

ISSN - 1562 - 3823

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 25

NOV. 2014 • LA PAZ - BOLIVIA



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA
Ésta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Dr. Diego Sanjinés Castedo
Email: sanjines@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez
Email: avelarde@fiumsa.edu.bo
Dr. Eduardo Palenque Vidaurre
Email: edyruy@yahoo.es

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos
Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

CONSEJO EDITORIAL

Dr. Oscar Antonio Rondón

Institute of Nuclear and Particle Physics
University of Virginia
McCormick Road, Charlottesville, VA 22901
804 924-6787, USA
Email: or@virginia.edu

Dr. Carlos Navia

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense
Av. Gen. Milton Tavares de Souza
24210-340, Niterói, RJ-Brasil
Email: gfcnoj@if.uff.br

Dr. Jason Gallas

Instituto de Física
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Brasil
Email: jgallas@if.ufrgs.br

Dr. Oscar Saavedra

Dipartimento di Fisica Generale
Universita di Torino, Italia
Email: saavedra@to.infn.it

Dr. Nuno Miguel Melo Crokidakis Peregrino

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense
Av. Gen. Milton Tavares de Souza
24210-340, Niterói, RJ-Brasil
Email: nuno@if.uff.br

ISSN 1562-3823



Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
Y
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 25
NOVIEMBRE DE 2014

Revista Boliviana de Física

ISSN 1562-3823

Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica

<http://www.scielo.org.bo>

<http://www.latindex.unam.mx>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

Diseño: A. Ticona

Dirección: Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.
Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

Portada: La Luna, vista desde la ciudad de La Paz.

Formato $\LaTeX 2_{\epsilon}$. *Tipo de fuente utilizada:* newcentury

IMPRESO EN BOLIVIA — PRINTED IN BOLIVIA

CONTENIDO

A. ARTÍCULOS

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE TEMPERATURAS EXTREMAS SOBRE TERRITORIO BOLIVIANO	<i>V. M. Peñafiel & M. Andrade</i>	1
SINCRONIZACIÓN Y ESTABILIDAD EN UN SISTEMA COMPUESTO POR DOS OSCILADORES QUÍMICOS IDÉNTICOS	<i>S. A. Oporto Almaraz & G. M. Ramírez Ávila</i>	7
DINÁMICA SEMICLÁSICA DE ENLACE FUERTE EN CAMPOS RÁPIDAMENTE OSCILANTES MÁS UN POTENCIAL ESTÁTICO ARBITRARIO	<i>L. A. Martínez, D. Sanjinés & J. P. Gallinar</i>	14

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

MOVIMIENTO ORBITAL DE LA LUNA	<i>D. Sanjinés</i>	23
-------------------------------	--------------------	----

D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

SIMULACIÓN DEL MOVIMIENTO DE UN PÉNDULO DOBLE EN UN MEDIO VISCOSO	<i>E. Maraz & O. Burgoa</i>	27
18 ^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA, 8 ^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA	<i>Bustos R. et al.</i>	31

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE TEMPERATURAS EXTREMAS SOBRE TERRITORIO BOLIVIANO

STATISTICAL ANALYSIS OF EXTREME TEMPERATURES IN THE BOLIVIAN TERRITORY

V. M. PEÑAFIEL[†] & M. ANDRADE[‡]

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

(Recibido 9 de Abril de 2014; aceptado 19 de Agosto de 2014)

RESUMEN

Se ejecuta un conjunto de operaciones sobre los registros disponibles de temperaturas máxima y mínima diarias provenientes de cinco estaciones colocadas aproximadamente sobre los ejes EO y NS del territorio boliviano. El propósito es, principalmente, el de aislar los valores extremos (altos y bajos) correspondientes a cada una de las estaciones de medición, para luego determinar las frecuencias con que se presentan y efectuar la comparación de las mismas entre estaciones (a fin de detectar alguna causa externa común). Los resultados del análisis muestran que los fenómenos extremos de temperatura son más bien locales, excepto por efectos periódicos obvios.

Código(s) PACS: 07.05.Kf — 93.30.Tr

Descriptores: Análisis de datos — Distribución geográfica de temperaturas

ABSTRACT

We carry out a set of operations on the available data registers of maximum and minimum daily temperatures of five stations located on the East-West and North-South axes in the Bolivian territory. Our main purpose is to isolate the extreme values (high and low) corresponding to each of the stations and thereafter to determine their frequencies and compare them among the stations (in order to detect any common external cause). The results of the analysis show that the extremal temperature phenomena are local, except for the obvious periodic ones.

Subject headings: Data analysis — Temperate regions

1. INTRODUCCIÓN.

El estudio y seguimiento de los valores extremos de temperatura tiene importancia por sus impactos en la agricultura, previsiones energéticas y aún en estadísticas de mortalidad (Huynen et al. 2001) y, por supuesto, en consideraciones ambientales en conexión con el “cambio climático” (Beniston & Stephenson 2004).

Gran parte de la atención, por tanto, está dirigida a determinar y predecir la ocurrencia de “olas de calor”, “heladas”, etc. sobre la base de registros empíricos previos o simulaciones.

En el presente trabajo, el interés está orientado sobre todo en la comparación de medidas, provenientes de estaciones estratégicamente elegidas, con el propósito de caracterizar el comportamiento general, sobre territorio boliviano, de estructuras térmicas con valores muy alejados respecto de la media “normal”.

Como en un trabajo anterior (Peñafiel & Andrade 2013), se ha hecho una selección de cinco estaciones meteorológicas (Tabla 1) adecuadamente colocadas sobre los ejes territoriales longitudinal y transversal, y tomando en cuenta las principales zonas climáticas -altiplano, valles y llanos- las cuales representan también a las regiones frías, templadas y cálidas del país.

El comportamiento climático en el territorio boliviano no difiere grandemente entre esas tres regiones: se tiene un lapso invernal seco y lluvias concentradas sobre todo en verano. Por esto, es interesante indagar sobre el grado de correlación de las estructuras de temperatura extrema entre todos los puntos considerados.

Las operaciones numéricas aplicadas a los registros empíricos tienen principalmente ese fin.

2. TENDENCIAS EXTREMAS ANUALES.

Las series temporales disponibles constan de 7304 valores cada una, correspondientes a 20 años, desde el 1 de Enero de 1989 hasta el 31 de Diciembre de 2008 (Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología

[†]vmiguel@fiumsa.edu.bo

[‡]mandrade@fiumsa.edu.bo

TABLA 1
POSICIÓN DE LAS ESTACIONES.

Estación	Lat.	Long.	a.s.n.m. [m]
E1 (Ayo Ayo)	-17.083	-68.000	3880
E2 (Cochabamba)	-17.417	-66.183	2548
E3 (Pto. Suarez)	-18.983	-57.817	134
E4 (Cobija)	-11.0330	-68.7830	272
E5 (Tarija)	-21.5500	-64.7000	1854

a.s.n.m. = altura sobre el nivel del mar.

TABLA 2
TENDENCIAS ANUALES (TEMPERATURAS MÁXIMAS).

Estación	$a[^\circ\text{C}/\text{día}]$	$b[^\circ\text{C}]$	$\bar{T}_{max}[^\circ\text{C}]$
E1	0.220830	21.417143	16.0
E2	0.061466	36.079571	30.7
E3	0.020714	33.103714	27.0
E4	-0.04787	40.000714	31.0
E5	0.030210	36.541	26.0

TABLA 3
TENDENCIAS ANUALES (TEMPERATURAS MÍNIMAS).

Estación	$a[^\circ\text{C}/\text{día}]$	$b[^\circ\text{C}]$	$\bar{T}_{min}[^\circ\text{C}]$
E1	-0.1	-17.007143	1.4
E2	0.190662	7.6747140	20.0
E3	0.107647	-3.395143	8.6
E4	0.273090	3.8751430	20.5
E5	-0.01525	-4.197143	10.4

2010).

Se obtiene una evaluación rápida de las estructuras extremas de temperatura examinando la evolución anual de los máximos y mínimos valores anuales. Las figuras 1, 2, 3, 4 y 5 exhiben el grado de variación de esos índices y su tendencia lineal (rectas $at+b$ ajustadas por cuadrados mínimos) durante las dos décadas; los valores explícitos de los coeficientes de las tendencias lineales aparecen en las tablas 2 y 3.

La inspección de esos datos indica que no existe un comportamiento similar entre las estaciones, como se esperaría si los extremos de temperatura tuvieran un origen climático común. Así, mientras E1 y E5 tienen tendencias divergentes, E4 muestra tendencias convergentes y las tendencias de E2 y E3 son paralelas.

Por otra parte, la comparación entre las dos últimas columnas de las tablas 1 y 2, es decir, entre el comienzo de la tendencia con el valor medio aproximado de la temperatura en cada caso, arroja diferencias notables (de entre 5 y 18 grados) implicando ya la presencia de estructuras extremas para cada uno de los puntos anuales.

Otras formaciones más severas, por tanto menos probables, aparecen como picos por encima de la recta de tendencia en el caso de las máximas y por debajo de ella en el de las mínimas (Figs. 1 a 5).

Finalmente, exceptuando a las mínimas de la estación E2 (Fig. 2), los máximos y mínimos anuales

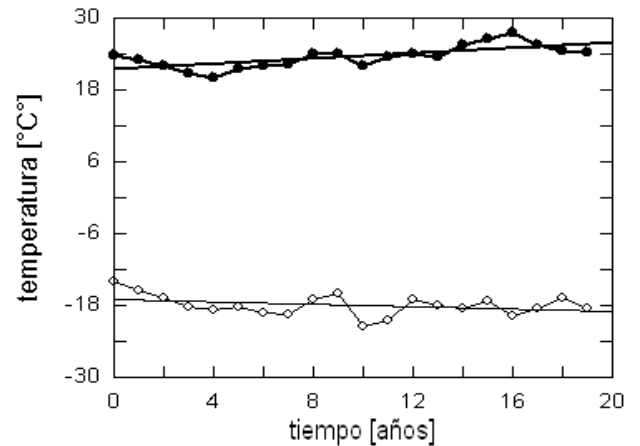


FIG. 1.— Temperaturas máxima anual y mínima anual para la estación E1 (Ayo Ayo). Las máximas tienen tendencia positiva y la mínimas tendencia negativa. Respecto del origen, se observa un pico con 3.6°C en las máximas y un mínimo con -4.5°C en las mínimas.

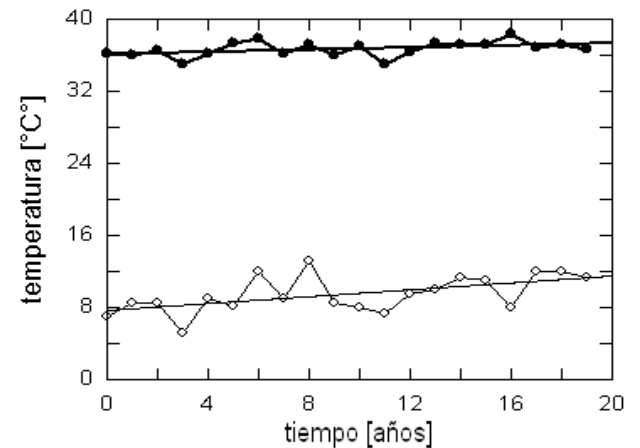


FIG. 2.— Temperaturas máxima y mínima anuales para la estación E2 (Cochabamba). Las tendencias son ambas positivas y las mayores desviaciones 2.23°C (máximas) y -5.54°C (mínimas).

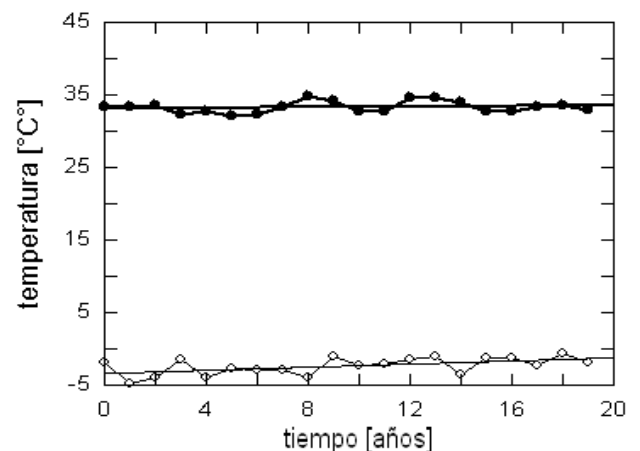


FIG. 3.— Temperaturas máxima anual y mínima anual para la estación E3 (Puerto Suárez). Las tendencias son ligeramente positivas en ambos casos y las mayores desviaciones (respecto de b) son 1.8°C y -1.4°C en cada caso.

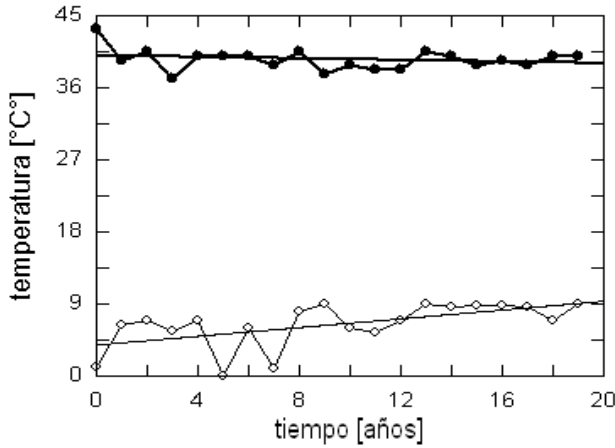


FIG. 4.— Temperaturas máxima y mínima anuales para la estación E4 (Cobija). Hay tendencia negativa y positiva y desviaciones de 3.2°C y -3.9°C respectivamente.

tienden a presentarse con razonable uniformidad, implicando, por supuesto, que la presencia de eventos climáticos más intensos, si los hay, deben tener períodos mayores a los 10 años. Esto hace atractiva la idea de buscar periodicidades menores de manera más sistemática.

