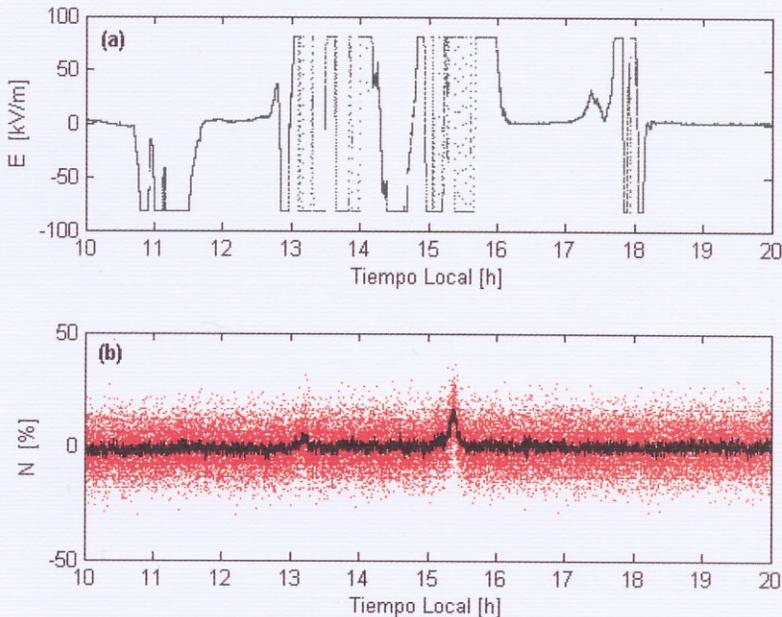


ISSN 1562-3823

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 17 OCTUBRE 2010 • LA PAZ • BOLIVIA



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

Ésta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Dr. Diego Sanjinés Castedo
Email: sanjines@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez
Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Dr. Eduardo Palenque Vidaurre
Email: edyruy@latinmail.com

Carrera de Física

Lic. Deterlino Urzagasti
Email: urza@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

CONSEJO EDITORIAL

Dr. Oscar Antonio Rondón

Institute of Nuclear and Particle Physics
University of Virginia
McCormick Road, Charlottesville, VA 22901
804 924-6787, USA
Email: or@virginia.edu

Dr. Juan C. Muzzio

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
Universidad Nacional de La Plata
La Plata-Argentina
Email: jmuzzio@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar

Dr. Oscar Saavedra

Dipartimento di Fisica Generale
Universita di Torino, Italia
Email: saavedra@to.infn.it

Dr. Jason Gallas

Instituto de Física
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil
Email: jgallas@if.ufrgs.br

Dr. Carlos Navia

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense
Av. Gen. Milton Tavares de Souza
24210-340, Niterói, RJ-Brasil
Email: gfcnoj@portela.if.uff.br

Dr. David Laroze

Max Planck Institute for Polymer Research
POBox 3148
D55021 Mainz, Alemania
Email: laroze@mpip-mainz.mpg.de

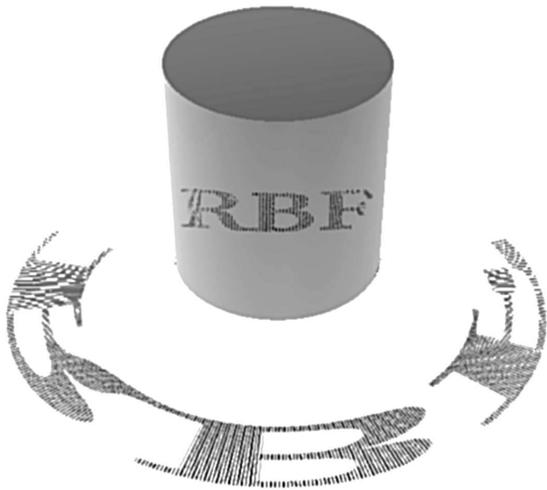
Dr. Jorge Carvano

Observatorio Nacional CNPq
Rua General Bruce 586
20921-400 Rio de Janeiro-Brasil
Email: carvano@on.br

Dr. Ramiro de La Reza

Observatorio Nacional CNPq
Rua General Bruce 586
20921-400 Rio de Janeiro-Brasil
e-mail: delareza@danp6.on.br

ISSN 1562-3823



Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
Y
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 17
OCTUBRE DE 2010

Revista Boliviana de Física

ISSN 1562-3823

Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica

<http://biblioweb.dgsca.unam.mx/latindex>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

Diseño: D. Urzagasti.

Dirección: Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.
Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

Portada: Posible correlación entre el campo eléctrico atmosférico y el registro de rayos cósmicos, registrada el 13 de Noviembre de 2008 en el Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya.

Formato $\text{L}^{\text{T}}\text{E}^{\text{X}}2_{\epsilon}$. *Tipo de fuente utilizada:* newcentury

IMPRESO EN BOLIVIA — PRINTED IN BOLIVIA

CONTENIDO

A. ARTÍCULOS

CONDICIONES DE SINCRONIZACIÓN EN DOS PÉNDULOS ACOPLADOS	<i>A. R. Ticona Bustillos & G. M. Ramírez Ávila</i>	1
MEDIDAS DE ALBEDO EN UV-B EN EL SALAR DE UYUNI	<i>Francesco Zaratti et al.</i>	8
EFFECTO DEL CAMPO ELÉCTRICO ATMOSFÉRICO SOBRE EL CONTEO DE PARTÍCULAS CARGADAS DETECTADAS POR UN CENTELLADOR EN EL LABORATORIO DE FÍSICA CÓSMICA DE CHACALTAYA	<i>Winkelmann R.</i>	13
KINKS Y SOLITONES EN LA ECUACIÓN DE GINZBURG-LANDAU CÚBICA-QUÍNTICA REAL	<i>D. Urzagasti</i>	21

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

POST-COMPRESIÓN DE PULSOS CON DIFERENTES PERFILES TEMPORALES	<i>F. Flores & J. San Román</i>	29
ESCENARIOS DE CAMBIO CLIMÁTICO EN EL SUR DEL DEPARTAMENTO DE LA PAZ: PATACAMAYA Y CALACOTO	<i>Andrés W. Burgoa Mariaca</i>	35
SUCESIÓN GENERALIZADA DE FIBONACCI APLICADA A CIRCUITOS TIPO ESCALERA	<i>Diego Sanjinés C.</i>	41

D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

DISEÑO DE UNA ZAMPOÑA CON TUBOS DE VIDRIO	<i>M. F. Sánchez Barrero, F. Ghezzi</i>	47
5 ^{ta} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA	<i>Bustos R. et al.</i>	53

CONDICIONES DE SINCRONIZACIÓN EN DOS PÉNDULOS ACOPLADOS SYNCHRONIZATION CONDITIONS OF TWO COUPLED PENDULA

A. R. TICONA BUSTILLOS¹ & G. M. RAMÍREZ ÁVILA^{1,2}

¹Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés
Casilla 8635, La Paz, Bolivia

² AG Nichtlineare Dynamik (S) / Kardiovaskuläre Physik
Institut für Physik
Humboldt-Universität zu Berlin, Robert-Koch-Platz 4, 10115 Berlin, Alemania
(Recibido 5 de febrero de 2010; aceptado 7 de marzo de 2010)

RESUMEN

Con base en un modelo discreto de péndulo amortiguado, se estudian las condiciones de sincronización para dos péndulos acoplados, variando las características propias de los péndulos, así como las condiciones de acoplamiento. Se encuentran las cuencas de atracción para diferentes situaciones en las que se fijan los parámetros de control. Variando los valores de los parámetros de control (longitud, masa y coeficiente de disipación), se encuentran diagramas de fase relacionados con las condiciones iniciales de uno de los péndulos, mediante los cuales es posible identificar regiones de sincronización. Se hace énfasis en la sincronización 1:1 aunque sincronizaciones de otros órdenes son también posibles.

Descriptores: sistemas dinámicos no-lineales — sincronización — osciladores acoplados

Código(s) PACS: 05.45._a, 05.45.Xt

ABSTRACT

Based on a damped pendulum discrete model, we studied the synchronization conditions for two coupled pendula, varying both the pendulas features and coupling conditions. We found the basis for attraction in several situations in which the control parameters were fixed. Varying the control parameters (length, mass and damping coefficient), we found phase diagrams related to the initial conditions of one of the pendula; in these diagrams we identified synchronization regions. We emphasize the synchronization with a winding number $\rho \approx 1$ (synchronization 1:1); nevertheless, other synchronization orders are possible ($\rho \neq 1$).

Subject headings: dynamical systems (non-linear) — synchronization — coupled oscillators

1. INTRODUCCIÓN

El fenómeno de sincronización es muy común en la naturaleza y muchos sistemas de diversa índole exhiben este comportamiento (Strogatz 2003; Rosenblum & Pikovsky 2003), destacándose entre ellos los sistemas biológicos (Glass 2001), las reacciones químicas (Shabunin et al. 2003; Fukuda et al. 2005), los circuitos electrónicos (Kittel et al. 1998; Ramírez Ávila et al. 2003), los láseres (Roy & Thornburg 1994; López-Gutiérrez et al. 2009) y por supuesto, los péndulos (Huygens 1986; Smith et al. 2003) que desde el punto de vista histórico, constituye el primer sistema en el cual se observó sincronización (Huygens 1673); los péndulos, a pesar de ser sistemas en apariencia simples siguen concitando la atención y son sujetos de investigación tanto desde el punto de vista teórico como experimental (Baker & Blackburn 2009).

En este trabajo, nos abocamos a encontrar las condiciones de sincronización para dos péndulos acoplados. Se sabe que para sistemas no lineales disipativos, es posible la existencia de más de un atrac-

tor, por lo que diferentes condiciones iniciales pueden evolucionar hacia cualquiera de los atractores coexistentes; así, el conjunto de condiciones iniciales que se aproxima a un atractor, es llamado la *cuenca de atracción* de este atractor (Kapitaniak & Bishop 1999). En §2 se describe el modelo utilizado para estudiar el sistema de dos péndulos acoplados con disipación, en la primera parte de §3 se muestran diferentes cuencas de atracción del sistema que nos dan una idea de cómo obtener condiciones de sincronización; posteriormente, se muestran las regiones de sincronización, que pueden asociarse a las llamadas lenguas de Arnold (en el sentido de que representan regiones de sincronización de una manera similar a la utilizada en (Pikovsky et al. 2001; Ramírez Ávila 2004)¹) para diferentes situaciones en las que los parámetros varían. Se darán finalmente en §4 las conclusiones y las perspectivas de este trabajo.

¹ Estas regiones de sincronización se diferencian de las lenguas de Arnold, en el sentido que en lugar de representarlas en un plano intensidad de acoplamiento vs. frecuencia, son representaciones en el plano parámetro de control vs. condiciones iniciales.

2. MODELO

Al igual que en (Ticona Bustillos & Ramírez Ávila 2008), utilizamos el modelo discretizado de péndulo

y lo adaptamos para la situación en la cual se tienen dos péndulos acoplados con disipación, cuyas ecuaciones están dadas por:

$$\begin{aligned} l\theta_{t+1}^{(1)} &= \theta_t^{(1)} + b^{(1)} \left(\theta_t^{(1)} - \theta_{t-1}^{(1)} - K^{(1)} \text{sen } \theta_t^{(1)} \right) + \frac{w}{m^{(1)}} \text{sen } \theta_t^{(2)} \\ \theta_{t+1}^{(2)} &= \theta_t^{(2)} + b^{(2)} \left(\theta_t^{(2)} - \theta_{t-1}^{(2)} - K^{(2)} \text{sen } \theta_t^{(2)} \right) + \frac{w}{m^{(2)}} \text{sen } \theta_t^{(1)}, \end{aligned} \quad (1)$$

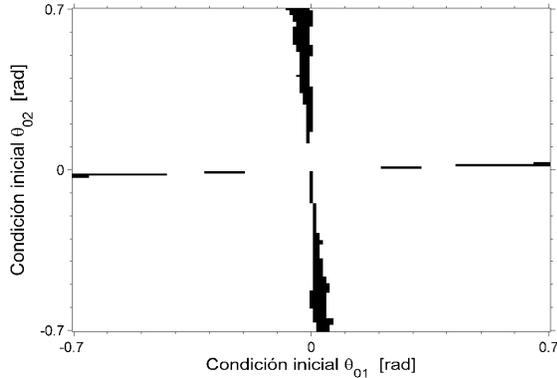


FIG. 1.— Cuenca de atracción para identificar las regiones de sincronización 1:1 (regiones oscuras) cuando la relación de longitud de los péndulos acoplados es $l_2 = 2l_1$ con $\rho = 1.0000 \pm 0.0020$. Se observa una simetría en la región de sincronización que nos lleva a interpretar que la sincronización 1:1 es favorecida cuando las condiciones iniciales son bastante diferentes.

donde los superíndices 1 y 2 identifican a cada uno de los péndulos acoplados² y w representa las condiciones de acoplamiento, la cual contiene a la distancia de separación entre los péndulos y a la rigidez del material usado para acoplar los mismos; además:

$$b^{(i)} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^{(i)}}{m^{(i)}} \Delta t} \quad \text{y} \quad K^{(i)} = \frac{g \Delta t^2}{l^{(i)}}, \quad (2)$$

con $i = 1, 2$.

Este modelo fue comparado con valores experimentales en (Ticona Bustillos & Ramírez Ávila 2008), dando muy buenos resultados, con lo que pudimos estudiar las principales características de transmisión de movimiento en función de las características del sistema. Además, se pudo verificar la fuerte dependencia de este sistema con las condiciones iniciales y algunas características de sincronización, las cuales estudiamos con más detalle a continuación.

3. RESULTADOS

Primeramente, se determinaron las cuencas de atracción para posibles situaciones en las cuales se pueden controlar ciertos parámetros, como la masa de la lenteja y la longitud del péndulo, la disipación

² Por razones de comodidad en la notación, se utilizará a lo largo del artículo $m_i = m^{(i)}$ y $l_i = l^{(i)}$.

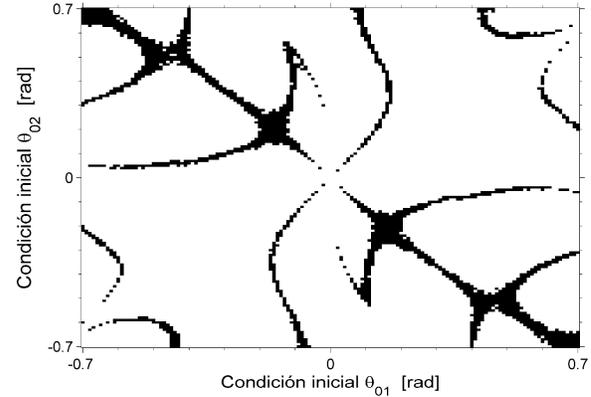


FIG. 2.— Cuenca de atracción delimitando las situaciones en las que $\rho = 1.0000 \pm 0.0001$ (región oscura), cuando se considera que las masas de las lentejas de los péndulos son de 0.050 kg y 1.000 kg respectivamente. La sincronización 1:1 es favorecida cuando las condiciones iniciales de ambos péndulos tienen valores similares y con el mismo signo (extremos inferior izquierdo y superior derecho), tienen valores similares con diferente signo (región casi rectilínea con pendiente aproximada de -1) o tienen valores diferentes pero con el mismo signo y con la particularidad que uno de los péndulos debe tener una condición inicial no muy lejana a cero (el resto de las regiones de sincronización).

y el factor de acoplamiento. Para el trabajo numérico, se utilizó el valor de la aceleración debida a la gravedad en La Paz: $g = 9.775 \text{ m/s}^2$; este valor ya fue utilizado en (Ticona Bustillos & Ramírez Ávila 2008), para comparar los resultados con medidas experimentales, las cuales fueron realizadas en esta ciudad.

Analizamos el comportamiento de la relación $\rho = T_2/T_1 = 1$ de los períodos de los péndulos, variando las condiciones iniciales de los mismos. Esta consideración, nos permite identificar las condiciones iniciales para las cuales es posible la sincronización 1:1 entre los péndulos. Tomamos condiciones iniciales desde -0.7 hasta 0.7 rad. Nuestro primer estudio (Figs. 1-2) implica el establecimiento de las regiones de sincronización 1:1 (regiones oscuras) de las que no siguen esta relación (regiones claras), utilizando los siguientes valores para el factor resultante de disipación y el factor de acoplamiento: $b^{(1)} = b^{(2)} = 0.9999$ y $w = 1 \times 10^{-6}$ respectivamente. Cada punto mostrado en estas figuras corresponde a un promedio de ρ obtenido sobre las 50 últimas oscilaciones consideradas en las simulaciones para cada péndulo.

En la Fig. 1 mostramos un caso en el cual ambos

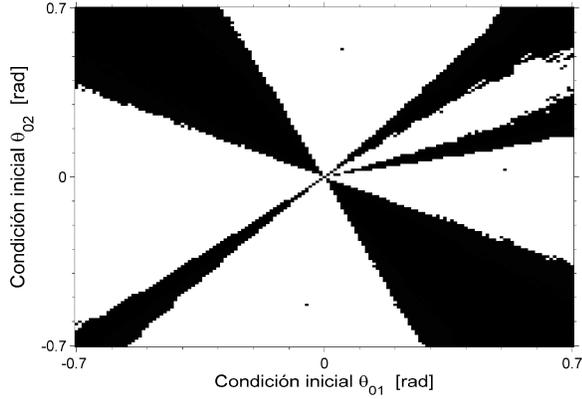


FIG. 3.— Cuenca de atracción cuando $l_1 = l_2 = 1.00$ m y $m_1 = m_2 = 0.050$ kg, fijando $b^{(1)} = b^{(2)} = 0.999$ con $\rho = 1.0000 \pm 0.0004$ en las regiones de sincronización, las cuales presentan cierta simetría en el sentido que los péndulos deben tener condiciones iniciales de signo contrario cuando los ángulos iniciales son pequeños. Es notable también el ensanchamiento de las regiones de sincronización a medida que se consideran condiciones iniciales mayores. Se observa finalmente la aparición de una nueva región de sincronización no simétrica para valores pequeños del ángulo inicial del péndulo 2.

péndulos tienen una masa de 0.0500 kg y los largos son de 1.00 m y 2.00 m, respectivamente. Los puntos nos muestran los valores obtenidos para ρ a partir de las diferentes condiciones iniciales, donde hacemos la distinción entre las regiones en las cuales se presenta la sincronización 1:1 (oscura) de las que no presentan esta característica (clara). Podemos observar que la región en forma de cruz corresponde a las condiciones de sincronización 1:1 ya que se obtienen valores de ρ muy cercanos a la unidad. Es interesante observar la simetría en la Fig. 1, lo que nos indica por una parte que el conjunto de condiciones iniciales que nos llevan a $\rho \approx 1$ es bastante reducido y por otra parte que para obtener esta situación, las condiciones iniciales de ambos péndulos deben ser muy próximas a cero o en su defecto, uno de los péndulos debe tener una condición inicial cercana a cero y el otro un ángulo inicial considerable, situación que da lugar a que la región de sincronización 1:1 se ensanche. Esto último implica que es más fácil alcanzar una sincronización 1:1 entre los péndulos cuando uno de ellos empieza en el reposo relativo ($\theta_0 = 0$) y el otro con una amplitud grande.

Para los resultados de la Fig. 2 el largo de ambos péndulos es de 1.00 m y las masas son de 0.050 kg y 1.000 kg respectivamente. En este caso, se observa que también existe una simetría en las regiones de sincronización 1:1, donde se pueden resaltar tres aspectos interesantes, a saber: (i) Los extremos inferior izquierdo y superior derecho presentan una simetría que implica que las condiciones iniciales de ambos péndulos deben tener valores similares y del mismo signo. (ii) La región rectilínea de pendiente negativa muestra que los péndulos deben comenzar cada uno en extremos opuestos para favorecer la sincronización 1:1. (iii) Las otras regiones de sincronización muestran que los valores de las condiciones iniciales pueden ser bastante diferentes pero deben tener el mismo signo y además uno de los péndulos

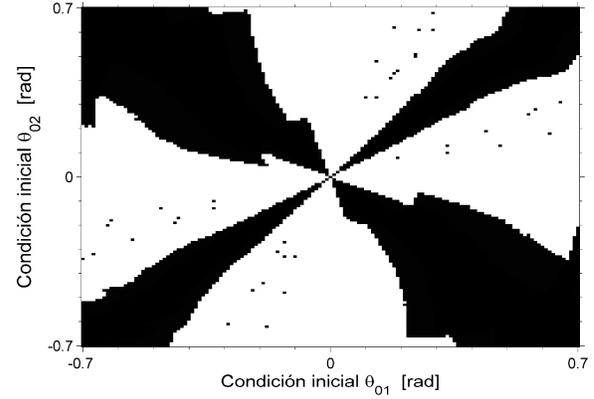


FIG. 4.— Cuenca de atracción para longitudes y masas iguales para los péndulos, con $b^{(1)} = b^{(2)} = 0.9999$, cuando se considera un factor de acoplamiento $w = 5 \times 10^{-6}$. Las regiones de sincronización oscuras corresponden al valor $\rho = 1.0000 \pm 0.0021$. Existe una simetría entre estas regiones y se nota que la densidad de las mismas es mayor que en los anteriores casos.

debe comenzar con un ángulo pequeño no muy alejado de cero.

En las Figs. 3 y 4 utilizamos valores iguales para los largos y las masas de ambos péndulos ($l_1 = l_2$ y $m_1 = m_2$), fijando el valor de $b^{(1)} = b^{(2)} = 0.999$. En la Fig. 3, la densidad de regiones de sincronización 1:1 es mayor, resaltando las regiones en las cuales los ángulos iniciales deben ser pequeños para ambos péndulos y de diferente signo (parte central), notándose luego un ensanchamiento considerable a medida que los ángulos iniciales son mayores; se observa también la aparición de nuevas regiones de sincronización no simétricas como la que aparece en la parte central y derecha de la Fig. 3, en la cual, ambos ángulos iniciales tienen valores positivos pero el del péndulo 2 puede permanecer cercano a cero, en tanto que el del péndulo 1 puede crecer linealmente.

Finalmente, en la Fig. 4 fijamos el factor de acoplamiento en $w = 5 \times 10^{-6}$. La distribución de las regiones de sincronización es parecida a la de la Fig. 3 pero estas regiones se ensanchan, lo que nos lleva a pensar que gracias al mayor acoplamiento entre los péndulos, la sincronización 1:1 se ve favorecida. Nuevamente, la lógica de condiciones iniciales de la misma magnitud pero de signos contrarios son las que llevan a la sincronización 1:1; sin embargo, como se señaló anteriormente, existe un aumento notorio de estas regiones con una tendencia a ocupar gran parte del plano θ_{02} vs. θ_{01} . También se pueden observar manchas difusas representando regiones de sincronización 1:1 lo que muestra una vez más la tendencia que tienen las regiones de sincronización a hacerse más extensas, máxime si el factor de acoplamiento aumenta su valor.

A continuación, se estudian la sincronización cuando se hacen variar un parámetro de control y las condiciones iniciales del segundo péndulo, fijando los valores del primer péndulo en: $m_1 = 0.050$ kg y $l_1 = 1.00$ m, siendo la condición inicial del primer péndulo en todos los casos $\theta_{01} = 0.5$ rad. De esta manera, se obtienen las regiones que guardan similitud con las lenguas de Arnold como se mencionó anteriormente,

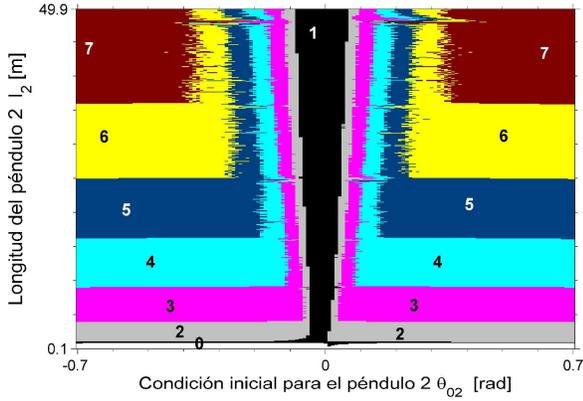


FIG. 5.— (Color online) Plano de fases l_2 vs. θ_{02} para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a $\rho = 1.0000 \pm 0.0289$ (región oscura identificada con 1), cuando $m_1 = m_2 = 0.050$ kg. Las otras regiones que se identifican con 0, 2-7 corresponden a zonas en las que se pueden encontrar otros órdenes de sincronización con $\rho = (0,1)$, $\rho = (1,2)$, \dots , $\rho = (6,7)$. Es claro que en estos intervalos, $\rho \in P^+$ por lo que no sólo existen regiones de sincronización sino también cuasi-periodicidades y caos.

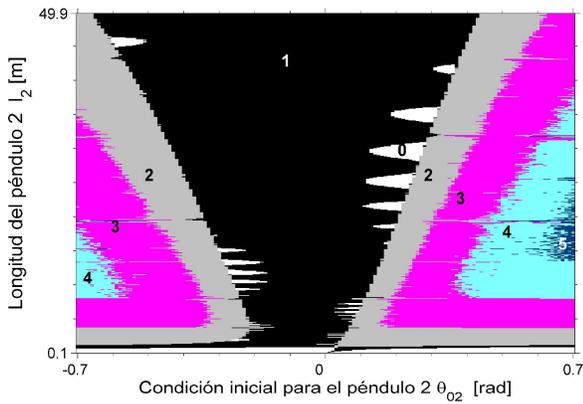


FIG. 6.— (Color online) Plano de fases l_2 vs. θ_{02} para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a $\rho = 1.0000 \pm 0.0201$ (región oscura identificada con 1), cuando $m_1 = 5m_2 = 0.050$ kg. Las regiones identificadas con los números 0, 2, 3, 4 y 5 corresponden a regiones en las cuales $\rho = (0,1)$, $\rho = (1,2)$, $\rho = (2,3)$, $\rho = (3,4)$ y $\rho = (4,5)$ respectivamente. Se nota el desplazamiento del eje de simetría hacia la izquierda ($\theta_{02} < 0$), lo que repercute en el hecho que la región 5 sólo se presente en la parte derecha del plano. Las regiones blancas en forma de “dedos” al interior de la lengua de Arnold es posible que sean el resultado de los errores del cálculo numérico pues si se considera un intervalo ligeramente mayor para el valor de ρ de la lengua de Arnold, estas desaparecen.

por lo que se utilizará en lo sucesivo esta terminología.

En primer lugar tomamos en cuenta la variación del largo del segundo péndulo, consideramos valores desde 0.10 m hasta 50.00 m, la masa de la lenteja de este péndulo es mantenida en 0.050 kg. En las Figs. 5-11, se muestran las regiones equivalentes a las lenguas de Arnold, donde nos concentramos en la región con $\rho \approx 1$, aunque, otras regiones con otros órdenes de sincronización pueden estar también presentes. En la Fig. 5, se muestra el diagrama de fase l_2 vs. θ_{02} , en el cual aparece claramente la lengua de Arnold con $\rho \approx 1$ (región oscura identificada con el número

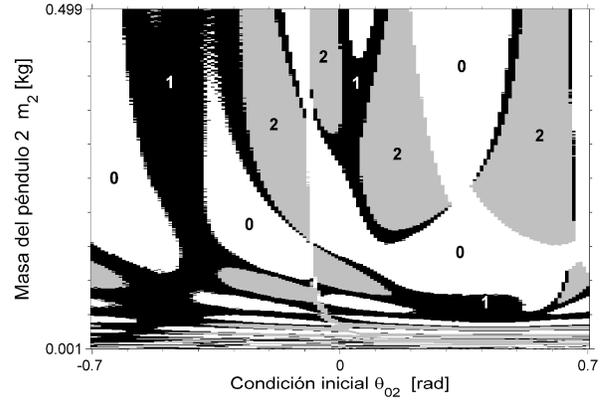


FIG. 7.— Plano de fases m_2 vs. θ_{02} para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a $\rho = 1.0000 \pm 0.0005$ (región oscura identificada con 1), cuando $l_1 = l_2 = 1.00$ m. Se evidencia la presencia de regiones para $\rho = (0,1)$ y $\rho = (1,2)$, (regiones identificadas con 0 y 2) aunque muchas de las regiones, sobre todo las identificadas con 0, en realidad pueden ser consideradas como parte de la lengua de Arnold $\rho \approx 1$ puesto que la precisión numérica es mayor a la que se puede obtener experimentalmente.

1). Además, se identifican regiones en las que ρ toma valores comprendidos en los intervalos $(0,1)$, $(1,2)$, \dots , $(6,7)$ que se identifican con los números 0, 2, \dots , 7 respectivamente. Es interesante notar que estas regiones, en general, están bien definidas y son simétricas respecto de la situación en la cual $\theta_{02} = 0$.

Modificando el valor del coeficiente de disipación, no se notan cambios apreciables, pero cambiando el valor de la masa del segundo péndulo, por ejemplo a 0.010 kg, constatamos que la lengua de Arnold para $\rho \approx 1$ es más extensa que en el caso de masas iguales de las lentejas de ambos péndulos, como se puede observar en la Fig. 6. Además, se constata que la simetría existente en el caso anterior (Fig. 5) se rompe y se podría pensar que el eje de simetría ya no pasa por $\theta_{02} = 0$, sino que está desplazado a la izquierda del plano ($\theta_{02} < 0$). Como en el anterior caso, se identifican otras regiones en las cuales $\rho = (0,1)$, $\rho = (1,2)$, \dots , $\rho = (4,5)$, identificando las mismas con los números 0, 2, \dots , 5 respectivamente, siendo ρ real y positivo lo que puede dar lugar a regiones en las cuales el comportamiento de los péndulos es periódico, cuasi-periódico o caótico. Un aspecto interesante es la aparición de regiones claras al interior de la lengua de Arnold; en principio, esto significaría que regiones con $\rho < 1$ rompen la simetría de la lengua de Arnold: Sin embargo, estas regiones en particular si bien poseen $\rho < 1$, este valor es muy cercano a 1 por lo que se podría pensar que los errores propios del cálculo numérico hacen que no se consideren estas regiones en el intervalo elegido para ρ . Otro aspecto a resaltar es la aparición de una pequeña región $\rho = (4,5)$ sólo en la parte derecha del plano; esto se justifica fácilmente por el hecho de la ruptura de simetría referida líneas arriba.

Ahora, fijando $l_1 = l_2 = 1.00$ m y variando el valor de m_2 , podemos observar en la Fig. 7 que la lengua de Arnold para $\rho \approx 1$ ya no tiene una estructura sencilla como era el caso en las Figs. 5-6 y ocupa varias regiones del plano, el cual contiene también regiones

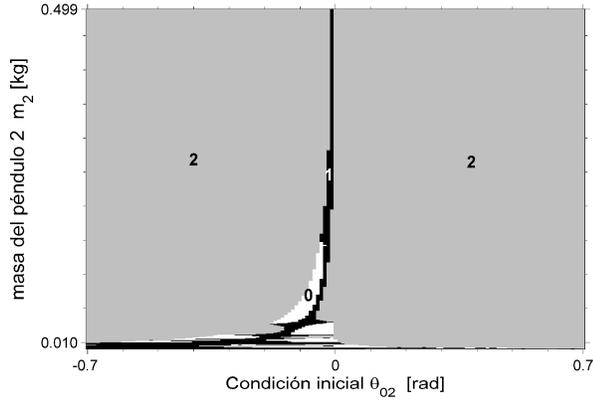


FIG. 8.— Plano de fases m_2 vs. θ_{02} para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a $\rho = 1.0000 \pm 0.0006$ (región oscura identificada con 1), cuando $l_2 = 2l_1 = 2.00$ m. También existen regiones en las cuales, $\rho = (0,1)$ y $\rho = (1,2)$, (regiones identificadas con 0 y 2), pero al igual que en los anteriores casos, $\rho = (0,1)$ puede ser absorbida por la región de sincronización 1:1.

con $\rho = (0,1)$ y $\rho = (1,2)$. Nuevamente, nuestros resultados son conservadores en cuanto a la región de sincronización 1:1 puesto que la precisión numérica que se considera supera la precisión que se podría tener en las mediciones experimentales, por lo que es posible que las regiones de sincronización 1:1 ocupen una extensión mayor en el plano de fases m_2 vs. θ_{02} . Por otra parte, es interesante notar que en la zona en la cual $m_2 \approx m_1$, se tiene una tendencia a que la región de sincronización esté presente casi para todos los valores de θ_{02} , lo que en cierta manera confirma los resultados obtenidos en la Fig. 3.

En cambio si $l_2 = 2l_1 = 2.00$ m, la lengua de Arnold en el plano m_2 vs. θ_{02} es muy pequeña, como se ve en la Fig. 8. Es claro que la mayor parte del plano corresponde a valores $\rho = (1,2)$ por lo que en estas regiones bien podrían haber sincronizaciones de otros órdenes, cuasi-periodicidades o caos. Se observa también que cuando $m_2 \rightarrow m_1$, las únicas condiciones iniciales θ_{02} que preservan la sincronización 1:1 son aquellas en las que $\theta_{02} \rightarrow 0$, en concordancia con los resultados de la Fig. 1. Los anteriores resultados indican que tanto la masa de la lenteja como la longitud del péndulo juegan papeles importantes en la sincronización de los dos péndulos acoplados.

De igual manera podemos analizar la sincronización en función del factor de acoplamiento. En la Fig. 9 se nota que para valores pequeños del factor de acoplamiento, existe sincronización casi para todas las condiciones iniciales, en cambio para valores grandes de dicho factor, la sincronización parece desaparecer dando lugar a una “granularidad” en la que se tienen valores de $\rho = (0,2)$. En la Fig. 9, se consideraron masas de las lentejas de los péndulos iguales pero no las longitudes de los mismos; sin embargo, el comportamiento cuando se tiene $l_1 = l_2$ no se modifica sustancialmente.

Finalmente, si variamos el valor del coeficiente de disipación $\lambda = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$ tenemos que para péndulos con las mismas características ($l_1 = l_2$ y $m_1 = m_2$), la región de sincronización 1:1, abarca casi todo el

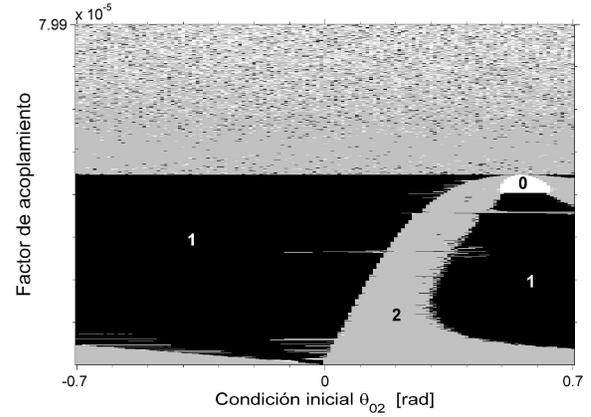


FIG. 9.— Plano de fases w vs. θ_{02} para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a $\rho = 1.0000 \pm 0.0248$ (región oscura identificada con 1), cuando $l_2 = 2l_1 = 2.00$ m y $m_1 = m_2 = 0.050$ kg. La región de sincronización 1:1 está bien definida para valores $w \approx 5 \times 10^{-6}$; para valores mayores, ya no se encuentra una región bien definida para la sincronización 1:1 y se tiene una especie de “granularidad” con valores para ρ comprendidos en el intervalo (0,2).

plano de fases, como se puede observar en la Fig. 10. Regiones con $\rho = (0,1)$ y $\rho = (1,2)$ están también presentes en el plano pero al igual que en los anteriores casos, las regiones con $\rho = (0,1)$, en general pueden ser absorbidas por las regiones de sincronización 1:1, lo que aumentaría aún más la densidad de regiones con $\rho \approx 1$. Otro aspecto interesante es el referido a los valores elevados de λ , para los cuales, la sincronización se pierde; esto está en relación con el hecho de que cuando la disipación es muy grande, los péndulos tienden a volver a su situación de reposo relativo y las medidas de comportamiento sincrónico de los péndulos ya no es posible hacerlas con un transientes adecuado.

En cambio si las longitudes de los péndulos son diferentes, la región de sincronización 1:1 se reduce drásticamente, como se puede observar en la Fig. 11. Trabajando con $\rho = 1.0000 \pm 0.0013$ se observa que la lengua cerca de la parte central contiene regiones blancas y grises que en principio significan valores de $\rho = (0,1)$ y $\rho = (1,2)$ respectivamente; sin embargo, si se considera $\rho = 1.0000 \pm 0.0097$, estas regiones desaparecen de la lengua, la cual queda bien definida y además, la región correspondiente a valores elevados del coeficiente de disipación considerados en el plano, pasa a ser considerada como región de sincronización 1:1. En este último caso, se puede pensar también que el hecho de trabajar con valores elevados del factor de disipación λ , no permite cuantificar adecuadamente las oscilaciones tal como se explicó para la Fig. 10. El hecho que la región de sincronización 1:1 sea relativamente pequeña concuerda con los anteriores resultados para situaciones en las que $l_1 \neq l_2$ (Figs. 1 y 8), en las cuales se tiene la misma situación; sin embargo, no se debe olvidar los resultados mostrados en las Figs. 5 y 6 en las cuales, el intervalo de condiciones iniciales θ_{02} que conducen a la sincronización 1:1 crece con la longitud l_2 .

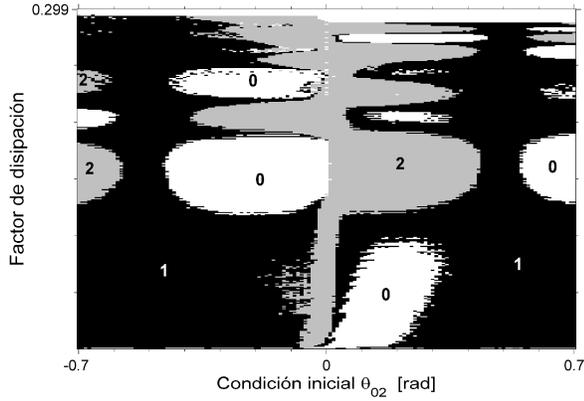


FIG. 10.— Plano de fases λ vs. θ_{02} para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a $\rho = 1.0000 \pm 0.0006$ (región oscura identificada con 1), cuando $l_2 = l_1 = 1.00$ m y $m_1 = m_2 = 0.050$ kg. Otras regiones con $\rho = (0,1)$ y $\rho = (1,2)$ aparecen pero es notable la predominancia de la región de sincronización 1:1. En la parte superior del plano (valores elevados de λ), existe una región en la que $\rho \approx (0.96,1)$

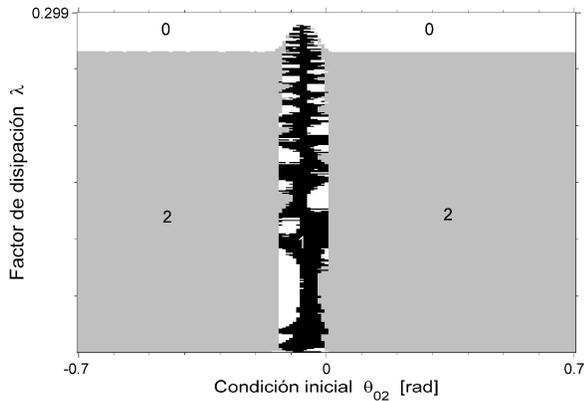


FIG. 11.— Plano de fases λ vs. θ_{02} para el cual se muestra la lengua de Arnold correspondiente a $\rho = 1.0000 \pm 0.0013$ (región oscura identificada con 1), cuando las longitudes de los péndulos son diferentes: $l_2 = 2l_1 = 2.00$ m y $m_1 = m_2 = 0.050$ kg. Las regiones blancas y grises que aparecen sobre la lengua, así como la región blanca en la parte superior, son regiones con $\rho \approx 1$ pero con menor precisión de la establecida al principio; por lo que se espera que sean parte de la lengua con sincronización 1:1.

4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se determinaron las cuencas de atracción para varios valores de parámetros, pudiéndose observar que las mismas presentan diferentes formas según el valor que toman los parámetros. Nos concentramos en

las condiciones iniciales de los péndulos para las que puede existir sincronización 1:1.

