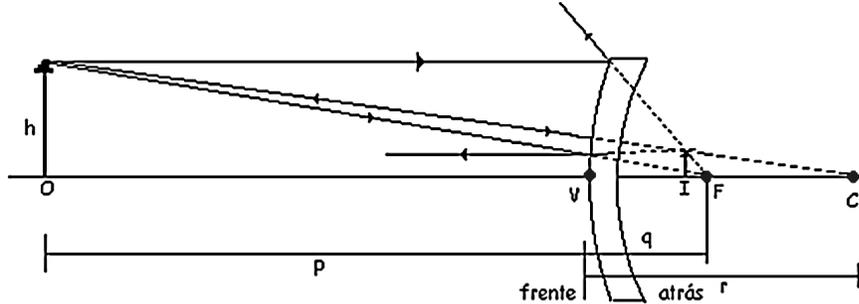
Convertimos 0,75 segundos de arco a radianes: $\alpha = 0,75 ["] \cdot \frac{1 [^\circ]}{3600 ["]} \cdot \frac{2\pi [rad]}{360 [^\circ]} = 6,636 \times 10^{-6} [rad]$

Entonces la distancia será: $d = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{6,636 \times 10^{-6} [rad]} = 275020,69 [ua]$

Convertimos las unidades astronómicas a años luz: $275020,69 [ua] \cdot \frac{150 \times 10^6 [km]}{1 [ua]} \cdot \frac{1 [al]}{9,46 \times 10^{12} [km]} = 4,3 [al]$

2. Un objeto de 2,5 [cm] de altura esta a una distancia de 8 [cm] de un espejo esférico convexo de 6 [cm] de radio. **a**) Realizar la grafica y analíticamente la posición de la imagen; **b**) indicar sus características.

Sol.-



a) Determinamos q mediante la ecuación de lentes, como el espejo es convexo, r es negativa.

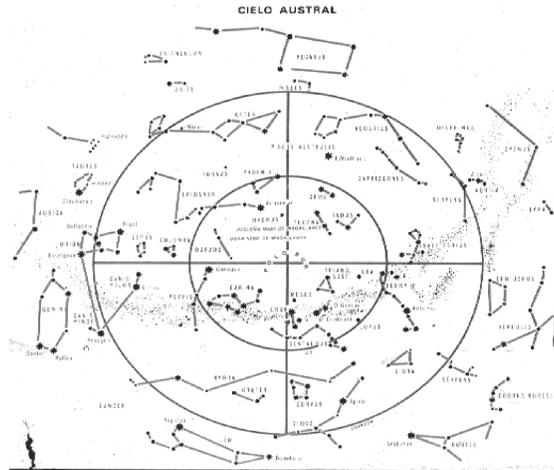
$$\frac{1}{8 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{2}{-6 \text{ cm}} \Rightarrow \frac{1}{q} = -\frac{2}{6 \text{ cm}} - \frac{1}{8} = -\frac{22 \text{ cm}}{48 \text{ cm}^2}$$

$$\Rightarrow q = -2,2 \text{ cm}$$

b) El aumento es: $M = -\frac{-2,2}{8 \text{ cm}} = 0,3$

La imagen es virtual, es decir, esta detrás del espejo (q es negativa), es derecha (M es positivo) y de menor tamaño que el objeto (el valor absoluto de M es menor que 1)

3. En el siguiente mapa estelar del Hemisferio Sur identificar la mayor cantidad de constelaciones:



3° OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
Solución 3° de Secundaria

Parte Teórica (40%)

1. Explicar las leyes de Kepler y la Ley de Gravitación Universal

Sol.- La primera ley de Kepler dice que todos los planetas describen orbitas elípticas teniendo al Sol en uno de los focos.

La segunda nos habla de que la línea que une a un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales y la tercera dice que el cuadrado del periodo de cualquier planeta en torno al Sol es proporcional al cubo de la distancia promedio del planeta al Sol.