3. PERIODICIDAD.

La cuestión de si las temperaturas, a lo largo de series temporales, se distribuyen en forma gaussiana no está definitivamente establecida, y parece obedecer fuertemente a factores locales (v. g. Harmel & Richardson (2002)). Por ejemplo, refiriendo todas las temperaturas del registro para la estación E1 a su recta de tendencia (recta de regresión), que se muestra en la figura 6, y construyendo el histograma de frecuencias con intervalos de un grado (Fig. 7), éste admite el ajuste de una curva gaussiana,

$$g(\Delta T) = a \exp[b(\Delta T - c)^2] , \quad (1)$$

muy aproximada. Sin embargo, en la misma operación sobre el registro de mínimas para E3 (Fig. 8) el ajuste gaussiano es bastante pobre (Fig. 9). La definición de “valor extremo” en términos de múltiplos de la desviación típica σ no es adecuada para todos los casos. Por tanto, se ha adoptado, más bien, una tendencia común en la literatura (Collins et al. 2000) definiendo los eventos extremos en términos de percentiles sobre las colas del histograma de frecuencias. Para el presente trabajo, se entiende por evento extremo aquel para el cual $T > T_c$ (máximas) ó $T < T_c$ (mínimas) donde

$$T_c \ni N(T_c) = \min(N \geq 73) , \quad (2)$$

esto es, la temperatura de corte T_c corresponde a la frecuencia justamente mayor al 1% del registro (73 para todas las estaciones); para las máximas, N se cuenta desde el extremo de la cola superior, mientras que desde el extremo de la cola inferior para las mínimas (Tablas 4 y 5).

Ahora, los registros generados anulando todos los valores inferiores o superiores -según el caso- a las

TABLA 4
TEMPERATURAS DE CORTE MÁXIMAS.

Estación	$T_c [^{\circ}\text{C}]$	$N(T_c)$
E1	5.0	180
E2	5.0	189
E3	5.0	179
E4	8.0	76
E5	9.0	109

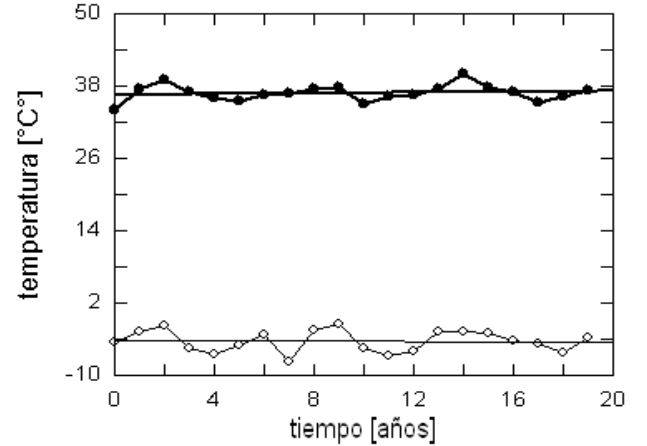


FIG. 5.— Temperaturas máxima anual y mínima anual para la estación E5 (Tarija), con tendencias positiva y negativa y desviaciones mayores 3.5°C (máximas) y -3.5°C (mínimas).

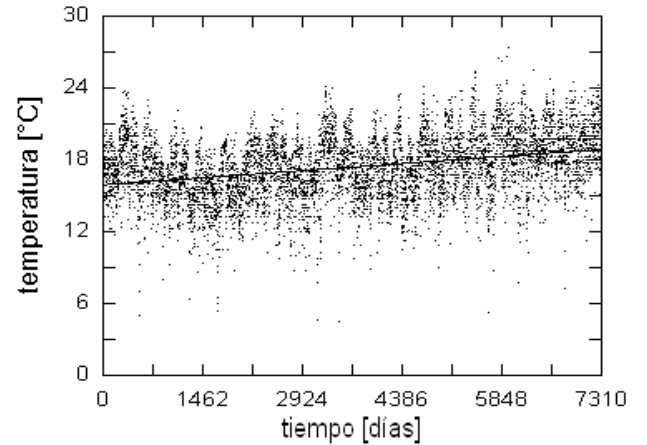


FIG. 6.— Temperaturas máximas diarias registradas en la estación E1. Todos los datos se referirán luego a la recta de regresión (tendencia) que aparece superpuesta a los datos.

temperaturas de corte, son muy semejantes a las que aparecen en las figuras 11 y 13, correspondientes a E1 y E4 respectivamente. Los primeros 50 puntos de la transformada rápida de Fourier (TRF) de esas series modificadas se muestran en las figuras 12 y 14.

El análisis sobre la significación de los picos de potencia en las transformadas donde, a diferencia de los registros musicales, no hay información previa sobre patrones periódicos, contiene siempre un importante factor heurístico. La decisión final de cuando un pico es señal y cuando es ruido contiene niveles de aleatoriedad muy altos cuanto menos prominente

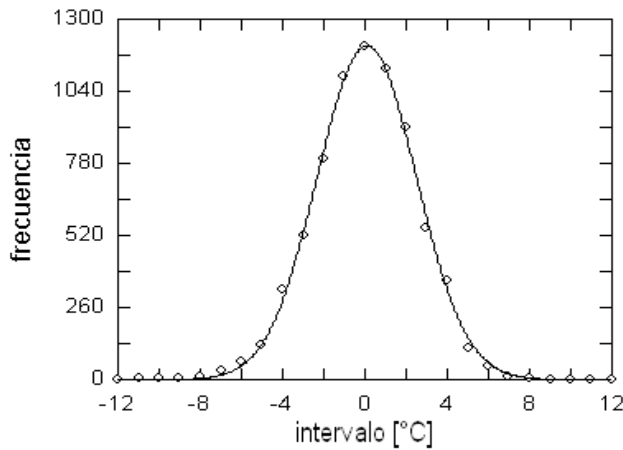


FIG. 7.— Histograma de frecuencias para los datos de la figura 6 referidos a la recta de tendencia. La gaussiana (1), ajustada por cuadrados mínimos ($a = 1203.56$, $b = 0.0858$, $c = 0.09416$), refleja, en este caso, la tendencia general de las máximas a un valor central dominante, con valores extremos poco probables.

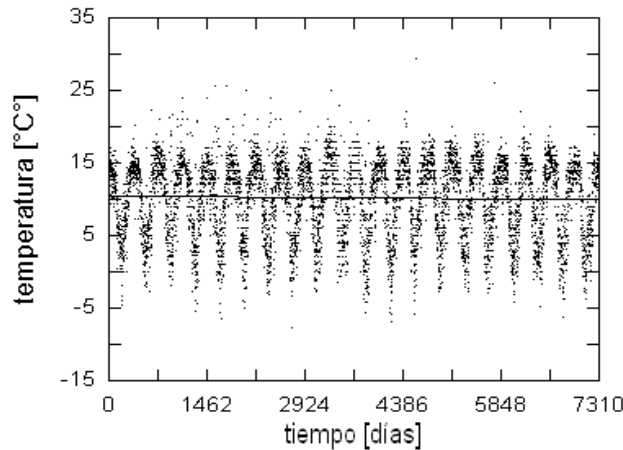


FIG. 8.— Datos de temperatura mínima correspondientes al registro E5 (Tarija). Se muestra la tendencia lineal usada como origen referencial posterior.

TABLA 5
TEMPERATURAS DE CORTE MÍNIMAS.

Estación	$T_c [^{\circ}C]$	$N(T_c)$
E1	-14.0	91
E2	-9.0	71
E3	-10.0	108
E4	-9.0	104
E5	-12.0	134

es el “pico”.

Para el presente trabajo, se ha hecho un recuento estadístico de la altura de las potencias de Fourier por intervalos y se ha aplicado un criterio de selección por percentiles semejante al de la ec. (2). Esto permite un análisis con criterio homogéneo sobre todas las series disponibles. La figura 10 grafica este recuento con un ajuste gaussiano por cuadrados mínimos; en este caso, el nivel aproximado de 99% corresponde al intervalo con cota 0.015. El resultado de aplicar este nivel sobre el espectro de la Fig. 9 es

TABLA 6
MÁXIMAS EXTREMAS (PERÍODOS EN AÑOS).

Estación	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
E1	7.48	1.40	1.02	0.66	0.51
E2	5.61	1.40	1.02	0.66	0.50
E3	5.61	2.04	0.98	0.62	0.49
E4	7.48	2.44	1.02	0.66	0.51
E5	4.49	2.04	0.98	0.68	0.51

TABLA 7
MÍNIMAS EXTREMAS (PERÍODOS EN AÑOS).

Estación	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
E1	3.21	1.40	1.02	0.66	0.50
E2	7.48	2.24	1.02	0.70	0.50
E3	3.21	1.50	1.02	0.75	0.50
E4	3.74	1.40	1.02	0.62	0.50
E5	7.48	1.60	1.02	0.62	0.50

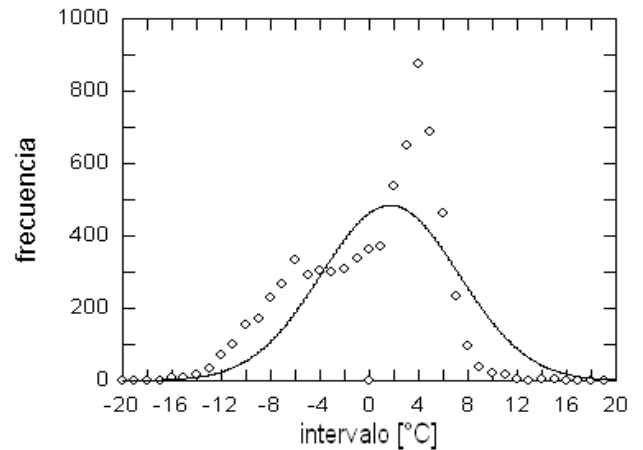


FIG. 9.— Histograma de los datos de la figura 8 referidos a su tendencia. El ajuste gaussiano es, aquí, muy pobre ($a = 484.68$, $b = 0.01602$, $c = 1.6723$). Sólo indica que los valores extremos son menos probables.

el de aislar los patrones de frecuencias centradas en 3, 16, 22, 34 y 44, que corresponden a períodos de 7.5, 1.4, 1.02, 0.66 y 0.51 años, respectivamente. Los resultados de análisis similares para las máximas extremas en las otras estaciones están reunidos en la tabla 6 y, para las mínimas extremas, en la tabla 7.

No todos los períodos son cualitativamente significativos, ni climáticamente importantes. Así, como las altas temperaturas son propias del verano y las bajas son características del invierno, los períodos P_3 y P_5 corresponden, obviamente, a ese patrón anual y semianual; los períodos P_2 y P_4 , en cambio, tienen interpretaciones menos evidentes, pero, probablemente, reflejan oscilaciones estacionales menores.

4. CORRELACIONES PARCIALES.

Finalmente, conviene también verificar explícitamente las correlaciones entre los registros filtrados (como los de las figuras 11 y 13). El cálculo directo aparece en las tablas 8 y 9 para las máximas y mínimas, en ese orden.

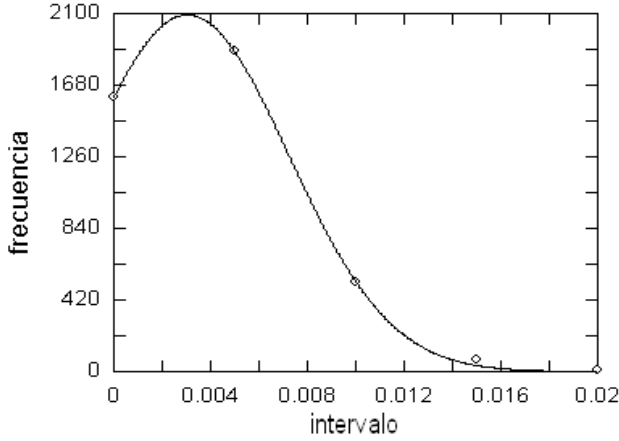


FIG. 10.— Histograma construido mediante el recuento (frecuencia) de potencias de la TRF comprendidas en intervalos de tamaño 0.001. La curva de ajuste es de tipo gaussiano como la (1) con $a = 2091.67$, $c = 0.00304$ y una curtosis muy alta ($b = 28454.29$).

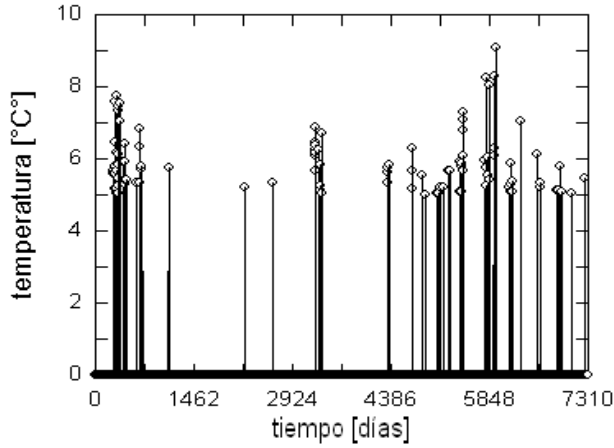


FIG. 11.— Temperaturas extremas máximas para la estación E1 obtenidas filtrando los valores por debajo de la temperatura de corte $T_c = 5^\circ\text{C}$. Se aprecia sobre todo la periodicidad anual de las estructuras. Los valores demasiado altos son más espaciados.