Se han identificado las regiones de sincronización para varias condiciones de los péndulos, en función a las condiciones iniciales del péndulo 2. Si bien nos abocamos a la determinación de la sincronización de orden 1:1, es claro que existen otros órdenes de sincronización. Además, como se tienen valores de $\rho \subset P^+$, pueden existir también comportamientos cuasi periódicos y caóticos.

Se puede observar que la longitud y la masa de los péndulos ejercen una gran influencia en la sincronización.

Se ve claramente en todos los casos estudiados, la importancia de la precisión numérica con la que se trabaja y su relación con la exactitud que se puede lograr en mediciones experimentales.

A partir de estos resultados, podemos analizar cuasi periodicidades, diagramas de bifurcación, rutas hacia el caos, en las regiones donde no existe sincronización.

Evidentemente, este modelo es susceptible a ampliarse a más de dos péndulos lo que constituye la continuación natural de esta investigación.

Una parte importante de nuestra investigación es trabajar tanto con mediciones experimentales como con modelos que justamente son validados por estas mediciones. Si bien, por el momento se tienen concordancias importantes entre los resultados experimentales con los obtenidos a partir del modelo, no se descarta para el futuro considerar el sistema de ecuaciones diferenciales para describir el sistema de péndulos acoplados.

Finalmente, se pretende que este tipo de trabajos pueda a posteriori encontrar su aplicación también en aspectos académicos y didácticos, tal como ocurrió con la primera parte de nuestra investigación con péndulos (Ticona Bustillos & Ramírez Ávila 2010).

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos los valiosos comentarios de los árbitros de la revista, gracias a los cuales pudimos expresar con mayor claridad las ideas de este trabajo. GMRA agradece al Deutscher Akademischer Austausch Dienst (DAAD) por la beca de investigación otorgada.

REFERENCIAS

- Bai, E.-W., Lonngren, K. E., & Sprott, J. C. 2002, *Chaos, Solitons & Fractals*, 13, 1515
- Baker, J. L. & Blackburn, J. L. 2009, *The Pendulum: A Case Study in Physics* (Oxford: Oxford University Press)
- Fukuda, H., Morimura, H., & Kai, S. 2005, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 205, 80
- Glass, L. 2001, *Nature*, 410, 277
- Grosu, I. 2003, Master-slave synchronization and control of chaotic Sprott circuit (11th International IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Scuol/Schuls, Switzerland)
- Huygens, C. 1673, *Horologium Oscillatorium* (Paris: Apud F. Muguet)
- . 1986, *The pendulum clock or geometrical demonstrations concerning the motion of pendula as applied to clocks* (Iowa: Ames, Iowa : Iowa State University Press)
- Kapitaniak, T. & Bishop, S. R. 1999, *The Illustrated Dictionary of Nonlinear Dynamics and Chaos* Chichester (John Wiley & Sons, Inc.)
- Kittel, A., Parisi, J., & Pyragas, K. 1998, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 112, 459
- Li, Y.-N., Chen, L., Cai, Z.-S., & Zhao, X.-Z. 2004, *Chaos, Solitons & Fractals*, 22, 767
- López-Gutiérrez, R. M., Posadas-Castillo, C., López-Mancilla, D., & Cruz-Hernández, C. 2009, *Chaos, Solitons & Fractals*, 42, 277
- Ramírez Ávila, G. M. 2004, *Synchronization phenomena in light-controlled oscillators* (PhD thesis)

- Ramírez Ávila, G. M., Guisset, J. L., & Deneubourg, J. L. 2003, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 182, 254
- Ticona Bustillos, A. R. & Ramírez Ávila, G. M. 2008, *Revista Boliviana de Física*, 14, 121
- . 2010, *Revista Boliviana de Física*, 16, 41
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., & Kurths, J. 2001, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, vol 12 (New York: Cambridge University Press)
- Rosenblum, M. & Pikovsky, A. 2003, *Contemporary Physics*, 44, 401
- Roy, R. & Thornburg, K. S. J. 1994, *Physical Review Letters*, 72, 2009
- Shabunin, A., Astakhov, V., Demidov, V., Provata, A., Baras, F., Nicolis, G., & Anishchenko, V. 2003, *Chaos, Solitons & Fractals*, 15, 395
- Smith, H. J. T., Blackburn, J. A., & Baker, G. L. 2003, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13, 7
- Strogatz, S. H. 2003, *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order* (New York: Hyperion Press)
- Sugawara, T., Tachikawa, M., Tsukamoto, T., & Shimizu, T. 1994, *Physical Review Letters*, 72, 3502

MEDIDAS DE ALBEDO EN UV-B EN EL SALAR DE UYUNI ALBEDO'S MEASUREMENTS IN UV-B AT UYUNI'S SALT LAKE (BOLIVIA)

FRANCESCO ZARATTI[†], RICARDO FORNO, GONZALO GUTIÉRREZ,
ROGER APAZA & FERNANDO VELARDE

Laboratorio de Física de la Atmósfera

Instituto de Investigaciones Físicas, FCPN, UMSA

(Recibido el 28 de julio de 2010; aceptado el 11 de agosto de 2010)

RESUMEN

Se reportan los resultados finales del proyecto bianual, centrado en dos campañas de medición de la Radiación Ultravioleta (RUV) en el Salar de Uyuni: la primera en mayo de 2008 y la otra en noviembre de 2008. Los datos recogidos en ambas campañas y el análisis respectivo han permitido llegar a importantes resultados en los dos objetivos principales del proyecto: medida del albedo superficial en la banda UV y cuantificación del alcance del mismo en la región circundante al Salar. En el primer objetivo, se han encontrado indicios sólidos de que el albedo depende no sólo de la estación del año, como se podría esperar debido al régimen de lluvias localizado en los meses de enero a marzo, sino también de los cambios climáticos que se están dando en la región, lo que podría conllevar una disminución del albedo, señal del “ensuciamiento” del Salar. Adicionalmente se ha medido el alcance de los efectos de albedo en el Salar, pero el análisis no muestra aún resultados concluyentes.

Descriptores: radiación UV — procesos radiativos — radiación solar (albedo)

Código(s) PACS: 61.80.Ba, 92.60.Vb

ABSTRACT

We report the final results of a biannual project concerning two measurement campaigns of ultraviolet radiation (RUV) at Uyuni Salt Lake: in May and November 2008. The gathered data and their respective analysis resulted in important findings relating to the projects principle objectives: the measurement of superficial albedo of the UV band and the quantification of the extent of albedo in the area surrounding the Uyuni salt lake. In the first case we found that the albedo depends not only on the time of year, such as, the rainy season between January and March but also on climate change effects in the region which could lead to a decrease in albedo, a sign of the salt lakes environmental contamination in particular from anthropogenic activities. In addition we measured the extent of the albedo effect in the salt lake and surrounding area however the analysis of these results has so far given inconclusive findings.

Subject headings: UV radiation — radiative processes — solar radiation (albedo)

1. ANTECEDENTES

El año 2004 se realizó una campaña, junto a colegas de la Universidad e Munich en el Salar de Uyuni para medir el albedo “plano” en UV y realizar mediciones de la irradiancia solar en la banda UV. Si bien esa campaña resultó exitosa en cuanto se pudo medir el albedo y la irradiancia UV en diferentes sitios del Salar, quedaron algunas preguntas abiertas que el presente trabajo intenta responder. En especial nos interesaba conocer el alcance que tiene el albedo UV del Salar en su entorno, o sea hasta dónde afecta a la irradiancia total el cambio de albedo UV del suelo, con la mirada puesta en la problemática del cambio de uso de suelo.

El desarrollo, dificultades y resultados de la

I campaña en el Salar (mayo de 2008), han sido reportadas en el artículo “Resultados preliminares del proyecto: *Medidas de albedo en el Salar de Uyuni*” presentado en noviembre de 2009. A partir de los resultados de esa campaña, en el presente artículo analizaremos los datos colectados en la II campaña (noviembre de 2008).

2. OBJETIVOS

El proyecto fue planificado para un período de dos años, mediante dos campañas, una exploratoria y otra final. La campaña exploratoria, realizada en mayo de 2008, tenía el objetivo de medir el albedo del Salar en diferentes lugares, diferentes por su distancia a la orilla o por las características de la superficie (Zaratti et al. 2008).

La hipótesis para verificar era que la superficie del Salar no es homogénea y le corresponde más de un

[†]Email: fzaratti@fiumsa.edu.bo



FIG. 1.— Arreglo experimental utilizado para medir el albedo. El sistema permite la variación de altura entre los domos y el suelo y, además, permite calibrar la horizontalidad.

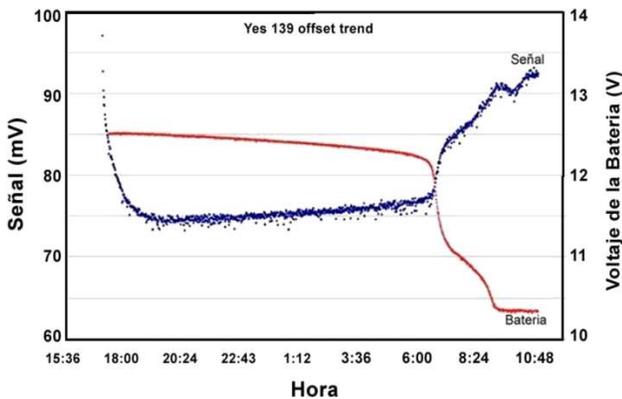


FIG. 2.— La imagen muestra la dependencia del valor del offset del radiómetro YES_139 con el valor del voltaje proporcionado por la batería de alimentación en un experimento realizado en laboratorio.

valor de albedo. Asimismo, se asume que el albedo depende de la época del año, razón por la cual se planeó repetir la campaña en noviembre, aplicando las lecciones aprendidas.

El otro objetivo del proyecto era medir la irradiancia en función de la distancia a la orilla, suponiendo que, a medida que nos adentramos en el Salar la irradiancia aumenta y a medida que nos alejamos hacia el altiplano la irradiancia disminuye. La pregunta interesante es: ¿a qué distancia de la orilla se deja de percibir el efecto de borde?

3. PLANIFICACIÓN DE LA CAMPAÑA

En la campaña de noviembre de 2008 participaron dos investigadores, un tesista y un técnico y en ella se realizaron varias innovaciones, como consecuencia de los resultados de la campaña de mayo.

La lección principal aprendida en la campaña de mayo fue la dificultad de realizar mediciones alimentando los equipos con baterías. En un primer momento se optó por usar baterías de motos, por su fácil manejo y recarga, pero los resultados no fueron buenos, debido al elevado consumo de carga de los equipos durante las más de seis horas de trabajo dentro

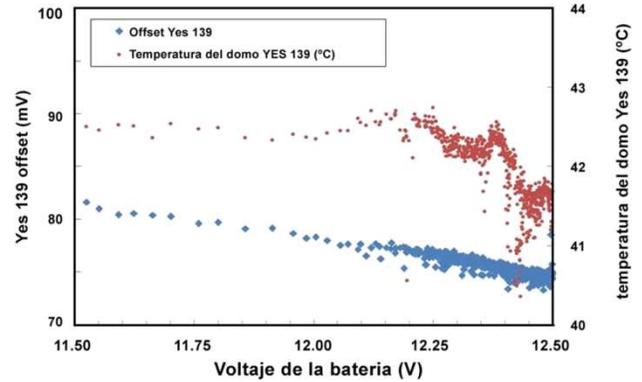


FIG. 3.— Variación del Offset y de la temperatura del domo del instrumento YES 139 con el valor del voltaje de la batería.

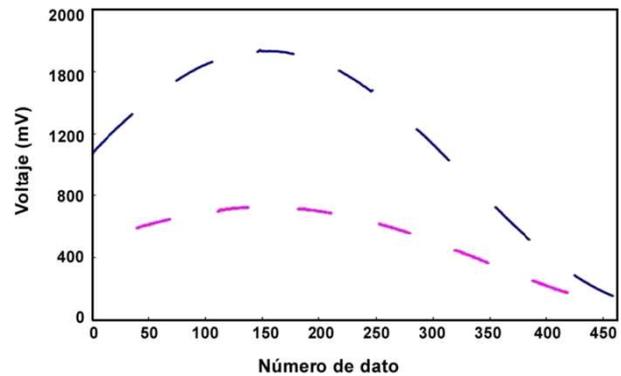


FIG. 4.— Datos originales (en milivoltios) tomados por el instrumento YES 139 conectado a un datalogger Campbell que tenía un divisor de voltaje para evitar saturaciones. La curva superior es la irradiancia medida con el domo mirando al cenit, la inferior mirando al nadir.

del Salar, sin posibilidad de recarga. Las consecuencias principales se manifestaban en variaciones de los valores del offset de los radiómetros, en función del voltaje de las baterías.

El equipo instrumental consistía de dos radiómetros de radiación ultravioleta YES UVB-1. Se trata de dos radiómetros de banda ancha (280-320 nm) fabricados por *Yankee Environmental System Inc.* que miden la radiación solar global UV-B. Usan filtros de vidrio colorado y fósforo UV-B que convierte la radiación UV-B en luz verde, la cual es medida por fotodetectores de estado sólido. Sus principales características de operación son (*Yankee Environmental System (YES) 1997*): respuesta espectral característica (*Diffey simulada*), respuesta de coseno $\pm 5\%$ (para $0^\circ < \text{SZA} < 60^\circ$), tiempo de respuesta ± 0.1 s y temperatura de operación entre -40°C y $+40^\circ\text{C}$.

El primero de los radiómetros funciona en el LFA desde el año 1998 (YES 138) y otro ha sido recientemente adquirido (llamado YES 139). Asimismo se contó con dos dataloggers Campbell CR-200 que fueron adecuados para funcionar con los radiómetros y dos GPS para registrar la posición de los sitios de medición.

Un aspecto preocupante era el desgaste que presentaba el YES 138 después de más de 10 años de operación casi continua y en ambientes extremos,

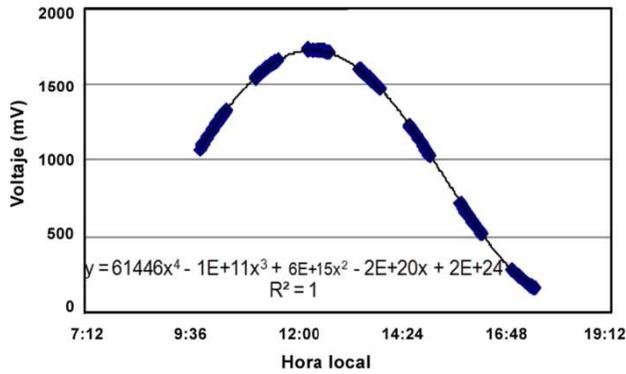


FIG. 5.— Curva de irradiancia UVB, representada en mV, del YES 139 con el domo mirando al cenit (día 17/11/08) interpolada con un polinomio de cuarto grado.

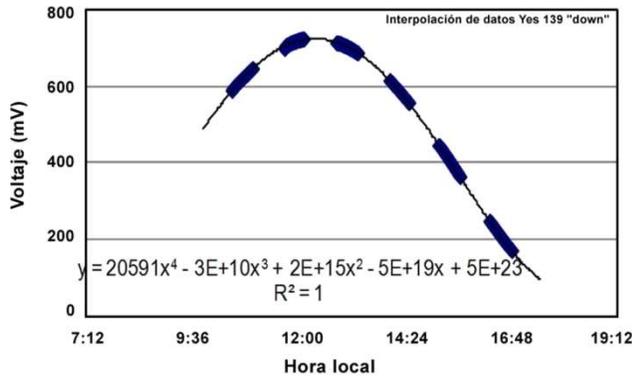


FIG. 6.— El equivalente de la Fig. 5 con el domo mirando hacia abajo (día 17/11/08).

como Chacaltaya. Por esa razón se planificó realizar medidas “en paralelo” de los dos radiómetros, en el sentido que cada instrumento tomara datos independientemente del otro, como se explicará más adelante.

4. REALIZACIÓN DE LA CAMPAÑA

Las medidas de la segunda campaña se realizaron durante cinco días, del 15 al 19 de noviembre, con el apoyo logístico de una agencia de turismo local. Los cinco días fueron despejados, registrándose la insolación máxima anual, debido al paso del sol por el cenit de esa localidad. La rutina diaria fue ajustada a los resultados del día y a la emergencia de algunos problemas que se presentaron con las medidas.

En efecto, los primeros dos días se realizaron medidas de albedo en el mismo sitio de las medidas de albedo de la anterior campaña ($20^{\circ} 27' 41''$ S, $67^{\circ} 15' 24''$ W, 3670 msnm), esto es, casi en el centro del Salar, pero con los dos radiómetros en posición fija (uno mirando al zenit y el otro al nadir), utilizando el mismo arreglo experimental ya probado durante la campaña de mayo (ver Fig. 1).

El tercer día, debido a algunas dificultades de intercalibración bajo condiciones térmicas y eléctricas diferentes, como se explicará más adelante, se repitieron las medidas alternando la posición de los radiómetros cada 20 minutos.

El día martes 18 se realizó el cruce del Salar midiendo la irradiancia RUV mediante uno de los

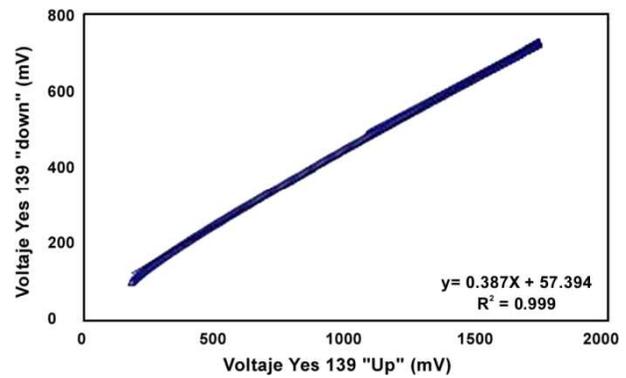


FIG. 7.— Valor del albedo UVB, medido mediante comparación de las curvas de irradiancia con domo mirando hacia arriba (eje abscisas) y hacia abajo (eje ordenadas) para el día 17/11/08. Los valores, en mV, representan la mitad del valor real.

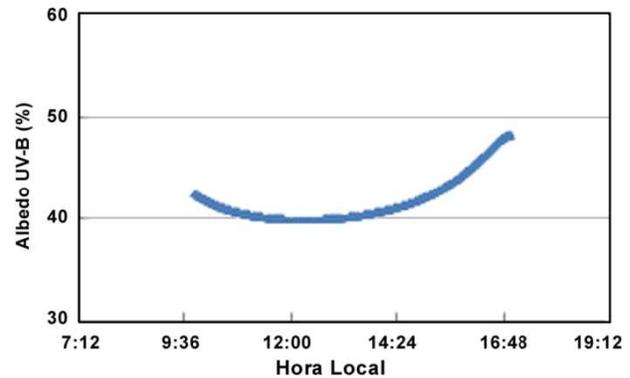


FIG. 8.— Curva del albedo UVB instantáneo del YES 139 (día 17/11/09).

radiómetros en sitios distantes unos 15 km entre sí, a medida que nos adentrábamos en el Salar hasta el centro del mismo. Luego, a la vuelta, se repitieron las medidas hasta unos 10 km desde la orilla en el altiplano. El segundo radiómetro se quedó midiendo en un lugar fijo (el Hotel de Sal a unos 6 km de la orilla), como referencia.

Finalmente, el día miércoles 19 se realizó una medida de absorción sobre superficies con diferente inclinación.

Cabe añadir que, en cada sitio donde se realizaron medidas, se tomaron muestras de la superficie de sal para ser analizadas posteriormente.

5. RESULTADOS DE LAS MEDIDAS DE ALBEDO

Con base a las lecciones aprendidas de la primera campaña, se puso particular atención a los problemas del offset (y de corriente oscura) de cada instrumento.

En efecto, el estudio realizado en el LFA ha mostrado la dependencia del offset del voltaje de la batería, siendo estable entre 12 y 12.5 V, condiciones que no siempre se puede mantener cuando se trabaja en el campo.

Asimismo se puso en evidencia un transitorio en el tiempo de estabilización de la temperatura del sensor de aproximadamente 20 minutos, lo que invalidaba algunos datos que se tomaron durante ese tiempo, después de conectar los instrumentos a la batería (ver Figs. 2 y 3).

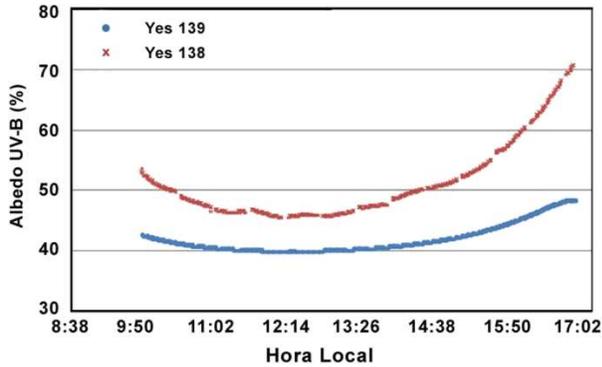


FIG. 9.— Variación temporal del albedo medido en la campaña de mayo de 2008. Es evidente el desgaste del instrumento YES 138.

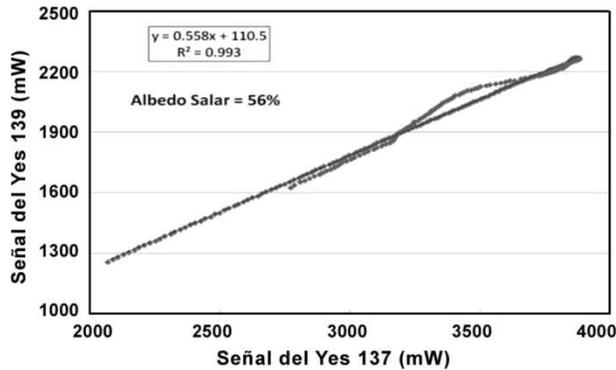


FIG. 10.— Intercomparación de las señales de los domos YES 139 (en dirección al nadir) y YES 137 (en dirección al cenit) durante la campaña de mayo 2008. La pendiente de la recta de regresión nos muestra el albedo del lugar.

En particular, se llegó a la conclusión de que era preferible utilizar medidas de cada instrumento por separado (como se hizo el día 17) que intentar corregir y recalculer los datos con radiómetros en posición fija (datos de los días anteriores). Por tanto, sobre la base de los datos originales, mostrados en la Fig. 4, se procedió a reconstruir, por interpolación las curvas con el domo arriba y con el domo abajo.

Para simplificar el cálculo se normalizaron los datos de ambas series, se hizo un ajuste de curva de cuarto grado, lo más apropiado en torno al mediodía, se interpolaron las curvas y se volvió a los datos en mV. Las figuras siguientes muestran el resultado final.

Una vez obtenidas las curvas anteriores, sin necesidad de mayores ajustes, tratándose del mismo instrumento, se calculó el valor del albedo en UV con diferentes métodos. El primero consiste en graficar las dos curvas una contra la otra y deducir, de la pendiente, el valor del albedo A. De ese modo, se halla el valor: $A = 0.387 \pm 0.001$ (Fig. 7).

Si se obligara a la recta de ajuste a pasar por el origen, lo que parece lógico tratándose de un mismo instrumento, el valor del albedo resultaría: $A' = 43\%$.

El otro método consiste en calcular el valor instantáneo del albedo, para cada dato, y luego calcular el valor medio. La Fig. 8 muestra los valores del albedo “instantáneo” medidos.

En el intervalo temporal 10am – 4pm, las horas

TABLA 1
VALORES DEL ALBEDO MEDIDOS EN LAS TRES CAMPAÑAS REALIZADAS POR EL LFA-UMSA.

Fecha	Albedo medido
mayo 2005	69%
mayo 2008	56%
noviembre 2008	39%

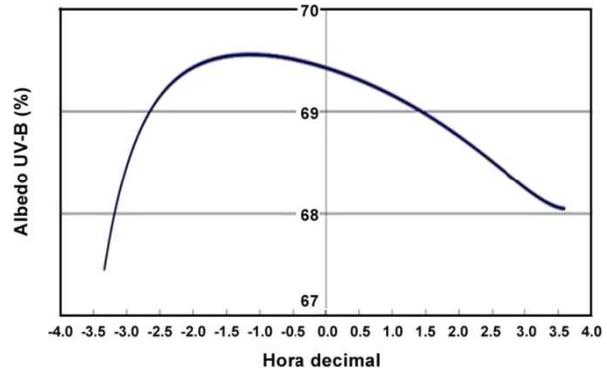


FIG. 11.— Variación temporal del albedo medido en la campaña de mayo de 2005 en torno al medio día (cero en las abscisas). La asimetría cenital es despreciable.

centrales del día, el albedo resulta $A'' = 41.0\% \pm 1.2\%$. En resumen, el albedo medido con el radiómetro YES 139 está entre 39 y 41 %.

Cuando analizamos los datos del YES 138, tomados al mismo tiempo que los del YES 139 pero en sentido invertido, obtenemos los valores respectivos:

$A = 39\% (R^2 = 1)$.

$A' = 47.6\% (R^2 = 0.92)$ entre 10am y 4pm.

$A'' = (49 \pm 3)\%$ entre 10am y 4 pm.

Las significativas diferencias en el albedo instantáneo del YES 138, se deben posiblemente a variaciones de valores del offset con la temperatura y el voltaje de la batería a lo largo del día, pero es importante recordar, además, que el YES 138 se ha demostrado muy poco confiable, debido a su largo tiempo de vida (10 años). Una prueba de esta afirmación es la curva temporal del albedo del YES 138, comparada con la equivalente del YES 139 (Fig. 9).

6. DISCUSIÓN DE LAS MEDIDAS DE ALBEDO

Como se mencionó en la sección 4, en mayo y en noviembre de 2008 las medidas de albedo se realizaron en el mismo sitio, localizado con los GPS y con señales dejadas en el lugar. La Fig. 10 muestra el resultado obtenido con dos radiómetros, el 137 y el 139, en esa campaña.

Además se cuenta con las medidas de albedo realizadas, con otra clase de radiómetro (Scie-tech), en mayo del año 2005 (Reuter et al. 2007). Por tanto, podemos intentar una comparación somera entre las tres medidas, de acuerdo a la Tabla 1:

La Tabla 1 nos muestra dos fenómenos. Por un lado no debería sorprender que el albedo en noviembre sea inferior al albedo en mayo, por la simple razón que en mayo el Salar resiente todavía de la época de lluvias, mientras en noviembre la superficie viene de soportar más de seis meses de sequía y vientos

que suelen transportar polvo y tierra hacia el Salar desde el Altiplano. Desde luego, el exacto valor de esa disminución del albedo dependerá de las particularidades de la estación de lluvias primero y de vientos después. En efecto, cuando se analizan cortes de la costra del Salar es posible reconocer diferencias en la acumulación de tierra en el subsuelo del Salar, dependientes del clima.

Más interesante es la disminución de un 20% del albedo en el mes de mayo a distancia de tres años. Si bien se trata de instrumentos diferente, y por tanto con una diferente respuesta coseno y espectral, es posible asumir que esas diferencias no son suficientemente significativas como para explicar las diferencias de los albedos, particularmente para pequeños ángulos cenitales, como a los que se hicieron las medidas en el mes de noviembre.

Asimismo los lugares de observación fueron distintos; sin embargo, en vista de que el año 2005 se realizó la medida a menos de 10 km de la orilla del Salar (y, por tanto, dentro del rango de influencia de la frontera Salar-Altiplano), es más llamativo que esa medida resulte bastante mayor a la realizada en mayo de 2008.

Por tanto, sin descartar fluctuaciones locales del clima, es posible avanzar la hipótesis, con cargo a comprobación futura, de un real "ensuciamiento", o obscurecimiento, del Salar, debido no tanto, como a veces se escucha, a los efectos del turismo masivo sino a un verdadero cambio climático de la región que se manifiesta, de acuerdo a algunos datos meteorológicos del Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología (SENAMHI) en lluvias más concentradas en los primeros tres meses del año, con períodos de sequía más prolongados.

De hecho los resultados de los modelos climáticos más acreditados apuntan a patrones climáticos como el que acabamos de describir (mayor duración de la época seca) en la región de los Andes Occidentales (Magrin et al. 2007).

7. MEDIDAS DEL ALCANCE DEL ALBEDO

El otro objetivo del proyecto era medir el alcance de la influencia de una región con determinado albedo (el altiplano) sobre la irradiancia medida a diferente distancia de aquella en una región de diferente albedo (Salar).

Para ese fin se diseñó un experimento para medir, estáticamente, la irradiancia durante períodos de 20 minutos en diferentes puntos dentro del Salar (en lo posible sobre el mismo paralelo, para evitar correcciones de latitud), y así poner en evidencia el porcentaje de disminución de la irradiancia al acercarse a

la orilla del Salar. Para fines de comparación, uno de los radiómetros (YES 138) se quedó midiendo en un punto fijo, cerca del Hotel de Sal, a 6 km de la orilla.

El análisis de los resultados se ha revelado más complejo de lo esperado y requiere más tiempo y dedicación. De hecho, las diferencias que se quieren medir no son muy significativas, debido a que están tomadas cerca al mediodía y las correcciones temporales son bastante delicadas. Adicionalmente se tuvieron algunos percances experimentales que obligaron a un trabajo aún más complejo de reconstrucción de la curva con base a los valores del día anterior.

Por todas estas razones estimamos que este tema merece un artículo a parte, el cual ya está bastante avanzado.

8. CONCLUSIONES

Las dos campañas, llevadas a cabo en el marco del proyecto bianual, han permitido aprender algunas lecciones y han logrado importantes resultados.

Las lecciones se refieren principalmente a la dificultad, no siempre considerada, de realizar medidas ópticas en condiciones extremas, con fuentes de potencia no confiables, con instrumentos que requieren particular cuidado, debido a su tiempo de uso y al tiempo limitado que se dispone.

No obstante, se han logrado resultados que ponen en discusión anteriores conclusiones, por la dinámica climática de la región del Salar. El principal es el ensuciamiento progresivo del Salar, debido posiblemente a la acumulación de polvo por la reducción del período anual de lluvias, aspecto que deberá ser confirmado por el análisis de datos meteorológicos.

Desafortunadamente la estación situada en la isla central del Salar (Incahuasi) ha estado parada y abandonada en los últimos años, pero se tienen datos de la estación de Uyuni.

En todo caso, los resultados obtenidos, alientan al Laboratorio de Física de la Atmósfera a emprender otra campaña en un futuro próximo para confirmar y cuantificar las anomalías encontradas.

AGRADECIMIENTOS

Nuestros sinceros agradecimientos al personal del Instituto de Investigaciones Físicas de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) por el apoyo generoso en la ejecución de las campañas, empezando por el Director Dr. Wilfredo Tavera. Asimismo agradecemos el apoyo logístico proporcionado satisfactoriamente por las empresas Peru Bolivian Tours y Licancabur. Finalmente, agradecemos a la Empresa Ferroviaria Andina por el transporte gratuito de los equipos a Uyuni.

REFERENCIAS

- Magrin, G., Gay García, C., Cruz Choque, D., Giménez, J., Moreno, A., Nagy, G., Nobre, C., & Villamizar, A. 2007, Latin America. Climate Change 2007: Impacts, Adaptation and Vulnerability. Contribution of Working Group II to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change (M.L. Parry, O.F. Canziani, J.P. Palutikof, P.J. van der Linden and C.E. Hanson, Eds., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 581-615)
- Yankee Environmental System (YES). 1997, UVB-1 Ultraviolet Pyranometer (Installation and User Guide, Version 2.0)
- Reuter, J., Ghezzi, F., Palenque, E., Torrez, R., Andrade, M., & Zaratti, F. 2007, Journal of Photochemistry and Photobiology B: Biology, 87, 1
- Zaratti, F., Forno, R., Gutierrez, G., Apaza, R., & Velarde, F. 2008, Resultados preliminares del proyecto Medidas de albedo en el Salar de Uyuni (IIF-UMSA, Informe gestión 2008)

EFFECTO DEL CAMPO ELÉCTRICO ATMOSFÉRICO SOBRE EL CONTEO DE PARTÍCULAS
CARGADAS DETECTADAS POR UN CENTELLADOR EN EL LABORATORIO DE FÍSICA
CÓSMICA DE CHACALTAYA

THE EFFECT OF THE ATMOSPHERIC ELECTRIC FIELD ON THE COUNTING OF CHARGED
PARTICLES DETECTED BY A SCINTILLATOR IN THE LABORATORY OF COSMIC RAY PHYSICS AT
MOUNT CHACALTAYA (BOLIVIA)

WINKELMANN R.

Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz–Bolivia

(Recibido el 30 de julio de 2010; aceptado el 15 de agosto de 2010)

RESUMEN

Las partículas secundarias que son producidas por rayos cósmicos primarios se ven afectadas por diversos factores en la atmósfera, como presión, temperatura, y otros. El Campo Eléctrico Atmosférico (CEA) es uno de estos factores. Se observa que durante tormentas eléctricas la tasa de conteo de las partículas puede incrementarse considerablemente. En el presente trabajo se busca observar en el Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya (5220 msnm) la relación existente entre el CEA y las partículas secundarias producidas por rayos cósmicos primarios, bajo dos distintas condiciones climáticas: buen tiempo meteorológico y tiempo meteorológico perturbado.

Descriptores: campo eléctrico atmosférico — rayos cósmicos.

Código(s) PACS: 92.60.Pw, 95.50.S, 95.45.i

ABSTRACT

Secondary particles produced by primary cosmic rays are affected by diverse atmospheric factors such as pressure and temperature. The Atmospheric Electric Field is one such factor. There is evidence that during electric storms the counting rate of particles can increase considerably. In this work we look at the relationship between the Atmospheric Electric Field and the secondary particles, at the Chacaltaya Cosmic Ray Physics Laboratory, under two distinct weather conditions: good and unsettled weather.

Subject headings: atmospheric electric field — cosmic rays

1. INTRODUCCIÓN

El conjunto de partículas generadas por un rayo cósmico primario posee tres componentes: hadrónica, electromagnética y muónica; éste conjunto de partículas se ven inmersas en una serie de condiciones atmosféricas, como modulación de campo eléctrico (Feynman et al. 2000), presión y temperatura (Alvarez 2008) entre otros, presentes desde el momento de su formación, pero no todas las partículas se verán afectadas de la misma forma.

La idea de una posible influencia del Campo Eléctrico Atmosférico (CEA) durante tormentas eléctricas sobre partículas cargadas, en principio electrones, fue planteada por primera vez en la década de los 20 (Wilson 1925); durante las siguientes décadas varios fueron los intentos por observar una aceleración en partículas cargadas antes y/o durante tormentas eléctricas, los resultados de dichas observaciones fueron contradictorios y nada claros. En 1985 Alexeenko et al. realiza la primera ins-

pección minuciosa entre medidas del CEA y variaciones en el registro de rayos cósmicos encontrando correlaciones de corta duración (alrededor de 8 a 16 minutos) con un incremento en la tasa de conteo en el registro de rayos cósmicos de 0.2 a 0.3%; trabajos posteriores como el de Aglietta et al. (1999), Brunetti et al. (2000) y Vernetto et al. (2001), entre muchos otros, demostraron que el CEA afecta tanto a muones como electrones de carga positiva y negativa, además de mostrar un incremento en la radiación X y γ . Vernetto reporta un incremento en la tasa de conteo de un Chubasco Atmosférico Extenso (EAS por sus siglas en inglés) de 10 a 15% en un periodo de 10 a 20 minutos además, Alexeenko et al. (1985) reportan incrementos en la tasa de conteo de hasta un 20% antes de una descarga eléctrica.

La generación del CEA se debe a la diferencia de potencial existente entre la Tierra y la Electrósfera, otras influencias atmosféricas como las nubes cargadas eléctricamente son capaces de producir inten-

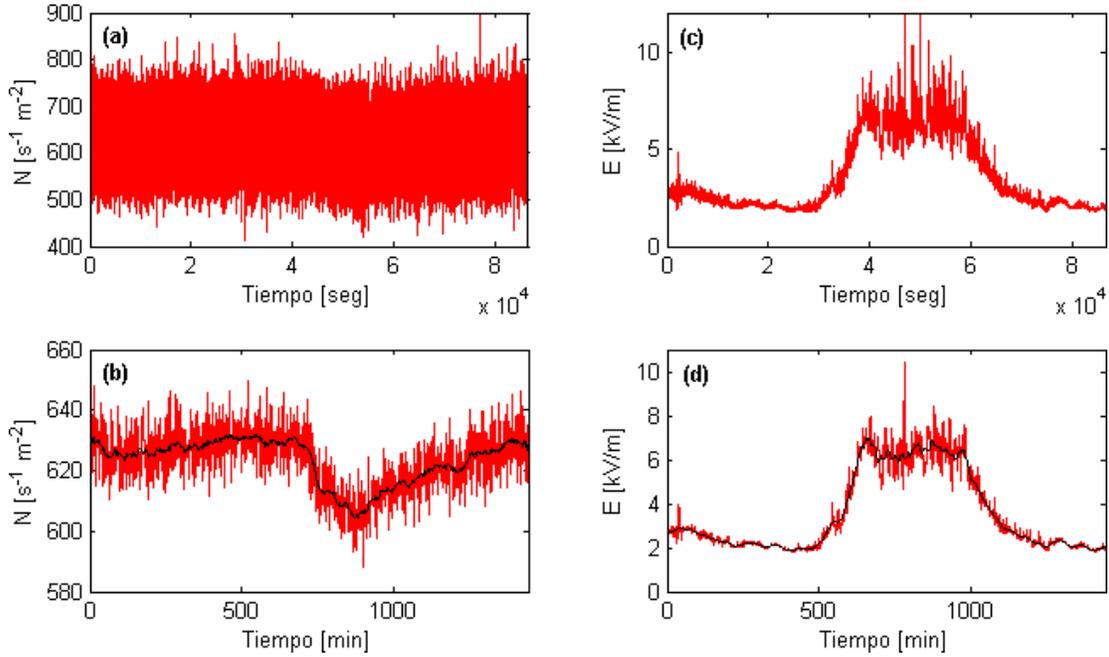


FIG. 1.— Datos correspondientes al 06 de Octubre. (a) Registro al segundo de un día para el centellador. (b) Registro al segundo de un día para el CEA. (c) Registro del centellador promediado al minuto, la curva negra corresponde a los datos alisados. (d) Registro del CEA promediado al minuto, la curva negra corresponde a los datos alisados.

tos campos eléctricos. El modelo clásico de la distribución de cargas en las nubes establece que ésta puede llegar a tener hasta tres centros de carga: uno ubicado en la cima de la nube, con una carga de $+40$ *coulombs*, alrededor de los 10 a 12 *Km* desde la superficie terrestre, una segunda concentración de carga, con -40 *coulombs*, ubicada alrededor de los 5 a 7 *Km*, también medida desde la superficie, y una tercera carga no tan significativa que puede o no estar presente, con $+3$ *coulombs*, ubicada en la base de la nube alrededor de los 2 *Km*, éstos valores solo son referenciales, ya que dependerán del tipo de nube, su desarrollo, topología del terreno, etc.

Las partículas que se ven inmersas en un CEA son aceleradas bajo el mecanismo *Electrón Fugitivo* (*Runaway Breakdown*) propuesto por Gurevich et al. (1999), el cual establece que las partículas que son aceleradas dentro del campo eléctrico atmosférico experimentan un incremento en su energía y pueden llegar a producir nuevas partículas mediante interacciones con núcleos de la atmósfera, a su vez éstas producen nuevas partículas por el mismo mecanismo hasta que las últimas partículas no tengan la energía suficiente para continuar con el proceso, de manera que el número de partículas aumenta de forma exponencial.

El presente trabajo esta destinado a realizar un estudio de la influencia del CEA en el conteo de partículas generadas a partir de rayos cósmicos detectados en el Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya (ubicado a 5230 m.s.n.m.) por un centellador, durante dos diferentes escenarios climáticos: días con buen tiempo meteorológico y días con tiempo meteorológico perturbado por nubes, en un período de tres meses.