La ley de la gravitación universal nos habla de que “la fuerza entre dos partículas que tienen masas m_1 y m_2 , y que están separadas por una

distancia r es una atracción que actúa a lo largo de la línea que las une y que tiene una magnitud dada por: $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

Donde G es una constante universal que tiene el mismo valor para todos los pares de partículas.

2. Explique la formación de las Estrellas

Sol.- Las estrellas se originan en nubes de gas interestelar. Por efecto de las fuerzas gravitacionales, las partículas se atraen y se van agrupando.

-En un proceso que puede durar millones de años, las partículas que se agrupan pueden alcanzar una cierta magnitud de masa (masa crítica) que determina que la materia empiece a comprimirse bajo la acción de la fuerza de gravedad.

- En este proceso conocido como colapso gravitacional, las partículas caen hacia el centro de la nube, su energía potencial se transforma en calor.

- La temperatura y la radiación de la nube van en aumento hasta que ésta se transforma en una protoestrella.

-Cuando los gases al interior de la protoestrella alcanzan unos 10 millones de grados Kelvin, el hidrogeno comienza a experimentar reacciones termonucleares que liberan energía en forma de radiación.

- Estas reacciones conducen a la formación de una Estrella.

3. Todo cuerpo que está cerca de la Tierra tiende a caer a la superficie de la Tierra por su propio peso entonces, ¿por qué la Luna que es un satélite por el que la Tierra no cae sobre la Tierra. Explique

Sol.- La Luna es el cuerpo celeste más cercano a la Tierra sin embargo este no cae sobre la Tierra porque la Luna gira en torno a nuestro planeta debido a la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ella. La existencia de esa fuerza se explica por la gravitación universal de Newton. La fuerza gravitacional con que la Tierra atrae a la Luna es la fuerza centrípeta responsable de que la trayectoria de la Luna sea una línea curva alrededor de la Tierra.

4. Explique, como se determina la posición de una estrella en el Diagrama de Hertzsprung-Russell.

Sol.- La posición de una estrella en el diagrama se determina por su fase de evolución, es decir, en distintos momentos de su historia una estrella ocupará una posición distinta en el diagrama HR. La posición de una estrella en la secuencia principal está determinada por su masa. En la secuencia principal, la masa de las estrellas aumenta de abajo para arriba.

5. ¿Una estrella que se encuentra en la secuencia principal está en una fase estable? ¿Si no? Justifique su respuesta.

Sol.- Sí, esta fase es estable en el sentido de que existe una cantidad enorme de “combustible” disponible, de forma que la estrella puede contrarrestarse durante tiempos muy largos la pérdida de energía a través de la superficie. Así pues, la estrella quedará casi completamente estacionaria en el diagrama de H-R.

ENCIERRE EN UN CÍRCULO SI ES FALSO F O SI ES VERDADERO V:

- | | | |
|---|---|---|
| 1. Las estrellas de la secuencia principal se ubican en una diagonal que va desde la parte superior izquierda donde están las estrellas más frías y poco luminosas, hasta la parte derecha inferior, que corresponde a las estrellas más calientes y luminosas. | V | F |
| 2. Una protoestrella con menos del 10% de la masa del Sol no genera suficiente presión ni temperatura en su interior para producir las reacciones termonucleares necesarias para convertirse en una estrella | V | F |
| 3. Existe, pues, un equilibrio dinámico y, de manera continua, se forman estrellas a partir de inhomogeneidades de nubes de gas y polvo que existen en lo que se conoce como medio interestelar. | V | F |

- 4. Si una estrella se aleja del observador el color dominante del espectro visible es el azul. V F
- 5. Para dar seguimiento a un astro con un telescopio en tierra es conveniente poner el eje de rotación del telescopio paralela al polo terrestre V F
- 6. En un eclipse de Sol la Luna se torna de un color rojizo. V F
- 7. El paralaje es producido por el movimiento rotacional de la Tierra, haciendo que una estrella se encuentra inclinada de su posición original. V F
- 8. Un método para determinar la distancia hacia una estrella es utilizando a las estrellas llamadas Cefeidas por periodo de oscilación que tienen en su luminosidad. V F
- 9. En el sistema solar existe solo una estrella del cual podemos estudiar la composición química, tan solo analizando la luz que emite ésta. V F