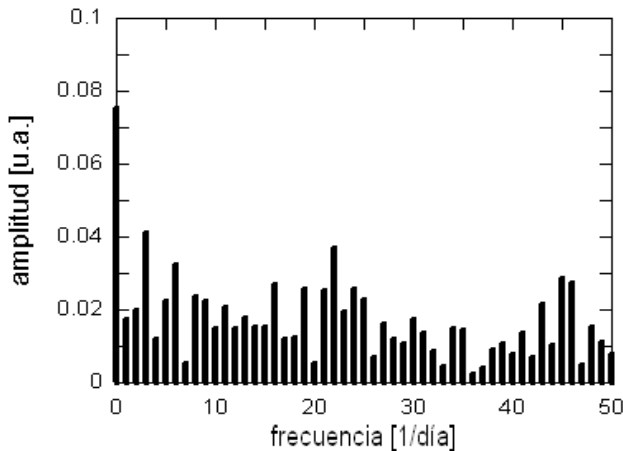


FIG. 12.— Transformada rápida de Fourier (TRF) sobre los datos de la Fig. 8. El pico mayor corresponde al período anual $8192/23 = 356 < T < 8192/22 = 372.36$. Los demás períodos se determinan tomando el centro aproximado de los grupos significativos.

TABLA 8
CORRELACIONES TOTALES (MÁXIMAS).

Est.	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$
$E1$	1.0	-0.014	0.191	0.007	-0.007
$E2$	-0.014	1.0	-0.004	0.047	0.039
$E3$	0.191	-0.004	1.0	0.028	0.003
$E4$	0.007	0.047	0.028	1.0	0.004
$E5$	-0.007	0.039	0.003	0.004	1.0

TABLA 9
CORRELACIONES TOTALES (MÍNIMAS).

Est.	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$
$E1$	1.0	0.092	0.385	0.091	0.137
$E2$	0.092	1.0	0.077	0.347	0.264
$E3$	0.385	0.077	1.0	0.111	0.162
$E4$	0.091	0.347	0.111	1.0	0.458
$E5$	0.137	0.264	0.162	0.458	1.0

TABLA 10
CORRELACIONES PARCIALES (MÁXIMAS).

Est.	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$
$E1$	1.0	-0.014	-0.194	0.003	0.007
$E2$	-0.014	1.0	-0.003	-0.057	0.039
$E3$	-0.194	-0.003	1.0	0.027	0.007
$E4$	0.003	-0.057	0.027	1.0	0.003
$E5$	0.007	0.039	0.007	0.003	1.0

De estos resultados es muy evidente la clara independencia estadística de las series de valores extremos, especialmente de máximas. Pero más concluyente aún es el conjunto de correlaciones parciales que se obtiene considerando los elementos de las tablas 6 y 7 como elementos de la matriz simétrica

$$\mathbb{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{15} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{25} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{51} & r_{52} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

y calculando

$$p_{ij} = \frac{R_{ij}}{\sqrt{R_{ii}R_{jj}}} \quad (4)$$

donde R_{ij} son los determinantes menores de $\mathbb{R}$. Las tablas 10 y 11 consignan los valores obtenidos en correspondencia con las 8 y 9, casi todos ellos menores que sus contrapartes totales.

Para las extremas mínimas se esperaría una correlación mayor, teniendo en cuenta la asociación que se hace con los frentes fríos, generalmente originados en la antártida, que ingresan a territorio boliviano en lugares donde los registros de la estación E4 son una buena muestra y E3 podría estar también bajo tal influencia.

Una explicación es que ésta, como otras influencias externas, progresan en ciertas direcciones y en un

TABLA 11
CORRELACIONES PARCIALES (MÍNIMAS).

Est.	E1	E2	E3	E4	E5
E1	1.0	0.046	-0.375	0.005	-0.059
E2	0.046	1.0	0.007	-0.280	-0.019
E3	-0.375	0.007	1.0	-0.031	-0.089
E4	0.005	-0.280	-0.031	1.0	0.424
E5	-0.059	-0.019	-0.089	0.424	1.0

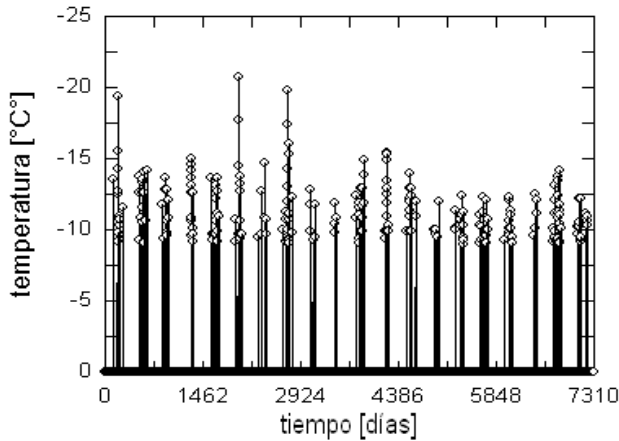


FIG. 13.— Mínimas extremas obtenidas filtrando el registro de E4 (Cobija) para valores superiores a -9°C . El patrón anual es ahora muy conspicuo, así como el mayor distanciamiento entre los valores extremos más altos.

cierto intervalo temporal; las estaciones de medición, entonces, se comportan como si tuvieran su propia influencia local.

5. CONCLUSIONES.

Este trabajo puede ser considerado como el epílogo de uno anterior (Peñafiel & Andrade 2013). El análisis sobre temperaturas *medias*, hecho ahí, muestra tendencias y distribuciones más regulares y se ha mencionado el que las “anormalidades” están asociadas con la presencia de valores extremos en las series temporales (ver también Hurrell (1995)).

Hay, por otra parte, modelos específicos para explicar las características temporales de las estructuras extremas de temperatura (Hosking et al. 1985), cosa que no se ha intentado aquí por limitaciones en la longitud de los registros.

Respecto a indicios, por ejemplo, de “calentamiento global” u otro efecto que implicaría el recrudescimiento de los extremos térmicos en direcciones opuestas, la inspección de las tendencias anuales, practicada en la Sec. 2, determina una clara ausencia de tales señales. No obstante, se ha visto que la severidad extremal puede ser lo suficientemente alta como para indagar sobre las periodicidades con que se presentan.

El análisis armónico efectuado en la Sec. 3 indica que los únicos períodos verdaderamente comunes en todos los centros de observación son el anual y el semianual. Los otros períodos interesantes - más largos- oscilan en el intervalo [3.2, 7.5], sin correlación aparente entre máximas y mínimas: una

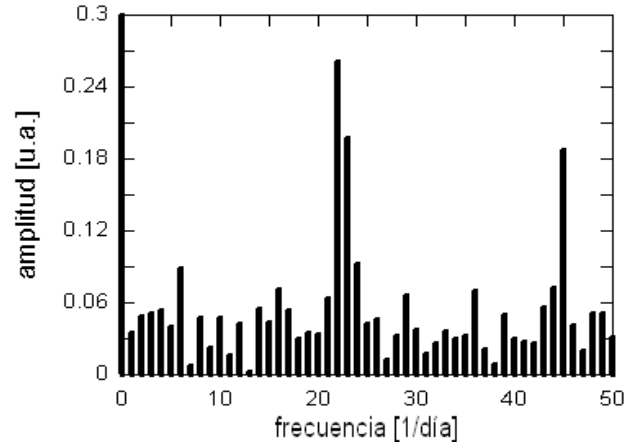


FIG. 14.— Transformada rápida de Fourier (TRF) sobre los datos de la Fig. 13. Los picos mayores corresponden al período anual y semianual.

rápida comparación ilustrativa con los picos enfatizados en las figuras 1 a 5 sugiere que estos períodos están asociados, sin duda, con los valores más altos de temperatura extrema.

Como los criterios aplicados para obtener las series de sólo extremos (v. g., Fig. 11 y Fig 13) son los mismos para todas las estaciones, es posible aprovecharlas para los cálculos directos de correlación, total y parcial. Los resultados (Sec. 4) determinan concluyentemente que los registros no están correlacionados y que, por tanto, la presencia de extremos térmicos es un fenómeno muy local, no obstante la estacionalidad común.

REFERENCIAS

- Beniston M. & Stephenson D. B. (2004), *Global and Planetary Change*, **44**, 1
 Collins D. A., Della-Marta P. M., Plummer N. & Trewin B. C. (2000), *Aust. Met. Mag.*, **49**, 277
 Harmel R. D. & Richardson C. W. (2002), *J. Appl. Meteor.*, **41**, 744
 Hosking J. R. M., Wallis J. R. & Wood E. F. (1985), *Technometrics*, **27**, 251
 Hurrell J. W. (1995), *Science*, **264**, 676
 Huynen M. M., Martens P., Schram D., Weijenberg M. P. & Kunst A. E. (2001), *Environ Health Perspect.*, **109**, 463
 Peñafiel V. M. & Andrade M. (2013), *Revista Boliviana de Física*, **22**, 1
 Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología. (2010), Comunicación privada

SINCRONIZACIÓN Y ESTABILIDAD EN UN SISTEMA COMPUESTO POR DOS OSCILADORES QUÍMICOS IDÉNTICOS

SYNCHRONIZATION AND STABILITY IN A SYSTEM OF TWO IDENTICAL CHEMICAL OSCILLATORS

S. A. OPORTO ALMARAZ[†]

Carrera de Ciencias Químicas
Universidad Mayor de San Andrés
Campus Universitario Cota Cota. Casilla 303
La Paz - Bolivia

G. M. RAMÍREZ ÁVILA[‡]

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia
(Recibido 24 de Septiembre de 2014; aceptado 17 de Octubre de 2014)

RESUMEN

Empleando el Oregonator como modelo de la reacción de Belousov-Zhabotinsky, se llevó a cabo el estudio del proceso de sincronización de dos osciladores idénticos con acoplamiento bidireccional diagonal; además, tomando como parámetro el coeficiente de acoplamiento, se analizó la estabilidad del régimen de sincronización en términos del máximo exponente transversal de Lyapunov. Se identificó la secuencia perturbación-regulación-ajuste tanto para la auto-organización del sistema compuesto sincronizado como para su mantenimiento luego de ser sometido a perturbación.

Código(s) PACS: 05.45.Xt — 82.40.Bj — 82.40.Qt

Descriptores: Sincronización; osciladores acoplados — Oscilaciones, caos y bifurcaciones — Sistemas químicos complejos

ABSTRACT

Using the Oregonator as a model for the Belousov-Zhabotinsky reaction, we studied the synchronization process of two identical oscillators with diagonal bidirectional coupling. We analyzed the stability of the synchronous regime in terms of the largest transversal Lyapunov exponent by considering the coupling strength as the main parameter. We identified the sequence perturbation-regulation-adjustment both for the system's self-organization and for its maintenance when it is perturbed.

Subject headings: Synchronization; coupled oscillators — Oscillations, chaos, and bifurcations — Complex chemical systems

1. INTRODUCCIÓN

La emergencia de propiedades nuevas es una característica de los sistemas complejos; un caso clásico es la situación explicada en Goldbeter (1994), donde la agregación de una población crítica de *dictyostelium discoideum* para formar una estructura multicelular diferenciada es capaz de generar nuevas cepas; un otro ejemplo es el fenómeno de respuesta de una población de luciérnagas hembra al proceso de sincronización de una población de luciérnagas macho que se detalla en Ramírez

Ávila et al. (2011).

La sincronización constituye un aspecto de la interacción de dos o más osciladores auto-sostenidos en el que se lleva a cabo el ajuste de sus ritmos de oscilación, y puede ocurrir en poblaciones de insectos, células cardíacas o nerviosas como se menciona en Pikovsky et al. (2001); en circuitos electrónicos tales como los descritos en Ramírez Ávila et al. (2003) y Conde Saavedra (2007); o algunos que pueden ser importantes en telecomunicaciones como el referido en Pecora et al. (1997); además de osciladores químicos como los presentados en Toth et al. (2006).

El acoplamiento difusivo de dos osciladores en la

[†]sorgeoport@gmail.com

[‡]http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/

reacción de Belousov-Zhabotinsky (BZ) expuesto en Field et al. (1972) ha sido estudiado tanto desde el punto de vista teórico como experimental tal como lo muestran Crowley & Epstein (1989), Bar-Eli (1990) y Doumbouya et al. (1993). Los fenómenos observados se atribuyen a su dinámica en relación con el flujo de sustancia entre los reactores. Así, en un sistema de dos osciladores idénticos y con distintos volúmenes se tiene cuasiperiodicidad y caos tal como lo menciona Doumbouya et al. (1993); en otro caso, dos osciladores BZ paramétricamente distintos pueden sincronizar en fase o fuera de fase, como lo señala Crowley & Epstein (1989).

En el presente trabajo se emplea como modelo de la reacción BZ el Oregonator tal como se plantea en Field & Noyes (1974), es decir, un esquema de cinco etapas irreversibles y tres variables dinámicas asociadas a especies químicas, a partir del cual se estudia la sincronización y su estabilidad en un sistema de dos osciladores idénticos acoplados difusivamente. La dinámica del Oregonator está descrita por el sistema de ecuaciones diferenciales expuesto en Gray & Scott (1994):

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{F}(\mathbf{r}; q, \epsilon, f) = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1}[qy - xy + x(1-x)] \\ 200\epsilon^{-1}(-qy - xy + fz) \\ x - z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ es un punto en el espacio de fases y $\mathbf{F}(\mathbf{r}; \epsilon, f)$ es la velocidad de fase asociada; tiempo, variables y parámetros de control son adimensionales. Como antecedente, se realizó el estudio analítico y numérico del Oregonator en Oporto Almaraz & Ramírez Ávila (2013a) con un parámetro $q = 0.0008$ que corresponde a $\text{pH} = 0.097$, mientras que

$$\epsilon = \frac{1}{8k_0} \frac{B}{A}, \quad (2)$$

con $k_0 = 1 \text{ M}^{-1}\text{s}^{-1}$, $A = [\text{BrO}_3^-]$ y $B = [\text{Org}]$, siendo $[\text{Org}]$ la concentración total de especies orgánicas. Para nuestros fines, basta considerar a f como parámetro numérico. Bajo estas condiciones, los puntos fijos en el espacio de parámetros $\epsilon - f$ se clasificaron en una región de estabilidad y otra de inestabilidad, separados por la curva de bifurcación de Hopf. Experimentalmente, en Oporto Almaraz & Ramírez Ávila (2013b) se estudió la reacción BZ a pH de 0.097 en reactor cerrado y se clasificó su dinámica en el espacio de concentraciones $\epsilon_0 - f_0$, equivalente al espacio de parámetros; además de definirse una región de bifurcación homóloga a la curva de bifurcación. Por tanto, dada su relativa simplicidad respecto a modelos de la reacción BZ de 80 etapas elementales como el que se expone en Györgyi et al. (1990), el Oregonator resulta un modelo significativo y permite abordar problemas de mayor complejidad como el de la sincronización.