2. DETECTORES DE PARTÍCULAS EN CHACALTAYA

Existen diversos arreglos experimentales instalados en el Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya destinados a detectar partículas secundarias, las cuales, al igual que en cualquier parte del mundo, son afectadas por factores atmosféricos. Los registros de partículas cargadas son constantemente corregidos por presión y temperatura, ya que se cuenta con instrumentos para realizar éstas medidas. Variaciones en el conteo de partículas durante tormentas eléctricas son observadas constantemente, algunas de ellas son reportadas en Huaygua et al. (2002), encontrando un número estadísticamente significativo de tales eventos mediante correlaciones con equipos improvisados para detectar descargas eléctricas atmosféricas; no es sino hasta Septiembre del año 2008 que el Laboratorio empieza a registrar medidas del CEA con un instrumento específico para éste propósito, es así que por primera vez, en éste trabajo, se realiza un estudio de las variaciones en el registro de partículas acompañadas por medidas del CEA.

3. OBTENCIÓN Y METODOLOGÍA DE DATOS

En el Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya se encuentran instalados los equipos utilizados en éste trabajo. El primero, un sensor de campo eléctrico atmosférico de la marca *Boltek*, modelo *EFM-100* con un tiempo de respuesta de 0.1 segundos, un rango de resolución digital de 0.01 *kV/m*, y un rango de medición desde -20 *kV/m* hasta $+20$ *kV/m*, si los valores medidos superan éstos límites el sensor se satura; para evitar saturaciones es posible disminuir la sensibilidad del *EFM-100* a través de resistencias con valores adecuados. Debido al intenso campo eléctrico registrado durante las pruebas preliminares a la instalación del *EFM-100*, se opta por reducir

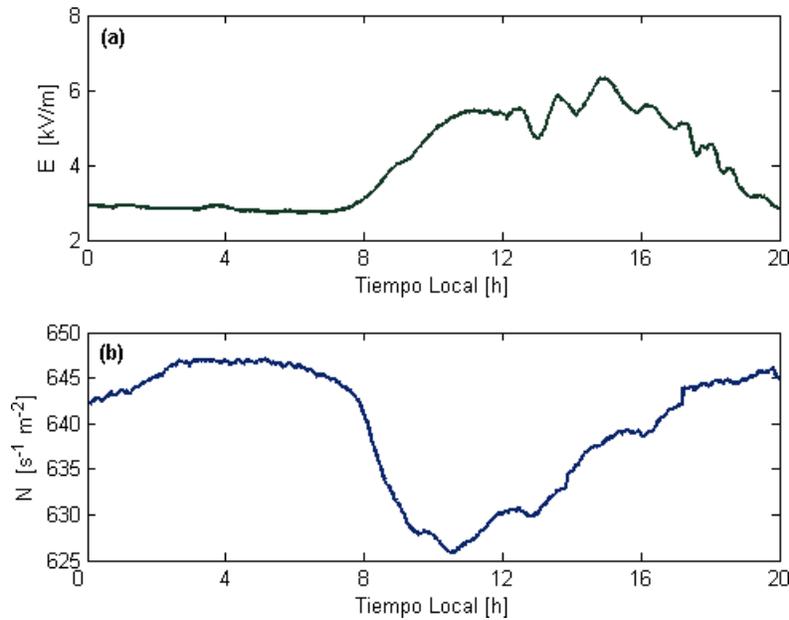


FIG. 2.— Modulaciones promedio. (a) Campo eléctrico atmosférico. (b) Cuentas de partículas.

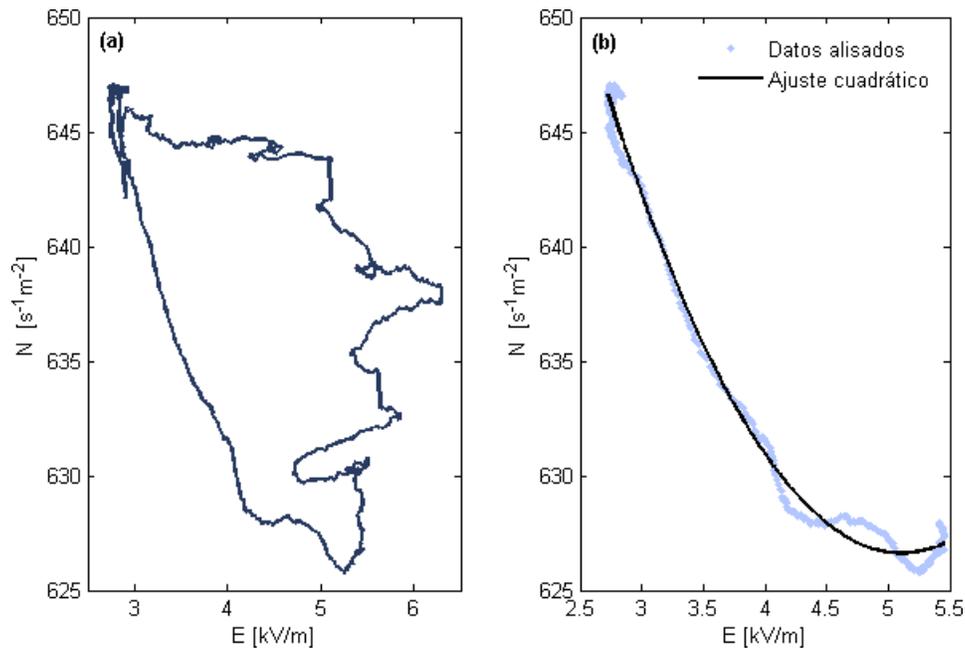


FIG. 3.— (a) Correlación promedio con los datos de las curvas alisadas. (b) Ajuste cuadrático en la región de descenso del número de partículas.

la sensibilidad del mismo a un 25% del valor original.

El segundo es un detector de partículas compuesto por un centellador de plástico de 0.25 m^2 de área y 0.1 m de espesor. Como se sabe, los centelladores sólo detectan partículas cargadas, fundamentalmente electrones y muones, por lo tanto resulta muy adecuado para nuestro propósito.

3.1. Selección de datos

Los datos utilizados para éste trabajo son los registrados durante los meses de Septiembre a Noviembre de 2008; se seleccionan y separan primero los registros diarios del CEA que presenten una modulación

suave y de baja intensidad, luego se escogen días en los cuales la intensidad del CEA muestre alteraciones bruscas y saturaciones en el equipo. El primer caso es denominado "días con buen tiempo meteorológico", ya que presentan un cielo con poco o nada de nubosidad, esto se corrobora con imágenes satelitales obtenidas en NASA (2010). El segundo grupo es llamado "días con tiempo meteorológico perturbado" por tratarse de días con alteraciones eléctricas en la atmósfera debidas a la presencia de nubes cargadas eléctricamente, precipitaciones, rayos y otros, así, el primer grupo suma un total de 14 casos, en cambio, el segundo tiene 24 casos.

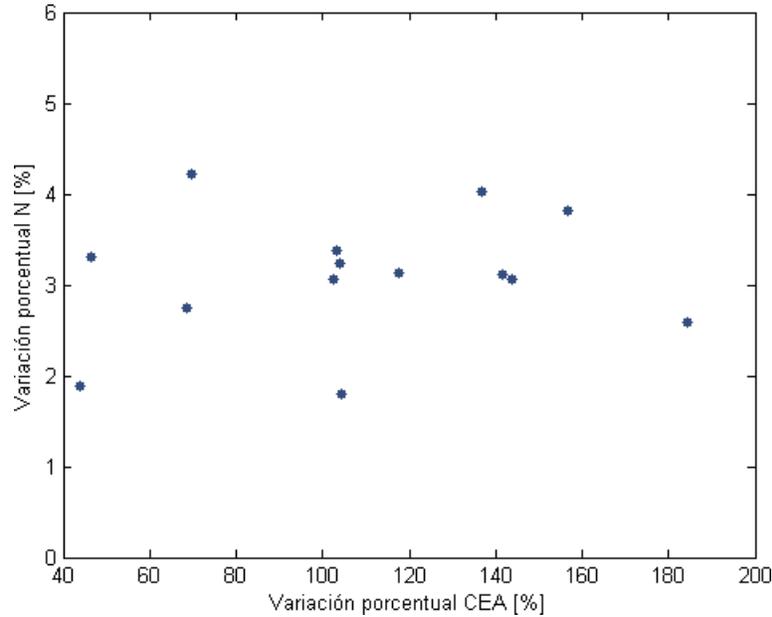


FIG. 4.— Variación porcentual en el registro del centellador vs. variación porcentual del CEA. Cada punto representa un día.

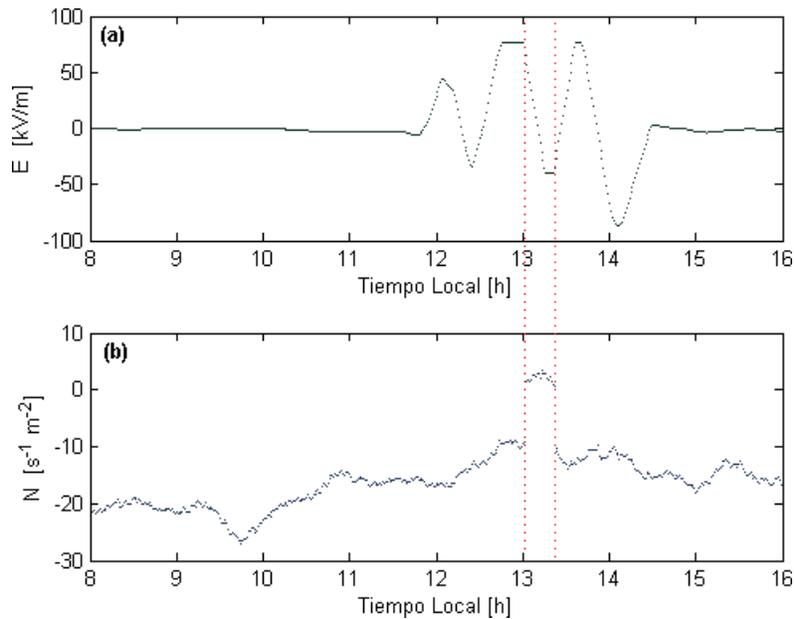


FIG. 5.— Incremento en el número de partículas registrado el 07 de Octubre de 2008. Las líneas verticales muestran la coincidencia temporal entre ambos registros: CEA (a) y N (b).

3.2. Metodología

3.2.1. Días con buen tiempo meteorológico

Los datos obtenidos por ambos detectores son registrados al segundo, lo que hace un total de 86400 valores al día para cada detector. La Fig. 1 (a) y (c) muestran dicho registro para el centellador y el CEA respectivamente (los datos corresponden al 06 de Octubre). En el caso del centellador (Fig. 1(a)) puede apreciarse tan sólo una franja, sin una modulación, sin embargo, si se toma el promedio de los valores sobre un minuto reducimos el número de registros a 1440 y posteriormente se realiza un alisado de la curva a través de una media móvil, aparece clara-

mente una modulación. La Fig. 1(b) muestra el resultado de dicho proceso, donde la curva negra es el alisado del registro promediado. Un proceso idéntico se lleva a cabo para el caso del CEA, la Fig. 1(d) muestra el resultado para este caso.

Una vez que se obtienen las curvas alisadas de ambos registros para los 14 casos se realiza una gráfica promedio de ambas modulaciones (Fig. 2). Se ve que ambas modulaciones tienen inicio a la misma hora aproximadamente, entre las 7 y 8 de la mañana hora local.

A continuación se realiza una correlación entre ambas modulaciones (Fig. 2), la Fig. 3(a) muestra el resultado, donde es posible distinguir el ciclo de-

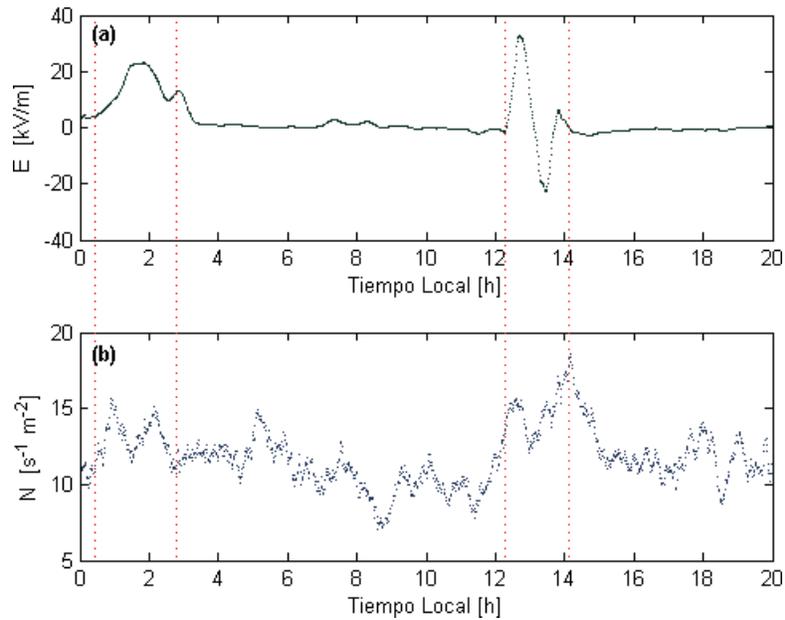


FIG. 6.— Dos incrementos notables en el registro de partículas coincidentes con alteraciones en el CEA registrados el 13 de Octubre de 2008. Las líneas verticales muestran la coincidencia temporal entre ambos registros: CEA (a) y N (b).

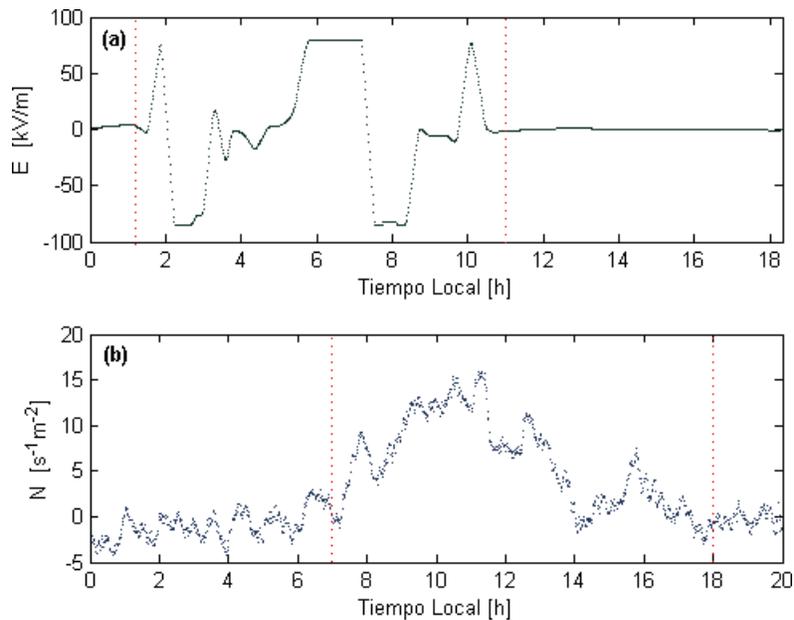


FIG. 7.— Variaciones notables en el registro de partículas no coincidentes temporalmente con alteraciones en el CEA registrados el 10 de Noviembre de 2008. El desfase es de aproximadamente de siete horas. Las líneas verticales muestran el tiempo aproximado de duración de las perturbaciones en cada registro: CEA (a) y N (b).

bido a que ambas modulaciones son opuestas, mientras una se incrementa, la otra disminuye y viceversa. En la etapa en que los valores del registro del centellador disminuyen, es posible realizar un ajuste cuadrático (Fig. 3(b)) con un coeficiente de correlación de 0.99, esta correlación entre ambos registros se mantiene por el lapso de 7 horas aproximadamente.

3.2.2. Días con tiempo meteorológico perturbado

Primero realizamos un análisis similar al caso anterior, reducimos el número de datos al minuto, luego

se restan las modulaciones diarias obtenidas para el caso de días con buen tiempo meteorológico para así obtener ambos registros libres de las modulaciones. Se encuentran tres casos en los que destacan incrementos de larga duración en el registro de partículas acompañado de intensos y bruscos cambios en la intensidad del CEA, sin embargo, el procedimiento descrito anteriormente hace imperceptibles las variaciones de corta duración en ambos registros, sobre todo en el de partículas, por lo que para detectar éstas pequeñas variaciones se trabaja con los registros to-

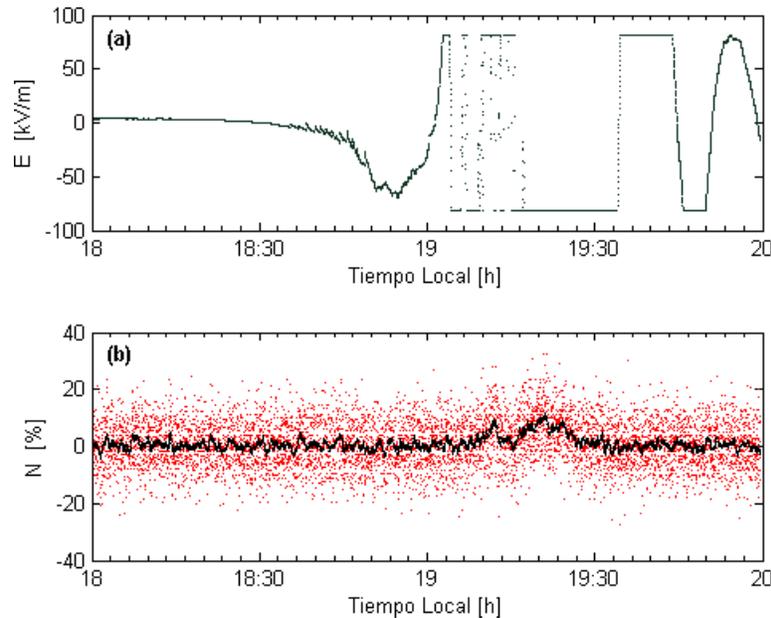


FIG. 8.— Variación de corta duración registrada el 18 de Octubre de 2008. (a) Intensas variaciones en el registro del CEA. (b) Registro de partículas con dos variaciones de corta duración.

mados al segundo. Para encontrar éstas variaciones de corta duración se analizan las variaciones porcentuales en el registro de partículas que coincidan temporalmente con saturaciones prolongadas o súbitos cambios en la intensidad del CEA. Analizar las variaciones porcentuales no basta para poder identificar éstos incrementos de corta duración, por lo que se realizó una media móvil al registro de partículas, esto ayuda a minimizar las fluctuaciones, poniendo en evidencia los incrementos de corta duración. Las gráficas correspondientes a éstos análisis se muestran en la siguiente sección.

4. RESULTADOS

4.1. Días con buen tiempo meteorológico

Para verificar una variación en el número de cuentas de las partículas se restan las modulaciones diarias de ambos registros, una vez hecho esto es posible analizar las variaciones porcentuales máximas. La Fig. 4 muestra el resultado de dicho tratamiento, además, pone en evidencia la independencia de ambas modulaciones, es decir, no importa cuanto pueda crecer el CEA, como puede verse hasta casi un 200% respecto al mínimo diario, las partículas no sienten un incremento considerable, siempre están entre 2 y 5% aproximadamente. Lo que podría explicarse porque la intensidad del CEA en días con buen tiempo meteorológico no es lo suficientemente grande como para iniciar el proceso del *Electrón Fugitivo*.

4.2. Días con tiempo meteorológico perturbado

Como resultado del análisis de variaciones de larga duración con tiempo meteorológico perturbado se obtuvieron 3 casos. El primero de ellos (Fig. 5) muestra un salto desde valores negativos hasta valores positivos respecto a la media en el registro de partículas que coincide con un descenso en el valor del CEA desde valores mayores a los 80 kV/m hasta

un mínimo de 40 kV/m aproximadamente, con una duración cerca de 30 minutos empezando alrededor de las 13 horas.

El siguiente caso (Fig. 6) muestra dos notables variaciones del CEA que coinciden también con dos incrementos en el registro de partículas. La primera variación que alcanza un poco más de 20 kV/m con una duración de 3 horas aproximadamente que coincide con dos pequeños picos en el registro de partículas, pero que no se ajustan del todo, temporalmente hablando, a los picos del CEA. La segunda variación en el CEA alcanza los 33 kV/m, dura alrededor de 2 horas y también coincide con incrementos en el registro de partículas. Cabe destacar que el registro del CEA no sufre saturaciones, es decir, no llega al máximo valor del sensor que es de 80 kV/m, y aún así existe incrementos notables en el registro de partículas.

El registro realizado el 11 de Noviembre de 2008 (Fig. 7) muestra un CEA sumamente perturbado, desde variaciones de corta duración, presumiblemente causadas por descargas eléctricas, hasta saturaciones prolongadas, siendo la más larga cerca de 2 horas. A diferencia de los dos casos anteriores, la variación en el registro de partículas no es coincidente en tiempo, sino que después de varias horas de haber ocurrido las alteraciones en el CEA las partículas empiezan a sentir este efecto, y les toma alrededor de una hora más regresar al número de partículas promedio, es decir que la perturbación del CEA dura cerca de 10 horas, en cambio el incremento en el número de partículas dura aproximadamente 11 horas.

A continuación se muestran los casos con variaciones de corta duración, en los cuales la media móvil, que es la línea oscura y con poca variación colocada sobre el registro de partículas, ayuda a identificar los incrementos reales en el registro de partículas. El

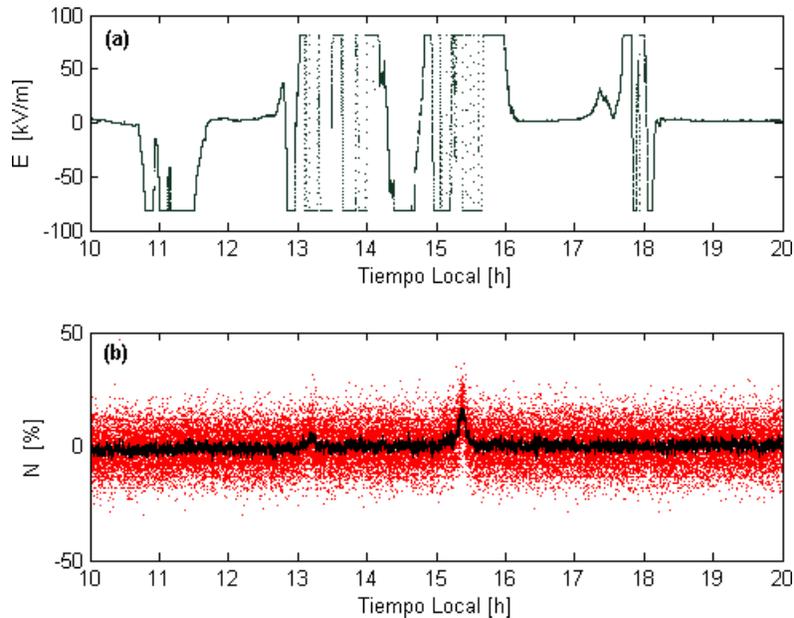


FIG. 9.— Variación de corta duración registrada el 13 de Noviembre de 2008. (a) Intensas variaciones en el registro del CEA. (b) Registro de partículas con dos variaciones de corta duración.

primero de éstos casos es el registro tomado el día 18 de Octubre de 2008 (Fig. 8), en el cual podemos destacar las intensas variaciones y saturaciones prolongadas en el registro del CEA (Fig. 8(a)), al mismo tiempo encontramos dos incrementos en el registro de partículas (Fig. 8(b)), el primero con una duración de 5 minutos aproximadamente y un incremento del 28.9 %, y el segundo, con una duración de alrededor de 15 minutos y un incremento del 33.4 %.

El segundo caso fue registrado el 13 de Noviembre de 2008 (Fig. 9). En el panel superior podemos ver saturaciones en el registro que cambian rápidamente de signo, claro ejemplo de descargas eléctricas, existen tres secciones que podemos identificar con claridad, la primera que ocurre alrededor de las 11 horas, una segunda que ocurre entre las 13 y 16 horas aproximadamente, y la tercera alrededor de las 18 horas. En cambio, en el panel inferior, que es el registro de partículas, podemos observar tan sólo dos alteraciones que corresponden temporalmente a la segunda variación del CEA entre las 13 y 16 horas, el primero de ellos logra una variación del 31.2 % y dura aproximadamente 10 minutos, el segundo, un poco más intenso y duradero, logra un incremento del 36.1 % por un tiempo no menor a los 20 minutos.

Finalmente, el registro realizado el 19 de Noviembre de 2008 muestra un caso similar al anterior, en el registro del CEA tenemos dos regiones con cambios súbitos, el primero entre las 10 y 13 horas, y el segundo, menos intenso, entre las 16 y 17 horas, mientras que el registro de partículas (Fig. 10(b)) muestra solo una variación entre las 16 y 17 horas, en otras palabras, ésta variación coincide con la variación del CEA menos intensa. La variación en el registro de partículas posee un incremento del 29.4 % y dura al rededor de 10 minutos.

5. CONCLUSIONES

Se logra realizar un primer estudio del CEA en el Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya encontrando un perfil promedio para días con buen tiempo meteorológico (Fig. 2(a)), encontrando su valor máximo cerca a las 15 horas en tiempo local, que es un resultado coincidente con el expuesto en Feynman et al. (2000), el cual establece que sin importar la ubicación geográfica la máxima variación del potencial atmosférico en días con buen tiempo meteorológico ocurre a las 19 horas del meridiano de Greenwich, además, Chacaltaya es un lugar bastante particular en este sentido, ya que el mínimo valor para días con buen tiempo meteorológico es del orden de 3 kV/m, a diferencia de los 0.1 kV/m mostrados en Ramachandran et al. (2007) y Feynman et al. (2000). Esta característica es debida principalmente a dos peculiaridades que posee el laboratorio: la primera se debe a la altura a la que se encuentra Chacaltaya (5230 m.s.n.m.), además de tratarse de una montaña, y la segunda se debe a la particular ubicación del sensor *EFM-100*, ya que éste se encuentra en una torre que a su vez se halla sobre depósitos de galena que intensifican el CEA, lo cual pudo comprobarse durante la calibración del sensor.

Por otra parte, el análisis realizado para encontrar alguna correlación entre el CEA y el registro de partículas durante días con buen tiempo meteorológico reveló que ambas modulaciones diarias se originan al mismo tiempo y mantienen una alta correlación por varias horas (en promedio un coeficiente de correlación cuadrático de 0.99 por un lapso de aproximadamente 7 horas). Sin embargo, el resultado final de éste análisis lo muestra la Fig. 4, en el cual se aprecia una completa independencia entre ambas modulaciones.

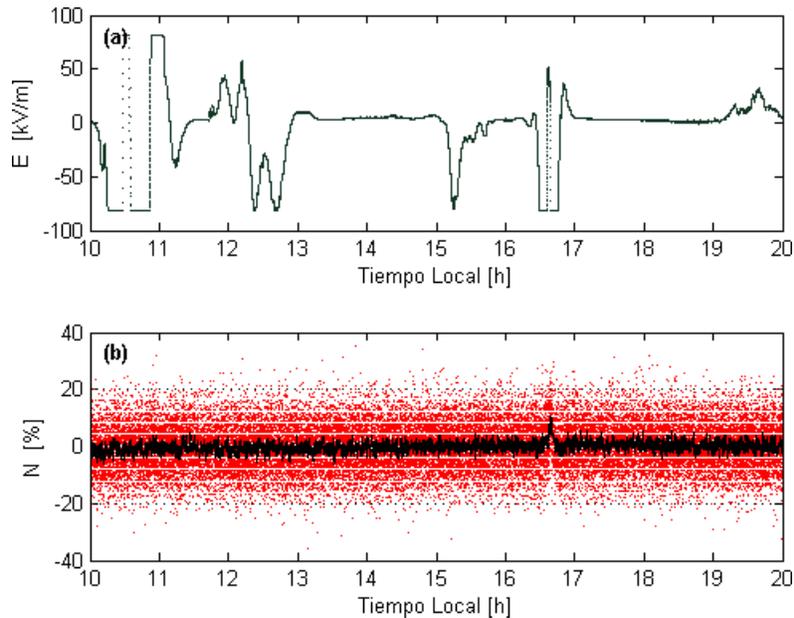


FIG. 10.— Variación de corta duración registrada el 19 de Noviembre de 2008. (a) Variaciones en el registro del CEA con dos regiones muy bien diferenciadas. (b) Registro de partículas con tan solo una variación de corta duración.

Para el caso de días con tiempo meteorológico perturbado se encuentran dos tipos de resultados, variaciones de larga y corta duración, que precisamente concuerdan con los reportados en Aglietta et al. (1999). De 24 casos estudiados, tan solo 4 muestran variaciones de larga duración, siendo éstos poco homogéneos en su comportamiento, es decir, los incrementos en el registro de partículas no siempre ocurren simultáneamente a las perturbaciones en el CEA, como es el caso del registro realizado el 10 de Noviembre de 2008 (Fig. 7), el cual muestra un retraso de varias horas en el incremento del registro de partículas comparado al tiempo de inicio en las perturbaciones en el CEA.

Para el caso de variaciones de corta duración se encontraron registros de 3 días que concuerdan con éste perfil, los cuales revelan un incremento en la razón de conteo de entre 29 y 36% con una duración de 5 a 20 minutos aproximadamente. Al parecer las variaciones de corta duración siempre son coincidentes, temporalmente hablando, con bruscos incrementos y

saturationes en el registro del CEA. Sin embargo, no siempre se presentan cuando el CEA sufre intensas y prolongadas fluctuaciones, claro ejemplo de ello son los registros realizados los días 13 y 19 de Noviembre (Figs. 9 y 10), el registro del CEA muestra marcadas regiones con intensas perturbaciones, pero el incremento en la razón de conteo de las partículas solo es coincidente con algunas de éstas regiones.

En conclusión podemos decir que los incrementos en las razones de conteos durante perturbaciones en el CEA, no son un efecto que siempre se presente, ni siquiera que tengan duraciones o intensidades iguales en todos los casos.

Una razón para que éste fenómeno no sea constante podría radicar en el detector de centelleo, ya que al ser de una superficie pequeña la fluctuación sobre la media es muy grande (de más de 4σ), por lo que las variaciones debidas al CEA podrían estar inmersas dentro de las fluctuaciones, es por esto que un futuro análisis debe usar un arreglo de detectores para el registro de partículas.

REFERENCIAS

- Aglietta, M. et al. 1999, Proc. 26-th ICRC, 7, 351
 Alexeenko, V. V. et al. 1985, Proc. 19-th ICRC, 5, 352
 Alvarez, J. 2008, Efecto de las Tormentas Eléctricas en los Rayos Cósmicos Detectados en la Superficie Terrestre (Tesis de Maestría, UNAM)
 Brunetti, M. et al. 2000, Geophys. Res. Letter, 27, 1599
 Feynman, Leighton, & Sands. 2000, Física Vol II (Addison-Wesley-Longman)
- Gurevich, A. V., Zybin, K. P., & Roussel, R. A. 1999, Dupre Phys.Lett. A, 254, 79
 Huaygua, N., Velarde, A., & Saavedra, O. 2002, Revista Boliviana de Física, 8, 23
 NASA. 2010, <http://rapidfire.sci.gsfc.nasa.gov>
 Ramachandran, V. et al. 2007, The South Pacific Journal of Natural Science, 12, 70
 Vernetto, S. et al. 2001, Proc. 27-th ICRC, 10, 4165
 Wilson, C. T. 1925, Proc. Cambridge Phil. Soc., 22, 534

KINKS Y SOLITONES EN LA ECUACIÓN DE
GINZBURG-LANDAU CÚBICA-QUÍNTICA REAL
KINKS AND SOLITONS IN THE
CUBIC-QUINTIC REAL GINZBURG-LANDAU EQUATION

D. URZAGASTI[†]

Instituto de Investigaciones Físicas
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz–Bolivia

(Recibido el 1 de septiembre de 2010; aceptado el 24 de septiembre de 2010)

RESUMEN

Se resuelve numéricamente la ecuación parabólica de Ginzburg-Landau Cúbica-Quíntica Real en una dimensión. Las soluciones no divergentes encontradas son aquellas que conectan los distintos puntos fijos. Estas se presentan como trayectorias en el espacio de fases que conectan puntos silla con puntos fijos espirales y nodos y que tienen la forma de frentes (*kinks*) o de estructuras periódicas espaciales que viajan estacionariamente en el espacio. A partir de las soluciones que involucran espirales, ha sido posible construir también estructuras estacionarias localizadas espacialmente que tienen formas de dominios y pulsos.

Descriptor: sistemas dinámicos no-lineales — integración numérica

Código(s) PACS: 05.45._a, 02.60.Jh

ABSTRACT

We numerically solve the parabolic cubic-quintic real Ginzburg-Landau equation in one dimension. It was found that non-divergent solutions connect fixed points. These appear as trajectories in the phase portrait connecting saddle points with spirals and nodes. These fronts (*kinks*) or spatial periodic structures travel stationarely along the one dimensional axis. From the solutions involving spirals we were able to assemble pairs of solutions to form stationary localized structures like domains and pulses.

Subject headings: dynamical systems (non-linear) — numerical integration

1. INTRODUCCIÓN

Muchos sino la mayoría de los problemas físicos que se abordan desde el punto de vista analítico se presentan con ecuaciones de carácter no lineal y no sólo con una variable independiente sino en general con varias, perteneciendo así al conjunto de tipos de ecuaciones conocidas como NPDEs (*nonlinear partial differential equations*). Podría pensarse que dada su no-linealidad estos problemas no tienen solución analítica exacta, y que la resolución debe afrontarse por medio de algoritmos numéricos; sin embargo, existen varias obras y artículos dedicados a la divulgación de muchos casos en los que se han encontrado soluciones exactas a problemas no-lineales específicos, entre ellos podemos citar el artículo de Ali et al. (2007) en el que se muestra un método para hallar soluciones de NPDEs usando el método de la función coseno o el libro de Sachdev (2000) en el que resume métodos para la obtención de soluciones exactas de muchos problemas no lineales. Pero al parecer, en la mayoría de los casos no se tiene tanto éxito y tiene que recurrirse a métodos analíticos aproximados como por ejemplo

los métodos homotópicos descritos entre otros por Babolian et al. (2009) y Lin (2009) y métodos para la contrucción de pulsos en ecuaciones de amplitud como el descrito por Descalzi (2003). No obstante de que estos métodos puedan tener éxito en muchos casos, no en todos, resultan muy engorrosos al manejar un gran número de términos en las aproximaciones aparte de la complejidad que pueden adquirir los mismos. No parece una forma práctica de abordar los problemas no-lineales con aproximaciones analíticas cuando no existen soluciones exactas, entonces la integración numérica se presenta como el único camino llano y promisorio en esta difícil área. Pero la resolución numérica es sólo una herramienta que cuando es bien utilizada brinda resultados muy precisos y con gran rapidez. Para ser bien utilizada, debe realizarse el análisis de existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones que se adaptarán lo mejor posible a la realidad de los resultados experimentales. En primer lugar, debe tenerse la seguridad de que si es así predicho por estos análisis, las soluciones numéricas corroboran y plasman en una “realidad numérica” todo aquello que se esperaba antes de la resolución y con una gran precisión y eficiencia, lo que es ahora posible gracias a la gran veloci-

[†]Email: urza@fiumsa.edu.bo.

dad de los procesadores computacionales y a los diferentes métodos numéricos desarrollados para la resolución de todo tipo de problemas (véase por ejemplo Press et al. 1992). El análisis mencionado es muy complejo y actualmente está en una etapa de desarrollo muy fuerte, para empezar pueden citarse la obra ya clásica y muy didáctica de Strogatz (1994) y obras más recientes y muy formales de Kuznetsov (1995) y Meiss (2007). Al respecto, muchos avances se han ido realizando hasta los recientes años en distintas áreas del ámbito no lineal, véase por ejemplo una revisión completa mostrada por Aranson & Kramer (2002) respecto al estado del estudio de las CGLEs (*Complex Ginzburg-Landau Equations*) y un resumen de diversos casos en la formación de estructuras localizadas dado por Coulet (2002). En el caso del extenso grupo de las CGLEs existe un subgrupo muy importante de ecuaciones llamadas *Complex Cubic-Quintic Nonlinear Ginzburg-Landau Equations* o simplemente *cubic-quintic* CGLEs, en las que aparece la amplitud compleja e incógnita en términos de tercer y quinto grado aparte de los lineales. Estas ecuaciones han sido ampliamente estudiadas, y para citar sólo unos cuantos ejemplos están los trabajos de Maruno et al. (2005) y Kalashnikov (2009) donde se encuentran soluciones tipo *solitones disipativos* o el de Nguenang et al. (2008) donde se modela el movimiento de paredes de dominios ferromagnéticos y el de Pelap et al. (2007) donde se estudia el comportamiento de soluciones del tipo de ondas de choque. También se han estudiado el caso de estas ecuaciones en su versión real como en el caso del trabajo de Wei & Winter (2004) en el que se estudian soluciones con formas de ondas estacionarias cuando se considera un acople global para la estabilización de dicha ecuación. En esta ocasión, como un paso previo necesario para el estudio de ecuaciones tipo CGLEs se ha pensado estudiar la versión real de las CGLEs, afrontando el problema de una ecuación parabólica típica de problemas difusivos en una dimensión espacial. Se trata de la ecuación de amplitud de Ginzburg-Landau Cúbica-Quintica Real en una dimensión que posee una solución exacta hasta el tercer grado en la amplitud, pero no cuando la misma incluye un término de quinto grado en la misma. En este trabajo se resuelve el problema de esta ecuación usando el procedimiento de análisis previo mencionado, para proceder luego a la resolución numérica del problema. Se clasifican los distintos casos que podrían darse para diferentes valores de los parámetros y finalmente se construyen, a partir de las soluciones tipo *kinks* encontradas, las estructuras localizadas estacionarias, también llamadas *solitones*. Ecuaciones como ésta pueden encontrarse en diversas áreas pero sobretodo en el área que involucra problemas de difusión del calor en reservorios de agua que intercambian masa y energía con la atmósfera (Sun et al. 2008; Henderson-Sellers 1981). En general, la forma original de la ecuación no-lineal bajo estudio no tiene una forma sencilla, por ello se recurre a un procedimiento de reducción con la obtención de la llamada *forma normal* de la

ecuación (véase Meiss 2007), con la cual se puede trabajar con una forma más o menos sencilla que puede complicarse agregando a la misma términos en forma de monomios o bien términos con mayores órdenes de derivadas. La ecuación de amplitud aquí estudiada ya está bajo su forma normal.

2. ECUACIÓN DE AMPLITUD DE GINZBURG-LANDAU CÚBICA-QUÍNTICA REAL

La ecuación de amplitud bajo estudio tiene la siguiente forma:

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + a u + b u^3 + c u^5, \quad (1)$$

la cual, sin el último término es también conocida como la ecuación parabólica de Newell-Whitehead.