PREGUNTAS DE DESARROLLO:

1. La Luz solar tarda 8,33 minutos en llegar a la Tierra y 43.3 minutos en alcanzar Júpiter.

- a) ¿Cuál es el periodo de rotación de Júpiter alrededor del Sol?
- b) Calcule la masa del Sol

Ayuda: ($G=6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ cte. de gravitación, $r=1,50 \times 10^{11} \text{ m}$ radio de la tierra al Sol)

Sol.-

a) Por la tercera ley de Kepler se tiene: $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$

Donde T_1, T_2 son, respectivamente, los periodos de rotación de la Tierra y de Júpiter; y r_1 y r_2 son los correspondientes

radios de las orbitas, considerándolas circulares, Entonces, $T_2 = \sqrt{\frac{r_1^3}{r_2^3}} T_1$

Para calcular los radios r_1 y r_2 : $c = \frac{r}{t}$, entonces: $\frac{r_2}{r_1} = \frac{c t_2}{c t_1} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{41,6 \text{ min}}{8,33 \text{ min}} = 4,99$

y como periodo de rotación de la tierra es un año ($T_1 = 1 \text{ año}$), entonces: $T_2 = 11.2 \text{ años}$

b) Considerando la órbita circular, la fuerza centrípeta es la fuerza gravitacional: $m \omega^2 r = G \frac{M m}{r^2}$ (1)

Donde M es la masa del Sol, m es la masa de un planeta, r es el radio de la órbita, ω es la velocidad angular del planeta, y G es la constante de gravitación universal.

La velocidad angular en el caso de la Tierra tenemos que:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi \text{ rad}}{T_{\text{tierra}}} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) y despejando M la masa de Sol:

$$M = \frac{(2\pi)^2 r^3}{T^2 G} \quad \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $M = 2,01 \times 10^{32} \text{ Kg}$$$

Para el caso de la Tierra, $T = 1 \text{ año} = 3,15 \times 10^6 \text{ s}$; $r = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$. de donde finalmente:

2. La velocidad lineal de un punto ubicado sobre el Ecuador terrestre es de 465[m/s]. ¿Cuál es la velocidad de un punto situado sobre un paralelo de latitud 30° Norte? El radio del ecuador terrestre es de $6,37 \times 10^6 \text{ [m]}$. En trigonometría, la longitud del ecuador (L_E) y la longitud de un paralelo (L_P) de ángulo θ se relacionen mediante la expresión: $L_E = L_P \sec \theta$.

Sol.-

Ambos puntos tienen la misma velocidad angular. La velocidad angular del punto situado sobre el ecuador es:

$$\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \omega = \frac{465 \text{ [m/s]}}{6,37 \times 10^6 \text{ [m]}} = 7,300 \times 10^{-5} \text{ [rad/s]}$$

La longitud de la línea del ecuador es: $L_E = 2\pi r \Rightarrow L_E = 4,002 \times 10^7 \text{ [m]}$. Por lo tanto, la longitud del paralelo de latitud 30° Norte es:

$$L_E = L_P \sec \theta \Rightarrow L_P = \frac{L_E}{\sec \theta} = \frac{4,002 \times 10^7 \text{ [m]}}{\sec 30^\circ} \approx 3,466 \times 10^7 \text{ [m]}$$

A esta longitud corresponde un radio de: $r = \frac{L_P}{2\pi} = 5,516 \times 10^6 \text{ [m]}$. Por lo tanto, la velocidad lineal en el paralelo de latitud 30° Norte es:

$$v = \omega r = 7,300 \times 10^{-5} \text{ [rad/s]} \cdot 5,516 \times 10^6 \text{ [m]}, \quad \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $v = 403 \text{ [m/s]}$$$

3. A que distancia de la Tierra puede estar una sonda espacial a lo largo de una línea recta dirigida hacia el Sol de modo que la atracción gravitatoria del Sol equilibre a la de la Tierra (Ayuda: $M_{\text{tierra}} = 5,97 \times 10^{24} \text{ [kg]}$; $M_{\text{Sol}} = 1,99 \times 10^{30} \text{ [kg]}$; $d_{\text{tierra-sol}} = 1,50 \times 10^{11} \text{ [m]}$).