El presente artículo se organiza de la siguiente manera. En §2 se lleva a cabo el estudio del proceso de sincronización completa de los osciladores y se efectúa el análisis de estabilidad de la variedad

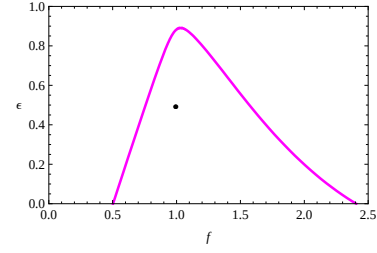


FIG. 1.— (Color online) Curva de bifurcación de Hopf en el espacio de parámetros $\epsilon - f$ para el Oregonator cuando $q = 0.0008$ y el punto $(1, 0.5)$ perteneciente a la región de inestabilidad.

TABLA 1
CONDICIONES INICIALES PARA LOS OSCILADORES O1 Y O2.

O1	O2
$x_{10} = 0.0008$	$x_{20} = 0.0774$
$y_{10} = 21.0804$	$y_{20} = 0.5145$
$z_{10} = 0.0348$	$z_{20} = 0.0404$

asociada al régimen de sincronización; la discusión de los resultados obtenidos enfatizando en los aspectos físicos se efectúa en §3. Finalmente, en §4 se dan las conclusiones y perspectivas del trabajo.

2. MODELO Y SU ANÁLISIS

2.1. Osciladores idénticos

Para $q = 0.0008$, $B = 1\text{M}$ y $A = 0.25\text{M}$ se tiene $\epsilon = 0.5$ y si se asume que $f = 1$, entonces, se tiene un punto en el espacio de parámetros $\epsilon - f$ que se muestra en la Figura 1. Empleando las condiciones iniciales $\mathbf{r}_{10}$ y $\mathbf{r}_{20}$, cuyos componentes se muestran en la Tabla 1, se definen dos *osciladores idénticos*, $\mathbf{r}_1(\tau + T)$ y $\mathbf{r}_2(\tau + \Delta\tau + T)$, denominados O1 y O2 respectivamente, como se describe en Stefański (2009), con una diferencia de tiempo $\Delta\tau = 9.895$ que es proporcional a la diferencia de fase.

En la Figura 2 se comparan los osciladores O1 y O2 por sus (a) trayectorias en el espacio de fases y (b) sus series temporales para x_1 y x_2 , verificándose que ambos osciladores comparten el mismo ciclo límite pero en puntos distintos a un tiempo dado. Los valores promedio de la amplitud para cada variable son $\bar{r}_{1,max} \approx \bar{r}_{2,max} \approx (0.2190, 21.0807, 0.1918)$ mientras que la frecuencia del ciclo límite es $\nu = 0.0637$ que corresponde a un período $T = 15.6980$.

2.2. Efecto del acoplamiento.

El sistema formado por los osciladores idénticos O1 y O2 acoplados difusivamente tiene dimensión 6 y está representado por las ecuaciones cinéticas del Oregonator para cada oscilador, según (1), y adicionalmente un término de acoplamiento bidireccional diagonal entre las variables del mismo tipo tal como se explica en Stefański (2009) y Boccaletti (2008):

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{r}_1/d\tau \\ d\mathbf{r}_2/d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{r}_1; q, \epsilon, f) \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}_2; q, \epsilon, f) \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \end{pmatrix}; \quad (3)$$

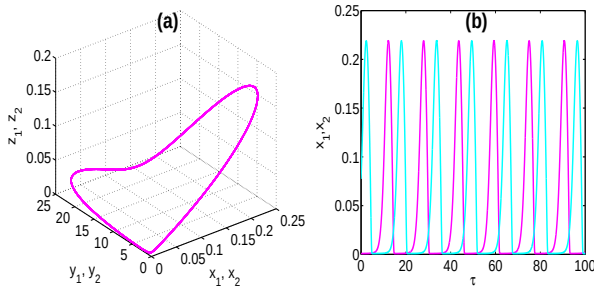


FIG. 2.— (Color online) Osciladores idénticos O1 (magenta) y O2 (cyan) sin acoplamiento definidos por los parámetros $q = 0.0008$, $f = 1$, $\epsilon = 0.5$. (a) Espacio de fases y (b) series temporales.

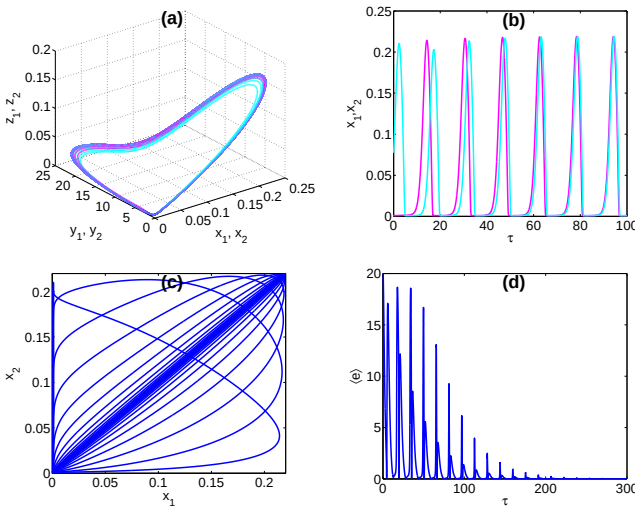


FIG. 3.— (Color online) Osciladores idénticos O1 (magenta) y O2 (cyan) acoplados difusivamente. (a) Trayectorias en el espacio de fases, (b) series temporales y (c) variedad de sincronización respecto a la variable x de cada oscilador y (d) error medio de sincronización.

dicha interacción es la misma para todas las variables, de acuerdo a la matriz por bloques de matrices identidad $\mathcal{I}$, y está cuantificada por el coeficiente de acoplamiento $C = kT_0\rho$ introducido en Crowley & Epstein (1989), donde k es la constante asociada al flujo de sustancia entre uno y otro reactor, ρ es la intensidad de acoplamiento y $T_0 = (k_0B)^{-1} = 1$ es la constante de reescalamiento del tiempo, tal que $\tau = t/T_0$, de modo que el tiempo físico, t , coincide con el tiempo adimensional, τ .

Considerando que los osciladores O1 y O2 están acoplados según (3) con $k = 0.01$ y un valor de $\rho = 1.5$ de modo que $C = 0.015$. Entonces, la integración del sistema de ecuaciones a partir de las condiciones iniciales $\mathbf{r}_{10}$ y $\mathbf{r}_{20}$ de la Tabla 1 proporciona la información que se muestra en la Figura 3. En las Figuras 3(a) y 3(b) se superponen, respectivamente, las trayectorias en el espacio de fases y las series temporales de la variable x de los osciladores acoplados, observándose una perturbación de sus trayectorias y en consecuencia de las am-

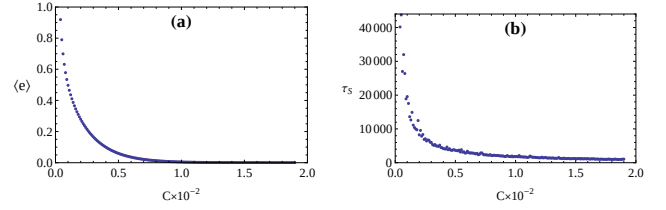


FIG. 4.— (Color online) Efecto del coeficiente de acoplamiento sobre la sincronización de los osciladores idénticos O1 y O2 acoplados difusivamente. Parámetros: $q = 0.0008$, $\epsilon = 0.5$, $f = 1$. (a) Error medio de sincronización, $\langle e \rangle$, a un tiempo de referencia $\tau = 250$ y (b) transiente, τ_S .

plitudes y períodos, seguido de la regulación de dicho efecto caracterizada por la disminución progresiva de la diferencia de fase, hasta que esta se anula una vez que ambos subsistemas ajustan sus ritmos de oscilación sobre el ciclo límite que caracteriza al régimen de sincronización. En la Figura 3(c) se muestra la proyección del espacio de fases x_1-x_2 donde los puntos sobre la recta $x_1 = x_2$ conforman la componente x de dicha variedad, a la cual se denomina *variedad de sincronización*, simbolizada por $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{r}_A | \mathbf{r}_A(\tau) = \mathbf{r}_1(\tau) = \mathbf{r}_2(\tau)\}, \quad (4)$$

tal como se especifica en Pecora et al. (1997) y Stefański (2009), sobre la que tiende la dinámica de los osciladores a medida que estos sincronizan; de modo que la dimensión del sistema acoplado disminuye a la mitad, de 6 a 3. En la Figura 3(d) se observa la disminución en el tiempo del *error medio de sincronización* introducido en Boccaletti (2008) y utilizado en Ramírez Ávila (2007). Se lo denota por $\langle e(\tau) \rangle$ y está definido por la distancia entre las trayectorias correspondientes a O1 y O2 al tiempo τ :

$$\langle e(\tau) \rangle \equiv l(\mathbf{r}_1(\tau), \mathbf{r}_2(\tau)) = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_{k1}(\tau) - x_{k2}(\tau))^2}. \quad (5)$$

Permite cuantificar el transiente $\tau_S = 1212.32$ tal que $\langle e(\tau) \rangle = 0, \forall \tau \geq \tau_S$. En este caso la sincronización es completa dado que se verifica la condición asintótica $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle e(t) \rangle = 0$ mencionada en Mosekilde et al. (2002).

El ciclo límite que caracteriza a la variedad de sincronización, $\mathbf{r}_A(\tau) = \mathbf{r}_A(T + \tau)$, $\tau > \tau_S$, tiene un período $T = 15.6980$ y frecuencia aproximada $\nu = 0.0637$, mientras que las amplitudes promedio de las variables dinámicas en cada uno de los reactores son: $\bar{\mathbf{r}}_A = \bar{\mathbf{r}}_{1,max} \approx \bar{\mathbf{r}}_{2,max} \approx (0.2190, 21.0807, 0.1918)$. Estas características del ciclo límite son prácticamente iguales a las obtenidas en el caso de los osciladores aislados y serán las mismas para cualquier valor de C mientras se mantengan fijos los parámetros de control.

A continuación se analiza el efecto del coeficiente de acoplamiento C sobre la sincronización de los osciladores O1 y O2 considerando el error medio de sincronización y el transiente. Si se mantienen fijos

los valores de $T_0 = 1$ y $k = 0.01$ entonces $C = kT_0\rho$ juega el rol de parámetro a través de ρ . El intervalo de variación de C es $[0.0004, 0.0200]$ en pasos de 0.0001. En la Figura 4(a) se obtienen los puntos $(C, \langle e(\tau) \rangle)$ a un tiempo de referencia $\tau = 250$, para los cuales se tiene una tendencia exponencial $\langle e(\tau) \rangle = Ae^{BC}$, de cuyo ajuste resulta:

$$\langle e(\tau) \rangle \approx 0.8030e^{-515.5688C}, \quad (6)$$

con un coeficiente de correlación $r^2 = 0.9998$.

En la Figura 4(b) se muestran los puntos (C, τ_S) ; en este caso, se tiene una ley de potencia $\tau_S = MC^N$, cuyo ajuste da:

$$\tau_S \approx 18.4147C^{-0.9971}, \quad (7)$$

con un coeficiente de correlación $r^2 = 0.9939$.

2.3. Estabilidad de la variedad de sincronización.

Una vez que los osciladores $O1$ y $O2$ acoplados y descritos por el sistema de ecuaciones (3) llegan a sincronizar completamente constituyen un sistema compuesto, $O1O2$, de dimensión 3, en el que la magnitud de las variables dinámicas son las mismas a cualquier tiempo en uno y otro reactor y pertenecen a la variedad de sincronización periódica cuya dinámica está descrita por las ecuaciones diferenciales del Oregonator evaluadas en $\mathcal{A}$:

$$\frac{d\mathbf{r}_A}{d\tau} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon} [qy_A - x_A y_A + x_A (1 - x_A)] \\ \frac{200}{\epsilon} (-qy_A - x_A y + f z_A) \\ x_A - z_A \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Se resalta el hecho de que si bien el término difusivo en (3) se anula una vez que se alcanza el régimen de sincronización, éste puede volver a manifestarse bajo una variación en el sistema $O1O2$ que hará que los osciladores $O1$ y $O2$ se distingan.