En primera instancia, planteamos el análisis desde el punto de vista de soluciones tipo frentes (*kinks*) de la siguiente manera: Haciendo el cambio de variable:

$$y = x - v t, \quad (2)$$

con v constante, se tienen:

$$\partial_t = -v \partial_y, \quad \partial_x = \partial_y, \quad \partial_x^2 = \partial_y^2, \quad (3)$$

con lo que la ecuación toma la forma:

$$-v \partial_y u = \partial_y^2 u + a u + b u^3 + c u^5. \quad (4)$$

Introduciendo la notación:

$$\dot{A} = \partial_y A, \quad y_1 = u, \quad y_2 = \dot{y}_1, \quad (5)$$

se tiene el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1 &= \dot{y}_1 = y_2, \\ f_2 &= \dot{y}_2 = -v y_2 - a y_1 - b y_1^3 - c y_1^5. \end{aligned} \quad (6)$$

3. PUNTOS DE EQUILIBRIO: $\vec{f} = 0$

Nótese que se tiene la libertad de realizar un reescalamiento haciendo cualquiera de los parámetros, a , b ó c igual a la unidad. En este caso se elige:

$$c = 1. \quad (7)$$

Existen diferentes puntos fijos (puntos de equilibrio):

Punto A. Un punto de equilibrio corresponde a la solución homogénea:

$$(y_1^*, y_2^*) = 0. \quad (8)$$

Punto B. Otros puntos de equilibrio corresponden a las soluciones:

$$y_1^{*2} = \frac{b}{2} \left(-1 \pm [1 - \alpha]^{1/2} \right), \quad y_2^* = 0, \quad (9)$$

donde

$$\alpha = \frac{4a}{b^2} \leq 1. \quad (10)$$

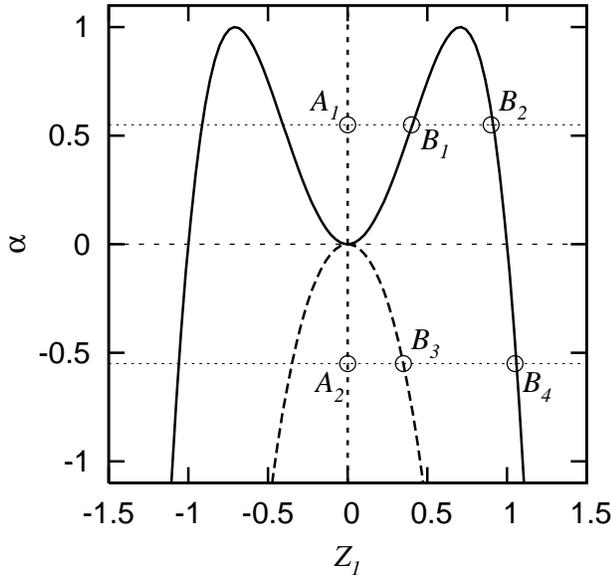


FIG. 1.— En esta figura se muestra la relación entre los valores de las posiciones de los puntos de equilibrio y_1^* y los parámetros a y b de la Ec. (1). El parámetro $\alpha = 4a/b^2 \leq 1$ (Ec. 10). La línea vertical en $Z_1 = 0$ corresponde a $y_1^* = 0$ del Punto A. La curva sólida corresponde al caso $b < 0$ del Punto B, mientras que la curva segmentada corresponde al caso $b > 0$ del mismo punto (Ec. 17). Nótese cómo la bifurcación se da a partir del punto $(0, 0)$ en esta figura, ya sea para $b > 0$ o para $b < 0$. Los casos que pueden presentarse se resumen usando como ejemplo los puntos fijos representados en la figura: Los puntos del tipo A_1, B_2, B_3 ó B_4 pueden ser espirales, nodos o centros. Los puntos del tipo B_1 ó A_2 son sillas. Dada la simetría respecto del eje $Z_1 = 0$, los puntos a la izquierda de este eje son similares a los de la derecha del mismo.

4. ESTABILIDAD LINEAL Y BIFURCACIONES

La matriz jacobiana asociada al sistema $\dot{y} = \vec{f}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_1 f_2 & -v \end{pmatrix}, \quad (11)$$

donde

$$\partial_1 f_2 = -a - 3b y_1^2 - 5 y_1^4. \quad (12)$$

La ecuación característica del problema es entonces:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \tau \lambda + \Delta = 0, \quad (13)$$

donde para los distintos puntos fijos:

Punto A. En este caso:

$$\tau = -v, \quad \Delta = a. \quad (14)$$

Punto B. En este otro caso:

$$\tau = -v, \quad \Delta = -\frac{4a}{\alpha}(1 - \alpha)^{1/2} \left\{ \pm 1 - (1 - \alpha)^{1/2} \right\}. \quad (15)$$

Para $\Delta < 0$ se tienen puntos silla. Para $\Delta > 0$, la estabilidad la define v : Si $v > 0$ se tiene un equilibrio estable, si $v < 0$ se tiene un equilibrio inestable y si $v = 0$ se tienen centros. Por otro lado, el tipo de estabilidad lo define Δ : Si $\Delta > v^2/4$ se tienen espirales, de lo contrario, si $0 < \Delta \leq v^2/4$ se tienen nodos.

Definiendo:

$$Z_1 = \sqrt{\frac{1}{|b|}} y_1^*, \quad (16)$$

se puede escribir para el Punto B:

$$\alpha = \begin{cases} -4 Z_1^2 (1 + Z_1^2), & b > 0, \\ -4 Z_1^2 (Z_1^2 - 1), & b < 0. \end{cases} \quad (17)$$

En la Fig. 1 se muestran las curvas que relacionan los parámetros de la Ec. 4. En la misma se resumen todos los casos posibles usando varios puntos fijos de ejemplo en distintas partes del diagrama.

5. TRAYECTORIAS ENTRE LOS PUNTOS FIJOS

5.1. Trayectorias que involucran puntos silla

Para el caso de puntos silla se necesitan los eigenvalores que definirán las variedades estable e inestable de la silla. Partiendo de los eigenvalores

$$\lambda_{[\pm]} = \frac{1}{2} \left(\tau \pm [\tau^2 - 4\Delta]^{1/2} \right), \quad (18)$$

reemplazados en la ecuación $(A - \lambda I)\vec{y} = 0$, se obtienen los correspondientes eigenvectores:

$$\vec{y}_{[\pm]} = (1, \lambda_{[\pm]}) \quad (19)$$

En el caso $v > 0$, el signo (+) corresponde a la variedad inestable y el signo (-) a la variedad estable de la silla.

Ahora bien, cualquier condición inicial se puede escribir como

$$\vec{y}_0 = c_{[+]} \vec{y}_{[+]} + c_{[-]} \vec{y}_{[-]}, \quad (20)$$

donde $c_{[+]}$ y $c_{[-]}$ son constantes; y la solución lineal muy cerca del punto silla se escribe:

$$\vec{y} = c_{[+]} \vec{y}_{[+]} e^{\lambda_{[+]} t} + c_{[-]} \vec{y}_{[-]} e^{\lambda_{[-]} t}. \quad (21)$$

Nótese, a modo de ejemplo, que si se quiere seguir la trayectoria partiendo de la variedad inestable de la silla, debe hacerse $c_{[-]} = 0$ y $c_{[+]}$ lo suficientemente pequeña para que sea válida la aproximación lineal.

5.2. Casos estudiados

A fin de estudiar todas las posibilidades se consideran las distintas trayectorias que conectan puntos fijos similares a los representados en la Fig. 1 (A_1, B_1 , etc.). Estas trayectorias son obtenidas integrando numéricamente el par de ecuaciones (6) a partir de las variedades inestables de los puntos silla considerados. Los resultados de las trayectorias elegidas se muestran en las Figs. 2 y 3. Se eligieron sólo los conjuntos de trayectorias de los tipos $B_1 \rightarrow A_1$ (Fig. 2) y $B_1 \rightarrow B_2$ (Fig. 3) ya que las de los tipos $A_2 \rightarrow B_3$ y $A_2 \rightarrow B_4$ son similares a las mismas. Nótese que no pueden conectarse los puntos B_3 y B_4 ya que estos no coexisten.

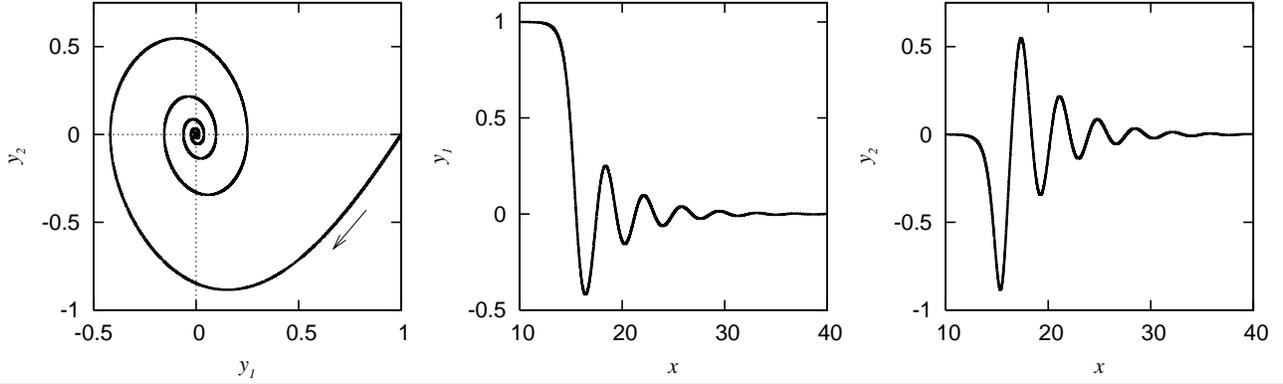
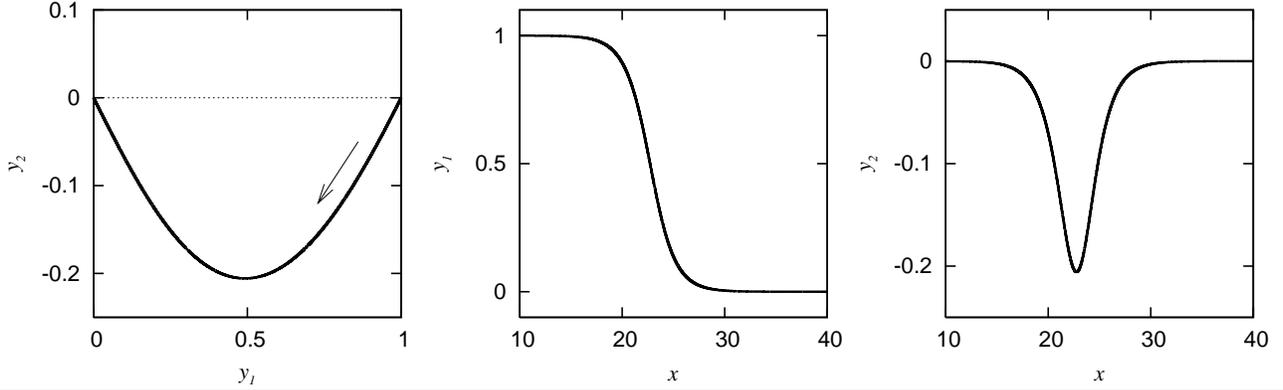
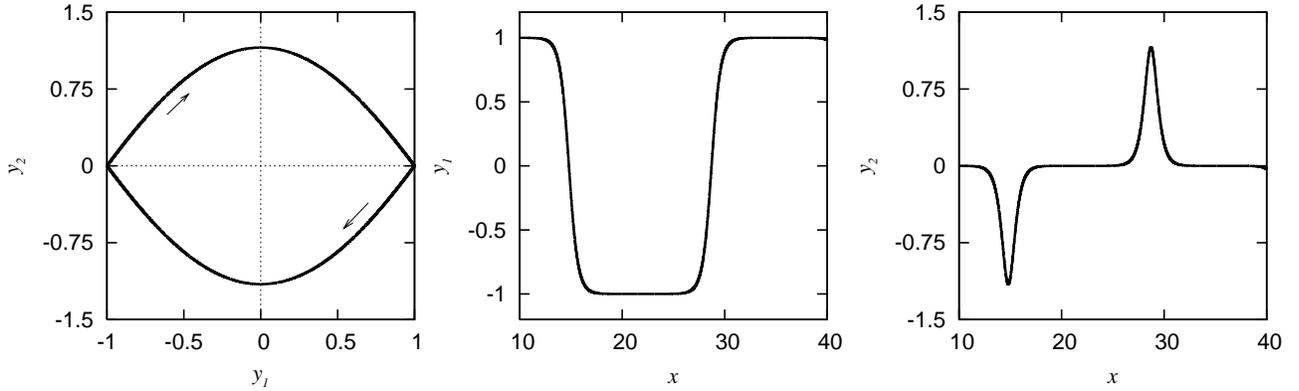
(a) Espiral: $v = 1/2$ (b) Nodo: $v = 5$ (c) Centro: $v = 0$ 

FIG. 2.— Trayectorias que conectan puntos fijos de los tipos A_1 y B_1 de la Fig. 1 para el caso $\alpha = 3/4$ con $a = 3$ y $b = -4$. Se muestran las correspondientes amplitudes y_1 y y_2 como funciones de la posición x (el valor del tiempo es arbitrario), las cuales para $v > 0$ tienen la forma de frentes (*kinks*) que viajan hacia la izquierda con la velocidad v , mientras que para $v = 0$ tienen la forma de estructuras periódicas estacionarias.

6. ESTRUCTURAS LOCALIZADAS

Si se considera el término adicional $v\partial_x u$ en la Ec. 1, resulta la ecuación:

$$\partial_t u = v\partial_x u + \partial_x^2 u + a u + b u^3 + c u^5. \quad (22)$$

La cual, en el caso estacionario toma la misma forma que la Ec. 4:

$$v\partial_x u + \partial_x^2 u + a u + b u^3 + u^5 = 0, \quad (23)$$

donde se ha tomado como antes $c = 1$.

Nótese que en esta ecuación si u es solución de la misma, $-u$ también lo es. Otra simetría, en este caso de reflexión, surge de que la ecuación (23) no sufre ninguna modificación si se hacen los cambios $v \rightarrow -v$ y $x \rightarrow -x + 2x_0$, donde x_0 es una constante arbitraria. Se tiene así que si $u_1(x)$ es solución de (23), $u_2(x) = u_1(2x_0 - x)$ también lo es. Debe hacerse notar que aquí v no debe interpretarse necesariamente como una velocidad, ya que en este caso el parámetro v ha aparecido en un nuevo término insertado en la ecuación original. Estructuras estacionarias localiza-

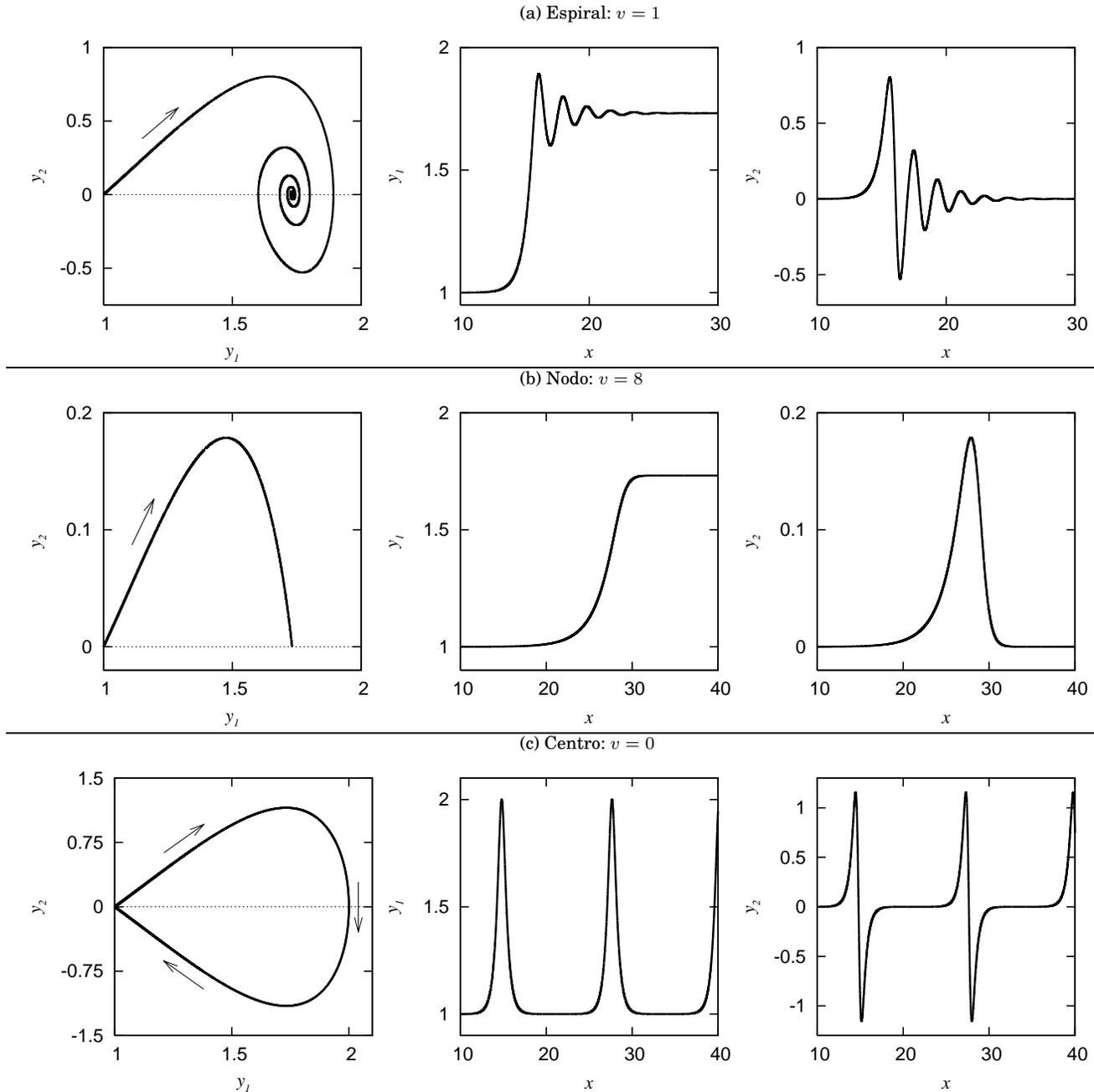


FIG. 3.— Trayectorias que conectan puntos fijos de los tipos B_1 y B_2 de la Fig. 1 para el caso $\alpha = 3/4$ con $a = 3$ y $b = -4$. Se muestran las correspondientes amplitudes y_1 y y_2 como funciones de la posición x (el valor del tiempo es arbitrario), las cuales para $v > 0$ tienen la forma de frentes (*kinks*) que viajan hacia la derecha con la velocidad v , mientras que para $v = 0$ tienen la forma de estructuras periódicas estacionarias.

das espacialmente pueden ser construidas entonces ensamblando las soluciones u_1 y u_2 . Las únicas condiciones para que tanto las amplitudes como sus derivadas primera y segunda empalmen en el punto x_0 son que las derivadas primeras en este punto sean nulas. De esta manera, sólo es posible un ensamblaje con soluciones que involucren puntos fijos espirales como las de las Figs. 2a y 3a.

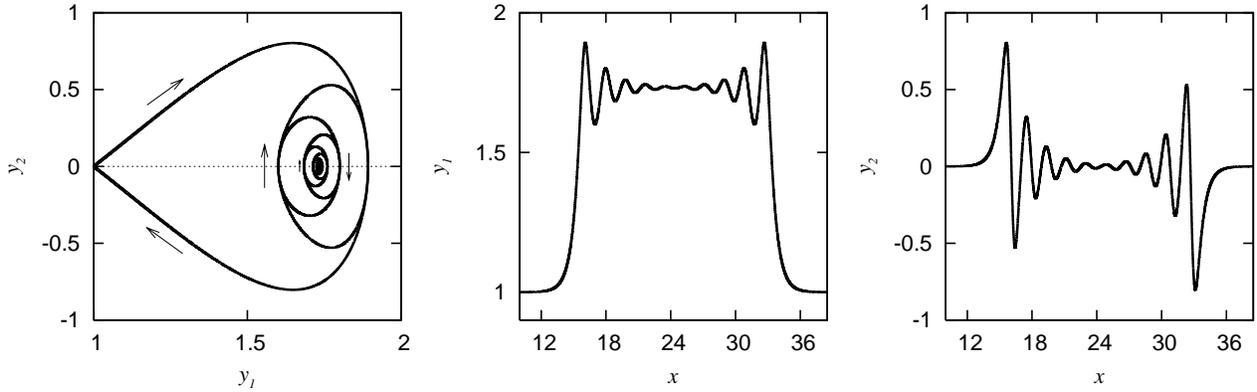
En la Fig. 4 se muestran tres estructuras localizadas representativas obtenidas usando las trayectorias del caso de la espiral de la Fig. 3a. Como

puede observarse en la misma, se tienen tanto formas del tipo de dominios localizados (estructuras anchas) como de pulsos localizados (estructuras delgadas). Estas estructuras deben verse como un tipo especial de estructuras conocidas en general como *solitones*.

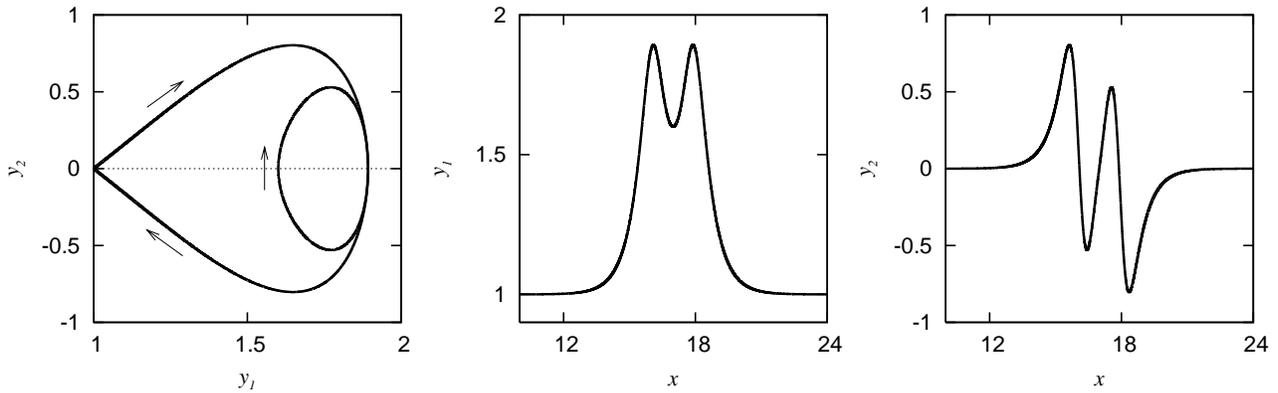
7. SUMARIO Y CONCLUSIONES

Se ha abordado el problema de la resolución de una ecuación parabólica de amplitud de tipo difusivo en una dimensión considerando monomios en la

(a) Ensamblaje usando el quinto mínimo local.



(b) Ensamblaje usando el primer mínimo local.



(c) Ensamblaje usando el primer máximo local.

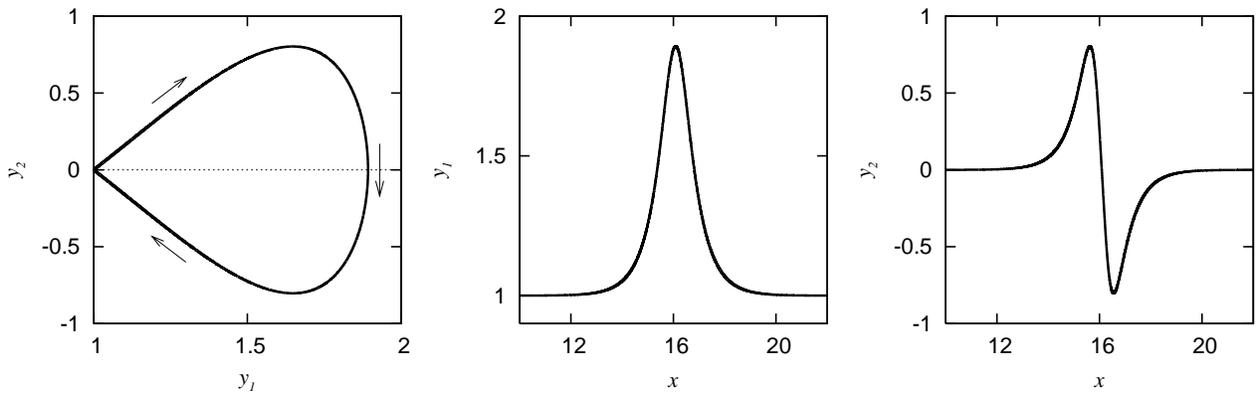


FIG. 4.— Estructuras localizadas obtenidas del ensamblaje de las trayectorias espirales de la Fig. 3a que conectan puntos fijos de los tipos B_1 y B_2 de la Fig. 1 para el caso $\alpha = 3/4$ con $a = 3$ y $b = -4$. Se muestran sólo tres ejemplos representativos para tres valores de x_0 : (a) x_0 coincide con el quinto mínimo local, dando una estructura de la forma de un dominio localizado en el espacio; (b) x_0 coincide con el primer mínimo local, dando una estructura con dos picos y un valle entre ellos y (c) x_0 coincide con el primer máximo local, dando la estructura de un pulso localizado.

amplitud de hasta quinto grado, esta es la ecuación de Ginzburg-Landau Cúbica-Quíntica Real, la cual, hasta el tercer grado en la amplitud posee soluciones analíticas exactas, no así cuando tiene incluido el término de quinto grado en la amplitud. Luego de analizar cómo encarar el problema de la resolución y haber agotado las técnicas de aproximación analítica, se ha procedido al análisis de estabilidad lineal de los puntos fijos asociados y la caracterización de los mismos habiendo resumido todos

los posibles casos en un diagrama que relaciona los parámetros. Se han encontrado seis tipos de puntos fijos que pueden ser sillas, espirales, nodos o centros. Luego se ha encontrado que la resolución numérica del problema es la más adecuada, precisa y rápida una vez que se han identificado todas las posibles trayectorias que puedan conectar los puntos fijos mencionados. Por razones prácticas de integración numérica se ha visto que el comenzar la integración a partir de la variedad inestable de una silla es el

mejor camino en cuanto a precisión y también con el fin de asegurar que las soluciones estén acotadas y conecten puntos fijos. De esta manera se han hallado y se muestran en este trabajo soluciones típicas que dan lugar a comportamientos monótonos de los *kinks* cuando se conectan una silla y un nodo; comportamiento oscilatorios amortiguados de los mismos, cuando se conecta una silla con un punto fijo espiral y la desaparición de los *kinks* cuando el término de disipación desaparece, dando lugar a estructuras periódicas en el espacio. Todo esto desde un punto de vista de *kinks* que viajan estacionariamente en uno u otro sentido del único eje espacial considerado. Sin embargo, aparte de estas soluciones tipo frentes viajeros o de patrones periódicos, las propiedades de simetría de reflexión de la ecuación estudiada permiten la construcción de patrones o estructuras estacionarias localizadas espacialmente, mediante el ensamblaje de pares de soluciones que cumplan las con-

diciones de que tanto la amplitud como sus derivadas sean iguales en en punto de ensamblaje, condición que sólo se da en el caso de que las primeras derivadas de dichas soluciones en dicho punto sean nulas, por lo tanto este procedimiento sólo resulta posible para las trayectorias que conectan puntos silla con puntos fijos espirales. Dada la presencia de espirales en las soluciones encontradas, el procedimiento de ensamblaje resulta aplicable y se encuentran dos tipos principales de estructuras localizadas: dominios y pulsos localizados.

Finalmente, todos estos resultados deben ser puestos a prueba experimentalmente, principalmente en problemas de difusión estacionarios, una primera experiencia es la de aplicarlos a la ecuación no-lineal de difusión del calor en un sistema compuesto por un reservorio de agua en contacto con la atmósfera, por ejemplo.

REFERENCIAS

- Ali, A. H. A., Soliman, A. A., & Raslan, K. R. 2007, Phys. Lett. A, 368, 299
- Aranson, I. S. & Kramer, L. 2002, Reviews of Modern Physics, 74, 99
- Babolian, E. et al. 2009, Appl. Math. Sciences, 3, No. 45, 2215
- Coullet, P. 2002, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng., 12, 2445
- Descalzi, O. 2003, Phys. Rev. E, 67, 015601
- Henderson-Sellers, B. 1981, Hydrological Sciences Journal, 26:4, 363
- Kalashnikov, V. L. 2009, Phys. Rev. E, 80, 046606
- Kuznetsov, Y. A. 1995, Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition (Springer-Verlag)
- Lin, J. 2009, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 4, No. 5, 225
- Maruno, K., Ankiewicz, A., & Akhmediev, N. 2005, Phys. Lett. A., 347, 231
- Meiss, J. D. 2007, Differential Dynamical Systems (siam)
- Nguenang, J.-P., Njassap Njassap, T., & Kofané, T. C. 2008, Eur. Phys. J. B, 65, 539
- Pelap, F. B., Kenfack, A. J., & Faye, M. M. 2007, Nonlinear Oscillations, 10 No. 2, 277
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992, Numerical Recipes in FORTRAN, Second Edition (Cambridge University Press)
- Sachdev, P. L. 2000, Exact Solutions of Nonlinear Problems (Chapman & Hall/CRC)
- Strogatz, S. H. 1994, Nonlinear Dynamics and Chaos (Perseus Books)
- Sun, S. F. et al. 2008, Sci China Ser G-Phys Mech Astron, 51, No 8, 1010
- Wei, J. & Winter, M. 2004, Proceedings of the American Mathematical Society, 133 No. 6, 1787

POST-COMPRESIÓN DE PULSOS CON DIFERENTES PERFILES TEMPORALES POST-COMPRESSION OF PULSES WITH DIFFERENT TIME PROFILES

F. FLORES[†] & J. SAN ROMÁN[‡]

[†]Carrera de Física, Universidad Mayor de San Simón

[‡]Centro de láseres pulsados, Universidad de Salamanca

RESUMEN

Se estudiaron cinco perfiles temporales para identificar qué pulsos son los más adecuados en la post-compresión por fibra hueca. Las funciones correspondientes a estos perfiles son: gaussiana, secante hiperbólica, super-gaussiana y dos gaussianas asimétricas invertidas entre sí. Los pulsos ultra-cortos fueron propagados por una fibra hueca que está llena de argón. Para comparar los ensanchamientos espectrales después de la propagación no-lineal utilizamos pulsos de entrada con anchos espectrales parecidos. Estudiamos por separado los efectos de dispersión y los efectos no-lineales, y luego consideramos todos los efectos juntos. De todos los casos estudiados, la secante hiperbólica presenta un ensanchamiento espectral superior a los otros pulsos simétricos y además presenta menor fase espectral, lo que significa mayor facilidad en la compensación de fase.

Descriptor: óptica no-lineal — compresión de pulsos

Código(s) PACS: 42.65.k, 42.65.Re

ABSTRACT

We studied five time profiles to identify which pulses are most suitable for post-compression through a hollow fiber. The corresponding profile functions analyzed were: Gaussian, hyperbolic secant, super-Gaussian and two inverted asymmetric Gaussians. The ultra short pulses were propagated using a hollow fiber filled with Argon. We used input pulses with similar widths in order to compare their spectral dispersion after the non-linear propagation. The dispersion and non-linear effects were studied separately before considering them as a whole. We found that of all the profile functions analyzed the hyperbolic secant presents the greatest spectral dispersion and the smallest spectral phase, and as such better facilitates the occurrence of phase compensation.

Subject headings: nonlinear optics — pulse compression

1. INTRODUCCIÓN

En la década de los setenta e inicios de los ochenta, surgieron nuevos fenómenos no lineales por la combinación de efectos de dispersión y efectos no lineales, por ejemplo, la compresión de pulsos y propagación de solitones (Agrawal 2000). En la actualidad, gracias al avance tecnológico de los láseres ultra-cortos y ultra-intensos es posible generar con facilidad efectos de propagación no lineales.

Una de las aplicaciones más importante en la propagación no lineal es la post-compresión de pulsos y, los dos esquemas utilizados para comprimir pulsos son la filamentación (Hauri et al. 2004) y la post-compresión con fibra hueca (Nisoli et al. 1997). La filamentación surge del equilibrio entre el efecto Kerr óptico (autofocalización del haz láser) y la ionización del medio por absorción multifotónica (defocalización del haz láser) (Mechain et al. 2005). En el segundo método, los pulsos son guiados por la fibra hueca y requieren de cortas distancias para las manifestaciones de los efectos no lineales. La principal característica de ambos métodos es el efecto de la automodulación de fase (self-phase modulation, SPM) que

produce un ensanchamiento en el espectro o generación de nuevas frecuencias. Normalmente los dos métodos de post-compresión requieren el mecanismo de la compensación del chirp, producido por los efectos de dispersión y efectos no lineales.

Dentro de la dinámica temporal de los pulsos, destacamos dos grandes efectos; la dispersión cromática y los efectos no lineales:

1.1. Dispersión cromática

La respuesta del medio a la interacción con la luz está dada por la variación del índice de refracción $n(\omega)$ con la frecuencia ω , cuya consecuencia principal es el ensanchamiento temporal. Matemáticamente los efectos de la dispersión se consideran expandiendo en series de Taylor la constante de propagación β alrededor de la frecuencia central del pulso, ω_0 ;

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots, \quad (1)$$

β_2 es la dispersión de la velocidad de grupo (group velocity dispersion, GVD), y es el responsable para el ensanchamiento del pulso. El coeficiente β_3 se conoce

como dispersión de tercer orden (third order dispersion, TOD), su inclusión es necesaria cuando $\beta_2 \approx 0$, asimismo, si consideramos pulsos ultracortos, aún si $\beta_2 \neq 0$. La TOD produce cambios en la forma del pulso, asimetrías con estructuras oscilatorias en un extremo.

1.1.1. Efecto no lineal

La expresión matemática de la dependencia del índice de refracción con la intensidad se conoce como efecto Kerr,

$$n(\omega, |E|^2) = n(\omega) + n_2|E|^2, \quad (2)$$

donde $n(\omega)$ es la parte lineal del índice de refracción, $|E|^2$ es la intensidad óptica dentro de la fibra y, n_2 es el coeficiente del índice no lineal relacionada con la susceptibilidad $\chi^{(3)}$. La dependencia del índice de refracción con la intensidad conduce a muchos efectos no lineales; por ejemplo el SPM. Asimismo al utilizar pulsos ultra-cortos, es necesario considerar efectos no lineales de orden elevado como es el self-steepening (produce asimetrías en el espectro y desplazamiento hacia los azules (Couairon & Mysyrowicz 2007)). Además, en el caso de tratar con un gas molecular debemos incluir el efecto del scattering Raman (origina un desplazamiento del espectro hacia el rojo (Santhanam & Agrawal 2003)).

1.1.2. Ecuación de la propagación no lineal

Utilizando la aproximación de la envolvente lentamente variable, la ecuación de onda es dividida en dos ecuaciones; una para la parte espacial que lo consideraremos constante¹ y, la otra para la parte temporal;

$$i \frac{\partial \phi}{\partial z} = \left(\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + i \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3}{\partial t^3} - \frac{i\alpha}{2} \right) \phi - \gamma \left(|\phi|^2 \phi + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (|\phi|^2 \phi) - T_R \frac{\partial |\phi|^2}{\partial T} \phi \right), \quad (3)$$

donde β_2 y β_3 son los términos de dispersión de segundo y tercer orden, α es el coeficiente de absorción, γ es el parámetro no lineal proporcional a n_2 . La ecuación 3 es conocida como la ecuación de propagación paraxial no lineal de envolvente lentamente variable y, puede ser agrupada en dos operadores; lineal \hat{D} y no lineal \hat{N} ,

$$i \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} = [\hat{D} + \hat{N}] \phi(z, t). \quad (4)$$

2. METODOLOGÍA

Las simulaciones de la propagación de pulsos ultra-cortos son guiados por una fibra hueca de 0.2 m de longitud y diámetro interno de 300 μm . La fibra hueca está llena de argón a presión atmosférica, por lo cuál los parámetros no lineales y de dispersión para el argón (Couairon et al. 2008) son;

¹ porque el haz se propaga en un modo propio de la fibra, aunque en principio las ecuaciones están acopladas por la no linealidad, pero conseguimos el desacoplamiento asumiendo que el haz no cambia en su estructura espacial.

$$\begin{aligned} n_2 &= 1.74 \times 10^{-23} \text{ m}^2/\text{W} \\ \beta_2 &= 19.80 \text{ fs}^2/\text{m} \\ \beta_3 &= 15.86 \text{ fs}^3/\text{m} \end{aligned}$$

Utilizamos cuatro perfiles temporales en la propagación de pulsos ultra-cortos; gaussiana, secante hiperbólica, super gaussiana (de orden $m = 2$), y pulso gaussiano asimétrico,

$$f(t) = \exp(-(t/t_p)^2), \quad (5)$$

$$f(t) = \text{sech}(t/t'_p), \quad (6)$$

$$f(t) = \exp(-(t/t''_p)^{2m}), \quad (7)$$

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-(t/t_{p1})^2) & (\text{para } t \leq 0) \\ \exp(-(t/t_{p2})^2) & (\text{para } t > 0) \end{cases}, \quad (8)$$

donde t_p es la semiachura del pulso gaussiano (50 femtosegundos) a la altura de $\exp(-2)$ y t'_p , t''_p , t_{p1} , t_{p2} son parámetros que también nos dan información del ancho temporal de sus respectivos pulsos y, son ajustados para conseguir inicialmente anchuras espectrales parecidas al de la gaussiana.

Para el pulso asimétrico usamos los valores de $t_{p1} = 80$, $t_{p2} = 30$ y también estudiamos la asimetría invertida, es decir, $t_{p1} = 30$, $t_{p2} = 80$. Para distinguirlos los denotamos como asimetría 1 al primero y asimetría 2 al segundo.

Los resultados en la propagación no lineal son evaluados en función de: Ensanchamiento espectral, ensanchamiento temporal comparado con la transformada límite de Fourier, desplazamiento espectral y la fase inducida durante la propagación. Después de la propagación no lineal, los diferentes pulsos (ecuaciones 5, 6, 7, 8) presentan diferentes anchuras espectrales, por lo cuál, los que tengan más espectro y una menor fase espectral (facilidad en la compensación de la fase) serán los más apropiados para conseguir los pulsos más comprimidos.

Para tener la cuantificación aproximada del chirp que se induce en la propagación no lineal, realizamos un ajuste polinomial de orden tres a la curva de la fase espectral,

$$\varphi(\omega) = f_3(\omega - \omega_c)^3 + f_2(\omega - \omega_c)^2 + f_1(\omega - \omega_c) + f_0, \quad (9)$$

donde f_3 y f_2 están relacionados con la *group delay dispersion* GDD y la *third order dispersion* TOD por medio de la ecuación 1, ω_c es la frecuencia central desplazada durante la propagación del pulso, y se ha calculado por la definición de centro de gravedad. Utilizamos la definición matemática de segundo momento para estimar el ensanchamiento espectral producido por los efectos no lineales para un perfil arbitrario:

$$(\sigma_\omega)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_c)^2 I(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) d\omega}. \quad (10)$$

$$\Delta\omega = 4\sigma_\omega \quad (\text{Anchura total}). \quad (11)$$

El pulso límite de Fourier conseguimos calculando la transformada inversa de Fourier del valor absoluto del perfil espectral.

TABLA 1
CASO I; SÓLO DISPERSIÓN.

Pulso	$E_i [10^{-11}\text{J}]$	$E_f [10^{-11}\text{J}]$	$\omega_{cf}[\text{fs}^{-1}]$	$\Delta\omega_i[\text{fs}^{-1}]$	$\Delta\omega_f[\text{fs}^{-1}]$	$f_3[\text{fs}^3]$	$f_2[\text{fs}^2]$
$\exp(-t^2/t_p^2)$	6.266	6.266	0	0.0800	0.0800	0.528	1.980
$\text{sech}(t/t_p)$	5.733	5.733	0	0.0806	0.0806	0.528	1.980
$\exp(-(t/t_p)^4)$	9.146	9.146	0	0.0798	0.0798	0.528	1.980
Asimétrico 1	6.893	6.893	0	0.0816	0.0816	0.528	1.980
Asimétrico 2	6.893	6.893	0	0.0816	0.0816	0.528	1.980

TABLA 2
CASO II; SÓLO SPM.

Pulso	$E_i [10^{-11}\text{J}]$	$E_f [10^{-11}\text{J}]$	$\omega_{cf}[\text{fs}^{-1}]$	$\Delta\omega_i[\text{fs}^{-1}]$	$\Delta\omega_f[\text{fs}^{-1}]$	$f_3[\text{fs}^3]$	$f_2[\text{fs}^2]$
$\exp(-t^2/t_p^2)$	6.266	6.266	0	0.0800	0.7721	0	43.7905
$\text{sech}(t/t_p)$	5.733	5.733	0	0.0806	0.8466	0	32.6614
$\exp(-(t/t_p)^4)$	9.146	9.146	0	0.0798	0.6727	0	92.0258
Asimétrico 1	6.893	6.893	0	0.0816	0.7880	-7.2695×10^3	54.7241
Asimétrico 2	6.893	6.893	0	0.0816	0.7880	7.8379×10^3	54.7241

2.1. Algoritmo numérico

El método que se ha utilizado para resolver la ecuación 4 es el Split-Step Fourier Method, con el cual la solución de la ecuación 4 puede aproximarse de la siguiente forma;

$$\phi(z + \Delta z, t) \approx \exp(-i\hat{D}\Delta z) \exp(-i\hat{N}\Delta z) \phi(z, t), \quad (12)$$

la parte no lineal es una matriz diagonal y puede ser evaluada directamente, y la parte de la dispersión puede ser evaluada en el espacio de Fourier.