Sol.-

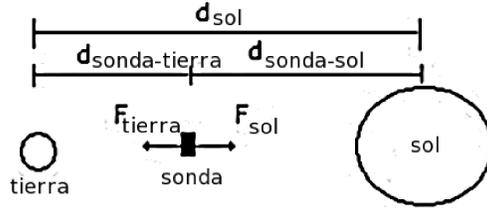
La fuerza gravitacional de la Tierra y del Sol será respectivamente:

$$F_{tierra} = \frac{M_{tierra} m_{sonda}}{d_{tierra-sonda}^2} \qquad F_{sol} = \frac{M_{sol} m_{sonda}}{d_{sol-sonda}^2}$$

Por la condición de equilibrio tenemos: $F_{sol} - F_{tierra} = 0$, por lo tanto:

$$\frac{M_{sol} m_{sonda}}{d_{sol-sonda}^2} = \frac{M_{tierra} m_{sonda}}{d_{tierra-sonda}^2}$$

$$\frac{M_{sol}}{d_{sol-sonda}^2} = \frac{M_{tierra}}{d_{tierra-sonda}^2}$$



De la gráfica, la distancia tierra-sol es:

$$d_{tierra-sol} = d_{sol-sonda} + d_{tierra-sonda} \text{ y}$$

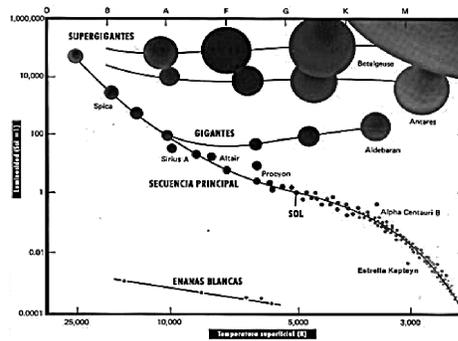
$$\frac{M_{sol}}{(d_{tierra-sol} - d_{tierra-sonda})^2} = \frac{M_{tierra}}{d_{tierra-sonda}^2} \text{ , de donde: } \left(\frac{M_{sol}}{M_{tierra}} \right) d_{tierra-sonda}^2 + 2 d_{tierra-sonda} d_{tierra-sol} - d_{tierra-sol}^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado obtendremos la distancia tierra a sonda espacial:

$$d_{tierra-sonda} = \sqrt{\frac{M_{tierra}}{M_{sol}}} d_{tierra-sol} \text{ ,}$$

$$d_{tierra-sonda} = 2,6 \times 10^8 [m]$$

4. En el siguiente Diagrama de Hertzsprung-Russell identifique: a los ejes de coordenados y sus unidades; la secuencia principal; a las estrellas super gigantes, gigantes, enanas blancas y al Sol; el color los tipos de estrellas O, B, A, F, G, K, M.



REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Dr. Diego Sanjinés Castedo

Email: sanjines@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Dr. Eduardo Palenque Vidaurre

Email: edyruy@latinmail.com

Carrera de Física

Lic. Deterlino Urzagasti

Email: urza@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

Objetivos

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica anualmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

La RBF publica artículos, revisiones y colaboraciones en lengua castellana. Se reciben también artículos escritos en inglés, los que son traducidos al castellano por los editores para su publicación.

Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

Instrucciones para los autores

Los trabajos enviados para su publicación deberán estar escritos preferentemente en castellano. Trabajos escritos en inglés podrán ser aceptados por el Comité Editorial y, pasado el proceso de aceptación serán traducidos al castellano para su publicación en la RBF.

Los autores deberán enviar sus trabajos preferentemente en los formatos \LaTeX 2\epsilon , *MS Word*, o *sólo texto* (con extensiones *.tex*, *.doc* y *.txt*, respectivamente), ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. En cualquier caso, las figuras deberán ser enviadas preferentemente en formato *postscript* (extensiones *.ps* o *.eps*).

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.