Considerando una perturbación en las concentraciones de las especies químicas de los osciladores y manteniendo constantes los parámetros de control, de modo que se generen trayectorias distintas en el espacio de fases correspondientes a los osciladores del sistema compuesto $O1O2$: $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_A + \delta\mathbf{r}_1$ para $O1$ y $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_A + \delta\mathbf{r}_2$ para $O2$. En este caso, la dinámica del sistema se reescribe en términos de la componente transversal de la perturbación respecto a la variedad de sincronización, $\delta\mathbf{r}_\perp = \delta\mathbf{r}_1 - \delta\mathbf{r}_2$ como se expone en Pecora et al. (1997) y Mosekilde et al. (2002); y una vez realizado el análisis de estabilidad lineal como se plantea en Pikovsky et al. (2001), Stefański (2009) y Boccaletti (2008), se tiene la forma:

$$\frac{d(\delta\mathbf{r}_\perp)}{d\tau} = (\mathcal{J} - 2CI) \cdot \delta\mathbf{r}_\perp. \quad (9)$$

donde $\mathcal{J}$ es el jacobiano de $\mathbf{F}$ evaluado en $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{J}(\mathbf{r}_A(\tau); q, \epsilon, f) = \begin{pmatrix} \frac{1-2x_A-y_A}{\epsilon} & \frac{q-x_A}{\epsilon} & 0 \\ \frac{-200y_A}{\epsilon} & \frac{-200(q+x_A)}{\epsilon} & \frac{200f}{\epsilon} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

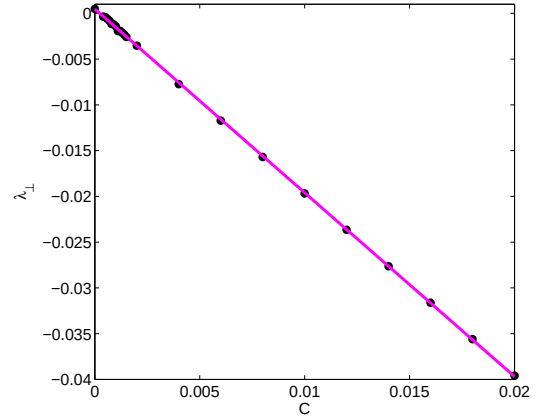


FIG. 5.— (Color online) Máximo exponente transversal de Lyapunov, $\lambda_{\perp L}$, respecto al coeficiente de acoplamiento, C , correspondiente a la estabilidad de la componente transversal de una perturbación sobre la variedad de sincronización asociada a los parámetros $q = 0.0008$, $f = 1$, $\epsilon = 0.5$; en magenta su respectivo ajuste lineal.

Mediante un análisis similar se obtiene la dinámica de la componente longitudinal de la perturbación respecto a la variedad de sincronización, $\delta\mathbf{r}_\parallel = \delta\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_2$:

$$\frac{d(\delta\mathbf{r}_\parallel)}{d\tau} = \mathcal{J} \cdot \delta\mathbf{r}_\parallel. \quad (11)$$

La convergencia o divergencia de la trayectoria de la perturbación transversal determina la estabilidad de la variedad de sincronización, la cual es evaluada calculando el máximo exponente transversal de Lyapunov, $\lambda_{\perp L}$, asociado a (9); como se menciona en Stefański (2009), la relación entre este exponente y el coeficiente de acoplamiento es:

$$\lambda_{\perp L} = \lambda_{\parallel L} - 2C, \quad (12)$$

donde $\lambda_{\parallel L}$ es el máximo exponente longitudinal de Lyapunov asociado a la ecuación (11) siendo además equivalente al exponente de Lyapunov de un oscilador en ausencia de acoplamiento.

Se estudió un intervalo de valores del coeficiente de acoplamiento C de $[0.0004, 0.0200]$, con pasos de 0.0001 para el subintervalo $[0.0004, 0.0015]$ y 0.0020 en el subintervalo $[0.0020, 0.0200]$. La elección de las condiciones iniciales se hizo considerando que estas corresponden a un punto próximo a la variedad de sincronización, según dos casos: 1. se emplea una misma condición inicial para cada valor de C y 2. se emplea una condición inicial diferente para cada valor de C . En la Figura 5 se tienen los máximos exponentes transversales para el caso 2.

En la Tabla 2 se muestra el ajuste lineal de los datos para los casos 1 y 2.

2.4. Aspectos numéricos

La integración numérica de las ecuaciones diferenciales se llevó a cabo empleando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con paso de integración

TABLA 2
AJUSTE LINEAL DEL CONJUNTO DE PUNTOS $(C, \lambda_{\perp L})$.

Caso 1	$\lambda_{\perp L} = 0.0005 - 2.0000C$
Caso 2	$\lambda_{\perp L} = (0.0005 \pm 0.0001) - (2.0080 \pm 0.0070)C$

de 0.01 y tolerancias absoluta y relativa, ambas, de 10^{-10} , a partir de la cuales se obtuvieron las trayectorias en el espacio de fases, las series temporales y, con base en estas, el error medio de sincronización.

Para el cálculo de los exponentes de Lyapunov se empleó el algoritmo propuesto por Wolf et al. (1985), el cual se basa en el conjunto ortonormal $\{v_1^{(l)}, \dots, v_n^{(l)}\}$ que resulta de la ortonormalización por el método de Gram-Schmidt de los vectores propios obtenidos al paso de iteración Θ ; de modo que el k -ésimo exponente de Lyapunov es según Stefański (2009) y Parker & Chua (1989):

$$\lambda_k \approx \frac{1}{L\Theta} \sum_{l=1}^L \ln |v_k^{(l)}|, \quad (13)$$

donde L es el número de particiones del tiempo total. Con base en este algoritmo, se empleó el programa implementado por Govorukhin (2004) con un paso de iteración $\Theta = 0.01$, $L = 600000$, tolerancia absoluta de 10^{-3} y tolerancia relativa de 10^{-6} .

3. DISCUSIÓN

El acoplamiento de $O1$ y $O2$ implica la modificación de las ecuaciones diferenciales de cada oscilador a través de los términos de acoplamiento difusivo, lo que, de acuerdo a la Figura 3(a), hace que sus respectivas trayectorias se perturben simultáneamente en las magnitudes δr_1 y δr_2 al tiempo de referencia τ_0 respecto a los puntos $r_{\Lambda 1}$ y $r_{\Lambda 2}$ pertenecientes a los ciclos límite asociados:

$$r_1(\tau_0) = r_{\Lambda 1}(\tau_0 + T) + \delta r_1(\tau_0) \quad (14)$$

$$r_2(\tau_0) = r_{\Lambda 2}(\tau_0 + \Delta\tau_0 + T) + \delta r_2(\tau_0). \quad (15)$$

La diferencia entre estas últimas ecuaciones es equivalente al término difusivo, que para un tiempo τ , $\tau_0 < \tau < \tau_S$, donde τ_S es el transiente, se escribe:

$$r_1(\tau) - r_2(\tau + \Delta\tau) = r_{\Lambda 1}(\tau + T) - r_{\Lambda 2}(\tau + \Delta\tau + T) + \delta r_1(\tau) - \delta r_2(\tau). \quad (16)$$

De acuerdo a la dinámica en la proyección del espacio de fases x_1 - x_2 , Figura 3(c), y a la variación temporal del error de sincronización, Figura 3(d), las trayectorias r_1 y r_2 se regulan a través de las variables dinámicas del mismo tipo en el término difusivo, lo que implica la disminución gradual de la diferencia de fase, según la Figura 3(b), hasta que, para $\tau \geq \tau_S$, $\Delta\tau = 0$, de modo que los osciladores ajustan sus ritmos de oscilación sobre la variedad de sincronización, $r_{\Lambda 1}(\tau + T) = r_{\Lambda 2}(\tau + T) = r_A(\tau + T)$, caracterizada por un error de sincronización nulo y $\delta r_1(\tau) = \delta r_2(\tau) = 0$ en (16).

Por tanto, el efecto del acoplamiento entre los osciladores idénticos $O1$ y $O2$ constituye el proceso de:

1. *perturbación* en los ciclos límite de cada oscilador, seguido de su
2. *regulación* a través de un transiente hasta su
3. *ajuste* sobre la variedad de sincronización.

En términos de la dimensión del sistema, el proceso que se acaba de explicar puede esquematizarse como:

$$(R^3)(R^3) \xrightarrow{1} R^6 \xrightarrow{2} R^3. \quad (17)$$

$(R^3)(R^3)$ representa las dimensiones de los osciladores $O1$ y $O2$ aislados; su acoplamiento da lugar a una perturbación (1) en cada oscilador y al sistema de dimensión R^6 , cuya regulación (2) conduce al ajuste (3) de los osciladores sobre la variedad de sincronización que caracteriza la dinámica del sistema compuesto $O1O2$ de dimensión R^3 .

Según (8), el sistema compuesto sincronizado $O1O2$ tiene la misma dinámica y restricciones paramétricas de los osciladores a partir de los cuales se configuró; pero a la vez tiene asimilado el término difusivo a través del cual sus partes se integran. Por tanto, el proceso perturbación-regulación-ajuste puede considerarse un fenómeno de auto-organización cuyo resultado es la emergencia del sistema compuesto completamente sincronizado $O1O2$. En este sentido el ciclo límite que caracteriza a dicho régimen adquiere el atributo de variedad de sincronización.

La dependencia del transiente respecto a la magnitud del coeficiente de acoplamiento según una ley de potencia (7) indica que el acoplamiento implica la sincronización de $O1$ y $O2$ a un tiempo dado en el intervalo de C estudiado; según (6), la tendencia de los osciladores acoplados a sincronizarse también se evidencia por la ley exponencial decreciente del error de sincronización a un tiempo de 250 respecto a C .

De acuerdo al análisis de estabilidad lineal de la variedad de sincronización correspondiente al sistema compuesto $O1O2$, C pasa a ser un parámetro estructural a través del cual una perturbación genera una asimetría que restituye el término difusivo. Lo anterior se refleja en la dinámica de la perturbación transversal a dicha variedad (9), cuyo máximo exponente transversal de Lyapunov, $\lambda_{\perp L}$, está relacionado de forma lineal con C , tal como se muestra en la Tabla 2; salvo factores asociados al cálculo numérico, estos resultados pueden aproximarse a la relación $\lambda_{\perp L} = \lambda_{\parallel L} - 2C$, con $\lambda_{\parallel L} = 0$. En tanto que este valor del máximo exponente longitudinal de Lyapunov esté asociado al ciclo límite que caracteriza a la variedad de sincronización, se tendrá que $\lambda_{\perp L} = -2C < 0$, lo que indica que dicha variedad es estable siempre que $C > 0$.

Las restricciones al valor de C provienen de las escalas de tiempo en las que puede llevarse a cabo un proceso disipativo, es decir, estos valores deberán estar acordes a lo que pueda observarse experimentalmente; en este sentido, es de esperarse que para valores muy grandes o muy pequeños de C no se tenga sincronización.

La rapidez de convergencia de la perturbación transversal a la variedad de sincronización aumenta exponencialmente conforme aumenta el valor de C , de lo que se infiere que dicha variedad es estable dentro del intervalo de C estudiado.

La estabilidad de la variedad de sincronización que caracteriza al sistema $O1O2$ está asociada al mantenimiento del mismo en términos del proceso perturbación-regulación-ajuste propuesto anteriormente. Considerando la dimensión del sistema, este proceso corresponde a la secuencia:

$$R^3 \xrightarrow{1} R^6 \xrightarrow{2} R^3. \quad (18)$$

Una perturbación (1) en el sistema compuesto sincronizado $O1O2$ hace que ambos osciladores se diferencien de modo que la dimensión del sistema acoplado se duplica pasando de R^3 a R^6 ; el amortiguamiento de la perturbación en cada oscilador se da a través de un proceso de regulación (2) hasta el ajuste de los ritmos de oscilación sobre la variedad de sincronización (3), restituyendo así la dimensión del sistema compuesto $O1O2$.

La secuencia (18) no resulta el proceso inverso de (17). De hecho, respecto a (16), en el sistema compuesto $O1O2$ perturbado, el término $\delta r_1 - \delta r_2$ pasa a ser la perturbación transversal a la variedad de sincronización, $\delta r_\perp$, y en este sentido la secuencia de regulación-ajuste adquiere un significado nuevo pues implica el restablecimiento del régimen síncrono y en consecuencia el mantenimiento de $O1O2$. Lo anterior, es relevante en el sentido de que, respecto a sus partes, la complejidad del sistema compuesto sincronizado $O1O2$ radica en la emergencia de propiedades nuevas.

El carácter invariante respecto a C tanto de la auto-organización como del mantenimiento del sistema sincronizado $O1O2$ se debe ya sea a la naturaleza dinámica del Oregonator como al carácter diagonal del acoplamiento. Más allá de estas particularidades, pueden esperarse atributos adicionales debido a la riqueza dinámica de la reacción BZ, que puede incluir comportamiento caótico. También se pueden tener diferentes tipos de acoplamiento; así Por ejemplo, el sistema de dos osciladores de Rössler acoplados difusivamente en un solo sentido y de forma no diagonal a través de una variable presenta una relación no lineal entre $\lambda_{\perp L}$ y C como se mues-

tra en Pecora et al. (1997); en este caso, el coeficiente de acoplamiento tiene un carácter crítico y en consecuencia la variedad de sincronización puede ser estable o inestable, lo que significa que el sistema compuesto puede ya sea mantenerse o disgregarse.

4. CONCLUSIONES

Empleando como modelo el Oregonator, el acoplamiento difusivo de los osciladores idénticos y fuera de fase $O1$ y $O2$ conduce a la auto-organización, a través del proceso perturbación-regulación-ajuste, del sistema compuesto $O1O2$, el cual representa una estructura emergente caracterizada por una variedad de sincronización que mantiene la no linealidad del Oregonator y en la que se encuentra asimilado el término de acoplamiento difusivo. De acuerdo a una ley de potencia que relaciona el transiente con el coeficiente de acoplamiento, se deduce que la sincronización ocurre en el intervalo de C estudiado.