Remarcamos que el método utilizado es una aproximación porque los operadores \hat{D} y \hat{N} no conmutan. Sin embargo, considerando la fórmula de Baker-Hausdorff (Agrawal 2000), el error cometido es del orden Δz^2 . Teniendo en cuenta este desarrollo, es más preciso realizar el Split-Step Fourier Method de la siguiente manera;

$$\phi(z + \Delta z, t) \approx \exp(-i\hat{D}\frac{\Delta z}{2}) \exp(-i\hat{N}\Delta z) \exp(-i\hat{D}\frac{\Delta z}{2}) \phi(z, t), \quad (13)$$

esto significa, aplicar la dispersión y absorción durante $\Delta z/2$, después aplicar la no linealidad en todo el intervalo Δz , y nuevamente la dispersión en el otro intervalo $\Delta z/2$.

Los parámetros de control en el programa para todos los perfiles temporales son Δz , N (número de iteraciones) y P_{in} (potencia pico inicial), donde $L = N\Delta z = 0.2\text{m}$. Elegimos el criterio de utilizar la potencia pico, es decir, todos los pulsos tienen la misma potencia pico de entrada, lo que significa que no tienen la misma energía de entrada. Recordamos, como ejemplo, que la potencia pico es el parámetro natural con la que se caracterizan la formación del solitón de Townes.

3. RESULTADOS Y DISCUSIONES

En las Tablas 1, 2, 3, y 4 se presentan los resultados obtenidos en el trabajo. En ellas se presentan: La función del perfil temporal, la energía inicial $E_i[\text{J}]$, la energía final $E_f[\text{J}]$, el desplazamiento de la frecuencia central $\omega_{cf}[\text{fs}]$, la anchura espectral inicial

$\Delta\omega_i[\text{fs}^{-1}]$, la anchura espectral final $\Delta\omega_f[\text{fs}^{-1}]$ y los parámetros de ajuste de la fase $f_3[\text{fs}^3]$ y $f_2[\text{fs}^2]$.

En todas las Tablas de resultados se observa que la energía inicial es igual a la energía final, es decir, no existe pérdidas en la energía porque el Argón tiene un coeficiente de absorción despreciable (en el programa se utilizó $\alpha = 0$). Además, en el modelo de fibra no existe ningún otro término de pérdida, por lo cual, los resultados de la energía son una comprobación de que la simulación es correcta.

4. CASO I, SÓLO DISPERSIÓN

En esta primera sección de resultados consideramos únicamente los términos de dispersión y despreciamos los efectos no lineales. El chirp generado solo produce una modificación en la fase, pero la anchura espectral no es modificada porque los efectos de dispersión no generan nuevas frecuencias, solo producen un reordenamiento de las mismas. Por tanto, los resultados de $\Delta\omega_i = \Delta\omega_f$ son correctos.

El parámetro β_2 presenta mayor influencia que β_3 durante la propagación, es decir, la asimetría y la distorsión que induce β_3 es inapreciable en los perfiles temporales.

Los ajustes realizados a las fases espectrales de todos los perfiles temporales concuerdan con la GVD y la TOD introducida en la propagación en Argón a presión atmosférica de 0.2 m. Por tanto, los valores conseguidos en el ajuste de la fase espectral constituyen una indicación que los resultados numéricos son correctos.

Es importante resaltar que los perfiles temporales asimétricos tienen inicialmente una TOD $\neq 0$, esto implica que no ingresan con una fase plana como los pulsos simétricos. La aparición inicial de la TOD en la fase espectral puede ser atribuido porque los pulsos asimétricos presentan inicialmente una asimetría temporal notable (f_3 inicial del orden 10^3). En este contexto, los valores de f_3 que se presentan en la Tabla 1 son la diferencia de la TOD de salida y de entrada.

TABLA 3
CASO III; DISPERSIÓN MÁS SPM

Pulso	$E_i [10^{-11}\text{J}]$	$E_f [10^{-11}\text{J}]$	$\omega_{cf} [\text{fs}^{-1}]$	$\Delta\omega_i [\text{fs}^{-1}]$	$\Delta\omega_f [\text{fs}^{-1}]$	$f_3 [\text{fs}^3]$	$f_2 [\text{fs}^2]$
$\exp(-t^2/t_p^2)$	6.266	6.266	0	0.0800	0.7571	0.4313	46.5355
$\text{sech}(t/t_p)$	5.733	5.733	0	0.0806	0.8218	0.3566	35.7349
$\exp(-(t/t_p)^4)$	9.146	9.146	0	0.0798	0.6636	0.4353	94.2300
Asimétrico 1	6.893	6.893	0	0.0816	0.7596	-7.7056×10^3	54.9266
Asimétrico 2	6.893	6.893	0	0.0816	0.7629	7.7035×10^3	54.8775

TABLA 4
CASO IV; TODOS LOS EFECTOS

Pulso	$E_i [10^{-11}\text{J}]$	$E_f [10^{-11}\text{J}]$	$\omega_{cf} [\text{fs}^{-1}]$	$\Delta\omega_i [\text{fs}^{-1}]$	$\Delta\omega_f [\text{fs}^{-1}]$	$f_3 [\text{fs}^3]$	$f_2 [\text{fs}^2]$
$\exp(-t^2/t_p^2)$	6.266	6.266	0.0093	0.0800	0.7741	-30.7446	47.0923
$\text{sech}(t/t_p)$	5.733	5.733	0.0112	0.0806	0.8412	-18.9070	35.9442
$\exp(-(t/t_p)^4)$	9.146	9.146	0.0067	0.0798	0.688	-70.8221	102.6919
Asimétrico I	6.893	6.893	0.0109	0.0816	0.8812	-7.7595×10^3	74.8243
Asimétrico II	6.893	6.893	0.0079	0.0816	0.7015	7.6102×10^3	55.8122

5. CASO II, SOLO AUTO-MODULACIÓN DE FASE

Ahora consideramos solo un efecto no lineal, la auto-modulación de fase, y despreciamos los efectos de dispersión. En la Tabla 2 se presentan los resultados conseguidos en la propagación no lineal, se observa nuevamente que la frecuencia central no sufre un desplazamiento. Esto es correcto porque la automodulación de fase produce nuevas frecuencias o ensanchamiento espectral simétrico, lo que significa que el pulso después de la propagación no adquiere un valor de f_3 . Por lo cual, el chirp inducido por la automodulación de fase es producida por f_2 .

La simetría se rompe para el caso de los perfiles asimétricos, sin embargo el centro de gravedad (frecuencia central) permanece sin modificación para la potencia y duraciones del pulso elegidas en el programa.

Los resultados de la Tabla 2 muestran que el pulso secante hiperbólico tiene el mayor ensanchamiento espectral, y el pulso super-gaussiano presenta el menor ensanchamiento espectral.

En la Tabla 2 se puede observar que los perfiles asimétricos muestran un valor elevado de f_3 . Una posible explicación es: Como se explicó anteriormente, ellos ya ingresan con un valor significativo de TOD por la asimetría temporal. El SPM parece compensar el TOD inicial, reduciendo de manera significativa la componente cúbica de la fase espectral. Sin embargo, se mantienen las asimetrías temporales de los pulsos, cuyo origen está en la asimetría notable del espectro.

Los ajustes de fase tienen mucha sensibilidad con el intervalo del ajuste. Por este motivo, los ajuste de fase que se presentan en este trabajo deben considerarse como resultados cualitativos más que cuantitativos.

6. CASO III, DISPERSIÓN MÁS AUTOMODULACIÓN DE FASE

En la Tabla 3 presentamos los resultados considerando los efectos de dispersión y la automodulación

de fase. Se puede notar un ligero incremento de los coeficientes f_2 respecto al caso II, así mismo que $f_3 \neq 0$, lo que es lógico porque la dispersión contribuye al chirp en todos los ordenes. Sin embargo, el efecto no lineal es más dominante que los efectos de dispersión. Los perfiles asimétricos tienen un comportamiento parecido al caso II, donde tampoco se observa desplazamientos de la frecuencia central para la potencia y duraciones de pulsos utilizadas en este trabajo.

El ligero incremento de f_2 provoca incrementos en las anchuras temporales, y esto implica que las anchuras espectrales deben disminuir ligeramente, como se observa en la Tabla 3. Los valores obtenidos para f_3 en los pulsos asimétricos tienen la misma explicación que el caso II. Al igual que los dos anteriores casos, en la Tabla 3 se puede notar que la secante hiperbólica presenta la mayor anchura espectral después de la propagación no lineal.

7. CASO IV, TODOS LOS EFECTOS NO LINEALES Y DE DISPERSIÓN

En esta última sección consideramos los tres efectos no lineales; la automodulación de fase, el self-steepening y el efecto scattering Raman junto con los efectos de dispersión. Es importante remarcar que para activar el efecto del scattering Raman es necesario considerar que el pulso se propaga en un gas molecular.

En la Tabla 4 se puede notar que el pulso asimétrico 1 tiene el mayor ensanchamiento espectral, pero presenta parámetros de dispersión más complicadas de compensar. En general, los ensanchamientos espectrales tienen el mismo comportamiento que los obtenidos en los casos anteriores, es decir, la secante hiperbólica tiene el mayor espectro después de la propagación no lineal.

En la Figura 1 se muestran los perfiles temporales, perfiles espectrales en frecuencias y longitudes de onda, en ellas se pueden apreciar los efectos que producen el SPM, self-steepening y el efecto Raman (en-

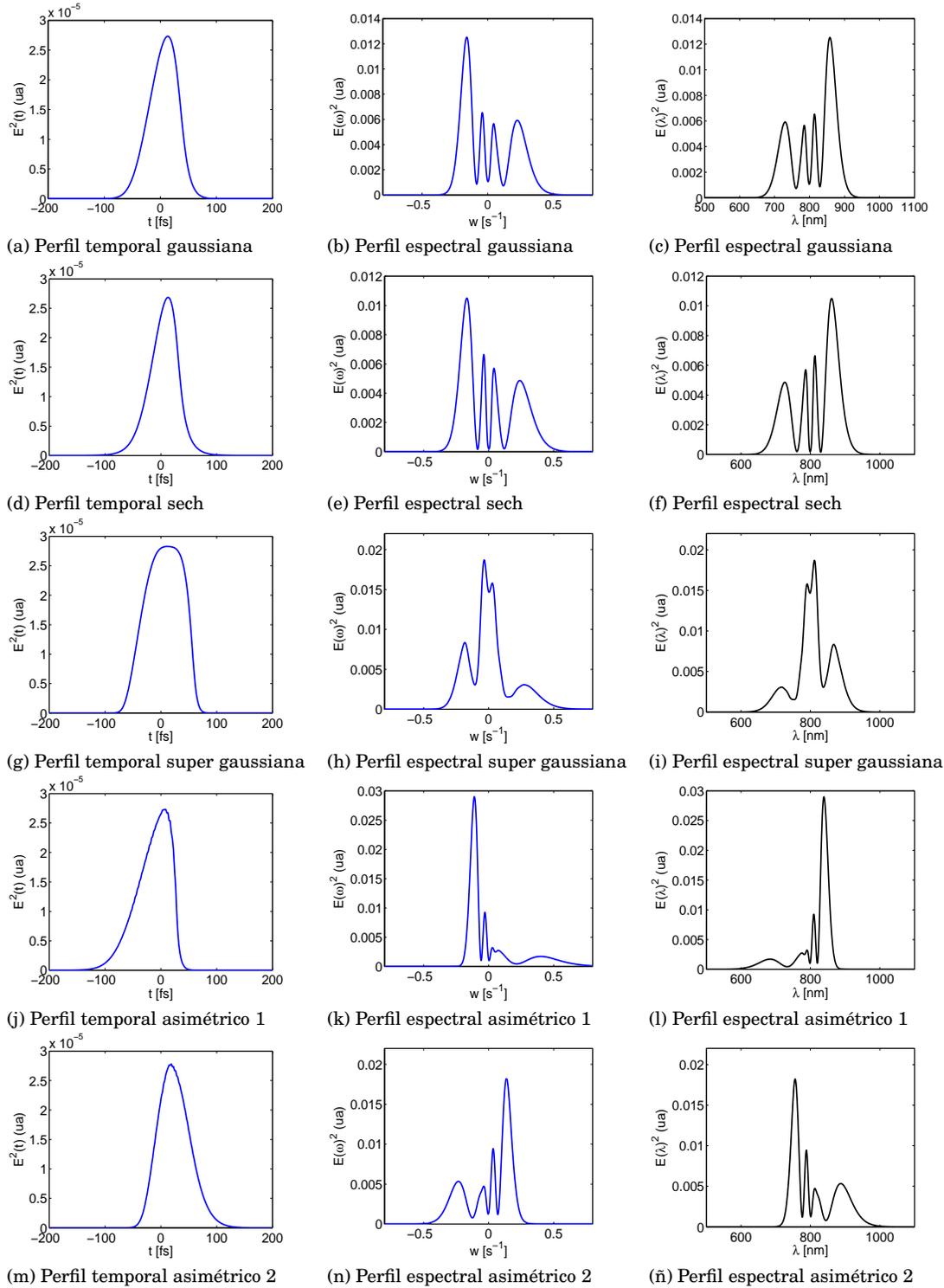


FIG. 1.— Perfiles temporales y espectrales (en unidades arbitrarias, ua) después de la propagación por fibra hueca; caso IV, todos los efectos de dispersión y no lineales

sanchamientos y asimetrías en los espectros y desplazamientos de la frecuencia central). Los valores numéricos de la *full width at half maximum* FWHM, del pulso límite de Fourier para los 5 perfiles utilizados son;

Gaussiana FWHM = 7.36 fs.

Secante hiperbólico FWHM = 6.66 fs.

Super-gaussiana FWHM = 6.89 fs.

Asimétrico 1 FWHM = 5.26 fs.

Asimétrico 2 FWHM = 7.92 fs.

Se puede notar que el pulso asimétrico 1 presenta la mejor compresión del pulso, pero tiene una compensación complicada en la fase. Sin embargo, como hasta ahora se ha estado observando en los casos II al IV, el pulso secante hiperbólico resulta ser adecuado para la mejor compresión y con una compensación menor de la fase en comparación con los otros pulsos estudiados.

8. CONCLUSIONES

Las conclusiones del presente trabajo son;

- Los pulsos gaussianos asimétricos presentan

intrínsecamente una TOD inicial que origina una fase espectral, y en general los pulsos asimétricos estudiados presentan compensaciones complicadas de la fase.

- En la propagación lineal, el chirp inducido por los efectos de dispersión de segundo y tercer orden son iguales para los diferentes perfiles temporales.
- La secante hiperbólica presenta mejores incrementos espectrales en todos los casos de la propagación no lineal, por lo cual, puede ser un perfil adecuado para la post-compresión, logrando alcanzar un pulso límite de Fourier de 6.66 fs. Sin embargo, considerando todos los efectos lineales y no lineales, el pulso asimétrico 1 presenta mayor espectro, y tiene un pulso límite de Fourier de 5.26 fs. Remarcamos que la asimetría intrínseca de los pulsos gaussianos asimétricos dificulta la compensación de la fase, así mismo son sensibles a pequeños incrementos de la potencia pico inicial.

REFERENCIAS

- Agrawal, G. P. 2000, Nonlinear Fiber Optics (University of Rochester, third Edition)
- Couairon, A., Chakraborty, H. S., & Gaarde, M. B. 2008, Phys. Rev. A, 77, 053814
- Couairon, A. & Mysyrowicz, A. 2007, Physics Reports, 441, 47
- Hauri, C. P., Kornelis, W., Helbing, F. W., Heinrich, A., Couairon, A., Mysyrowicz, A., Biegert, J., & Keller, U. 2004, Appl. Phys. B, 79, 673
- Mechain, G., D'Amico, C., Andre, Y.-B., Tzortzakis, S., Franco, M., Prade, B., Mysyrowicz, A., Couairon, A., Salmon, E., & Sauerbrey, R. 2005, Optics Communications, 247, 171
- Nisoli, M., Silvestri, S. D., & Svelto, O. 1997, Optics letters, 22, No. 8
- Santhanam, J. & Agrawal, G. P. 2003, Optics Communications, 222, 413

ESCENARIOS DE CAMBIO CLIMÁTICO EN EL SUR DEL DEPARTAMENTO DE LA PAZ:
PATACAMAYA Y CALACOTO
CLIMATE-CHANGE SCENARIOS IN THE SOUTH OF LA PAZ DEPARTMENT (BOLIVIA):
PATACAMAYA AND CALACOTO

ANDRÉS W. BURGOA MARIACA
Instituto Investigaciones Físicas
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz – Bolivia

RESUMEN

El presente estudio está encaminado a generar una representación mensual de la cantidad diaria de precipitaciones para los escenarios futuros 2020 y 2085 en las estaciones meteorológicas de Patacamaya y Calacoto. Para tal efecto se hizo uso del análisis de componentes principales en el dominio de la frecuencia y de la regionalización estadística. Tanto en Patacamaya como en Calacoto, los escenarios futuros reproducen bastante bien el patrón de la precipitación mensual en lo que respecta a la distribución intranual. Sin embargo, a nivel estacional, se observa en Patacamaya, para el verano austral, una virtual disminución en la cantidad de precipitación, mientras que en el invierno austral no se observa cambios significativos. En Calacoto, los escenarios futuros no muestran cambios significativos en la cantidad de precipitación tanto a nivel mensual como estacional.

Descriptores: cambio climático — Bolivia

Código(s) PACS: 92.70.-j, 93.30.Jg

ABSTRACT

This study sets out to generate a monthly representation of the pluvial precipitation for the future scenarios of 2020 and 2085 using data from the meteorological stations of Patacamaya and Calacoto. We analyzed the principal frequency components and statistical regionalization. In both stations our future scenarios reproduce fairly well the pattern of monthly precipitation with respect to its intra-annual distribution. However, taking into account seasonal differences, we observed in Patacamaya a virtual decrease in precipitation for the austral summer while during winter there was no significant change. In Calacoto, future scenarios did not show significant changes in precipitation for both monthly and season time periods.

Subject headings: climate change — Bolivia

1. INTRODUCCIÓN

Para fines del presente estudio, los escenarios climáticos SRES A2 y SRES B2 son los empleados y representan tanto los niveles medio-alto y medio-bajo de emisiones de gases de efecto invernadero (GEI). Así, el escenario A2 supone un mundo muy heterogéneo, preservación de las identidades locales, alta tasa de crecimiento poblacional, desarrollo económico regional, desarrollo económico más lento que en otras regiones y provocaría una degradación de la calidad del aire en gran parte del planeta, al aumentar los niveles de la concentración de fondo de O₃; mientras que el escenario SRES B2 se centra en el sostenimiento medio ambiental, es decir, un mundo con énfasis en las soluciones locales, un au-

mento continuo de la población menor que en A2, niveles intermedios de desarrollo económico.

Los modelos de circulación general de la atmósfera (GCMs, en inglés) son una herramienta para la investigación del clima y sus fluctuaciones. Un modelo de circulación general (MCG) es una representación espacial y temporal aproximada de los principales procesos físicos que ocurren en la atmósfera y sus interacciones con los demás componentes del medio ambiente. De su resolución se obtiene la evolución temporal y espacial (tridimensional) del sistema climático en función de las condiciones iniciales y de contorno elegidas y de los valores de ciertos parámetros climáticos (por ejemplo, la concentración de CO₂ atmosférico). Lo anterior se denomina experimento numérico, simulación climática o experi-

TABLA 1

SE MUESTRA DE ARRIBA HACIA ABAJO LA ESTADÍSTICA BÁSICA DE LA CANTIDAD DE PRECIPITACIÓN DIARIA EN PATACAMAYA Y CALACOTO.

No. de observaciones	Media	Varianza	Min.	Máx.
14975	1, 1	10, 7	0, 0	41, 3
No. de observaciones	Media	Varianza	Min.	Máx.
11307	1, 1	11, 2	0, 0	46, 5

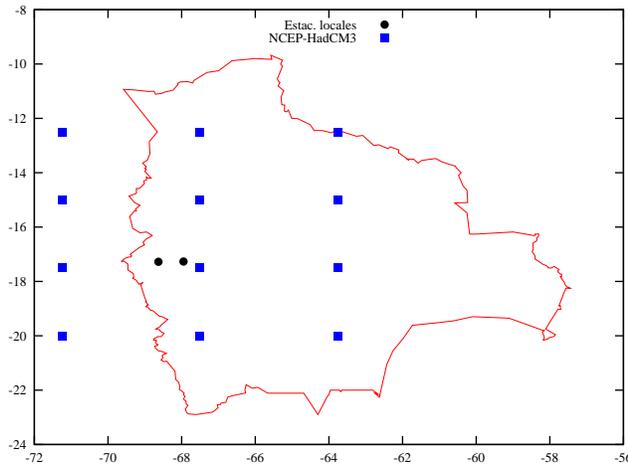


FIG. 1.— Se muestra en cuadros los puntos de grilla del NCEP Reanálisis y el HadCM3 en círculos negros para las estaciones meteorológicas de Patacamaya y Calacoto.

mento climático y puede orientarse tanto a la descripción del clima contemporáneo (experimentos de control), como a la investigación del clima resultante de uno o más cambios en los parámetros climáticos. Sin embargo, los MCGs no pueden reproducir hasta el momento los detalles de las condiciones climáticas regionales tanto a escala temporal como espacial. Por lo tanto, las salidas de los MCGs poseen -se dice- resolución gruesa (generalmente mayores a los $2, 0^{\circ}$ tanto en latitud como en longitud) para el estudio del impacto del cambio climático sobre una determinada región. Consecuentemente, existe una gran necesidad de desarrollar herramientas para regionalizar las predicciones que generan los MCGs sobre el cambio climático a escalas regionales, locales o de una estación en particular.

Actualmente existen dos grandes categorías de regionalización (Wilby y otros, 2002b): las técnicas de regionalización dinámica, basadas en la extracción de la información a escala regional de los datos a gran escala (GCM) que están apoyados en el modelado de los procesos dinámicos del clima regional y los procedimientos de regionalización estadística (o empírica) que son relaciones empíricas entre las variables atmosféricas de gran escala y los parámetros ambientales observados en superficie. La experiencia en otras latitudes ha demostrado que los métodos empleados en la regionalización estadística ofrece varias ventajas prácticas sobre los dinámicos, en especial por su flexibilidad y adaptación a objetivos específicos de un determinado estudio.

TABLA 2

SE MUESTRA LA LISTA DE VARIABLES ATMOSFÉRICAS PARA LOS DATOS DEL NCEP REANÁLISIS.

Variable	Niveles de Medición	
Presión a nivel del mar		
Intensidad del flujo de aire	Superficie	
Velocidad zonal	Superficie	
velocidad meridional	Superficie	
Vorticidad	Superficie	
Dirección del viento	Superficie	
Divergencia	Superficie	
Intensidad del flujo de aire	850 hPa	500 hPa
Viento zonal	850 hPa	500 hPa
Viento meridional	850 hPa	500 hPa
Vorticidad	850 hPa	500 hPa
Altura geopotencial	850 hPa	500 hPa
Dirección del viento	850 hPa	500 hPa
Divergencia	850 hPa	500 hPa
Humedad relativa	850 hPa	500 hPa
Humedad específica	Superficie	
Humedad relativa	Superficie	
Temperatura media	2 [m]	

2. CASO DE ESTUDIO

Las estaciones meteorológicas de Patacamaya ($-17, 23S$; $-67, 92W$; $3807m.s.n.m.$) y de Calacoto ($-17, 24S$; $-68, 76W$; $3822m.s.n.m.$) se encuentran ubicadas a $100 [km]$ y $125 [km]$ de la ciudad sede de gobierno, entre ambas estaciones existe aproximadamente $100 [km]$, el clima en ambas poblaciones es muy cambiante, en la época de verano se tiene un calor seco con un invierno indolente. La Tabla 1 nos proporciona la estadística básica de las precipitaciones a nivel diario en las mencionadas estaciones. Se eligieron 12 puntos de grilla para el presente estudio, estas comprenden los datos de NCEP Reanálisis y los escenarios de clima futuro (HadCM3), tal como se ilustra en la Figura 1. Las secciones 4 y 5 ejemplifican la metodología seguida.

3. DATOS Y METODOLOGÍA

Dos son las series de datos utilizados: los datos provenientes de estaciones meteorológicas y los datos de NCEP Reanálisis. Además se incluye un escenario de clima futuro (HadCM3) con dos escenarios de emisión de CO_2 disponibles, SRES A2 y SRES B2. Los datos locales incluyen precipitación diaria para el período 1961-2001 y 1970-2000; registrados en las estaciones de Patacamaya y Calacoto. Los datos de NCEP Reanálisis cubren el mismo período que los datos locales y los escenarios SRES A2 y SRES B2 poseen una data de 1961-2099.

El modelo de regionalización estadística hace uso de los datos de NCEP Reanálisis como predictores (ver Tabla 2) y los datos locales como predictandos. La serie temporal de Patacamaya (Calacoto) para el período 1961-1980 (1970-1985) es utilizado para la etapa de calibración y los restantes del 1981-2001 (1986-2000) como la validación. Las salidas estadísticas son analizadas y comparadas a la estadística de los datos observados y evaluadas para el mismo período de corrida de los modelos.

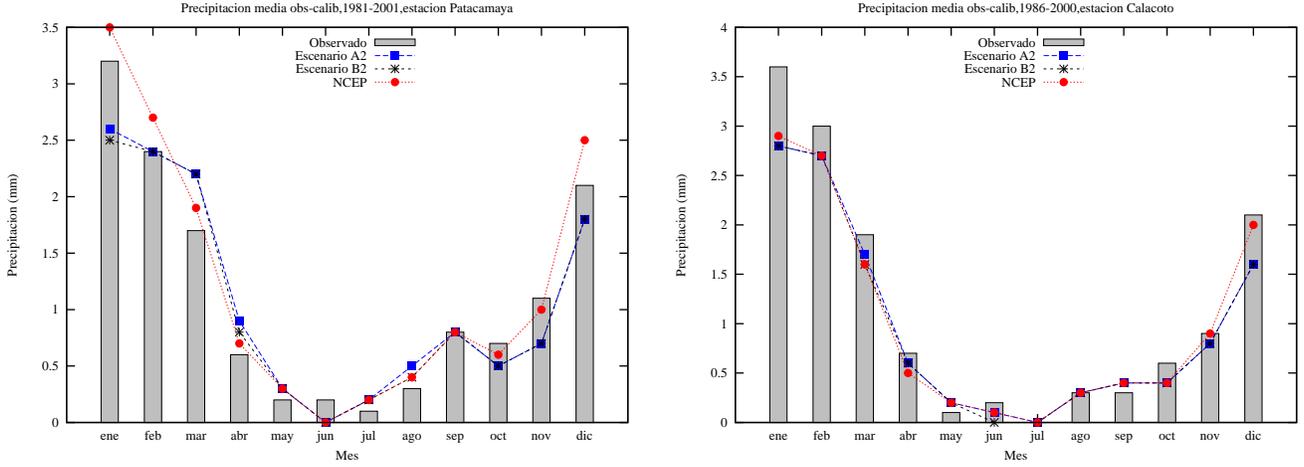


FIG. 2.— La Figura muestra de izquierda a derecha, las validaciones efectuadas a los datos observados mediante el NCEP Reanálisis y los escenarios futuros SRES A2 Y SRES B2.

4. METODOLOGÍA

4.1. Análisis de componentes principales en el dominio de la frecuencia

El análisis de componentes principales tiene como objetivo la reducción del número de variables. En tal sentido, el análisis de componentes principales transforma el conjunto de variables originales en un conjunto más pequeño de variables, las cuales son combinaciones lineales de las primeras, que contienen la mayor parte de la variabilidad conjunta presente en el conjunto inicial. Stoffer (1998), propone un refinamiento en el trabajo de Brillinger (1981) para calcular las componentes principales de $\{X(t)\}$.

En un contexto general, la filosofía de Stoffer se basa en la Cobertura Espectral. La técnica está basada en la detección de ciclos comunes en las series temporales multivariadas.

La idea es: para una frecuencia $\omega \in [0, 2\pi]$, se busca un vector complejo p-dimensional $c(\omega)$ tal que

$$\frac{c(\omega)' S_X(\omega) c(\omega)}{c(\omega)' c(\omega)}$$

sea máximo.

Se encuentra que este vector es el vector propio de $S_X(\omega)$ correspondiente al máximo valor propio, digamos $\lambda_1(\omega)$. Sea $V_1(\omega)$ este vector propio, Stoffer define

$$\begin{aligned} X_{1t}(\omega) &= [V_1(\omega)]' X_t \\ X_{1t}(\omega) &= V_1^{(1)}(\omega) X_{1t} + \dots + V_1^{(r)}(\omega) X_{rt}, \end{aligned}$$

con $V_1(\omega) = (V_1^{(1)}(\omega), \dots, V_1^{(r)}(\omega))'$, como la primera componente principal a la frecuencia ω . A la función

$$\max_{c(\omega) \neq 0} \frac{c(\omega)' S_X(\omega) c(\omega)}{c(\omega)' c(\omega)},$$

con $\omega \in [0, 2\pi]$, se denomina cobertura espectral del proceso. En las frecuencias ω donde esta función es

TABLA 3

DE IZQUIERDA A DERECHA, LAS TABLAS ILUSTRAN EL ACOPLAMIENTO ENTRE LAS VARIABLES PREDICTANDO Y LOS PREDICTORES PARA LA ESTACIÓN METEOROLÓGICA DE PATACAMAYA Y PARA LA DE CALACOTO.

Patacamaya	SRES A2, SRESB2
Precipitación	ζ_{850}, HR_{sup}
Calacoto	SRES A2, SRES B2
Precipitación	HE_{sup}

máxima, los ciclos asociados son compartidos por la mayoría o todas las series.

Obsérvese que

$$Var(X_{1t}) = [V_1(\omega)]' \Gamma_X(0) V_1(\omega).$$

5. REGIONALIZACIÓN ESTADÍSTICA

5.1. Modelo de calibración

La calibración se realizó de manera independiente para los datos locales de Precipitación diaria en las estaciones de Patacamaya y Calacoto. La Tabla 3 muestra la conexión entre las variables predictando y los predictores para los escenarios futuros de cambio climático SRES A2 y SRES B2.

La Tabla 3 explica la relación entre predictores y predictando para la estación meteorológica de Patacamaya y Calacoto. El modelo explicativo para las precipitaciones diarias en las citadas estaciones es:

$$P_{Patacamaya} = P_{Patacamaya}(\zeta_{850}, HR_{sup}) \quad (1)$$

$$P_{Calacoto} = P_{Calacoto}(HE_{sup}) \quad (2)$$

5.2. Modelo de validación

A partir de la estimación de los modelos dados en las ecuaciones 1 y 2 para las estaciones meteorológicas de Patacamaya y Calacoto, se selecciono el período de validación para las estaciones locales los años 1981-2000 y 1985-2000. Los resultados pueden apreciarse en la Figura 2. Dichos períodos se los contrasto entre el NCEP Reanálisis, escenarios futuros SRES A2, SRES B2 y los datos observados para la misma época.

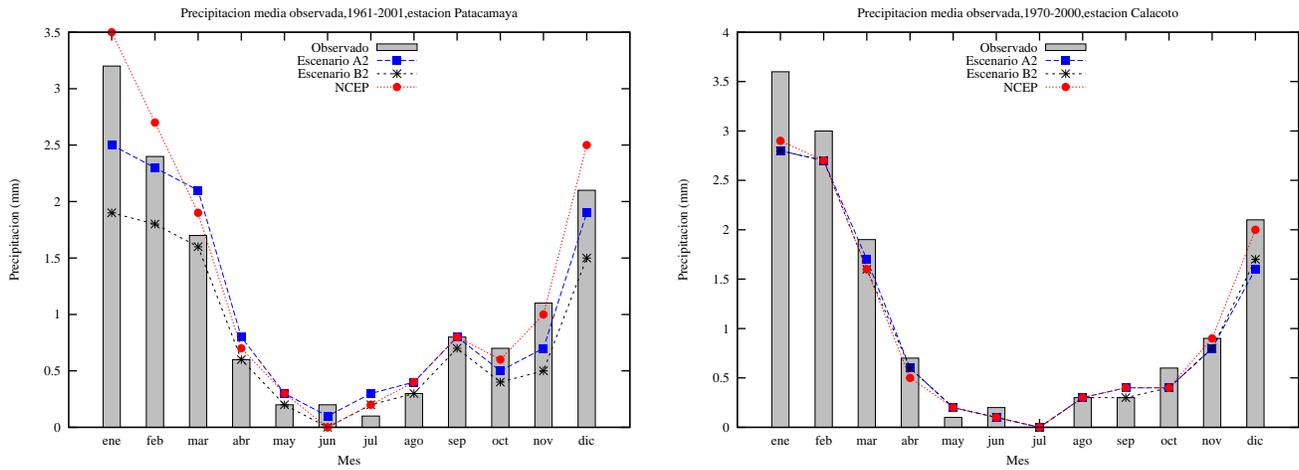


FIG. 3.— La Figura ejemplifica de izquierda a derecha, la similitud en el patrón de comportamiento mensual de las precipitaciones en las estaciones meteorológicas de Patacamaya y Calacoto. En estas, tanto el NCEP Reanálisis como los escenarios de cambio futuro, subestiman los datos observados en las localidades mencionadas.

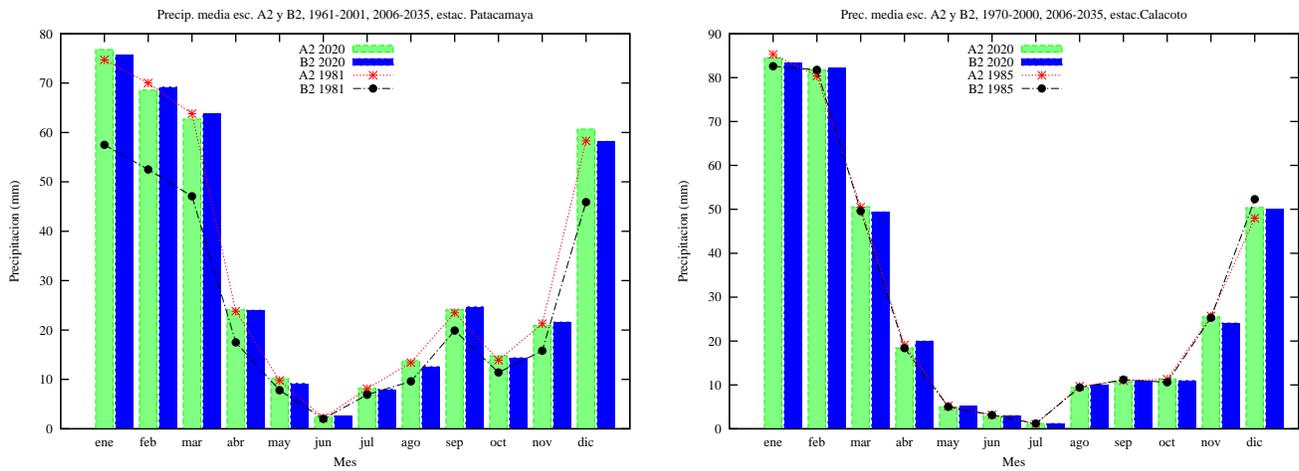


FIG. 4.— Se ilustra de izquierda a derecha la comparación de la lluvia acumulada mensual entre los escenarios SRES A2 y SRES B2 generados para el período 1961-2001 (1981), período 1970-2000 (1985) para el escenario futuro 2006-2035 (2020) en las estaciones de Patacamaya y Calacoto.

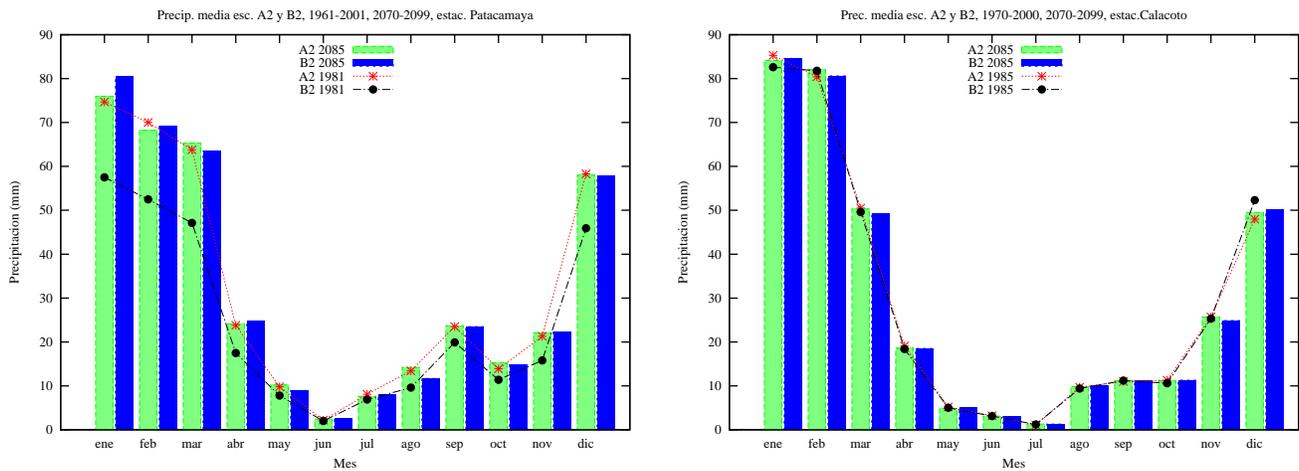


FIG. 5.— Se ilustra de izquierda a derecha la comparación de la lluvia acumulada mensual entre los escenarios SRES A2 y SRES B2 generados para el período 1961-2001 (1981), período 1970-2000 (1985) para el escenario futuro 2070-2099 (2085) en las estaciones de Patacamaya y Calacoto

6. PRECIPITACIÓN

La variabilidad interanual de la precipitación observada en las estaciones de Patacamaya y Calacoto reportan un período seco en el invierno Austral y una lluviosa en el verano correspondiente. Se observa una estructura monomodal, caracterizada por meses con ausencia de lluvias, en especial en los meses de mayo, junio y julio; mientras que en los meses de diciembre, enero, febrero y marzo con meses lluviosos. Dicho comportamiento se extiende a gran parte del territorio nacional.

6.1. Comparación precipitación observada, modelo NCEP y escenarios, 1961-2000

6.1.1. Patacamaya

Los modelos de NCEP Reanálisis y de escenarios SRES A2 y SRES B2 reproducen bien el patrón de la lluvia mensual (Figura 3), en lo que se refiere a la distribución intranual, tales como: la estacionalidad (las épocas calurosas o relativamente frescas, un período frío o invernal, con descenso en las precipitaciones a partir de la llegada del otoño hasta el invierno Austral). Sin embargo, cuantitativamente tanto los resultados del NCEP Reanálisis, como los escenarios SRES A2 y SRES B2 generados para la climatología 1961-2001, subestiman los registros de la precipitación en un -5.4% en un caso y en el otro en -68% de la lluvia anual, en el caso mensual, SRES A2 sobrestima para el mes de marzo en un 2,7%. En los meses de la estación seca, especialmente en el mes de julio, esas sobrestimaciones son mayores en un 1,4% más.

6.1.2. Calacoto

Los modelos de reanálisis NCEP Reanálisis y de escenarios SRES A2 y SRES B2 reproducen bien el patrón de la lluvia mensual (Figura 3), en lo que se refiere a la distribución intranual, tales como: la estacionalidad (las épocas calurosas o relativamente frescas, un período frío o invernal, con descenso en las precipitaciones a partir de la llegada del otoño hasta el invierno Austral). Sin embargo, cuantitativamente tanto los resultados del NCEP Reanálisis, como los escenarios SRES A2 y SRES B2 generados para la climatología 1970-2000, subestiman los registros de la precipitación en un -1,8% en un caso y en el otro en -18.5% de la lluvia anual, en el caso mensual ambos escenarios sobrestiman para el mes de mayo un 0,2%. Para la estación del invierno Austral, el mes de julio no muestra cambio significativo en la cantidad de precipitación.