En el sistema compuesto el coeficiente de acoplamiento pasa a ser un parámetro estructural a través del cual una perturbación restablece el término difusivo y a la vez el proceso de regulación-ajuste, dando lugar al mantenimiento del sistema $O1O2$. Lo anterior significa, en términos de los exponentes de Lyapunov longitudinal y transversal a la variedad de sincronización, que ante una perturbación, el ciclo límite, con $\lambda_{\parallel L} = 0$, que caracteriza al régimen síncrono es estable; es decir, $\lambda_{\perp L} < 0$, para un valor de C distinto de cero.

La complejidad del sistema sincronizado $O1O2$ deriva del carácter compuesto de su estructura en la que sus partes se encuentran integradas a través del acoplamiento, generando como un todo nuevas propiedades respecto a los osciladores aislados, tales como el mantenimiento del régimen síncrono.

Una de las perspectivas de este trabajo es el estudio experimental del fenómeno de sincronización de dos osciladores que siguen la reacción BZ con diferentes tipos de acoplamiento y, de forma análoga, llevar a cabo el estudio con base en modelos más completos para la reacción BZ.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Andrzej Stefański y Tomasz Kapitaniak por las sugerencias y, en este mismo sentido, S.A.O.A. agradece a Gabriela Conde Saavedra y Zui Oporto Almaraz.

REFERENCIAS

- Goldbeter A. (1994), *Biochemical oscillations and cellular rhythms* (Cambridge: Cambridge University Press).
- Ramírez Ávila G. M., Deneubourg J.-L., Guisset J.-L., Wessel N. & Kurths J. (2011) *Europhysics Letters*, **94**, 60007.
- Pikovsky A., Roseblum M. & Kurths J. (2001) *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*. (Cambridge: Cambridge University Press).
- Ramírez Ávila G. M., Guisset J.-L. & Deneubourg J.-L. (2003) *Physica D* **182**, 254.
- Conde Saavedra G. (2007) *Tesis de grado*, Física, UMSA.
- Pecora L., Carroll T., Johnson G., Mar D. & Heagy J. (1997) *Chaos* **7**, 4, 520.
- Toth R., Taylor A. F. & Tinsley M. R. (2006) *Journal of Physical Chemistry B* **110**, 20, 10170.
- Field R. J., Körös E. & Noyes R. M. (1972) *Journal of American Chemical Society*, **94**, 25, 8649.
- Crowley M. F. & Epstein I. R. (1989) *Journal of Physical Chemistry*, **93**, 6, 2496.
- Bar-Eli K. (1990) *Journal of Physical Chemistry*, **94**, 6, 2368.
- Doumbouya S. I., Münster A. F., Dooma C. J. & Schneider F. W. (1993) *Journal of Physical Chemistry*, **97**, 5, 1025.
- Field R. J. & Noyes R. M. (1974) *Journal of Chemical Physics*, **60**, 5, 1877.

- Gray P. & Scott K. (1994) *Chemical oscillations and instabilities*. (Oxford: Oxford university Press).
- Oporto Almaraz S. A. & Ramírez Ávila G. M. (2013) *Revista Boliviana de Física*, **23**, 16.
- Oporto Almaraz S. A. & Ramírez Ávila G. M. (2013) *Revista Boliviana de Química*, **30**, 2, 1.
- Györgyi L., Turányi T. & Field R. J. (1990) *Journal of Physical Chemistry*, **94**, 18, 7162.
- Stefañski A. (2009) *Determining threshold of complete synchronization, and applications*. (Singapore: World Scientific).
- Boccaletti S. (2008) *The synchronization dynamics of complex systems*. (Elsevier).
- Ramírez Ávila G. M. (2007) *Revista Boliviana de Educación Superior en Ciencias*, **6**, 25-42.
- Mosekilde E., Maistrenko Y. & Postnov D. (2002) *Chaotic synchronization*. (Singapore: World Scientific).
- Wolf A., Swift J. B., Siwnney H. L. & Vastano J. A. (1985) *Physica*, **16D**, 285.
- Parker T. S. & Chua L. O. (1989) *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. (New York: Springer-Verlag).
- Govorukhin V. N. (2004) <http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvn/matds/>

DINÁMICA SEMICLÁSICA DE ENLACE FUERTE EN CAMPOS RÁPIDAMENTE OSCILANTES MÁS UN POTENCIAL ESTÁTICO ARBITRARIO*

SEMICLASSICAL TIGHT-BINDING DYNAMICS IN RAPIDLY OSCILLATING FIELDS PLUS A STATIC ARBITRARY POTENTIAL

L. A. MARTÍNEZ[†], D. SANJINÉS[‡], & J. P. GALLINAR[†]

[†] Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar
Apartado 89000, Caracas 1080A
Venezuela &

[‡] Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

Investigamos la dinámica semiclásica inducida en una red unidimensional de enlace fuerte por un campo eléctrico inhomogéneo de alta frecuencia ω , más un potencial estático arbitrario. Encontramos, –de manera análoga al caso del péndulo de Kapitza– un potencial efectivo independiente del tiempo que describe el movimiento electrónico promedio hasta un orden de ω^{-2} . Este potencial efectivo depende de: el potencial estático externo, la constante de red y el campo eléctrico aplicado de alta frecuencia. Encontramos, notablemente, que la corrección dinámica debida al campo rápidamente oscilante es formalmente idéntica a aquella asociada al péndulo de Kapitza en el régimen del continuo. Finalmente, los resultados de este trabajo se aplican a: el oscilador armónico en la red, el efecto de la oscilación Bloch y fenómenos de “localización dinámica” en arreglos de fibras ópticas (donde hacemos una predicción experimental).

Código(s) PACS: 42.50.Ct — 42.50.Hz — 03.65.Sq

Descriptores: Hamiltoniano efectivo — Modelo semiclásico — Modelo de enlace fuerte

ABSTRACT

We investigate a semiclassical dynamics driven by a high-frequency ω inhomogeneous field, plus a static arbitrary potential on a one-dimensional tight-binding lattice. We find –in the approach of Kapitza’s pendulum– an effective, time independent potential that describes the average of the electronic motion to order ω^{-2} . This effective potential depends on the static external potential, on the lattice constant and on the applied high frequency field. Remarkably, we find that the dynamic correction of rapidly oscillating fields is formally identical to that associated to Kapitza’s usual continuum result. Finally, applications are made to: the harmonic oscillator on the lattice, the Bloch oscillation effect and “dynamical localization” in arrays of optical waveguides (wherein an experimental prediction is made).

Subject headings: Effective Hamiltonian — Semiclassical model — Tight-binding model

1. INTRODUCCIÓN

El estudio del movimiento electrónico y de los estados electrónicos definidos en espacios discretos o en redes es un asunto de considerable importancia dadas sus aplicaciones en física (Papp & Micu 2007; Mattis 1986; Itin & Neishtadt 2014). Como tales, fenómenos reticulares típicos como las oscilaciones de Bloch (Bloch 1928; Hartmann et al. 2004), localización dinámica (Dunlap & Kenkre 1986; Holthaus

& Hone 1996), efectos de estrechamiento de banda (Papp & Micu 2007), localización asintótica (Sanjinés & Gallinar 2001), aumento de la masa excitónica (Mattis 1986; Mattis & Gallinar 1984), y otros, han sido exhaustivamente estudiados tanto cuánticamente como semiclásicamente (Ashcroft & Mermin 1976), donde este último modelo permite tratar de manera más sencilla los efectos combinados en el movimiento electrónico de campos eléctricos aplicados inhomogéneos y campos dependientes del tiempo. En los dispositivos nanoscópicos (Papp & Micu 2007), tanto la naturaleza de enlace fuerte de las bandas (Gallinar & Mattis 1985) como la inhomogeneidad de los campos puede ser importante

*Traducción autorizada de “Semiclassical tight-binding dynamics in rapidly oscillating fields plus a static arbitrary potential”, Martínez L. A., Sanjinés D. and Gallinar J.-P., *International Journal of Modern Physics B* **28** (2014) 1450173.

para simular el confinamiento cuántico de los estados electrónicos. Además, a fin de aumentar el interés en estos fenómenos, se sabe que un paquete de ondas fotónico en un arreglo de guías de onda (Dreisow et al. 2011; Longhi 2007) puede simular el comportamiento de un electrón de Bloch moviéndose en una banda de enlace fuerte bajo la influencia de campos electromagnéticos adecuados (Longhi 2007). Ello es una consecuencia de la “ecuación óptica de Schrödinger” (Marte & Stenholm 1997), donde se da una analogía formal entre la variable temporal en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (para el electrón de Bloch en la red) y la variable espacial en la “ecuación óptica de Schrödinger” a lo largo del eje longitudinal del arreglo óptico (para el paquete de ondas fotónico). De esta forma, los fenómenos dinámicos cuánticos de la partícula en una red son “mapeados” a lo largo del eje de un arreglo de fibras ópticas donde se observa una distribución estática de intensidad luminosa. Así, los fenómenos oscilación de Bloch (Lenz 1999) y localización dinámica (Longhi et al. 2006) han sido observados; recientemente, el fenómeno de localización asintótica (Sanjinés & Gallinar 2001) fue asimismo confirmado experimentalmente (Dreisow et al. 2011) en un arreglo de fibras ópticas con un perfil de curvatura cúbico. Recientemente se han logrado avances importantes (tanto teóricos como experimentales) en la física de los arreglos de fibras ópticas (Garanovich et al. 2012); dichos arreglos ópticos surgen pues como simuladores cuánticos “bona fide” en el sentido referido en revisiones recientes (Buluta & Nori 2009; Georgescu et al. 2014). Existen entonces algunos escenarios específicos donde es posible buscar aplicaciones experimentales para los resultados teóricos que se presentan en este trabajo, por ejemplo, el que se propone en la sección 4.

Así, después de revisar brevemente algunos de los fenómenos más interesantes que surgen en el contexto del modelo de enlace fuerte, describiremos a continuación el plan a ser desarrollado en este trabajo. Nos proponemos generalizar el tratamiento conocido que hace Kapitza del péndulo invertido (Kapitza 1951) al caso de los campos inhomogéneos (Longhi 2007) en la aproximación semiclásica de enlace fuerte (Ashcroft & Mermin 1976). Se sabe que para una ley de dispersión cuadrática, el método de Kapitza se suele emplear (en el límite de altas frecuencias $\omega \rightarrow \infty$) (Bandyopadhyay & Dattagupta 2008) para estudiar, por ejemplo, el confinamiento de “átomos fríos” (entre otros) en un potencial efectivo independiente del tiempo. Adaptaremos entonces el método de Kapitza a una banda de enlace fuerte con interacción a primeros vecinos, y de esta forma ser capaces de contrastar nuestros resultados con aquellos que surgen usualmente bajo el modelo de una banda cuadrática. En particular, hallamos que debido a la presencia de la red el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ (Cf. Ec. 26) depende cuadráticamente del potencial estático $U(X)$, en contraste con la dependencia lineal que se halla usualmente (Bandyopadhyay & Dattagupta 2008; Rahav et al. 2003). Hal-

lamos además que la corrección dinámica (que varía como ω^{-2} para $\omega \rightarrow \infty$) es formalmente similar a la que se obtiene por el método de Kapitza en el régimen del continuo. Y aún más, el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ depende también de la posición y el pseudo-momentum iniciales, en contraste con los resultados equivalentes que se halla con el método de Kapitza.

En resumen, y a fin de contrastar los procedimientos, en la sección II presentamos la deducción de la fórmula para el potencial efectivo (Cf. Ec. 26), donde los detalles de esta deducción se completan en los apéndices A y B. En el apéndice C se invoca el teorema de Kroopnick (Kroopnick 1972) para establecer la condición suficiente para que la magnitud de $X(t)$ permanezca acotada cuando $t \rightarrow \infty$. En el apéndice D se hace una aplicación al caso del “oscilador armónico” en la red, caso que fue tratado previamente en la literatura (Longhi 2007; Gallinar & Chalbaud 1991). Finalmente, en el apéndice E se presentan fórmulas para obtener las frecuencias de pequeñas oscilaciones en torno a los mínimos del potencial efectivo $U_{eff}(X)$.

2. DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA PARA EL POTENCIAL EFECTIVO

Las ecuaciones semiclásicas canónicas de movimiento (Ashcroft & Mermin 1976) para un electrón de enlace fuerte moviéndose en una dimensión bajo la influencia de un potencial estático $U(x)$ y de un campo eléctrico rápidamente oscilante $f(x, t)$, están dadas por

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial k} = 2Aa \sin ka \quad (1)$$

y

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{dU(x)}{dx} + f(x, t); \quad (2)$$

donde A es el elemento de matriz de “salto” (*hopping*) proporcional al ancho de banda, a es la constante de red, k es el pseudo-momento cristalino (tomaremos $\hbar \equiv 1$ en este trabajo) y, finalmente, $\varepsilon(k) = 2A(1 - \cos ka)$ es la ley de dispersión de enlace fuerte. El campo rápidamente oscilante $f(x, t)$ se puede expresar como una serie de Fourier:

$$f(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x) \exp(in\omega t), \quad (3)$$

donde $f_n(x)$ es la n -ésima componente de Fourier del campo eléctrico $f(x, t)$ de alta frecuencia ω . Por simplicidad suponemos $f_n(x) = f_{-n}(x)$, de tal forma que $f(x, t)$ es una función real y par con respecto al tiempo t . En nuestro sistema, la frecuencia ω se supone mucho mayor que cualquiera de las frecuencias asociadas a la naturaleza del potencial estático $U(x)$. Es más: el promedio temporal sobre el periodo $T = 2\pi/\omega$ de $f(x, t)$ se toma igual a cero, i.e., $\langle f(x, t) \rangle = f_0(x) = 0$. Siguiendo el formalismo de

Kapitza (Kapitza 1951), escribimos $x(t)$ y $k(t)$ como

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \quad (4)$$

$$k(t) = K(t) + \eta(t); \quad (5)$$

donde $\xi(t)$ y $\eta(t)$ representan las partes pequeñas y rápidamente oscilantes de la posición $x(t)$ y del pseudo-momentum $k(t)$ respectivamente, con promedios temporales $\langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0$. Sustituyendo las Ecs. (4) y (5) en las Ecs. (1) y (2) respectivamente, se tiene que:

$$\dot{X} + \dot{\xi} = 2Aa \sin(K + \eta)a, \quad (6)$$

$$\dot{K} + \dot{\eta} = -\frac{dU(x)}{dx} + f(x, t). \quad (7)$$

Si se expande dU/dx y $f(x, t)$ en términos del parámetro pequeño $\xi(t)$, se obtiene a primer orden en $\xi(t)$ que

$$\frac{dU(x)}{dx} = \left(\frac{dU}{dx} \right)_{\xi=0} + \xi \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{\xi=0} + \dots, \quad (8)$$

y

$$f(x, t) = f(X, t) + \xi \frac{\partial f}{\partial X} + \dots \quad (9)$$

La sustitución de las Ecs. (8) y (9) en la Ec. (7) resulta en

$$\dot{K} + \dot{\eta} = -\left(\frac{dU}{dx} \right)_{\xi=0} - \xi \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{\xi=0} + f(X, t) + \xi \frac{\partial f}{\partial X}, \quad (10)$$

hasta primer orden en $\xi(t)$. En la Ec. (10) aparecen dos grupos de términos con características diferentes: términos rápidamente oscilantes y términos que no están perturbados; ambos grupos deben entonces ser iguales por separado. Para los términos oscilatorios podemos escribir

$$\dot{\eta} = f(X, t), \quad (11)$$

pues los términos en la Ec. (10) que contienen $\xi(t)$ son pequeños comparados con el que aparece en la Ec. (11). Promediando los términos restantes en la Ec. (10) sobre un periodo, obtenemos

$$\dot{K} = -\frac{dU}{dX} + \left\langle \xi \frac{\partial f}{\partial X} \right\rangle, \quad (12)$$

donde $\langle \dot{K} \rangle = \dot{K}$ y $\langle \xi (d^2U/dX^2) \rangle = \langle \xi \rangle (d^2U/dX^2) = 0$. Procedemos ahora con la Ec. (6); expandiéndola obtenemos

$$\dot{X} + \dot{\xi} = 2Aa (\sin Ka \cos \eta a + \cos Ka \sin \eta a), \quad (13)$$

de donde se separa (como en la Ec. (10)) los términos rápidos y lentos; para la parte rápida se obtiene

$$\dot{\xi}(t) = 2Aa \cos Ka \sin \eta a, \quad (14)$$

y promediando la parte lenta sobre un periodo resulta

$$\dot{X} = 2Aa \sin Ka \langle \cos \eta a \rangle, \quad (15)$$

donde $\langle \dot{X} \rangle = \dot{X}$ y $\langle \sin Ka \cos \eta a \rangle = \sin Ka \langle \cos \eta a \rangle$. A continuación integramos la Ec. (11) y la Ec. (14) (considerando a $X(t)$ y a $K(t)$ como “constants” sobre la escala temporal de T), obteniendo de $\dot{\eta}(t) = f(X, t) = \sum_n f_n(X) \exp(in\omega t)$ que

$$\eta(t) = \sum_n f_n(X) \frac{\exp(in\omega t)}{in\omega}. \quad (16)$$

Para integrar la Ec. (14) aproximamos a primer orden $\sin \eta a \simeq \eta a$, y de la Ec. (14) obtenemos

$$\xi(t) = -2Aa^2 \cos Ka \sum_n f_n(X) \frac{\exp(in\omega t)}{n^2\omega^2}. \quad (17)$$

Se puede mostrar que las Ecs. (12) y (15) son de la forma hamiltoniana con respecto a las variables lentas $X(t)$ y $K(t)$, con un hamiltoniano efectivo

$$H(X, K) = -2A \langle \cos \eta a \rangle \cos Ka + U(X), \quad (18)$$

donde $\dot{X} = \partial H / \partial K$ y $\dot{K} = -\partial H / \partial X$ son las ecuaciones canónicas de movimiento. Estas ecuaciones se deducen a partir de las relaciones que se muestran en los apéndices A y B:

$$\langle \cos \eta a \rangle = 1 - \frac{a^2}{2} \sum_n \frac{f_n^2(X)}{n^2\omega^2}, \quad (19)$$

y

$$\left\langle \xi \frac{\partial f}{\partial X} \right\rangle = 2A \cos Ka \frac{\partial \langle \cos \eta a \rangle}{\partial X}, \quad (20)$$

respectivamente. Ya que $H(X, K)$ no depende explícitamente del tiempo entonces $E = -2A \langle \cos \eta a \rangle_0 \cos K_0 a + U(X_0)$ es una constante de movimiento que representa a la “energía” efectiva de la partícula correspondiente a su movimiento promedio evaluado en las condiciones iniciales X_0 y K_0 .

A continuación calculamos el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ a través de la definición

$$m\ddot{X} \equiv -\frac{\partial U_{eff}(X)}{\partial X}, \quad (21)$$

donde m es la masa efectiva de enlace fuerte dada por $m \equiv 1/(2Aa^2)$. Ya que de acuerdo a la Ec.(15) se tiene $\dot{X} = 2Aa \sin Ka \langle \cos \eta a \rangle$, entonces

$$\ddot{X} = 2Aa^2 \dot{K} \cos Ka \langle \cos \eta a \rangle + 2Aa \dot{X} \sin Ka \frac{\partial \langle \cos \eta a \rangle}{\partial X}. \quad (22)$$

Sustituyendo en la Ec. (22) los valores de $\dot{K}$ y $\dot{X}$ dados por las Ecs. (12) y (15) respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{X} = & 2Aa^2 \cos Ka \langle \cos \eta a \rangle \left(-\frac{\partial U}{\partial X} \right. \\ & \left. + 2A \cos Ka \frac{\partial \langle \cos \eta a \rangle}{\partial X} \right) \\ & + (2Aa \sin Ka)^2 \langle \cos \eta a \rangle \frac{\partial \langle \cos \eta a \rangle}{\partial X}, \end{aligned} \quad (23)$$

de donde sigue una notable simplificación debida a la identidad $\cos^2 Ka + \sin^2 Ka = 1$. El resultado es

$$\ddot{X} = 2Aa^2 \cos Ka \langle \cos \eta a \rangle \left(-\frac{\partial U}{\partial X} \right) + (2Aa)^2 \langle \cos \eta a \rangle \frac{\partial \langle \cos \eta a \rangle}{\partial X}. \quad (24)$$

Expresando en la Ec. (24) el término que contiene a $\cos Ka \langle \cos \eta a \rangle$ a través de la ley de conservación de la energía efectiva E (Cf. Ec. (B4)), obtenemos $-2A \langle \cos \eta a \rangle \cos Ka = E - U(X)$; despreciando en la Ec. (24) los términos del orden de $O(\omega^{-4})$, obtenemos finalmente para la aceleración

$$\ddot{X} = a^2 (E - U(X)) \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{1}{2} (2Aa^2)^2 \frac{\partial}{\partial X} \left(\sum_n \frac{f_n^2(X)}{n^2 \omega^2} \right); \quad (25)$$

la integral con respecto a X da

$$\frac{U_{eff}(X)}{m} = \frac{a^2}{2} U^2(X) - a^2 U(X) E + \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(X)}{n^2 \omega^2}, \quad (26)$$

que es la expresión final que obtenemos para el potencial efectivo.

Aunque los resultados centrales de este trabajo (Ecs. (25) y (26)) se dedujeron para un hamiltoniano de enlace fuerte con interacciones a primeros vecinos solamente, la extensión del método que presentamos aquí para incluir interacciones a segundos vecinos se puede realizar de manera directa al sustituir la Ec. (1) por $\partial x / \partial t = \partial \varepsilon(k) / \partial k = 2Aa \sin ka [1 + (4B/A) \cos ka]$, donde B es el elemento de matriz de “salto” correspondiente a las interacciones a segundos vecinos. La consecuencia de este cálculo en el potencial efectivo debe llevar a las mismas conclusiones que las anunciadas por Itin y Neishtadt (Itin & Neishtadt 2014) acerca del efecto combinado debido a campos externos oscilatorios y campos no-uniformes.

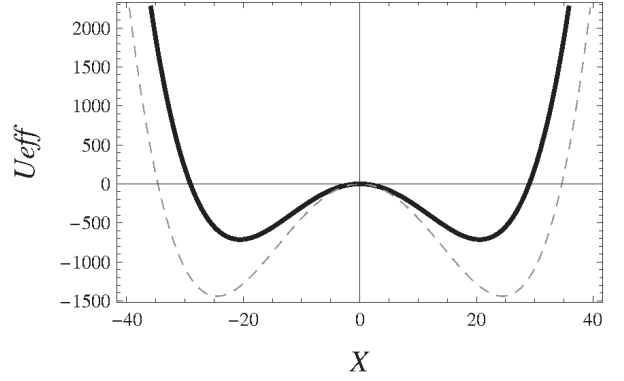
3. APLICACIÓN AL OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO EN LA RED

Consideremos el movimiento del oscilador armónico en la red (Longhi 2007; Gallinar & Chabaud 1991) sujeto además a un campo armónico de alta frecuencia. Tomemos $U(x) = \kappa x^2 / 2$ en la Ec.(26) y $f(x, t) = -\kappa x \cos \omega t$, por simplicidad, a fin de obtener el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ dado por

$$\frac{U_{eff}}{m} = \frac{a^2 \kappa^2 X^4}{8} - \frac{a^2 E X^2}{2} + \frac{\kappa^2 X^2}{4m^2 \omega^2} \quad (27)$$

donde κ es la constante elástica del oscilador. Adoptamos la unidades físicas en las que $\kappa a^2 / 8 = 1$ es la energía y el inverso del tiempo, y a es la longitud y el inverso del momentum; tomamos como condiciones iniciales $X = X_0$ y $K = 0$. En dichas unidades físicas especiales, la Ec. (27) se convierte en

$$\frac{U_{eff}(X)}{m} = 8X^4 + \frac{\tilde{\omega}^2 X^2}{2} - 16X_0^2 X^2 + \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega^2} \left(\frac{\tilde{\omega}^2}{4} - 8X_0^2 \right) X^2, \quad (28)$$



— $\omega = 3\tilde{\omega}$
 ---- $\omega = \tilde{\omega}$

FIG. 1.— Potencial efectivo para el oscilador armónico forzado en la red con U_{eff} dado por la Ec. (28) versus X con posición inicial $X_0 = 30$ y dos valores de ω .

donde $\tilde{\omega} = 4\sqrt{A}$. Así, el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ depende, entre otros, de la posición inicial X_0 y de la frecuencia ω . Para $X_0 < \tilde{\omega}/\sqrt{32}$, $U_{eff}(X)$ tiene un mínimo en $X = 0$; para $X_0 > \tilde{\omega}/\sqrt{32}$, $U_{eff}(X)$ tiene dos mínimos en

$$X_{1,2} = \pm \sqrt{1 + \frac{\tilde{\omega}^2}{2\omega^2}} \sqrt{X_0^2 - \frac{\tilde{\omega}^2}{32}}. \quad (29)$$

Como se puede ver en la Fig. 1, la distancia entre estos mínimos aumenta al disminuir ω , tal como lo predice la Ec. (29). Debido a la estructura matemática de $U_{eff}(X)$ en la Ec. (28), la partícula puede oscilar en dos regímenes diferentes: “el régimen de Bloch” (Gallinar & Chabaud 1991) donde $U_{eff}(X)$ tiene dos mínimos y la partícula oscila en alguno de ellos, y “el régimen del continuo” (Longhi 2007; Gallinar & Chabaud 1991) donde la partícula o bien visita ambos mínimos, o bien oscila en torno a un mínimo en $X = 0$ cuando $X_0 < \tilde{\omega}/\sqrt{32}$. Estos regímenes están separados por la condición de bifurcación dada por

$$X_0 = \frac{\tilde{\omega}}{4} \left(\frac{1 + \frac{\tilde{\omega}^2}{2\omega^2}}{1 + \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega^2}} \right)^{1/2}. \quad (30)$$

Para $\omega \rightarrow \infty$, la Ec. (30) lleva a $X_0 = \tilde{\omega}/4$ como condición de bifurcación en ausencia del campo forzador armónico de alta frecuencia. En la Fig. 2 se muestra las soluciones numéricas de la Ec. (25), donde se puede distinguir ambos regímenes con $X_0 = \sqrt{1000}\sqrt{19/20} = 30.822...$ como el punto de bifurcación entre ellos.

Finalmente, obtenemos la expresión para la frecuencia de la partícula cuando oscila en el régimen de Bloch en torno a los mínimos de $U_{eff}(X)$; usamos para ello $\Omega^2 = (1/m) (\partial^2 U_{eff}(X) / \partial X^2)_{X_0}$, obteniéndose

$$\Omega = \sqrt{2 + \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega^2}} \sqrt{32X_0^2 - \tilde{\omega}^2}, \quad (31)$$

donde la frecuencia efectiva aumenta en presencia

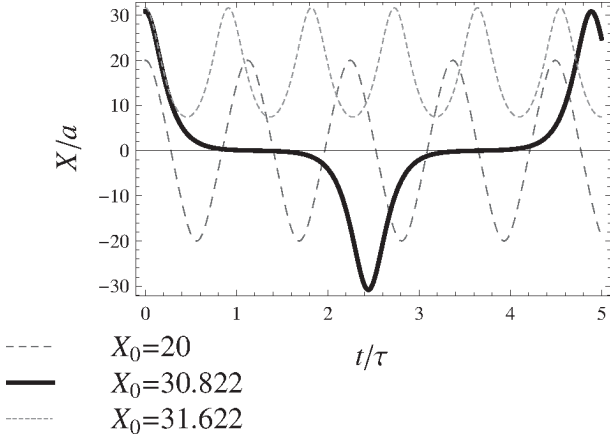


FIG. 2.— Posición semiclásica X/a en unidades de la distancia a versus tiempo t/τ en unidades de τ , con $\omega = 3\tilde{\omega}$. El valor crítico del punto de bifurcación para este sistema es $X_0 = 30.822$.