6.2. Análisis entre escenarios de precipitación SRES A2 y SRES B2, 1961-1990 y futuro 2020 y 2085

6.2.1. Patacamaya

La relación entre escenarios actuales y futuros para 2020 (promedio 2006-2035) se ilustra gráficamente en la figura 4, observándose que para el año 2020 no habría cambios significativos en el patrón de lluvias mensual. Sin embargo, los acumu-

TABLA 4

DE IZQUIERDA A DERECHA LAS TABLAS ILUSTRAN LA CANTIDAD DE PRECIPITACIÓN Y ESCENARIOS FUTUROS SRES A2, SRES B2 PARA 2020 (2006-2035) Y 2085 (2070-2099) MENOS ESCENARIOS GENERADOS 1985 (1961-2001), ESTACIONES DE PATACAMAYA Y CALACOTO.

Precipitación media Patacamaya

Mes	Actual	Cambio climático (%)			
		2020 (2006-2035)		2085 (2070-2099)	
		A2	B2	A2	B2
Enero	98.8	-5.6	-6.0	-5.8	-4.7
Febrero	67.4	0.2	0.4	0.2	0.4
Marzo	53.2	2.4	2.7	3.1	2.6
Abril	17.8	1.6	1.6	1.6	1.7
Mayo	6.2	1.0	0.7	1.0	0.6
Junio	5.3	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7
Julio	3.3	1.2	1.2	1.1	1.2
Agosto	9.4	1.1	0.8	1.2	0.5
Septiembre	23.8	0.0	0.2	0.0	0.0
Octubre	21.0	-1.6	-1.7	-1.4	-1.6
Noviembre	31.8	-2.8	-2.6	-2.5	-2.4
Diciembre	65.8	-1.3	-1.9	-2.0	-2.0
Anual	403.8	-4.2	-5.1	-4.2	-4.2

Precipitación media Calacoto

Mes	Actual	Cambio climático (%)			
		2020 (2006-2035)		2085 (2070-2099)	
		A2	B2	A2	B2
Enero	112.4	-7.9	-8.2	-8.0	-7.9
Febrero	83.4	-0.6	-0.3	-0.3	-0.8
Marzo	59.4	-2.5	-2.8	-2.5	-2.9
Abril	19.9	-0.4	0.0	-0.3	-0.4
Mayo	4.1	0.2	0.3	0.1	0.2
Junio	4.9	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
Julio	1.2	0.0	0.0	0.0	0.0
Agosto	10.2	-0.2	0.0	-0.1	0.0
Septiembre	10.5	0.0	0.1	0.1	0.2
Octubre	18.0	-1.8	-1.9	-1.9	-1.9
Noviembre	26.6	-0.3	-0.7	-0.2	-0.4
Diciembre	65.2	-4.2	-4.3	-4.4	-4.3
Anual	415.7	-18.6	-18.6	-18.2	-18.8

lados totales (anuales) no disminuirían tan significativamente en la mayoría de los meses, excepto en el escenario B2 una disminución para el mes de diciembre en 0,6%, estimándose una disminución del 5,1% en la precipitación promedio anual, ver Tabla 4.

Hacia finales del presente siglo XXI (2085), los escenarios futuros y actuales siguen el mismo patrón de comportamiento mensual en las precipitaciones, excepto en el escenario SRES B2, el cual subestima la climatología 1961-2001, ver Figura 4. Sin embargo, se evidencian reducciones en la lluvia durante la primavera y verano Austral, en especial para el mes de diciembre (ver Tabla 4). Dichas reducciones alcanzan su pico en un 5,8% en el escenario SRES A2 (2085).

6.2.2. Calacoto

La relación entre escenarios actuales y futuros para 2020 (promedio 2006-2035) se muestra en la figura 5, se observa que para el año 2020 no se evidencian cambios significativos en el patrón de lluvias mensual. Los acumulados totales para las estaciones tanto del invierno como verano Austral, no muestran cambios importantes a lo largo de todo el año, es decir, tanto los escenarios futuros como los actuales muestran un mismo patrón de comportamiento en las precipitaciones, tal como se ejemplifica en la Tabla 4.

Hacia finales del presente siglo XXI (2085), los escenarios futuros y actuales siguen el mismo patrón de comportamiento mensual en las precipitaciones. Sin embargo, se evidencian para el mes de diciembre reducciones de hasta el 8,0% (ver Tabla 4) y de un 18,8% en la precipitación anual.

7. CONCLUSIONES

7.1. Patacamaya

El modelo de NCEP Reanálisis como el modelo de escenarios futuros SRESA2 y SRESB2, reproducen bastante bien la distribución intranual en lo que respecta a la estacionalidad (período de lluvias y estiaje), el verano Austral con diciembre-enero-febrero (DEF) y el invierno Austral con junio-julio-agosto (JJA), se observa una subestimación en el escenario B2 para los valores de la precipitación mensual promedio durante la época lluviosa observada, la reducción alcanza el 37% de lluvia anual y una reducción del 14% mensual para el mes de enero.

Los escenarios futuros indicarían disminuciones de la precipitación media anual hasta de un 5,1% para

2020 (B2) y para 2085 hasta un 4,2% (A2 y B2), con respecto a 1961-2001.

Los escenarios futuros SRESA2 y SRESB2 para los acumulados de la lluvia mensual, en los años 2020 y 2085, muestran el mismo patrón actual de régimen de lluvia intranual. Sin embargo, dichos escenarios muestran reducciones e incrementos en la cantidad de lluvia, las cuales serían después de 2020, de más de un 3,1% en el mes de marzo para el escenario SRESA2 para 2085 y una reducción del 4.7% en el escenario SRESB2 para 2085.

7.2. Calacoto

Tanto el modelo de reanálisis NCEP Reanálisis como los escenarios futuros SRESA2 y SRESB2, reproducen bastante bien la distribución intranual en lo que respecta a la estacionalidad (período de lluvias y estiaje). El verano Austral con los meses de diciembre-enero-febrero (DEF) y el invierno Austral con junio-julio-agosto (JJA), en estos se observan subestimaciones en los valores en la precipitación mensual promedio durante todo el año, las mayores subestimaciones se observan en los meses de diciembre y enero con reducciones del orden de un 5,0%.

Los escenarios futuros no evidencian disminuciones significativas de la precipitación media anual para ambos escenarios SRESA2 y SRESB2, con respecto a 1961-2001.

Los futuros escenarios SRESA2 y SRESB2 de los acumulados de la lluvia mensual, para los años 2020 y 2085, muestran el mismo patrón actual de régimen de lluvia intranual. En consecuencia, dichos escenarios no evidencian reducciones o incrementos en la cantidad de lluvia.

REFERENCIAS

- Bettoli, M. L. & Penalba, O. C. 2008, Downscaling daily rainfall in La Plata basin: statistical approach (UBA, Ciudad Universitaria, Argentina)
- Brillinger, D. R. 1981, Time Series: Data Analysis and Theory (Holden-Day, San Francisco)
- Cavazos, T. & Hewitson, B. C. 2005, Climate Research, 28, 95
- Johns, T. C., Carnell, R. E., Crossley, J. F., Gregory, J. M., Mitchell, J. F. B., Senior, C. A., Tett, S. F. B., & Wood, R. A. 1997, Climate Dynamics, 13, 103
- Kalnay, E., Kanamitsu, M., Kistler, R., et al. 1996, Bulletin of the American Meteorological Society, 77, 437
- Stoffer, D. S. 1999, J. Amer. Statist. Assoc., 94, 1341
- Wilby, R. L., Conway, D., & Jones, P. D. 2002b, Hydrological Processes, 16, 1215
- Zorita, E. & von Storch, H. 1999, Journal of Climate, 12, 2474

SUCESIÓN GENERALIZADA DE FIBONACCI APLICADA A CIRCUITOS TIPO ESCALERA* GENERALIZED FIBONACCI SEQUENCE APPLIED TO LADDER CIRCUITS

DIEGO SANJINÉS C.

Universidad Mayor de San Andrés, Carrera de Física
c 27 Cota–Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz–Bolivia

RESUMEN

El uso de las fracciones continuas y su conexión con la sucesión de Fibonacci en la teoría de los circuitos eléctricos tipo escalera no es nuevo, pero es susceptible de plantearse de otras maneras a fin de ganar una visión desde otra perspectiva de un mismo problema, que es lo que se hace en este trabajo. Se presenta pues una revisión de las técnicas tradicionales relevantes, a través de una generalización de la sucesión de Fibonacci más amplia y cómoda que permite obtener los mismos resultados sin necesidad de fabricar relaciones auxiliares, como por ejemplo, los polinomios de Morgan-Voyce. Los resultados centrales de este trabajo corresponden al cálculo de las corrientes y voltajes nodales para un circuito tipo escalera y el voltaje a lo largo de una línea de transmisión continua. Para ello se utiliza técnicas del formalismo matricial que comprenden el cálculo de eigenvalores, la diagonalización y la potenciación de matrices de 2×2 .

Descriptor: física general — teoría de circuitos

Código(s) PACS: 01.55.b , 84.30.Bv

ABSTRACT

The use of continuous fractions and their connection to the Fibonacci sequence as part of the theory of ladder-type electric circuits is not a new issue. However, it is a matter that is improvable in order to gain an insight into the same issue but from a different perspective. In this work: we present an overview of traditional techniques through the use of a generalization of the Fibonacci sequence which is broader and easier to apply, as well as, leading to the same results without invoking other special relations, as, for example, the Morgan-Voyce polynomials. The results in this work correspond to the nodal currents and voltages for a ladder circuit and the voltage along a continuous transmission line. We use the techniques of the matrix formalism: eigenvalues, diagonalization and potentiation of 2×2 matrices.

Subject headings: general physics — circuit theory

1. INTRODUCCIÓN

Los números de Fibonacci (o la sucesión del mismo nombre: $F = \{a_n\}$) se presentan usualmente al estudiante en los primeros cursos de alguna carrera de ingeniería o ciencias como un ejercicio de computación recursiva, pues su fórmula generatriz es

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n > 2). \quad (1)$$

Así, F queda definida al especificar los dos primeros términos a_1, a_2 . La forma usual de F corresponde a la elección (arbitraria) $a_1 = a_2 = 1$:

$$F = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots \quad (2)$$

La convención acostumbrada que designa una su-

cesión *generalizada* de Fibonacci es elegir $a_1 = \alpha$ y $a_2 = \beta$ (ver, por ejemplo, Horadam 1961 y Basin 1963), donde el caso especial de $\alpha = \beta = 1$ corresponde a F . Sin embargo, en este trabajo se referirá simplemente a una sucesión de Fibonacci como aquella que cumpla la relación (1) *independientemente* de los valores de a_1 y a_2 , de tal forma que la designación de sucesión “generalizada” se aplique de una forma más general (y útil) para los fines de este trabajo.

A propósito de los números de Fibonacci, éstos tienen una larga y venerable tradición cuyos aspectos generales se pueden resumir a continuación. En 1202, Leonardo de Pisa, hijo del comerciante Bonaccio y conocido como Fibonacci (i.e., Filius Bonacci=hijo de Bonaccio) publicó la obra “Liber Abaci” (libro del ábaco) donde trató matemáticamente un problema muy popular en aquellos días: la multiplicación de una población de conejos a partir de una pareja inicial (Vorobyov 1973). Ésta fue la primera ocasión en que apareció de manera documentada la

*Este trabajo se publicó originalmente como un artículo arbitrado en la revista ContactoS 6, 80, 1992 (Univ. Autónoma Metropolitana, México D.F.). Se re-edita en este número de la *Revista Boliviana de Física* debido al posible interés pedagógico que pueda tener para nuestros lectores.

sucesión F que desde entonces se atribuye a Fibonacci. En el siglo XVII, J. Kepler re-descubrió esta sucesión, lo que motivó aun su estudio; algunos nombres relacionados con ello son: J. Binet, B. Lamé, E. Catalán, E. Lucas. A propósito de este último (s. XIX), se conoce como "números de Lucas" aquellos que corresponden a la sucesión F con valores iniciales $a_1=2$ y $a_2=1$. Una cronología reciente y muy resumida de actividades y publicaciones relevantes puede ser la siguiente:

1959.- Morgan-Voyce A.M, "Ladder Network Analysis using Fibonacci numbers" (Morgan-Voyce 1959).

1961.- N. Vorobyov, "Fibonacci numbers" (Vorobyov 1973).

1963.- V. Hoggat funda la "Fibonacci Association" y se publica el "Fibonacci Quarterly". Se organiza las conferencias "Fibonacci" en California (EUA) anualmente hasta 1979.

1969.- V. Hoggat, "Fibonacci and Lucas numbers".

1984, 1986, 1988.- Conferencias internacionales (1ra, 2da y 3ra en Grecia (Lahr 1986), EUA e Italia respectivamente) sobre los números de Fibonacci y sus aplicaciones.

Actualmente existe una gran variedad de aplicaciones de los números de Fibonacci en distintos campos, donde se destaca el uso de diversas relaciones derivadas de generalizaciones de la fórmula recursiva (1), como es el caso de los polinomios de Morgan-Voyce (Morgan-Voyce 1959, Lahr 1986). Una aplicación muy común es aquella referida a los circuitos eléctricos tipo escalera, donde se da una especie de escenario natural para la aparición de los números de Fibonacci. Es aquí donde surge la motivación para este trabajo.

2. FORMALISMO MATRICIAL Y SUCESIÓN GENERALIZADA DE FIBONACCI

Uno de los problemas centrales de una sucesión recursiva con una relación generatriz como es el caso de (1), es hallar una fórmula para el n -ésimo término como una función de n :

$$a_n = f(n). \quad (3)$$

Para el caso de (1), J. Binet dedujo ingeniosamente dicha fórmula (Vorobyov 1973):

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad (4)$$

Una extensión para un caso más general de (1): $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ ($A, B \geq 1, n > 2$) se logra de manera inmediata a través del mismo procedimiento original de Binet (Kiss 1986).

Otra forma equivalente de obtener el mismo resultado (4) es a través del formalismo matricial. Así, la relación de recurrencia (1) se puede representar por

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Si se escribe $x_n = (a_n, a_{n-1})$, la relación recursiva (5) se puede aplicar $n-2$ veces para obtener $x_n = M^{n-2} x_2$.

Si se conoce el resultado de M^{n-2} , entonces ciertamente se conocerá x_n a partir del vector inicial x_2 . Para tal efecto se debe resolver el problema de eigenvalores de M , es decir, obtener el valor de λ de la ecuación de eigenvalores $Mz = \lambda z$, lo que da lugar al polinomio característico cuyas raíces son

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}. \quad (6)$$

El siguiente paso es diagonalizar M , esto es, encontrar otra matriz D tal que $M_D = D^{-1} M D$ sea una matriz diagonal. El resultado de dicha diagonalización es

$$D = \frac{1}{\sqrt{\alpha - \beta}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Así,

$$x_n = M^{n-2} x_2 = D M_D^{n-2} D^{-1} x_2. \quad (8)$$

Teniendo además en cuenta que los eigenvalores α y β tienen las propiedades

$$\alpha\beta = -1, \quad \alpha^2 = 1 + \alpha, \quad \beta^2 = 1 + \beta, \quad (9)$$

se obtiene finalmente de x_n que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n), \quad (10)$$

que es la fórmula de Binet (4).

El método matricial para obtener a_n es particularmente adecuado para calcular el n -ésimo término de una sucesión aún más general, ya que el criterio original de Binet para obtener (4) no se puede aplicar al caso de una relación de recursividad del tipo $a_n = A_n a_{n-1} + B_n a_{n-2}$ ($A_n, B_n \neq 1, n > 2$), que se puede designar como *sucesión generalizada de Fibonacci*. Un caso particular de esta relación que conviene para los fines específicos de este trabajo es

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + a_{n-2} & (n \text{ impar}) \\ R a_{n-1} + a_{n-2} & (n \text{ par}, R \neq 1) \end{cases}. \quad (11)$$

Se asignará el símbolo G para el conjunto de los términos a_n dados por (11). En el formalismo matricial la relación de recurrencia (11) se escribe (para n par) como

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} R+1 & R \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

que se puede escribir como $x_n = T x_{n-2}$; esta relación se aplica de manera repetida para un n par ($n \geq 4$): $x_n = T^{n/2-1} x_2$.

Ya que la matriz T (con eigenvalores λ_1, λ_2) se puede diagonalizar, entonces se obtiene finalmente a_n :

$$a_n = \frac{R}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[\lambda_1^{n/2-1} \left(a_2 \frac{1 - \lambda_1}{R} - a_1 \right) - \lambda_2^{n/2-1} \left(a_2 \frac{1 - \lambda_2}{R} - a_1 \right) \right] \quad (n \geq 4). \quad (13)$$

Como un ejemplo ilustrativo, la sucesión correspondiente a $R=2$ y $a_1=a_2=1$ es $G = 1, 1, 2, 5, 7, 19, 26, 71, \dots$. Usando la expresión (13) se obtiene

$$a_n = \frac{1}{2} \left[\left(2 + \sqrt{3} \right)^{n/2-1} \left(\sqrt{3} + 1 \right) - \left(2 - \sqrt{3} \right)^{n/2-1} \left(\sqrt{3} - 1 \right) \right], \quad (14)$$

de donde se calcula directamente $a_4=5, a_6=19, a_8=71$.

Aunque no es un misterio, siempre es interesante notar cómo las expresiones claramente irracionales de (14) se “ponen de acuerdo” para dar por resultado sólo números naturales. Esto es una consecuencia de las propiedades correspondientes a (9) para el caso de las sucesiones generalizadas G .

3. FRACCIONES CONTINUAS

Una aplicación interesante de las sucesiones G surge al expresar una fracción continua W como la razón entre dos términos consecutivos de G . Para ver esto consideremos el tratamiento que hace Vorobyov (1973) de las fracciones continuas, adoptando la notación práctica de Hall & Knight (Hall & Knight 1948). Considérese entonces la fracción continua dada por

$$W = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_n}}} \equiv q_0 + \frac{1}{q_1} \frac{1}{q_2} \dots \frac{1}{q_n}. \quad (15)$$

Definiendo las razones (o “convergentes”)

$$\frac{P_0}{Q_0} = q_0, \quad \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}, \quad \text{etc.}, \quad (16)$$

el valor de W se puede expresar por $W=P_n/Q_n$. Tales convergentes satisfacen las siguientes propiedades (Vorobyov 1973):

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k q_{k+1} + P_{k-1}, \\ Q_{k+1} &= Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}, \\ P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1} &= (-1)^k. \end{aligned} \quad (17)$$

A continuación consideremos la fracción continua (con N impar)

$$Y = R + \frac{1}{1 + \frac{1}{R + \frac{1}{1 + \frac{1}{R + \dots + \frac{1}{R + \frac{1}{1}}}}} = \frac{P_N}{Q_N}, \quad (18)$$

que es el caso particular de (15) para

$$q_n = \begin{cases} R & (n \text{ par}) \\ 1 & (n \text{ impar}) \end{cases}. \quad (19)$$

Las primeras convergentes para Y son: $P_0/Q_0=R$ ($P_0=R, Q_0=1$), $P_1/Q_1=R+1$ ($P_1=R+1, Q_1=1$). Estas expresiones, con ayuda de (16) y (19) se pueden asociar a las siguientes sucesiones generalizadas de Fibonacci:

$$\begin{aligned} H &= 1, R, 1 + R, R + R(1 + R), R(1 + R) + 2R + 1, \dots \\ L &= 1, 1, 1 + R, 2 + R, R(R + 2) + R + 1, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

cuyos términos h_n y l_n respectivamente corresponden de acuerdo a (11) a

$$\begin{aligned} h_n &= a_n \quad (a_1 = 1, a_2 = R), \\ l_n &= a_{n+1} \quad (a_1 = 0, a_2 = 1), \end{aligned} \quad (21)$$

donde $h_n = l_n$ (para n impar). Se puede entonces escribir

$$P_n = h_{n+2}, \quad Q_n = l_{n+1} \quad (n \geq 0), \quad (22)$$

de tal forma que la fracción continua Y en (18) se exprese como

$$Y = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{h_{n+2}}{l_{n+1}}, \quad (23)$$

o bien, para n impar,

$$Y = \frac{l_{n+2}}{l_{n+1}}. \quad (24)$$

Se puede verificar inmediatamente que si $R=1$ en (20), estas sucesiones se reducen a la sucesión de Fibonacci F y el resultado de (24) es el mismo que se obtiene en Vorobyov (1973). Utilizando (13) en (21) se llega a una expresión muy cómoda para el n -ésimo término de la sucesión L ($n \geq 3$ impar):

$$l_n = \sqrt{\lambda_1^{n-1}} \left(\frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) - \sqrt{\lambda_2^{n-1}} \left(\frac{1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right), \quad (25)$$

donde $\lambda_1=R+2+\sqrt{(R^2+4R)}$, $\lambda_2=R+2-\sqrt{(R^2+4R)}$ son los eigenvalores de la matriz T en (12). En lo sucesivo se expresará los resultados centrales de este trabajo en términos de l_n en (25).

4. APLICACIONES EN LA TEORÍA DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Estas aplicaciones son frecuentes en la literatura científica; uno de los más antiguos es el trabajo de Fry (1929). La razón de ello es que el circuito tipo escalera (Fig.1) es un modelo bastante simple y completo de las líneas de transmisión de energía eléctrica y permite obtener resultados relevantes para aplicaciones específicas, como ser la atenuación del voltaje a medida que se avanza a lo largo de la línea. En este trabajo se aplica el formalismo matricial y la generalización de la sucesión de Fibonacci (11), donde la deducción de los resultados ya conocidos se realiza a manera de probar de la validez del método.

En el modelo ilustrado en la Fig.1 se desprecia los efectos capacitivos e inductivos en el cálculo de la resistencia equivalente R_N para N lazos. El cálculo de R_N da como resultado

$$R_N = R + \frac{1}{1 + \frac{1}{R + \frac{1}{1 + \frac{1}{R + \dots + \frac{1}{R + \frac{1}{1}}}}} = \frac{1}{1} \frac{1}{1}, \quad (26)$$

que es igual a (18) con $q_{2N-1}=R$ y $q_{2N}=1$, por lo que se puede usar (24) para escribir

$$R_N = \frac{l_{2N+1}}{l_{2N}} = \frac{R l_{2N+1}}{l_{2N+1} - l_{2N-1}}. \quad (27)$$

En el límite de un número muy grande de lazos se obtiene

$$R_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} R_N = \frac{R}{1 - \lambda_1^{-1}}. \quad (28)$$

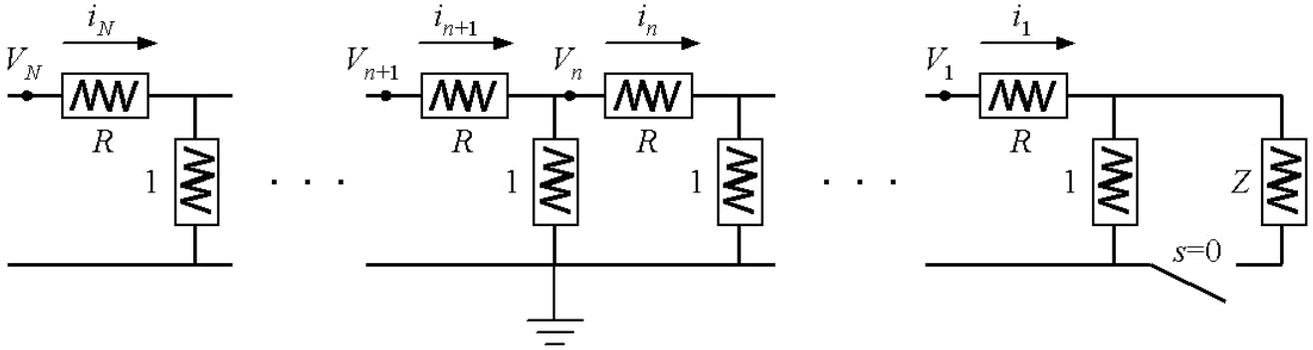


FIG. 1.— Circuito escalera de N lazos con voltajes y corrientes nodales V_n, i_n respectivamente. La resistencia longitudinal tiene un valor de R unidades de resistencia mientras que la resistencia transversal vale 1 unidad de resistencia. Cuando el interruptor está en el estado $s=1$ el circuito tiene una carga de Z unidades de resistencia y cuando $s=0$ el circuito está abierto.

Si $R=1$ entonces $R_\infty=(1+\sqrt{5})/2$, lo que se conoce —desde los tiempos de la Grecia clásica— como *razón áurea*.

A continuación se calcula los voltajes y corrientes nodales V_n, i_n (Fig.1). Fijando en valor del voltaje de entrada como $V_N = i_N R_N$, las corrientes nodales resultan ser

$$i_{N-k} = V_N \left[R_N \prod_{m=1}^k (1 + R_{N-m}) \right]^{-1} \quad (1 \leq k \leq N-1), \quad (29)$$

donde se usa (27) para el cálculo de R_{N-m} . Cuando el estado del interruptor es $s=1$ (circuito con carga) la resistencia equivalente es

$$R_N = R + \frac{1}{1 + \frac{1}{R + \frac{1}{1 + \frac{1}{R + \frac{1}{\dots + \frac{1}{R + \frac{1}{Z}}}}}}} \quad (30)$$

la que se puede escribir en términos de sus respectivas convergentes:

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{P_{2N}}{Q_{2N}} = \frac{Z P_{2N-1} + P_{2N-2}}{Z Q_{2N-1} + Q_{2N-2}} \\ &= \frac{(Z+1) P_{2N-1} - P_{2N-3}}{(Z+1) Q_{2N-1} - Q_{2N-3}}, \end{aligned} \quad (31)$$

o bien, en términos de las sucesiones generalizadas H y L en (20),

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{(Z+1) h_{2N+1} - h_{2N-1}}{(Z+1) l_{2N} - l_{2N-2}} \\ &= R \frac{(Z+1) l_{2N+1} - l_{2N-1}}{Z l_{2N+1} + (R-Z) l_{2N-1}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Sustituyendo este valor de R_N en (29) se obtiene la corriente nodal y de ahí —por la ley de Ohm— el voltaje nodal:

$$\begin{aligned} i_{N-k} &= \frac{V_N}{R} \left[\frac{Z l_{2(N-k)+1} + (R-Z) l_{2(N-k)-1}}{(Z+1) l_{2N+1} - l_{2N-1}} \right], \\ V_{N-k} &= V_N \left[\frac{(Z+1) l_{2(N-k)+1} - l_{2(N-k)-1}}{(Z+1) l_{2N+1} - l_{2N-1}} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

La fórmula (33) para las corrientes y voltajes nodales en un circuito con carga constituye el resultado

central de este trabajo. El caso particular del circuito sin carga (o abierto) se obtiene de (33) al tomar $Z=\infty$. La fórmula (33) comprende, como casos especiales, los resultados reportados por Basin (1963). En el límite de una cadena de lazos muy grande ($N \rightarrow \infty$) se obtiene de (32) que

$$R_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} R_N = R \frac{\lambda_1 [(Z+1) \lambda_1 - 1]}{(Z+1) \lambda_1^2 - (Z+2) \lambda_1 + 1}, \quad (34)$$

y de aquí, se recupera la expresión (28) para el circuito sin carga en el límite $Z \rightarrow \infty$.

5. LÍMITE DEL CONTINUO: LÍNEA UNIFORME DE TRANSMISIÓN

La aplicación de los anteriores resultados en el límite continuo del circuito de la Fig.1 es inmediata. Éste es el modelo para una línea de transmisión uniforme que consiste —por ejemplo— de un juego de cables coaxiales con una fuente de voltaje en un extremo y una carga en el otro extremo. Así, se tomará el límite de un número muy grande de lazos, $N \rightarrow \infty$, junto con las resistencias longitudinal y transversal en cada lazo:

$$r_l = \frac{\rho_l L}{N}, \quad r_t = \frac{N}{\rho_t L}, \quad (35)$$

donde L es la longitud de la línea de transmisión y ρ_l, ρ_t son la impedancia y admitancia por unidad de longitud, que son características del material y de la geometría del sistema físico. Así, para una carga Z' , la resistencia equivalente es $R_{eq}=r_t R_\infty$, donde R_∞ está dada por (34) con $Z=Z'/r_t$ y $R=r_l/r_t=(L/N)^2 \rho_l \rho_t$. Sustituyendo estas expresiones en $\lambda_1=R+2+\sqrt{(R^2+4R)}$ se tiene:

$$\lambda_1 \cong 1 + \frac{L}{N} \sqrt{\rho_l \rho_t}, \quad (36)$$

por lo que R_{eq} queda como

$$R_{eq} = \rho_l \frac{Z' \rho_t + \sqrt{\rho_l \rho_t}}{Z' \rho_t \sqrt{\rho_l \rho_t} + \rho_l \rho_t}, \quad (37)$$

que se reduce a la fórmula correcta en el límite del circuito sin carga:

$$\lim_{Z' \rightarrow \infty} R_{eq} = \sqrt{\rho_l / \rho_t}. \quad (38)$$

La fórmula para R_{eq} en (37) es la misma (salvo por un factor $\sqrt{2}$) que obtiene Mowery (1964) después de usar un método con base en los polinomios de Tchebyshev.

El voltaje nodal en (33) se puede escribir en la forma sencilla

$$V_{N-k} = V_N \lambda_1^{-k} \quad (39)$$

para lo que se usó

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{R+2 - \sqrt{R(R+4)}}{R+2 + \sqrt{R(R+4)}} \cong \left(1 - \frac{L}{N} \sqrt{\rho_l \rho_t}\right)^2, \quad (40)$$

junto con (recordando que $\lim_{N \rightarrow \infty} (1+\alpha/N) = e^\alpha$)

$$\begin{aligned} l_n &= \left[\frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-2L\sqrt{\rho_l \rho_t}) + \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] \sqrt{\lambda_1^{n-1}} \\ &= C \sqrt{\lambda_1^{n-1}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Usando (36) y $k=lN/L$, donde l es la distancia física desde la fuente de voltaje (V_0) hasta el punto nodal se tiene que

$$V(l) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} V_{N-k} = V_0 \exp(-l\sqrt{\rho_l \rho_t}), \quad (0 \leq l \leq L) \quad (42)$$

lo que coincide con el resultado usual que se obtiene al resolver la ecuación del telegrafista (Plonsey & Collin 1961, Sander & Reed 1976).

6. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LA RESISTENCIA

El comportamiento asintótico de R_N en (32) cuando $N \rightarrow \infty$, se deduce esencialmente del comportamiento de l_n en (25) cuando $N \rightarrow \infty$ con $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$ ($\lambda_1 > 1$) y $n \geq 3$ impar:

$$l_n = \sqrt{\lambda_1^{n-1}} \left(1 + \sqrt{\lambda_1^{-n-1}}\right) \left(\frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right). \quad (43)$$

Definiendo: $\delta = \lambda_1 - 2$, $p = (n+1)/2$ y $m = (n-1)/2$, se reescribe l_n como

$$l_n \propto g_p(\delta) \lambda_1^m, \quad (44)$$

donde se introdujo la función

$$g_p(\delta) = 1 + \left(\frac{2}{2+\delta}\right)^p. \quad (45)$$

Así, se establece el comportamiento asintótico de $g_p(\delta)$ en tres intervalos:

$$\begin{aligned} (i) \quad & 0 \cong \delta \ll 2 \rightarrow g_n(\delta) \cong 1 + (1 - \delta/2)^n, \\ (ii) \quad & \delta \cong 2 \rightarrow g_n(\delta) \cong 1 + 2^{-n}, \\ (iii) \quad & \delta \gg 2 \rightarrow g_n(\delta) \cong 1 + (2/\delta)^n. \end{aligned} \quad (46)$$

En los tres casos se verifica el comportamiento $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\delta) = 1$. El caso (i) corresponde al límite $R_\infty = 0$ pues el circuito se reduce a una colección infinita de resistencias unitarias en paralelo. El caso (iii) corresponde al límite $R_\infty = R$ pues el circuito se

reduce a una colección infinita de "cortos" y por ello sólo queda la primera resistencia longitudinal. Así, el caso más interesante puede ser (ii) ya que la razón R de las resistencias longitudinal y transversal no es muy grande ni muy pequeña. En este caso, si $n \geq 5$ entonces $g_n(\delta) \cong 1$, lo que significa que la resistencia equivalente para un circuito (con o sin carga) de 5 lazos ya es una buena aproximación para el circuito más largo.

En Lahr (1986) se dispone de un extenso material acerca de la aplicación de los números de Fibonacci a los circuitos tipo escalera. Su objetivo central es calcular la resistencia equivalente y los voltajes y corrientes nodales (con carga y sin carga), obteniendo las expresiones buscadas en términos de los polinomios de Morgan-Voyce. Estos polinomios también se utilizan en otros trabajos (ver, por ejemplo, Swamy & Bhattacharyya 1967), donde se incluye efectos capacitivos e inductivos de las impedancias debidos a una señal periódica de voltaje a la entrada del circuito. En todos estos casos, se verifica que los polinomios de Morgan-Voyce corresponden al caso particular de una sucesión generalizada de Fibonacci G definida por (11) con los primeros términos $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$. Aunque ya Basin (1963) reporta expresiones explícitas para los polinomios de Morgan-Voyce, éstos no se aplican en algún cálculo contenido en su trabajo. Otros resultados concernientes a las potencias de una matriz de 2×2 y sus conexiones con funciones hiperbólicas, polinomios de Jacobi y polinomios de Tchebyshev se reportan en Mowery (1964) y en Mowery (1961).

7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Los resultados centrales de este trabajo, que pueden resumirse en las fórmulas (33) para las corrientes y voltajes nodales, y la fórmula (42) para el voltaje a lo largo de una línea de transmisión continua, se obtuvieron por medio de una redefinición de la así llamada sucesión generalizada de Fibonacci según (11). La técnica utilizada fue la del formalismo matricial que comprende el cálculo de eigenvalores, la diagonalización y la potenciación de matrices de 2×2 . Este formalismo conduce además a expresiones para estimar el carácter asintótico de la resistencia equivalente, lo que permite, por ejemplo, calcular cuántos lazos del circuito serían suficientes para tener una buena aproximación al circuito infinito. Una dirección natural en la que se puede extender este trabajo es considerar eigenvalores complejos λ_1 y λ_2 de las matrices de recurrencia, lo que está asociado a los efectos capacitivos e inductivos de las impedancias (un tratamiento muy completo al respecto lo hace Dutta-Roy (1964) con métodos diferentes a los de este trabajo). Así, se puede demostrar que aún se cumple la condición $|\lambda_1| |\lambda_2| = 1$, de donde se deduce que la impedancia equivalente debe tener un comportamiento asintótico análogo al caso de eigenvalores reales. Otra dirección que se podría tomar es hacia la investigación de las propiedades de las fracciones continuas (15) en donde la periodicidad de q_n se extiende sobre periodos mayores que en (19), lo

que supone un formalismo matricial análogo a (12) que involucra el producto de un número mayor de matrices de 2×2 . La extensión de dicho formalismo a matrices cuadradas de mayor orden puede aplicarse considerando la expresión más general de (11) para

las relaciones de recurrencia:

$$a_n = \sum_{m=1}^k C_m a_{n-m} \quad (0 < k < n). \quad (47)$$

REFERENCIAS

- Basin S.L. (1963), *Math. Magazine* **36**, 84.
 Dutta-Roy S.C. (1964), *Proc. IEE* **111**, 10, 1653.
 Fry T.C. (1929), *Bull. of the Amer. Math. Soc.* **35**, 463.
 Hall H.S. & Knight S.R. (1948), *Álgebra Superior* (Uteha).
 Horadam A.F. (1961), *Amer. Math. Monthly* **68**, 5, 455.
 Kiss P. (1986), *Fibonacci numbers and their applications*, p.121 (ed. Philippou A.N. et al., Reidel).
 Lahr J. (1986), *Fibonacci numbers and their applications*, p.141 (ed. Philippou A.N. et al., Reidel).
 Morgan-Voyce A.M. (1959), *IRE Trans. on Circuit Theory* **6**, 3, 321.
 Mowery V.O. (1964), *IRE Trans. on Circuit Theory* **CT-11**, 232.
 Mowery V.O. (1961), *IRE Trans. on Circuit Theory* **CT-8**, 167.
 Plonsey R. & Collin R. (1961), *Principles and Applications of Electromagnetic Fields* p.364 (McGraw-Hill).
 Sander K. & Reed G. (1978), *Transmission and Propagation of Electromagnetic Waves* p.153 (Cambridge University Press).
 Swamy M.N.S. & Bhattacharyya B.B. (1967), *IEEE Trans. on Circuit Theory* **CT-14**, 3, 260.
 Vorobyov N.N. (1973), *Los Números de Fibonacci* (Limusa).

DISEÑO DE UNA ZAMPOÑA CON TUBOS DE VIDRIO A DESIGN OF A ZAMPOÑA USING TEST TUBES

M. F. SÁNCHEZ BARRERO, F. GHEZZI
Laboratorio Física Básica II
Carrera de Física–UMSA
La Paz, Bolivia

RESUMEN

La zampoña, un instrumento de la familia de los aerófonos, es un objeto que identifica a la región andina de Sudamérica, encontrándose dentro de esta región nuestro país, Bolivia. Al ser muy común encontrar este instrumento elaborado de caña y de tubos de plástico, surgió la idea de elaborar una zampoña con algún material diferente, es de ahí la elección de utilizar tubos de ensayo en el armado del instrumento. Con trece tubos del mismo tamaño y diámetro que contenían agua, se midieron las frecuencias de cada tubo perteneciente a cada nota de la zampoña, variando la cantidad de agua en los tubos para hacer variar las frecuencias. El instrumento obtenido refleja todas las características de una zampoña tradicional.

Descriptor: instrumentos musicales — propiedades acústicas de los sólidos

Código(s) PACS: 43.75.+a, 62.65.+k

ABSTRACT

The zampoña also known as panpipe is a musical wind instrument typically identified with the Andean region of South America and in particular the altiplano (highland) region of Bolivia. Commonly made from bamboo and plastic tubes, we decided to make a zampoña from an alternative material constructing the instrument from test tubes (glass). We measured the frequency of thirteen tubes of the same size and diameter filled with water, each tube had the corresponding note found in the traditional zampoña. The different frequencies were obtained by varying the amount of water in the test tubes. The resulting laboratory controlled instrument is a true model of a traditional zampoña.

Subject headings: musical instruments — acoustical properties of solids

1. INTRODUCCIÓN

Para comenzar con la introducción a lo que es la zampoña y considerando la belleza de la tradición andina de relatar historias con un sentido fantástico, se muestra primero la leyenda de la creación del instrumento:

Cuenta la leyenda de aquel cañaverl, que un viejo campesino, de vuelta a casa, pudo escuchar los sonidos del viento colándose en las cañas quebradas y acariciando el oído con un sinfin de notas cual orquesta singular.

A la mañana siguiente, comenzó a construir un curioso órgano de viento disponiendo caños en grupos de diferentes tamaños a lo largo de ese lado de la loma donde el Dios de los vientos hacía patente su presencia meciendo las hojas de las cañas y desgranando de ellas un dulce llorar.

Tallas, esculturas, grabados, relatos y pinturas, evidencian su presencia en culturas ancestrales muy diversas que lo catalogan como uno de los primeros aerófonos utilizados por el hombre.

Su empleo es igualmente versátil, vinculándose en algunas culturas a ritos ceremoniales o religiosos, en

otras usado como instrumento pastoril y en otras muchas, con fines netamente lúdicos, enraizados en el folklore popular.

Flauta de pan, zampoña, rondador, antara, syrinx, naï rumano, flauta pastoril, son muchas las variantes que ha ido adoptando en cada cultura. En cada sitio toma un nombre diferente y atiende a distintas escalas y formas de ser tocado; pero sin lugar a dudas, en la región de los Andes, es donde posee la mayor de sus moradas.

El nombre “zampoña” es una deformación de la palabra española, sinfonía. Probablemente haya sido como los indígenas del Alto Perú creían que se llamaba la música de los conquistadores españoles.

Los objetivos que se plantearon para la elaboración de este experimento son:

- Construir un instrumento musical, debidamente afinado.
- A consecuencia del anterior punto, construir una zampoña elaborada de tubos de ensayo de vidrio, cada tubo correspondiente a una nota de la zampoña, y cada uno debidamente afinado a tal nota, mediante programas de computación

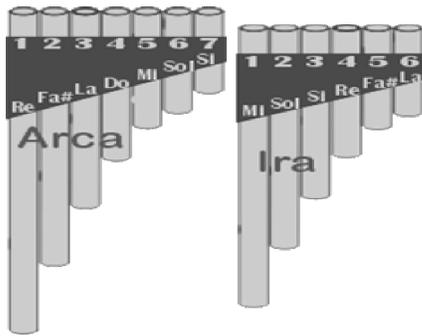


FIG. 1.— Se muestran las dos hileras que forman a una zampoña.

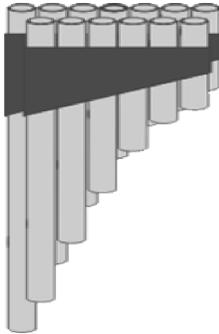


FIG. 2.— Zampoña, distribución de las dos hileras (Ira delante de Arca).

para obtener las frecuencias de las notas, y haciendo uso de la transformada de Fourier.

2. TEORÍA

La zampoña está compuesta por dos hileras de tubos de caña en los que las notas se intercalan sucesivamente formando una escala diatónica.

Los caños se amarran entre sí, adosados a finas tablillas de madera o bien a tiras de la propia caña.

Habitualmente se disponen en número de 7 tubos la mayor, llamada Arca, y de 6 la menor, llamada Ira (Figs. 1 y 2).

La zampoña, puede ser tocada por un sólo músico o bien por parejas, de tal modo que cada instrumentista tocaría las notas correspondientes a su mitad del instrumento.

Para tocar el instrumento, se coloca de tal manera que nuestro labio inferior roce el borde de los tubos. En esta posición se trata de dirigir el golpe de aire y hacerlo penetrar en el tubo que se desea hacer sonar.

Los labios deben de estar tensos para favorecer el control del aire y su efectividad a la hora de llenar los caños. El flujo ha de ser variable y proporcionado al tamaño de cada tubo. La apertura de los labios, que dará salida al aire, también es proporcional al diámetro del tubo que se desea hacer sonar, de tal forma que para sonidos más agudos (menor tamaño de tubo), la apertura de los labios será menor. Por contra, la apertura de los labios será mayor para tocar notas graves (tubos de mayor longitud).

La zampoña está afinada en la tonalidad de SOL MAYOR, más conocida por su relativo MI menor.

En la zampoña las notas se distribuyen en dos oc-

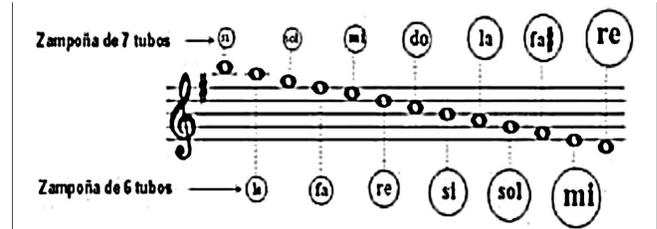


FIG. 3.— Distribución de las notas de la zampoña en el pentagrama (Zampoña de 7 tubos: Arca, Zampoña de 6 tubos: Ira).

TABLA 1

EN ESTA TABLA SE MUESTRAN LAS FRECUENCIAS CORRESPONDIENTES A CADA NOTA EN LAS DOS OCTAVAS EN QUE SE TRABAJARAN (TEÓRICAS).

2da octava	3ra octava
Do 2: 130,813	Do 3: 261,626
Do# 2: 138,591	Do# 3: 277,183
Re 2: 146,832	Re 3: 293,665
Re# 2: 155,563	Re# 3: 311,127
Mi 2: 164,814	Mi 3: 329,628
Fa 2: 174,614	Fa 3: 349,228
Fa# 2: 184,997	Fa# 3: 369,994
Sol 2: 195,998	Sol 3: 391,995
Sol#2: 207,652	Sol#3: 415,305
La 2: 220	La 3: 440
La# 2: 233,082	La# 3: 466,164
Si 2: 246,942	Si 3: 493,883

tavas diferentes, dejando de lado a los tubos de mayor longitud con la octava menor y los tubos de menor longitud con la octava mayor, ya que la frecuencia de una nota aumenta, cuando la longitud del tubo es menor (Fig. 3).

Para el análisis más preciso de las notas musicales, se construye un espectro del sonido emitido para cada nota, mediante programas de computación, con los cuales en una gran mayoría se obtiene el espectro del sonido, en función de la amplitud y tiempo para la nota. Sin embargo, realizando la transformada de Fourier se logra cambiar los datos de amplitud y tiempo en datos de amplitud y frecuencia, en la mayor parte de las veces se usa FFT¹. Generándose así una gráfica como la mostrada en la Fig. 4.

El vibrato; es el caso en que la frecuencia modulante es de unos pocos ciclos por segundo (típicamente entre 5 y 7 Hz), y la desviación un pequeño porcentaje (aproximadamente entre 1% y 5%) de la frecuencia portante. Intuitivamente se puede comprender el fenómeno pensando que cuando la frecuencia de modulación es baja, los cambios ocurren a lo largo de varios ciclos de la portante, la que se percibe entonces como una misma forma de onda que varía su frecuencia. Lo que ocurre en este caso a ni-

¹ FFT es la abreviatura usual (del inglés *Fast Fourier Transform*) de un eficiente algoritmo que permite calcular la Transformada de Fourier discreta (DFT) y su inversa. La FFT es de gran importancia en una amplia variedad de aplicaciones, desde el tratamiento y filtrado digital en general a la resolución de ecuaciones diferenciales parciales o los algoritmos de multiplicación rápida de grandes enteros.

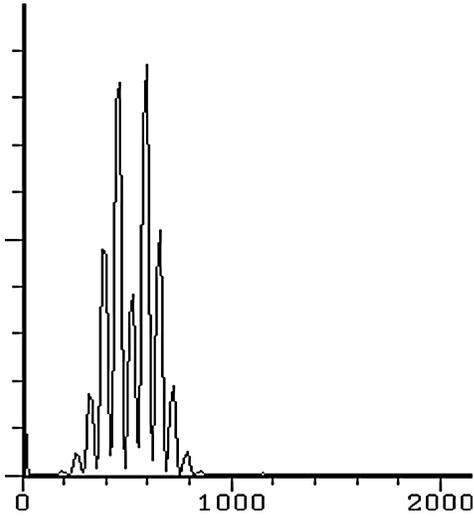


FIG. 4.— Espectro de la frecuencia 535 Hz para el Fagot.

vel de espectro, es que en torno a la frecuencia portante se generan bandas laterales, superiores e inferiores, a distancia de la frecuencia modulante, lo cual se observa claramente en la Fig. 4. Es de ahí que se considera a la frecuencia modulante, como la que posee el pico con mayor amplitud en el espectro.

Para una portante c y una modulante m , el espectro resultante es de la forma:

$$c \pm nm \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Cuántas de esas bandas laterales aparecen, y la amplitud de cada una de ellas, dependerá de la magnitud de la modulación. La misma se mide mediante el denominado *índice de modulación*, que se define como el cociente entre la desviación de frecuencia (amplitud de la modulante) y la frecuencia modulante:

$$I = \frac{d}{m} \quad (1)$$

La ecuación que define la onda resultante de modular la frecuencia de una senoide (cuya amplitud se considera normalizada a 1, para simplificar), por medio de otra senoide, es la siguiente:

$$x(t) = \text{sen}(\alpha t + I \text{sen} \beta t), \quad (2)$$

siendo $x(t)$ la amplitud de la onda en un momento t determinado, y α y β las frecuencias portante y modulante expresadas en radianes/segundo. Esta fórmula puede expandirse en la siguiente serie trigonométrica:

$$\begin{aligned} x(t) = & J_0(I) \text{sen} \alpha t \\ & + J_1(I) [\text{sen}(\alpha + \beta)t - \text{sen}(\alpha - \beta)t] \\ & + J_2(I) [\text{sen}(\alpha + 2\beta)t + \text{sen}(\alpha - 2\beta)t] \\ & + J_3(I) [\text{sen}(\alpha + 3\beta)t - \text{sen}(\alpha - 3\beta)t] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

De ahí que la amplitud de cada par de bandas laterales ($\alpha \pm \beta$, $\alpha \pm 2\beta$, $\alpha \pm 3\beta$, ...) queda determinada por factores de la forma $J_n(I)$.

3. PROCEDIMIENTO

3.1. Primera Parte

En esta primera parte del experimento se consiguieron 13 tubos de ensayo, los cuales son de la misma longitud y diámetro (15cm ; 1,4cm), los cuales serán designados a cada nota proveniente de la zampona.

3.2. Segunda Parte

Se emitió sonido con el tubo vacío, y haciendo uso de un micrófono y de programas de computación, se observó el espectro del mismo mediante un programa llamado Goldwave, como este programa no muestra las frecuencias del sonido emitido, se guardó la gráfica que se obtuvo en formato de texto, para que los datos se registren, de ahí que se llevan los datos a una tabla en el programa computacional para gráficas, Origin Pro, la cual se analiza mediante transformadas de Fourier (FFT), es decir se cambian los datos de tiempo y amplitud a datos de frecuencia y amplitud, obteniendo así una gráfica en la cual se logra ver la frecuencia. Tomando en cuenta la parte teórica, se tomo como dato al pico de mayor amplitud en la gráfica, y a continuación se llevó a cabo el mismo procedimiento con un tubo lleno de agua a 3cm del borde, obteniéndose así los dos límites de Frecuencia con los que se puede trabajar.

3.3. Tercera Parte

Se llevó a cabo el anterior procedimiento con los 13 tubos a niveles diferentes de agua, hasta que las frecuencias obtenidas en cada tubo se aproximan a las frecuencias teóricas mostradas en la Tabla 1, para las notas que pertenecen a la zampona.

3.4. Cuarta Parte

Habiendo obtenido las frecuencias para las notas de la zampona en los 13 tubos, se marca estos niveles de agua, y se clasifica los tubos según las notas en las dos hileras de la Zampona: Arca e Ira.

Se armó una gradilla y se colocaron los tubos en su respectivo lugar según la distribución en la zampona.

4. DATOS Y ANÁLISIS DE DATOS

Las Figs. 5–17 pertenecen a las notas de cada tubo.

4.1. Arca

En esta hilera se encuentran las notas: 2da octava: re, fa #, la; 3ra octava: do, mi, sol, si.

Para Re de la segunda octava (Fig. 5) se tiene una frecuencia teórica de 146,832 Hz. La obtenida en la experimentación fue de 148,67 Hz. H= 12,55cm (Precisión: 98,76%).²

Para Fa # de la segunda octava (Fig. 6) se tiene una frecuencia teórica de 184,997 Hz. La obtenida en la experimentación fue de 182,776 Hz. H= 9,95cm (Precisión: 98,8%).

² H: Altura del nivel de agua desde el borde superior del tubo hasta el menisco formado en el agua.

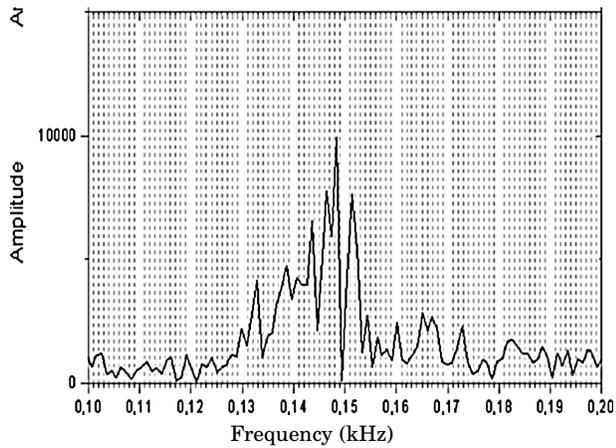


FIG. 5.— Gráfica de Amplitud vs. Frecuencia para Re de la segunda octava.

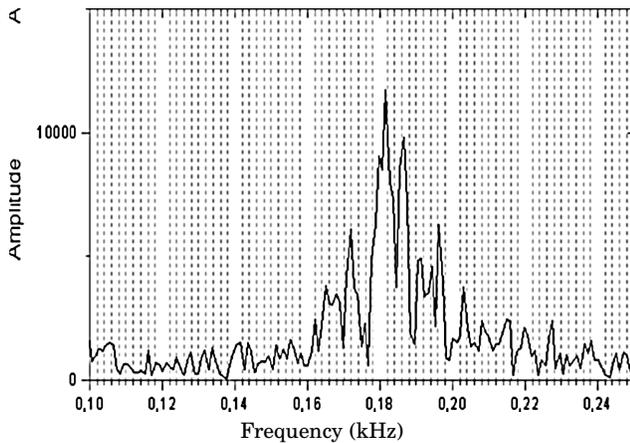


FIG. 6.— Gráfica de Amplitud vs. Frecuencia para Fa# de la segunda octava.

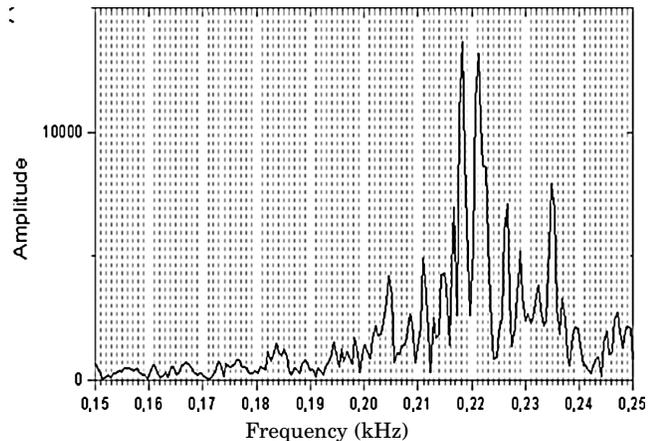


FIG. 7.— Gráfica de Amplitud vs. Frecuencia para La de la segunda octava.

Para La de la segunda octava (Fig. 7) se tiene una frecuencia teórica de 220 Hz. La obtenida en la experimentación fue de 218,93 Hz. $H= 8,15\text{cm}$ (Precisión: 99,5%).

Para Do de la tercera octava (Fig. 8) se tiene una frecuencia teórica de 261,626 Hz. La obtenida en la experimentación fue de 266,03 Hz. $H= 6,75\text{cm}$ (Pre-

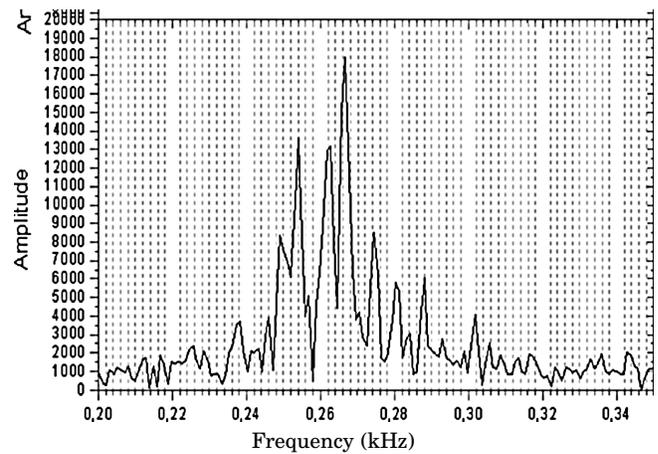


FIG. 8.— Gráfica de Amplitud vs. Frecuencia para Do de la tercera octava.

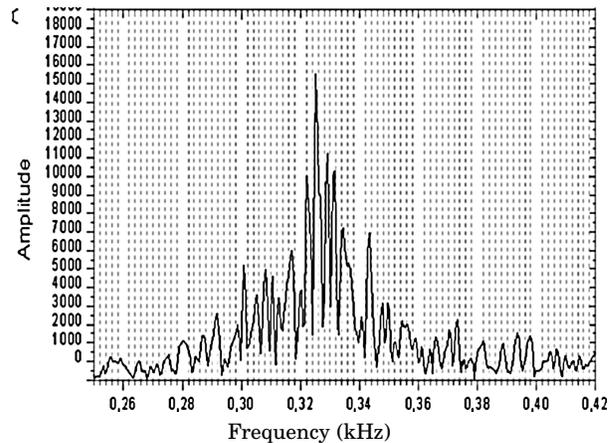


FIG. 9.— Gráfica de Amplitud vs. Frecuencia para Mi de la tercera octava.

cisión: 98,34%).

Para Mi de la tercera octava (Fig. 9) se tiene una frecuencia teórica de 329,628 Hz. La obtenida en la experimentación fue de 325,57 Hz. $H= 5,35\text{cm}$ (Precisión: 98,77%).

Para Sol de la tercera octava (Fig. 10) se tiene una frecuencia teórica de 391,995Hz. La obtenida en la experimentación fue de 388,09Hz. $H= 4,25\text{cm}$ (Precisión: 99%).

Para Si de la tercera octava (Fig. 11) se tiene una frecuencia teórica de 493,883Hz. La obtenida en la experimentación fue de 480,65Hz. $H= 3,1\text{cm}$ (Precisión: 97,32%).

4.2. IRA

En esta hilera se encuentran las notas: 2da octava: MI,SOL, SI; 3ra octava: RE, FA, LA

Para Mi de la segunda octava (Fig. 12) se tiene una frecuencia teórica de 164,814 Hz. La obtenida en la experimentación fue de 165,456Hz. $H= 11,25\text{cm}$ (Precisión: 99,6%).

Para Sol de la segunda octava (Fig. 13) se tiene una frecuencia teórica de 195,998 Hz. La obtenida en la experimentación fue de 196,554 Hz. $H= 9,25\text{cm}$ (Precisión: 99,71%).

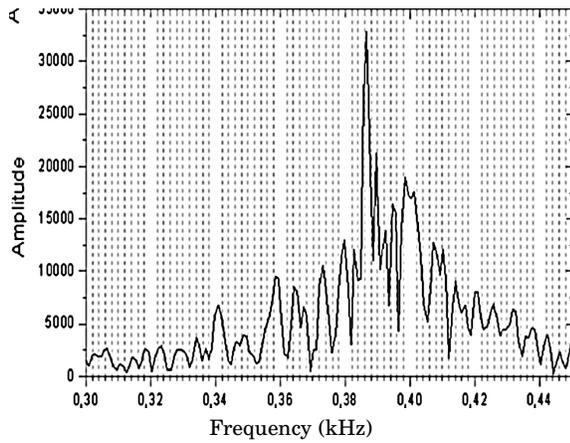


FIG. 10.— Gráfica de Amplitud vs. Frecuencia para Sol de la tercera octava.

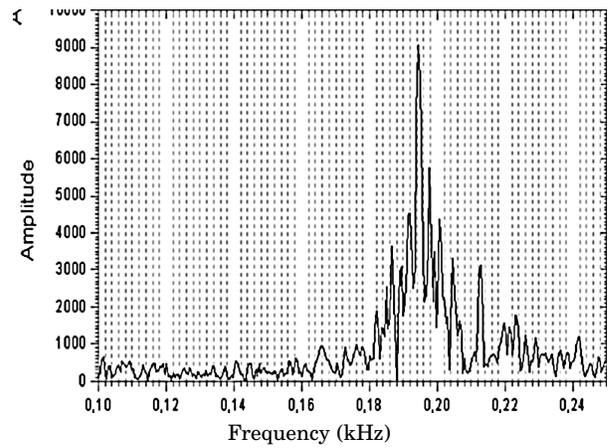


FIG. 13.— Gráfica de Amplitud vs. Frecuencia para Sol de la segunda octava.

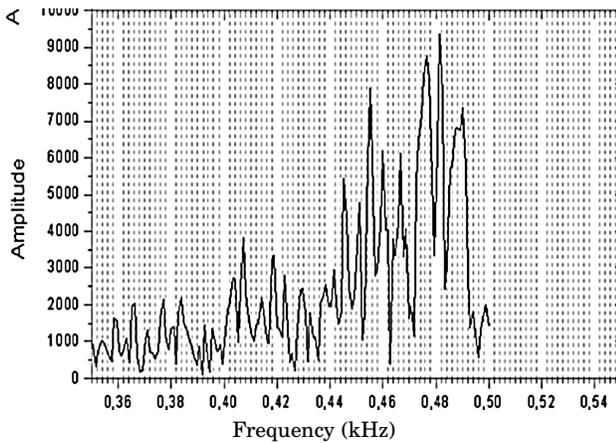


FIG. 11.— Gráfica de Amplitud vs. Frecuencia para Si de la tercera octava.

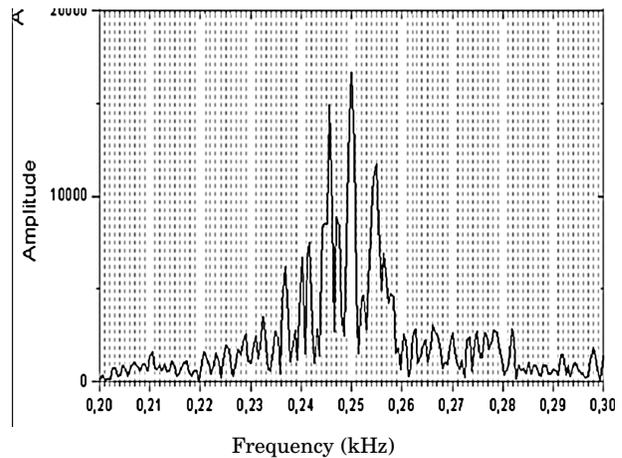


FIG. 14.— Gráfica de Amplitud vs. Frecuencia para Si de la segunda octava.

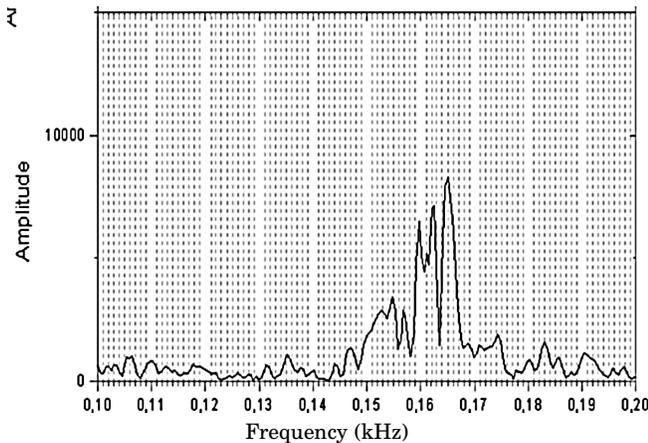


FIG. 12.— Gráfica de Amplitud vs. Frecuencia para Mi de la segunda octava.

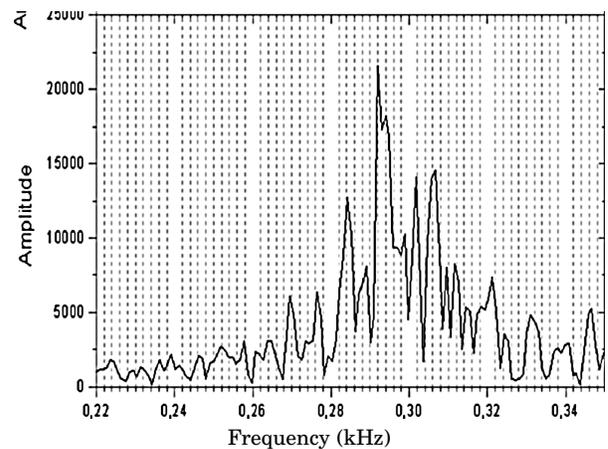


FIG. 15.— Gráfica de Amplitud vs. Frecuencia para Re de la tercera octava.

Para Si de la segunda octava (Fig. 14) se tiene una frecuencia teórica de 246,942Hz. La obtenida en la experimentación fue de 248,345Hz. $H=7,2\text{cm}$ (Precisión: 99,44%).

Para Re de la tercera octava (Fig. 15) se tiene una frecuencia teórica de 293,665 Hz. La obtenida en la experimentación fue de 292,01 Hz. $H=6\text{cm}$ (Pre-

cisión: 99,43%).

Para Fa de la tercera octava (Fig. 16) se tiene una frecuencia teórica de 369,994Hz. La obtenida en la experimentación fue de 367,893Hz. $H=4,75\text{cm}$ (Precisión: 99,43%).

Para La de la tercera octava (Fig. 17) se tiene una frecuencia teórica de 440Hz. La obtenida en la expe-

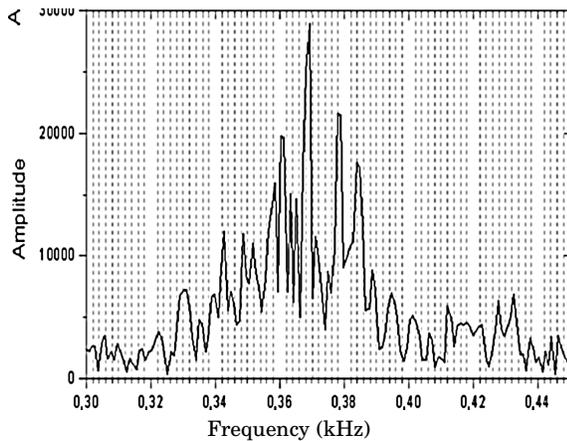


FIG. 16.— Gráfica de Amplitud vs. Frecuencia para Fa de la tercera octava.

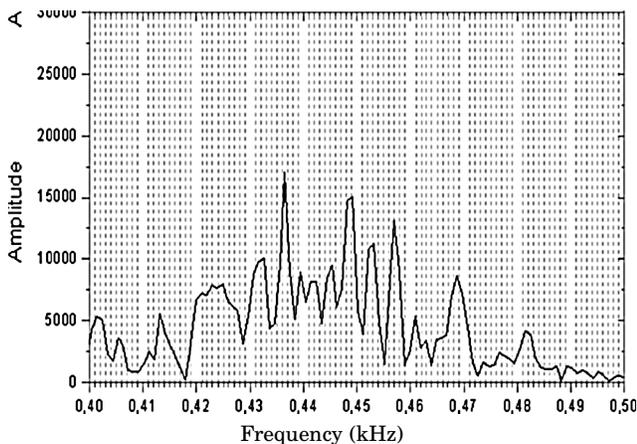


FIG. 17.— Gráfica de Amplitud vs. Frecuencia para La de la tercera octava.

rimentación fue de 437,542Hz. $H= 3,75\text{cm}$ (Precisión: 99,44%).

5. CONCLUSIONES

Se cumplió el objetivo de este proyecto con éxito, el de construir un instrumento musical, ya que el instrumento que se escogió, la zampoña con tubos de ensayo, fue elaborada y puesta en práctica para comprobar que las notas varían de tubo a tubo, y estas están en las frecuencias adecuadas a cada nota.

Las alturas del nivel de agua tomadas desde el borde superior del tubo hasta el menisco formado por el agua, correspondientes a cada nota se encuentran en un rango de error de $\pm 0,1\text{cm}$.

Las frecuencias que se obtuvieron para cada nota, no son exactamente las teóricas pero se encuentran en un rango de precisión en su gran mayoría del 99%.

La nota Si de la tercera octava se encuentra en un rango de error mayor puesto que la longitud para la nota era mucho menor al rango encontrado en donde el tubo emitía un sonido, por lo que se disminuyó el diámetro del tubo de 1,4cm a 1,0cm.

En el proceso de colocar la nota correspondiente a cada tubo, se logró notar que la longitud del nivel de agua en el tubo (con diámetro fijo) en relación a la frecuencia se encuentran ligadas en forma logarítmica, ya que mientras las frecuencias aumentaban el nivel de agua subía en el tubo logarítmicamente, en las frecuencias más elevadas se nota que los niveles de agua no varían tanto uno de otro como en las frecuencias bajas. Este comportamiento se nota claramente al colocar los tubos de las notas en orden según su posición en el pentagrama.

La zampoña de tubos de ensayo, a parte de ser un poco delicada por el material (vidrio), se asemeja a las zampoñas de caña en su tonalidad, aunque por sus limitaciones en longitud, se tuvo que diseñar la zampoña en una octava menos que la que se tiene como patrón.

Considerando que las zampoñas diseñadas a partir de caña, tienen diferentes longitudes y diámetros para emitir las notas correspondientes, y que la zampoña diseñada con tubos de ensayo sólo hace variar las longitudes y no así el diámetro; se podría establecer una relación entre ambas mediante los volúmenes que ocupa el aire en cada tubo correspondiente a una nota.

Para hacer variar las alturas de los tubos se utilizó agua potable, sin embargo, no es el único método para hacer posible estas variaciones de altura, también se podría lograr con pequeños tapones de cualquier material o hasta con diferentes líquidos. Sin embargo, las alturas no serían las mismas que para los tubos de ensayo con agua, puesto que la tensión superficial de los líquidos es diferente para cada uno y la de los sólidos es mucho mayor. Esto sucedería puesto que el aire que se inserta a cada tubo al soplar, genera una fuerza sobre la superficie del líquido, la cual puede romper con la tensión superficial del mismo y provocar movimiento lo que le da una tonalidad diferente para cada material.

REFERENCIAS

Chowning, J. 1980, Computer synthesis of the singing voice (J. Sundberg & E. Jansson, eds., *Sound Generation in Winds, Strings, and Computers*. Publication 29. Stockholm, Royal Swedish Academy of Music.)

url.: 2010a, <http://www.wikipedia.com/siku>

—. 2010b, <http://www.wikipedia.com/sikuoazampoña>

5^{ta} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
PRIMERA ETAPA – SOLUCIONES EXAMEN NACIONAL
6^{to}, 7^{mo}, 8^{vo} DE PRIMARIA, 1^{ro}, 2^{do}, 3^{ro} Y 4^{to} DE SECUNDARIA

BUSTOS R.¹, SUBIETA V.¹, TAVERA W.², CENTENO E.¹, BRAÑEZ A.¹, ESPINOZA W.¹, RALJEVIC M.², MUÑOZ R.¹²,
GUAYGUA T.⁵, JEMIO C.⁵, ESPINOZA E.³, ANDRADE M.⁴, GUZMÁN R.⁴, MAMANI R.⁶, MARTINEZ L.⁷, JUSTINIANO I.⁸,
PAYLLO J. P.⁹, BURGOS B.¹⁰, ORTEGA M.¹¹,

¹Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), Carrera de Física, La Paz

²Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)

³Universidad Mayor, Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCH), Facultad de Tecnología – Carrera de Ingeniería de Sistemas, Sucre

⁴Universidad Mayor de San Simón (UMSS), Facultad de Ciencia y Tecnología, Cochabamba

⁵Universidad Técnica de Oruro (UTO), Facultad Nacional de Ingeniería (FNI), Oruro

⁶Universidad Autónoma Tomás Frías (UATF), Carrera de Física, Potosí

⁷Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA), Santa Cruz de la Sierra

⁸Colegio Maria Auxiliadora, Cobija, Pando

⁹Colegio 12 de Agosto, Yacuiba, Tarija

¹⁰Colegio Evangélico J. Antelo, Guayaramerín, Beni

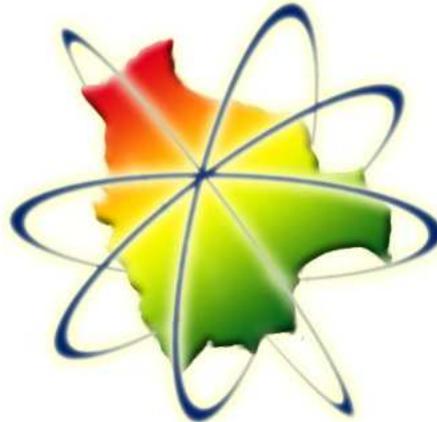
¹¹Colegio Trinidad, Beni &

¹²Planetario de Física, UMSA

RESUMEN

La 5^{ta} Olimpiada Boliviana de Astronomía y Astrofísica (5^{ta} OBAA) invita a participar a estudiantes de colegios fiscales y particulares del area rural y urbana de todo el país en las categorías de 6to, 7mo y 8vo de Primaria y 1ro, 2do, 3ro y 4to de Secundaria. La 1ra Etapa de la 5^{ta} OBAA se llevó a cabo simultáneamente en cada una de las regiones participantes el día Domingo 30 de Mayo de 2010. Participaron estudiantes de: Guayaramerín, Trinidad, Cochabamba, La Paz, Oruro, Huanuni, Potosí, Pando, Santa Cruz, Montero, Camiri, Sucre, Tarija y Yacuiba. En este número se presentan las preguntas con sus respectivas soluciones de la 1ra Etapa de la 5^{ta} OBAA – 2010.

OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA



**OLIMPIADA BOLIVIANA DE
ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA**

Descriptor: Olimpiadas de de Astronomía y Astrofísica

Subject headings: Astronomy and Astrophysics Olympiads

5^{ta} OBAA SOLUCIÓN 6^{to} DE PRIMARIA

PARTE CONCEPTUAL (60%)

I. RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS DE MANERA BREVE Y CLARA. 25 %

1. Sistema solar

Sol. *El Sistema Solar es un conjunto formado por el Sol y los cuerpos celestes que orbitan a su alrededor. Está integrado por el Sol y una serie de cuerpos que están ligados gravitacionalmente con este astro; ocho planetas (Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno), junto con sus satélites, planetas menores y asteroides, los cometas, polvo y gas interestelar.*

2. Cuerpo celeste

Sol. *Se dice de cualquier cuerpo que se puede observar en el cielo, entendiendo por éste el espacio fuera de los límites terrestres.*

Un objeto astronómico se puede confundir fácilmente con un cuerpo celeste. El término cuerpo indica un objeto simple, como un planeta, y en cambio, podemos considerar que el cinturón de asteroides es un objeto astronómico.

3. Eclipse solar

Solución:

Un eclipse solar es el fenómeno que se produce cuando la Luna oculta al Sol, desde la perspectiva de la Tierra. Esto sólo puede pasar durante la luna nueva (Sol y Luna en conjunción), Para que se produzca un eclipse solar la Luna ha de estar en o próxima a uno de sus nodos, y tener la misma longitud celeste que el Sol. Existen cuatro tipos de eclipses solares:

Parcial: *La Luna casi cubre por completo el Sol, pero no lo consigue.*

Total: *Desde una franja (banda de totalidad) en la superficie de la Tierra, la Luna cubre totalmente el Sol. Fuera de la banda de totalidad el eclipse es parcial. Se verá un eclipse total para los observadores situados en la Tierra que se encuentren dentro del cono de sombra lunar.*

Anular: *Ocurre cuando la Luna se encuentra cerca del apogeo y su diámetro angular es menor que el solar, de manera que en la fase máxima permanece visible un anillo del disco del Sol.*

Esto ocurre en la banda de anularidad; fuera de ella el eclipse es parcial.

4. Teoría Geocéntrica

Sol.

La Teoría geocéntrica es una antigua teoría de ubicación de la Tierra en el Universo. Coloca la Tierra en el centro del Universo, y los astros, incluido el Sol, girando alrededor de ella (geo: Tierra; centrismo: centro). Creer que la Tierra es el centro del universo es la opinión obvia de quien no se plantea hallar una solución a los problemas que presentan los movimientos de los cuerpos celestes, esto es, los movimientos de los planetas.

5. Eclipse Lunar

Sol. *Un eclipse lunar es un evento astronómico que sucede cuando el planeta Tierra se interpone entre el Sol y la Luna, es decir, cuando la Luna entra en la zona de sombra de la Tierra. Esto sólo puede ocurrir en la fase de Luna llena.*

Parcial: *La sombra de la Tierra casi cubre por completo a la Luna, pero no lo consigue.*

Total: *Esto ocurre cuando la sombra de la tierra cubre por completo a la Luna.*

6. Planetas interiores

Sol. *Los planetas interiores también llamados telúricos o terrestres son los cuatro planetas más cercanos al Sol, es decir: Mercurio, Venus, la Tierra y Marte. Son cuerpos de densidad elevada ($3 - 5\text{g/cm}^3$) formados principalmente por materiales rocosos y metálicos con una estructura interna bien diferenciada y con un tamaño similar. La composición isotópica de estos cuerpos y su densidad variable (mayor en Mercurio y menor en Marte) ofrecen importantes pistas sobre la formación del sistema solar.*

II. COLOQUE UNA (V) SI LA AFIRMACIÓN ES CORRECTA Y (F) SI ES FALSA. 20 %

- Meteoros son fragmentos de rocas que al atravesar la atmósfera estos se funden. [V]
- Es verdad que solo los planetas Júpiter y Saturno son los únicos con anillos. [F]
- Las Lunas Fobos (miedo) y Deimos (terror) orbitan al planeta Marte. [V]

d) Según la nueva definición de planeta, Plutón ya no es considerado como planeta. [V]

PARTE PRÁCTICA 20%

1. Dibuje la estructura interna del planeta Tierra Sol.

Esta se muestra en la figura [1]

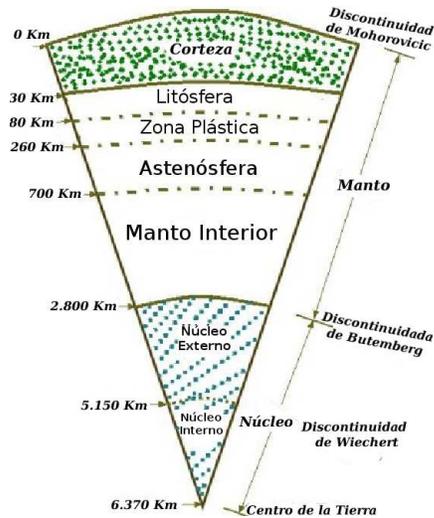


FIG. 1.— Estructura Interna de la Tierra

2. Defina la unidad de medida conocida como Unidad Astronómica (UA). Dé un ejemplo dónde se usa convenientemente esta unidad de medida.

Sol. La Unidad Astronómica (UA) es la distancia media medida desde el Sol hasta la Tierra y vale $1UA = 149.600.000 [Km]$.

Esta unidad se utiliza cuando se miden distancias grandes que estén relacionadas con las distancias entre planetas, distancias entre estrellas y planetas o distancias dentro de un sistema solar.

5^{ta} OBAA SOLUCIÓN 7^{mo} DE PRIMARIA

PARTE CONCEPTUAL (42%)

I. RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS DE MANERA BREVE Y CLARA. 25 %

1. Sistema solar

Sol. *El Sistema Solar es un conjunto formado por el Sol y los cuerpos celestes que orbitan a su alrededor. Está integrado por el Sol y una serie de cuerpos que están ligados gravitacionalmente con este astro; nueve grandes planetas (Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno), junto con sus satélites, planetas menores y asteroides, los cometas, polvo y gas interestelar.*

2. Cuerpo celeste

Sol. *Se dice de cualquier cuerpo que se puede observar en el cielo, entendiendo por éste el espacio fuera de los límites terrestres.*

Un objeto astronómico se puede confundir fácilmente con un cuerpo celeste. El término cuerpo indica un objeto simple, como un planeta, y en cambio, podemos considerar que el cinturón de asteroides es un objeto astronómico.

3. Día sideral

Sol. *Día Sideral es el tiempo que se tarda en volver a ver una estrella en la misma posición.*

El día sideral es más corto que el día solar. También resulta de esto que una estrella determinada vuelve a pasar por el meridiano antes que el Sol. La duración de un día solar, de 24 horas, que comprende un intervalo de la hora del mediodía al mediodía siguiente, es mayor que la del día sideral; la diferencia se eleva a 3 minutos 56 segundos.

Al cabo del año, una estrella ha pasado 366 veces por el meridiano, mientras que el Sol lo efectúa únicamente 365. En una palabra, el año, que se compone de 366 días siderales, ó de 366 rotaciones de la Tierra, no contiene más que 365 días solares. Esta es consecuencia del doble movimiento de la Tierra, de rotación sobre sí misma y de translación ó de revolución alrededor del Sol.

4. Teoría Heliocéntrica

Sol. *La teoría heliocéntrica es la que aprueba que la Tierra y los demás pla-*

netas giran alrededor del Sol. El heliocentrismo, fue propuesto en la antigüedad por el griego Aristarco de Samos, quien se basó en medidas sencillas de la distancia entre la Tierra y el Sol, determinando un tamaño mucho mayor para el Sol que para la Tierra. Por esta razón, Aristarco propuso que era la Tierra la que giraba alrededor del Sol y no a la inversa, como sostenía la teoría geocéntrica de Ptolomeo e Hiparco

5. Eclipse Lunar

Sol. *Un eclipse lunar es un evento astronómico que sucede cuando el planeta Tierra se interpone entre el Sol y la Luna, es decir, cuando la Luna entra en la zona de sombra de la Tierra. Esto sólo puede ocurrir en la fase de Luna llena*

6. ¿Cuál es la nueva definición de Planeta?

Sol. *Un planeta es, según la definición adoptada por la Unión Astronómica Internacional el 24 de agosto de 2006, un cuerpo celeste que:*

Órbita en torno a una estrella.

Tiene suficiente masa para que su gravedad supere las fuerzas del cuerpo rígido, de manera que asuma una forma en equilibrio hidrostático (prácticamente esférica).

Ha limpiado la vecindad de su órbita de planetesimales.

II. COLOQUE UNA (V) SI LA AFIRMACIÓN ES CORRECTA Y (F) SI ES FALSA. 28 %

- Meteoros son fragmentos de rocas que al atravesar la atmósfera estos se funden. [V]
- El 21 de junio, comienza el invierno en el hemisferio Sur y el verano en el hemisferio Norte. [V]
- Es verdad que solo los planetas Júpiter y Saturno son los únicos con anillos. [F]
- Es verdad que cuando hay un eclipse lunar, la luna se torna de color verde. [F]
- El movimiento de las mareas es producido por el acercamiento y alejamiento de la Luna. [V]
- Las Lunas Fobos (miedo) y Deimos (terror) orbitan al planeta Marte. [V]
- Según la nueva definición de planeta, Plutón ya no es considerado como planeta. [V]

III. ENCIERRE EL INCISO CORRECTO 16 %

- La luz producida en la superficie del Sol llega a la tierra en:
a) 10,2 minutos **b) 8,3 minutos** c) 2,9 minutos d) Ninguna
- El otoño en el hemisferio Norte y la primavera en el Sur, empiezan el
a) 21 de junio **b) 23 de septiembre** c) 21 de marzo d) Ninguna
- El punto máximo del hemisferio Sur donde caen perpendiculares los rayos del Sol durante el solsticio de verano, es en el
a) Trópico de Cáncer b) La línea del Ecuador **c) Trópico de Capricornio** d) Ninguna
- La órbita de un planeta alrededor del Sol es:
a) Circular **b) Elíptica** c) Cónica d) Ninguna
- El movimiento que realiza la Tierra, junto a los demás astros del sistema solar, siguiendo al Sol en su movimiento hacia la constelación de Lira
a) Traslación b) Rotación **c) Revolución** d) Ninguna



FIG. 2.— fases de la Luna

PARTE PRÁCTICA 14%

- Dibuje las fases de la luna entorno a la Tierra Sol.

Fases de la Luna - La Tierra va acompañada por la Luna en su movimiento de rotación alrededor del Sol.

La Luna gira a su vez en torno de la Tierra, y en el mismo sentido que nuestro propio movimiento alrededor del Sol, esto es, de occidente a oriente. Su revolución se efectúa en un intervalo de 27 días y medio.

Como la distancia de la Luna a la Tierra es considerablemente más pequeña que la del Sol, la órbita de aquel astro lo coloca en cada revolución en una serie de posiciones respecto de este último, llamadas fases, y que nos la presentan de manera muy distinta. Ya aparece como un disco completamente iluminado; ya la vemos bajo la forma de un semi-círculo luminoso; ya, por fin, se limita a una sección más ó menos delgada, que es lo que llamamos media luna, ó una porción de círculo superior a la mitad de esta figura.

- Defina la unidad de medida conocida como Unidad Astronómica (UA). De un ejemplo dónde se usa convenientemente esta unidad de medida.

Sol. La Unidad Astronómica (UA) es la distancia media medida desde el Sol hasta la Tierra y vale $1UA = 149.600.000[Km]$.

Esta unidad se utiliza cuando se miden distancias grandes que estén en relacionadas con las distancias entre planetas, distancias entre estrella y planeta o distancias dentro de un sistema solar.

5^{ta} OBAA SOLUCIÓN 8^{vo} DE PRIMARIA

PARTE CONCEPTUAL (70%)

I. RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS DE MANERA BREVE Y CLARA. 25 %

1. Astrofísica

Sol. El término astrofísica se refiere al estudio de la física del universo. Si bien se usó originalmente para denominar la parte teórica de dicho estudio, la necesidad de dar explicación física a las observaciones astronómicas ha llevado a cabo que los términos astronomía y astrofísica. Una vez que se comprendió que los elementos que forman parte de los **objetos celestes** eran los mismos que conforman la Tierra, y que las mismas leyes de la física se aplican a ellos, había nacido la astrofísica como una aplicación de la física a los fenómenos observados por la astronomía.

2. Cual es la diferencia entre meteoro y meteorito.

Sol. Un meteorioide es un cuerpo celeste pequeño (desde un centenar de micras hasta unas decenas de metros) que orbita alrededor del Sol. La mayoría de los meteoroides son fragmentos de cometas y asteroides, aunque también pueden ser rocas de satélites o planetas que han sido eyectadas en grandes impactos. Cuando entra en la atmósfera de un planeta, el meteorioide se calienta y se vaporiza parcial o completamente se denomina **meteoro**. El gas que queda en la trayectoria seguida por el meteorioide se ioniza y brilla. El rastro de vapor brillante se llama técnicamente meteoro, aunque su nombre común es estrella fugaz. Se denominan bólidos aquellos meteoros cuya luminosidad es superior a -4 (la del Planeta Venus). De aquellos bólidos de luminosidad muy superior a la de la Luna, los superbólidos, pueden sobrevivir fragmentos que al llegar al suelo se denominan **meteoritos**.
Meteoro, en su uso astronómico, es un concepto que se reserva para distinguir el fenómeno luminoso que se produce al atravesar un meteorioide nuestra atmósfera. El fenómeno se conoce también como lluvia de Meteoros.

3. Día sideral

Sol. Día Sideral es el tiempo que tarda en volver a ver una estrella en la misma posición.
El día sideral más corto que el día solar. También resulta de esto que una estrella determinada vuelve a pasar por

el meridiano antes que el Sol. La duración de un día solar, de 24 horas, que comprende un intervalo de la hora del mediodía al mediodía siguiente, es mayor que la del día sideral; la diferencia se eleva a 3 minutos 56 segundos.

Al cabo del año, una estrella ha pasado 366 veces por el meridiano, mientras que el Sol lo efectúa únicamente 365. En una palabra, el año, que se compone de 366 días siderales, ó de 366 rotaciones de la Tierra, no contiene más que 365 días solares. Esta es consecuencia del doble movimiento de la Tierra, de rotación sobre sí misma y de translación ó de revolución alrededor del Sol.

4. Planetas Jovianos

Sol. Son conocidos también como planetas exteriores y estos son: Jupiter, Saturno, Neptuno y Urano

5. Año luz

Sol. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año. Equivale aproximadamente a $9,46 \times 10^{12} [km] = 9.460.000.000.000 [km]$, o sea, algo menos de 10 billones de kilómetros. Más específicamente, un año luz es la distancia que recorrería un fotón en un año Juliano (365,25 días de 86.400 s) a la velocidad de la luz en el vacío (299.792,458 km/s) sin la influencia de ningún campo gravitacional o magnético.

II. COLOQUE UNA (V) SI LA AFIRMACIÓN ES CORRECTA Y (F) SI ES FALSA. 20 %

- La medida conocida como Unidad Astronómica (UA) es distancia entre la Tierra y la Luna. [F]
- El 21 de junio, comienza el invierno en el hemisferio Sur y el verano en el hemisferio Norte. [V]
- Es verdad que solo los planetas Júpiter y Saturno son los únicos con anillos. [F]
- Las Lunas Fobos (miedo) y Deimos (terror) orbitan al planeta Marte. [V]
- Según la nueva definición de planeta, Plutón ya no es considerado como planeta. [V]

III. ENCIERRE EL INCISO CORRECTO 25 %

- La luz producida en la superficie del Sol llega a la tierra en:
 - 10,2 minutos
 - 8,3 minutos**
 - 2,9 minutos
 - Ninguna

2. El otoño en el hemisferio Norte y la primavera en el Sur, empiezan el
 a) 21 de junio **b) 23 de septiembre** c) 21 de marzo d) Ninguna
3. El punto máximo del hemisferio Sur donde caen perpendiculares los rayos del Sol durante el solsticio de verano, es en el
 a) Trópico de Cáncer b) La línea del Ecuador **c) Trópico de Capricornio** d) Ninguna
4. La órbita de un planeta al rededor del Sol es:
 a) Circular **b) Elíptica** c) Cónica d) Ninguna
5. El movimiento que realiza la Tierra, junto a los demás astros del sistema solar, siguiendo al Sol en su movimiento hacia la constelación de Lira
 a) Traslación b) Rotación **c) Revolución** d) Ninguna

PARTE PRÁCTICA 30%

1. El volcán inactivo Olympus del planeta Marte alcanza una altura $H = 26,55[Km]$, un diámetro en su base igual a $D = 600[Km]$ y tiene una forma cónica. La densidad promedio del planeta es $4,01[gr/cc]$. Calcule la masa total del volcán en $[Kg]$. Ayuda: el volumen de un cono es $V = \frac{\pi}{12}D^2H$ y la densidad $d = m/V$

Sol.

Primero se calcula el volumen del volcán,

$$V = \frac{\pi}{12}D^2H \quad (1)$$

$$V = \frac{\pi}{12}(600[Km])^2(26.55[Km]) = 2,502 \times 10^9 [Km^3]$$

Convirtiendo en cc:

$$2,502 \times 10^9 [Km^3] \times \frac{(1000[m])^3}{(1[Km])^3} \times \frac{(100[cm])^3}{(1[m])^3} \times \frac{1[cc]}{1[cm^3]} = 2,502 \times 10^{24} [cc]$$

entonces reemplazamos en la ecuación de la masa

$$m = d \times V \quad (2)$$

$$m = 4,01[gr/cc] \times 2,502 \times 10^{24} [cc]$$

$$m = 1.003 \times 10^{25} [gr]$$

2. Expresar las distancias años luz y UA en metros

Sol.

Sabemos que un año luz es la distancia que tarda en recorrer un año la luz, y que la UA es la distancia que la luz viaja desde el sol hacia la tierra.

$$X_{distancia} = c_{velocidad-de-la-luz} \times t_{tiempo} \quad (3)$$

$$1 \text{ año} \times \frac{365.25[días]}{1 \text{ año}} \times \frac{24[horas]}{1[día]} \times \frac{3600[seg]}{1[hora]} = 3.155 \times 10^7 [seg]$$

$$8.3[min] \times \frac{60[seg]}{1[min]} = 498[seg]$$

si $c = 2,89 \times 10^8 [m/seg]$ se tiene,

$$X_{año-luz} = c \times t_{año-luz} \quad (4)$$

$$1 \text{ año-luz} = 2,89 \times 10^8 [m/seg] \times 3.155 \times 10^7 [seg]$$

$$1 \text{ año-luz} = 9.12 \times 10^{15} [m]$$

$$X_{UA} = c \times t_{sol-tierra} \quad (5)$$

$$1UA = 2,89 \times 10^8 [m/seg] \times 498[seg]$$

$$1UA = 1,44 \times 10^{11} [m]$$

5^{ta} OBAA SOLUCIÓN 1^o DE SECUNDARIA

PARTE CONCEPTUAL (70%)

I. RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS DE MANERA BREVE Y CLARA. 25 %

1. Astrofísica

Sol.

La astrofísica es una rama muy sólida de la astronomía que estudia la naturaleza y la estructura física de los cuerpos celestes, tanto próximos como lejanos. La astrofísica también estudia la composición y la estructura de la Materia interestelar, nubes de gases y polvos que ocupan amplias zonas del espacio y que en una época eran consideradas absolutamente vacías. Los métodos de investigación astrofísica son también aplicados al estudio de los Planetas y cuerpos menores del sistema solar, de cuya composición y estructura, gracias a las investigaciones llevadas a cabo por satélites artificiales y sondas interplanetarias, se ha podido lograr un conocimiento profundo, que en muchos casos ha permitido modificar convicciones muy antiguas.

2. Movimiento retrógrado

Sol.

Si se observa el Sistema Solar bastante por encima del polo norte del Sol, verá que la mayoría de los objetos orbitan el Sol en sentido contrario de las agujas del reloj; casi todos rotan sobre sus ejes en sentido contrario de las agujas del reloj; y casi todos los satélites orbitan sus planetas en sentido contrario de las agujas del reloj. Esto se llama movimiento progrado, o hacia delante. Sin embargo, hay excepciones para todo esto. Algunos cometas orbitan el Sol en sentido de las agujas del reloj. Venus y Urano rotan sobre sus ejes en sentido de las agujas del reloj. Tritón, el satélite más grande de Neptuno, orbita en esta dirección opuesta; y así lo hacen algunos otros pequeños satélites de los planetas exteriores. Esto se llama movimiento retrógrado, o hacia atrás.

3. Bóveda Celeste

Sol.

La Bóveda celeste también llamada esfera celeste es una esfera ideal, sin radio definido, concéntrica en el globo terrestre, en la cual aparentemente se mueven los astros. Permite representar las direcciones en que se hallan los objetos celestes; así es como el ángulo for-

mado por dos direcciones será representado por un arco de círculo mayor sobre esa esfera. Teóricamente se confunde con el de la Tierra: el Eje del mundo es el de rotación de la esfera celeste y es coincidente con el eje de rotación de la Tierra, por lo que se halla prácticamente centrada en el ojo del observador. Los astrónomos fundan sus mediciones en la existencia en esa esfera de puntos, círculos y planos convencionales: el plano del horizonte y el del ecuador celeste; el polo y el cenit; el meridiano, que sirve de origen para la medición del acimut. Resulta fácil hallar un astro o situarlo respecto a esos planos fundamentales.

4. Equinoccio

Sol.

El equinoccio es la posición del Sol como se ve desde la Tierra el 21 de Marzo (en el hemisferio norte). Más precisamente los equinoccios son uno de los dos lugares donde se cruza el Sol en su camino (la eclíptica) con el ecuador celeste. La ascensión recta se mide desde el equinoccio de primavera del hemisferio norte. Aunque se lo llama punto Vernal, esta en la constelación de Piscis, debido al movimiento de precesión. También es justo cuando el día y la noche duran el mismo tiempo

5. 1.- Eclíptica

Sol.

Es el plano de la órbita de la Tierra, y casi coincide con el plano del Sistema Solar. Como la Tierra no parece moverse alrededor del Sol, sino que este alrededor de la Tierra, se considera también el camino que sigue el Sol durante el año. Esta sobre las constelaciones zodiacales. Se llama así debido a que es donde se producen los eclipses.

II. COLOQUE UNA (V) SI LA AFIRMACIÓN ES CORRECTA Y (F) SI ES FALSA. 20 %

- La medida conocida como *Unidad Astronómica (UA)* es la distancia entre la Tierra y la Luna. [F]
- El 21 de junio, comienza el invierno en el hemisferio Sur y el verano en el hemisferio Norte. [V]
- Es verdad que solo los planetas Júpiter y Saturno son los únicos con anillos. [F]
- Las Lunas Fobos (miedo) y Deimos (terror) orbitan al planeta Marte. [V]
- Coordenadas geográficas son, ascensión recta y declinación. [F]

III. ENCIERRE EL INCISO CORRECTO 25 %

- La luz producida en la superficie del Sol llega a la tierra en:
a) 10,2 minutos **b) 8,3 minutos** c) 2,9 minutos d) Ninguna
- El invierno en el hemisferio Sur y el verano en el Norte, empiezan el
a) 21 de junio b) 23 de septiembre
c) 21 de marzo d) Ninguna
- El punto máximo del hemisferio Sur donde caen perpendiculares los rayos del Sol durante el solsticio de verano, es en el
a) Trópico de Cáncer b) La línea del Ecuador **c) Trópico de Capricornio** d) Ninguna
- La órbita de un planeta alrededor del Sol es:
a) Circular **b) Elíptica** c) Cónica d) Ninguna
- El movimiento que realiza la Tierra, junto a los demás astros del sistema solar, siguiendo al Sol en su movimiento hacia la constelación de Lira
a) Traslación b) Rotación
c) Revolución d) Ninguna

PARTE PRÁCTICA 30%

- El volcán inactivo Olimpus del planeta Marte alcanza una altura $H = 26,55[Km]$, un diámetro en su base igual a $D = 600[Km]$ y tiene una forma cónica. La densidad promedio del planeta es $4,01[gr/cc]$. Calcule la masa total del volcán en [Kg]. Ayuda: el volumen de un cono es $V = \frac{\pi}{12}D^2H$ y la densidad $d = m/V$

Sol.

Primero determinamos el volumen del volcán,

$$V = \frac{\pi}{12}(600[Km])^2 \times (26,55[Km]) = 2502278.5[Km^3] \quad (6)$$

también debemos transformar las unidades de la densidad

$$4.01[gr/cm^3] \times \frac{1[kg]}{1000[gr]} \times \frac{(100[cm])^3}{(1[m])^3} \times \frac{(1000[m])^3}{(1[km])^3} \\ = 4.01 \times 10^{12}[kg/km^3]$$

con esto se puede calcular la masa del volcán.

$$m_{volcan} = dV \quad (7)$$

$$m_{volcan} = 4.01 \times 10^{12}[kg/km^3] \times 2502278.5[Km^3] \\ = 1.0034 \times 10^{19}[kg]$$

- La hora establecida para este examen es el día juliano 2455347,08333. Dentro de dos días, a medio día, ¿qué día juliano será?

Sol.

Al día juliano se tiene que sumar 2 más 2 horas

$$2[horas] \times \frac{1[diá]}{24[horas]} = 0.083333$$

así tendremos

$$2455347,08333 + 2 + 0.083333 \\ = 2455349.166633[diá - juliano]$$

PARTE CONCEPTUAL (70%)

I. RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS DE MANERA BREVE Y CLARA. 25 %

1. Astronomía

Sol.

La astronomía se define como una ciencia cuyo objeto de estudio es la estructura, composición y procesos de los astros y sus leyes del movimiento.

2. Movimiento retrógrado

Sol.

Si se observa el Sistema Solar bastante por encima del polo norte del Sol, verá que la mayoría de los objetos orbitan el Sol en sentido contrario de las agujas del reloj; casi todos rotan sobre sus ejes en sentido contrario de las agujas del reloj; y casi todos los satélites orbitan sus planetas en sentido contrario de las agujas del reloj. Esto se llama movimiento progrado, o hacia delante. Sin embargo, hay excepciones para todo esto. Algunos cometas orbitan el Sol en sentido de las agujas del reloj. Venus y Urano rotan sobre sus ejes en sentido de las agujas del reloj. Triton, el satélite mas grande de Neptuno, orbita en esta dirección opuesta; y así lo hacen algunos otros pequeños satélites de los planetas exteriores. Esto se llama movimiento retrógrado, o hacia atrás.

3. Bóveda Celeste

Sol.

La Bóveda celeste también llamada esfera celeste es una esfera ideal, sin radio definido, concéntrica en el globo terrestre, en la cual aparentemente se mueven los astros. Permite representar las direcciones en que se hallan los objetos celestes; así es como el ángulo formado por dos direcciones será representado por un arco de círculo mayor sobre esa esfera. Teóricamente se confunde con el de la Tierra: el Eje del mundo es el de rotación de la esfera celeste y es coincidente con el eje de rotación de la Tierra, por lo que se halla prácticamente centrada en el ojo del observador. Los astrónomos fundan sus mediciones en la existencia, en esa esfera, de puntos, círculos y planos convencionales: el plano del horizonte y el del ecuador celeste; el polo y el cenit; el meridiano, que sirve de origen para la medición del acimut. Resulta fácil ha-

llar un astro o situarlo respecto a esos planos fundamentales.

4. ¿Cuál es la diferencia entre un telescopio reflector y un refractor?

Sol.

La diferencia que hay entre estos telescopios es el principio óptico que utilizan el reflector utiliza la reflexión y el refractor la refracción.

Reflexión en óptica se refiere al fenómeno por el cual un rayo de luz que incide sobre una superficie es reflejado. El ángulo con la normal a esa superficie que forman los rayos incidente y reflejado son iguales.

Refracción se refiere a la desviación que se produce en la luz cuando pasa de un medio transparente a otro de distinta densidad. Si colocas un lápiz dentro de un vaso con agua, parece que está partido. Este efecto es la refracción. El efecto de la refracción es el que produce que funcionen los telescopios con lentes, o que podamos ver un poco más allá del horizonte.

5. Diferencia entre galaxia espiral y elíptica

Sol.

*Una **galaxia elíptica** es un tipo de galaxia de la secuencia de Hubble que se caracteriza por las siguientes propiedades físicas: Ausencia o insignificante momento angular, Ausencia o insignificante cantidad de materia interestelar (gas y polvo), sin estrellas jóvenes, ausencia de cúmulos abiertos y Formada de estrellas antiguas, llamadas población II.*

*Una **galaxia espiral** es un tipo de galaxia de la secuencia de Hubble que se caracteriza por las siguientes propiedades físicas: Tiene un momento angular total considerable, está compuesta por una concentración de estrellas central (bulbo) rodeada por un disco, el disco es plano (con posibilidades de alabeo) y está formado por materia interestelar (gas y polvo), estrellas jóvenes de Población I (alta metalicidad) y cúmulos abiertos. Las galaxias espirales deben su nombre a los brazos luminosos con formación estelar dentro del disco que se prolonga más o menos logarítmicamente desde el núcleo central. Aunque a veces son difíciles de percibir, estos brazos las distinguen de las galaxias lenticulares, que presentan una estructura de disco pero sin brazos espirales.*

II. COLOQUE UNA (V) SI LA AFIRMACIÓN ES CORRECTA Y (F) SI ES FALSA. 20 %

- Es verdad que la salida de la Luna día tras día se adelanta. [F]
- El 21 de junio, comienza el invierno en el hemisferio Sur y el verano en el hemisferio Norte. [V]
- Es verdad que solo los planetas Júpiter y Saturno son los únicos con anillos. [F]
- Las Lunas Fobos (miedo) y Deimos (terror) orbitan al planeta Marte. [V]
- Coordenadas geográficas son, ascensión recta y declinación. [F]

III. ENCIERRE EL INCISO CORRECTO 25 %

- La luz producida en la superficie del Sol llega a la tierra en:
 - 10,2 minutos
 - 8,3 minutos**
 - 2,9 minutos
 - Ninguna
- La primavera en el hemisferio Norte y el otoño en el Sur, empiezan el
 - 21 de julio
 - 23 de septiembre
 - 21 de marzo**
 - Ninguna
- El punto máximo del hemisferio Sur donde caen perpendiculares los rayos del Sol durante el solsticio de verano, es en el
 - Trópico de Cáncer
 - La línea del Ecuador
 - Trópico de Capricornio**
 - Ninguna
- La órbita de un planeta al rededor del Sol es:
 - Circular
 - Elíptica**
 - Cónica
 - Ninguna
- Cuanto varia en promedio la salida de la Luna día tras día.
 - 20 minutos
 - 50 minutos**
 - 90 minutos
 - Ninguna

PARTE PRÁCTICA 30%

- El volcán inactivo Olympus del planeta Marte alcanza una altura $H = 26,55[Km]$, un diámetro en su base igual a $D = 600[Km]$ y tiene una forma cónica. La densidad promedio del planeta es $4,01[gr/cc]$. Calcule la masa total del volcán en [Kg]. Ayuda: el volumen de un cono es $V = \frac{\pi}{12}D^2H$ y la densidad $d = m/V$

Sol.

Primero determinamos el volumen del volcan,

$$V = \frac{\pi}{12}(600[Km])^2 \times (26,55[Km]) = 2502278.5[Km^3] \quad (8)$$

tambien debemos transformar las unidades de la densidad

$$4.01[gr/cm^3] \times \frac{1[kg]}{1000[gr]} \times \frac{(100[cm])^3}{(1[m])^3} \times \frac{(1000[m])^3}{(1[km])^3} \\ = 4.01 \times 10^{12}[kg/km^3]$$

con esto se puede calcular la masa del volcan.

$$m_{volcan} = dV \quad (9)$$

$$m_{volcan} = 4.01 \times 10^{12}[kg/km^3] \times 2502278.5[Km^3] \\ = 1.0034 \times 10^{19}[kg]$$

- La estrella alfa del centauro, es la más cercana a nuestro Sol y se encuentra a 4,2 años luz de distancia, exprese esta distancia en [UA] y en [Km]

Sol.

Primero calculamos la distancia que recorre la luz en 1 año:

$$1año = 365.25[dias] \times \frac{24[horas]}{1dia} \times \frac{3600[seg]}{1[hora]} \\ = 31557600[seg]$$

$$1años \text{ luz} = ct = 2,98 \times 10^8[m/seg] \times 31557600[seg] \\ = 9.40 \times 10^{15}[m]$$

y luego por el factor de conversión:

$$4,2[años-luz] \times \frac{9.40 \times 10^{15}[m]}{1año \text{ luz}} = 3.95 \times 10^{16}[m]$$

PARTE CONCEPTUAL (70%)

I. RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS DE MANERA BREVE Y CLARA. 25 %

1. La segunda ley de Kepler

Sol.

Las leyes de Kepler fueron enunciadas por Johannes Kepler para describir matemáticamente el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor de la estrella. Cumple que el radio vector que une al planeta con la estrella barre áreas iguales en tiempos iguales.

2. ¿Cuál es la declinación del cenit de su ciudad?

Sol.

La declinación (coordenada celeste) es una medida utilizada por los astrónomos para especificar lugares en el cielo. Es muy similar a la latitud geográfica. La declinación de un punto en el cielo, como la latitud en la Tierra, es un número entre -90 y +90 grados. En este caso la declinación del cenit será la latitud de su ciudad, puesto que es el ángulo entre el ecuador celeste y el cenit
La Paz 16.15^o

3. ¿Qué es el efecto Doppler?

Sol.

El Efecto Doppler se produce cuando la fuente o el receptor de una onda está en movimiento relativo, por ejemplo: el movimiento de un emisor o receptor de ondas sonoras, produce en el receptor que la onda sonora se vuelva grave o aguda. Cuando una fuente o un receptor de luz está en movimiento este puede producir el corrimiento al azul (al acercarse) o al rojo (al alejarse).

4. ¿Cuál es la diferencia entre Cuásar y Pulsar?

Sol.

*Un **cuásar** ó **quásar** (casi estrella) es una muy intensa fuente astronómica de energía electromagnética, incluyendo radiofrecuencias y luz visible. Un **pulsar** es una estrella de neutrones que emite radiación periódica. Los pulsares poseen un intenso campo magnético que induce la emisión de estos pulsos de radiación electromagnética a intervalos regulares relacionados con el periodo de rotación del objeto.*

5. Cual es la diferencia entre onda transversal y longitudinal.

Sol.

*Una **onda longitudinal** es una onda en la que el movimiento de oscilación de las partículas del medio es paralelo a la dirección de propagación de la onda. Las ondas longitudinales reciben también el nombre de ondas de presión u ondas de compresión. Algunos ejemplos de ondas longitudinales son el sonido y las ondas sísmicas de tipo P generadas en un terremoto.*

*Una **onda transversal** es una onda en movimiento que se caracteriza porque sus oscilaciones ocurren perpendiculares a la dirección de propagación. Si una onda transversal se mueve en el plano x-positivo, sus oscilaciones van en dirección arriba y abajo que están en el plano y-z.*

II. COLOQUE UNA (V) SI LA AFIRMACIÓN ES CORRECTA Y (F) SI ES FALSA. 20 %

- El fin de la vida de un estrella gigante Azul es un agujero negro. [V]
- El 21 de junio, comienza el invierno en el hemisferio Sur y el verano en el hemisferio Norte. [V]
- Por medio de los radiotelescopios se descubrió los cuásares [V]
- En radioastronomía las longitudes de onda que se observan son mayores que el visible. [V]
- Coordenadas geográficas son, ascensión recta y declinación. [F]

III. ENCIERRE EL INCISO CORRECTO 25 %

- Una sonda enviada para estudiar al Sol se sitúa a una distancia de 0.5 U.A. del mismo. El flujo de radiación que recibe del Sol es:
 - El doble
 - El mismo
 - La mitad
 - cuatro veces más**
- La primavera en el hemisferio Norte y el otoño en el Sur, empiezan el
 - 21 de junio
 - 23 de septiembre
 - 21 de marzo**
 - Ninguna
- El punto máximo del hemisferio Sur donde caen perpendiculares los rayos del Sol durante el solsticio de verano, es en el
 - Trópico de Cáncer
 - La línea del Ecuador
 - Trópico de Capricornio**
 - Ninguna
- ¿Qué ángulo hay entre la eclíptica y el ecuador?
 - 5,4
 - 16,15
 - 23,5**
 - Ninguna
- El movimiento de traslación de la Tierra es mayor en el
 - a) Perihelio**
 - Afelio
 - Perigeo
 - Ninguna

PARTE PRÁCTICA 30%

1. Utilizando la tercera ley de Kepler determine la masa del Sol.

Sol.

Aplicando la tercera ley de Kepler, a la Tierra y al Sol tenemos,

$$T_{Tierra}^2 = \frac{4\pi^2 R_{Tierra-Sol}^3}{GM_{Sol}} \quad (10)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} T_{Tierra} &= 365.25[dias] \times \frac{24[horas]}{1[dia]} \times \frac{3600[seg]}{1[hora]} \\ &= 31557600[seg] \end{aligned}$$

y

$$R_{Tierra-Sol} = 1[UA] = 1,5 \times 10^{11}[m]$$

despejando y reemplazando en la ecuación [1], se tiene,

$$M_{Sol} = \frac{4\pi^2 R_{Tierra-Sol}^3}{GT_{Tierra}^2} \quad (11)$$

$$M_{Sol} = \frac{4\pi^2 (1,5 \times 10^{11}[m])^3}{6,67 \times 10^{-11}[\frac{Nm^2}{Kg^2}] \times (31557600[seg])^2}$$

$$M_{Sol} = 2,0045 \times 10^{30}[Kg]$$

2. Determine la *velocidad crítica de escape* para que una nave salga de las influencia gravitacional del planeta Marte.

Sol.

Para que la nave se libere la influencia gravitatoria del planeta Marte se tiene que cumplir que la energía cinética sea igual a la energía gravitacional producida por el planeta Marte sobre la superficie, esto es,

$$\frac{1}{2}m_{nave}v_{escape}^2 = \frac{GM_{Marte}m_{nave}}{R_{Marte}} \quad (12)$$

despejando se obtiene la ecuación [4],

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_{Marte}}{R_{Marte}}} \quad (13)$$

Reemplazando datos se tiene,

$$\begin{aligned} v_{escape} &= \sqrt{\frac{2 \times 6,67 \times 10^{-11}[\frac{Nm^2}{Kg^2}] \times 0,64 \times 10^{24}[Kg]}{3393000[m]}} \\ v_{escape} &= 5017.79[m/s] \end{aligned}$$

5^{ta} OBAA SOLUCIÓN 4^{to} DE SECUNDARIA

PARTE CONCEPTUAL (60%)

I. RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS DE MANERA BREVE Y CLARA. 20 %

1. ¿Qué dice la segunda ley de Kepler?

Sol.

Las leyes de Kepler fueron enunciadas por Johannes Kepler para describir matemáticamente el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor de la estrella. Cumple que el radio vector que une al planeta con la estrella barre áreas iguales en tiempos iguales

2. ¿Qué estudia la Cosmología?

Sol.

La Cosmología estudia el origen, la formación y el destino del Universo

3. ¿Qué es el efecto Doppler?

Sol.

El Efecto Doppler se produce cuando la fuente o el receptor de una onda está en movimiento relativo, como por ejemplo: el movimiento de un emisor o receptor de ondas sonoras, produce en el receptor que la onda sonora se vuelva grave o aguda. Cuando una fuente o un receptor de luz esta en movimiento este puede producir el corrimiento al azul (al acercarse) o al rojo (al alejarse).

4. ¿Cuál es la diferencia entre Cuasar y Pulsar?

Sol.

*Un **cuásar** ó **quásar** (casi estrella) es una muy intensa fuente astronómica de energía electromagnética, incluyendo radiofrecuencias y luz visible.*

*Un **púlsar** es una estrella de neutrones que emite radiación periódica. Los pulsares poseen un intenso campo magnético que induce la emisión de estos pulsos de radiación electromagnética a intervalos regulares relacionados con el periodo de rotación del objeto.*

5. Cual es la diferencia entre onda transversal y longitudinal.

Sol.

*Una **onda longitudinal** es una onda en la que el movimiento de oscilación de las partículas del medio es paralelo a la dirección de propagación de la onda. Las ondas longitudinales reciben también el nombre de ondas de presión u ondas de compresión. Algunos ejemplos de ondas longitudinales son el sonido y las ondas sísmicas de*

tipo P generadas en un terremoto.

*Una **onda transversal** es una onda en movimiento que se caracteriza porque sus oscilaciones ocurren perpendiculares a la dirección de propagación. Si una onda transversal se mueve en el plano x-positivo, sus oscilaciones van en dirección arriba y abajo que están en el plano y-z.*

II. COLOQUE UNA (V) SI LA AFIRMACIÓN ES CORRECTA Y (F) SI ES FALSA. 15 %

- El fin de la vida de un estrella gigante Azul es un agujero negro. [V]
- El 21 de junio, comienza el invierno en el hemisferio Sur y el verano en el hemisferio Norte. [V]
- Por medio de los radiotelescopios se descubrió los cuásares [V]
- La longitud de onda es afectada por el movimiento relativo de la fuente emisora acercándose al observador [V]
- Es verdad que una estrella emite todo el espectro de un cuerpo negro. [V]

III. ENCIERRE EL INCISO CORRECTO 20 %

- Una sonda enviada para estudiar al Sol se sitúa a una distancia de 0.5 U.A. del mismo. El flujo de radiación que recibe del Sol es:
 - el doble
 - el mismo
 - la mitad
 - cuatro veces más**
- La primavera en el hemisferio Norte y el otoño en el Sur, empiezan el
 - 21 de junio
 - 23 de septiembre
 - 21 de marzo**
 - Ninguna
- El punto máximo del hemisferio Sur donde caen perpendiculares los rayos del Sol durante el solsticio de verano, es en el
 - Trópico de Cáncer
 - La línea del Ecuador
 - Trópico de Capricornio**
 - Ninguna
- En promedio cuanto varia la salida de la Luna día tras día.
 - 20 minutos
 - 50 minutos**
 - 90 minutos
 - Ninguna
- Según el color de una estrella cual es la más joven.
 - Azul**
 - Roja
 - Amarilla
 - Ninguna

PARTE PRÁCTICA 45%

- Utilizando la tercera ley de Kepler determine la masa del Sol.

Sol.

Aplicando la tercera ley de Kepler, a la Tierra y al Sol tenemos,

$$T_{Tierra}^2 = \frac{4\pi^2 R_{Tierra-Sol}^3}{GM_{Sol}} \quad (14)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} T_{Tierra} &= 365.25[dias] \times \frac{24[h]}{1[dia]} \times \frac{3600[seg]}{1[h]} \\ &= 31557600[seg] \end{aligned}$$

y

$$R_{Tierra-Sol} = 1[UA] = 1,5 \times 10^{11}[m]$$

despejando y reemplazando en la ecuación [1], se tiene,

$$M_{Sol} = \frac{4\pi^2 R_{Tierra-Sol}^3}{GT_{Tierra}^2} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} M_{Sol} &= \frac{4\pi^2 (1,5 \times 10^{11}[m])^3}{6,67 \times 10^{-11}[\frac{Nm^2}{Kg^2}] \times (31557600[seg])^2} \\ M_{Sol} &= \\ &= 2,0045 \times 10^{30}[Kg] \end{aligned}$$

2. Determine la *velocidad crítica de escape*, para que una nave salga de las influencia gravitacional del planeta Marte

Sol.

Para que la nave se libere de la influencia gravitatoria del planeta Marte se tiene que cumplir que la energía cinética sea igual a la energía gravitacional producida por el planeta Marte sobre la superficie, esto es,

$$\frac{1}{2}m_{nave}v_{escape}^2 = \frac{GM_{Marte}m_{nave}}{R_{Marte}} \quad (16)$$

despejando se obtiene la ecuación [4],

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_{Marte}}{R_{Marte}}} \quad (17)$$

Reemplazando datos se tiene,

$$\begin{aligned} v_{escape} &= \sqrt{\frac{2 \times 6,67 \times 10^{-11}[\frac{Nm^2}{Kg^2}] \times 0,64 \times 10^{24}[Kg]}{3393000[m]}} \\ v_{escape} &= 5017.79[m/s] \end{aligned}$$

3. Determinar la energía mecánica total (en Joules) para colocar un satélite de 10 kg de masa a una altura de 100 km de la superficie terrestre tal que su velocidad orbital sea 320 m/s.

Sol.

esto será,

$$E = \frac{1}{2}m_{sat}v_{sat}^2 - \frac{GM_{tierra}m_{sat}}{R_{sat}} \quad (18)$$

donde R_{sat} se mide desde el centro de la Tierra hasta el satélite, esto es,

$$R_{sat} = R_{tierra} + h_{sat}$$

con h_{sat} altura del satélite desde la superficie de la Tierra, llegando a obtener,

$$R_{sat} = 6378[km] + 100[km] = 6478[km]$$

Reemplazando valores se tiene,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}10[kg](320[m/s])^2 \\ &= \frac{6,67 \times 10^{-11}[\frac{Nm^2}{Kg^2}] \times 5,97 \times 10^{24}[Kg] \times 10[kg]}{6478000[m]} \\ E &= -1,145 \times 10^9[joul] \end{aligned}$$

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Dr. Diego Sanjinés Castedo

Email: sanjines@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Dr. Eduardo Palenque Vidaurre

Email: edyruy@latinmail.com

Carrera de Física

Lic. Deterlino Urzagasti

Email: urza@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

Misión

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica bianualmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

La RBF publica artículos, revisiones y colaboraciones en lengua castellana. Se reciben también artículos escritos en inglés, los que son traducidos al castellano por los editores para su publicación.

Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

Instrucciones para los autores

Los trabajos enviados para su publicación deberán estar escritos preferentemente en castellano. Trabajos escritos en inglés podrán ser aceptados por el Comité Editorial y, pasado el proceso de aceptación serán traducidos al castellano para su publicación en la RBF.

Los autores deberán enviar sus trabajos en el formato *MS Word*, ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. Las figuras deberán tener una resolución razonable a fin de que puedan ser vistas con suficiente claridad por el lector.

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

CONTENIDO

A. ARTÍCULOS

CONDICIONES DE SINCRONIZACIÓN EN DOS PÉNDULOS ACOPLADOS
A. R. Ticona Bustillos & G. M. Ramírez Ávila

MEDIDAS DE ALBEDO EN UV-B EN EL SALAR DE UYUNI
Francesco Zaratti et al.

EFECTO DEL CAMPO ELÉCTRICO ATMOSFÉRICO SOBRE EL CONTEO DE PARTÍCULAS CARGADAS DETECTADAS POR UN CENTELLADOR EN EL LABORATORIO DE FÍSICA CÓSMICA DE CHACALTAYA
Winkelmann R.

KINKS Y SOLITONES EN LA ECUACIÓN DE GINZBURG-LANDAU CÚBICA-QUÍNTICA REAL
D. Urzagasti

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

POST-COMPRESIÓN DE PULSOS CON DIFERENTES PERFILES TEMPORALES
F. Flores & J. San Román

ESCENARIOS DE CAMBIO CLIMÁTICO EN EL SUR DEL DEPARTAMENTO DE LA PAZ: PATACAMAYA Y CALACOTO
Andrés W. Burgoa Mariaca

SUCESIÓN GENERALIZADA DE FIBONACCI APLICADA A CIRCUITOS TIPO ESCALERA
Diego Sanjinés C.

D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

DISEÑO DE UNA ZAMPOÑA CON TUBOS DE VIDRIO
M. F. Sánchez Barrero, F. Ghezzi

5^{ta} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
Bustos R. et al.