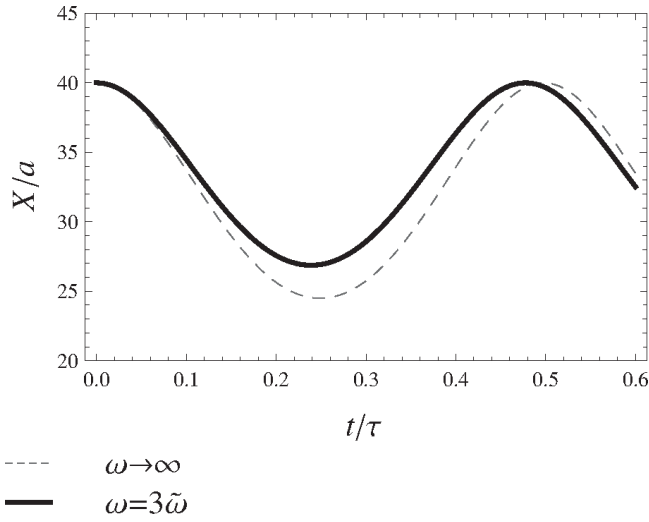


FIG. 3.— Comparación del movimiento de la partícula en $X_0 = 40$ cuando está sujeta al campo armónico “estático” y al campo armónico forzador de alta frecuencia. Se puede ver que la amplitud y el periodo del movimiento de la partícula decrecen en presencia del campo del alta frecuencia.

del campo rápidamente oscilante. Este incremento en la frecuencia efectiva se verifica al comparar numéricamente la solución $X(t)$ del caso estático con la solución respectiva para el caso $\omega = 3\tilde{\omega}$, $X_0 = 40$, que se muestra en la Fig. 3.

4. APLICACIÓN A FENÓMENOS DE LOCALIZACIÓN. PREDICCIÓN EXPERIMENTAL DE “LOCALIZACIÓN DINÁMICA” EN ARREGLOS DE FIBRAS ÓPTICAS

Considérese el hamiltoniano de enlace fuerte $H(x, p) = -2A \cos ap + U(x, t)$ (con $p = -i\hbar\partial_x$) cuyos eigenvalores $\varepsilon(k)$ constituyen la ley de dispersión para la velocidad semiclásica dada en la Ec. (1); el potencial dependiente del tiempo $U(x, t) = U(x) - \int dx f(x, t)$ ya contiene al potencial estático $U(x)$ y al campo oscilante $f(x, t)$ que aparecen en la “fuerza” semiclásica en la Ec. (1). En este escenario físico ocurren los fenómenos de “localización” de un electrón en una red unidimensional tal como lo refirieron Dunlap y Kenkre (Dunlap & Kenkre

1986): si la proyección del desplazamiento cuadrático medio $w(t) \equiv \sum_n a^2 n^2 |C_n(t)|^2$ en la red permanece acotado cuando $t \rightarrow \infty$, entonces la partícula estará localizada (esta condición implica asimismo que el valor medio de la posición $z(t) \equiv \sum_n a^2 n |C_n(t)|^2$ también permanece acotado). En las expresiones anteriores $\Psi(x, t) = \sum_n C_n(t) \Phi(x - na)$ es la función de onda que resuelve la ecuación de Schrödinger; $\Phi(x - na)$ son las funciones de Wannier que están localizadas en torno a los sitios de la red con posiciones $x = na$ (para n entero). Los casos relevantes de localización que fueron reportados en la literatura corresponden a los siguientes potenciales: (i) oscilación de Bloch (Bloch 1928; Hartmann et al. 2004) cuando $U(x, t) = \alpha x$; (ii) localización dinámica AC (Dunlap & Kenkre 1986; Holthaus & Hone 1996) cuando $U(x, t) = \alpha x \cos \omega t$ ($J_0(\alpha/\omega) = 0$) y localización dinámica AC+DC (Holthaus & Hone 1996; Zhao 1991) cuando $U(x, t) = \epsilon_0 + \alpha x \cos \omega t$ ($\epsilon_0/\omega \neq Z$); localización asintótica (Sanjinés & Gallinar 2001) cuando $U(x, t) = \alpha x t$. Las condiciones de localización en el caso (ii) se hallan entre paréntesis.

La definición de localización puede relacionarse con la definición de “acotamiento” de una función $y(t)$ que resuelve la ecuación diferencial ordinaria, autónoma y –en general– no-lineal $\dot{y} = g(y)$, i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)|$ no debe diverger. Ya que esta ecuación se puede escribir como $\ddot{y} = g(y)g'(y)$, entonces la condición de acotamiento para $y(t)$ está dada por el teorema de Kropnick (apéndice C), donde $y(t)$ se identificó al describir el esquema de Kapitza (sección 2) con nuestra posición media $X(t)$ que varía lentamente en $x(t) = X(t) + \xi(t)$. Esto su vez nos permite realizar la conjetura de que la posición semiclásica $X(t)$ se puede relacionar físicamente con $z(t)$, la posición media del paquete de ondas cuántico definida arriba, i.e., cuando $X(t)$ esté acotada¹ en la Ec. (25), entonces la correspondiente $z(t)$ también estará acotada² (al menos, como una condición suficiente). Entonces, el criterio de Kropnick toma la forma $\lim_{|X| \rightarrow \infty} U^2(X) = \infty$ y/o $\lim_{|X| \rightarrow \infty} f_n^2(X) = \infty$ para n entero, donde $U(X)$ es la parte estática del potencial cuántico $U(X, t)$ y $f_n(X)$ son los coeficientes de Fourier de la fuerza periódica $f(X, t+T) = f(X, t)$.

A continuación dirigimos la atención hacia los casos de localización AC y AC+DC referidos arriba en el inciso (ii), que son los casos especiales del potencial lineal $U(X, t) = U(X) - \int dx f(X, t) \equiv XF(t)$ correspondiente a una fuerza periódica y homogénea $f(X, t+T) = f(X, t)$ (en este caso, los coeficientes de Fourier $f_n(X) = f_n$ también son independientes de X). Queremos verificar si sus correspondientes condiciones de localización cuántica conocidas para valores grandes de ω son consistentes con la condición de Kropnick. En el caso AC, $U(X) = 0$, en-

¹ Se puede demostrar que si $X(t)$ está acotada, también lo está $\dot{X}(t)$, de tal forma que la región en el espacio fase para la evolución del sistema es finita.

² Nótese que el valor cuadrático medio no tiene un equivalente semiclásico, lo que no impide formular la conjetura “acotamiento implica localización”.

tonces $\lim_{|X| \rightarrow \infty} U^2(X) \neq \infty$ y $\lim_{|X| \rightarrow \infty} f_n^2(X) \neq \infty$, por lo que la condición de Kroopnick no se verifica (no hay localización); en el caso AC+DC, $U(X) = \epsilon_0 X$, entonces $\lim_{|X| \rightarrow \infty} U^2(X) = \infty$ y $\lim_{|X| \rightarrow \infty} f_n^2(X) \neq \infty$, así que la condición de Kroopnick se verifica (hay localización). Las correspondientes condiciones cuánticas de localización son las mismas cuando ω es grande: en el caso AC, $J_0(\alpha/\omega) = 0$ no se cumple y por lo tanto no hay localización; en el caso AC+DC, $\epsilon_0/\omega \notin Z$ se cumple y por lo tanto hay localización. En vista de lo anterior, podríamos elaborar un argumento físico acerca de la transición del régimen AC (con potencial $U(X, t) = \alpha X \cos \omega t$) al régimen AC+DC (con potencial $U(X, t) = \epsilon_0 X + \alpha X \cos \omega t$) en términos de una transición de un régimen de deslocalización a un régimen de localización. Podemos observar que dicha transición consiste solamente de añadir el potencial $\epsilon_0 X$ al potencial AC. Sin embargo, tal adición puede ser un asunto complicado en una red de estado sólido. Veremos a continuación que en el dominio óptico de un arreglo de guías de onda, dicha adición se transforma en un procedimiento bastante práctico.

De manera interesante, los resultados teóricos descritos arriba pueden encontrar un escenario experimental donde las predicciones serían confirmadas (o refutadas). Como se mencionó al principio de este trabajo (sección 1), existe una analogía formal entre el comportamiento de un electrón moviéndose en una red de enlace fuerte bajo el efecto de campos electromagnéticos específicos, y un paquete de ondas fotónico propagándose a lo largo de un arreglo de fibras ópticas con perfiles de curvatura específicos. Así, los fenómenos dinámicos cuánticos para el electrón en la red (en el dominio temporal) son “mapeados” a lo largo del eje del arreglo de fibras ópticas (en el dominio espacial). Esto es posible después de aplicar la transformación de Kramers-Henneberger a la “ecuación óptica de Schrödinger” (Longhi et al. 2006), de lo que resulta

$$\left[-\frac{\bar{\lambda}^2}{2n_s} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + U_{opt}(x') \right] \Phi + \left[n_s \frac{\partial^2 x_0(z)}{\partial z^2} \right] x' \Phi = i\bar{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (32)$$

donde: z es la coordenada axial del arreglo óptico, $x' \equiv x - x_0(z)$ es la coordenada transversal transformada, x es la coordenada transversal del arreglo donde las fibras ópticas están distribuidas periódicamente con distancia de separación a , $U_{opt}(x) \equiv n_s - n(x)$, $n(x) = n(x + a)$ es el índice de refracción efectivo del arreglo óptico, n_s es el índice de refracción del sustrato material que conforma cada fibra óptica, $x(0)$ describe el perfil de curvatura periódica del arreglo con periodo $\Lambda \gg \lambda$. Podemos reconocer en la Ec. (32) una ecuación tipo Schrödinger para una partícula de “masa” n_s moviéndose en una red con “potencial periódico” $U_{opt}(x')$ y sujeta a una “fuerza” externa $n_s \partial^2 x_0(z) / \partial z^2$; $\bar{\lambda} \equiv \lambda / 2\pi = 1/k$ equivale a la constante cuántica $\hbar$. Ya que el “potencial” externo en la Ec. (32) es lineal en x' y ya que la coordenada espacial óptica z se relaciona con la variable

temporal cuántica t , entonces los casos (i)-(iii) de localización descritos al inicio de esta sección se describen de manera equivalente por la Ec. (32) en el dominio espacial óptico. Así, para un perfil de curvatura parabólico $x_0 \propto z^2$ se obtuvo el efecto análogo a la oscilación de Bloch (Lenz 1999); para un perfil de curvatura periódico $x_0 \propto \cos(2\pi z/\Lambda)$ se observó experimentalmente el efecto análogo a la localización dinámica AC (Longhi et al. 2006); y para un perfil de curvatura cúbico $x_0 \propto z^3$ el efecto análogo a la localización asintótica fue asimismo observado experimentalmente (Dreisow et al. 2011). Para el caso AC, está claro que para un valor mayor de ω (i.e., un menor valor de Λ) la condición de localización $J_0(\alpha/\omega) = 0$ no se verifica y por lo tanto ocurre deslocalización, lo que a su vez implica que el paquete óptico se dispersa a lo largo del eje transversal x . Sin embargo, si este arreglo óptico se somete a una curvatura parabólica global, entonces se logra en el dominio óptico el equivalente al caso de localización AC+DC pues la condición $\epsilon_0/\omega \notin Z$ se verifica, así que el paquete óptico no se dispersa y permanece acotado o confinado en torno a la región paraxial del eje z . Este interesante efecto debería observarse como se indica en la Fig. 4, donde los valores de los parámetros físicos se tomaron de Longhi et al. (Longhi et al. 2006). El procedimiento experimental sería entonces sencillo: el arreglo con un perfil periódico de curvatura $x_0 \propto \cos(2\pi z/\Lambda)$ donde no hay localización, se dobla con un perfil parabólico global Cz^2 (cualquier valor real de C sería, en principio, suficiente). El resultado entonces es que un paquete óptico inicialmente disperso se localizaría en torno al eje z , logrando así la transición de un régimen de deslocalización a uno de localización.

5. CONCLUSIONES

Aplicamos un método similar al de Kapitza (Kapitza 1951) que permitió obtener una expresión novedosa para la aceleración efectiva independiente del tiempo de un electrón en una red de enlace fuerte (Cf. Ec. (25)); sobre este electrón actúan un campo eléctrico armónico rápidamente oscilante ($\omega \rightarrow \infty$) y un potencial estático arbitrario. Los resultados que obtuvimos se pueden expresar en los términos de un potencial efectivo simple (Cf. Ec. (26)) vía la introducción de una masa efectiva de enlace fuerte m (Cf. Ec. (21)). En el límite del continuo definido por $a \rightarrow 0$ y $A \rightarrow \infty$, donde $\lim_{A \rightarrow \infty} 1/(2Aa^2) = m^*$, el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ resulta ser (m^* es la masa en el continuo)

$$\lim_{m \rightarrow m^*} \frac{U_{eff}(X)}{m} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} \left(\frac{a^2}{2} U^2(X) - a^2 U(X) E + \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(X)}{n^2 \omega^2} \right);$$

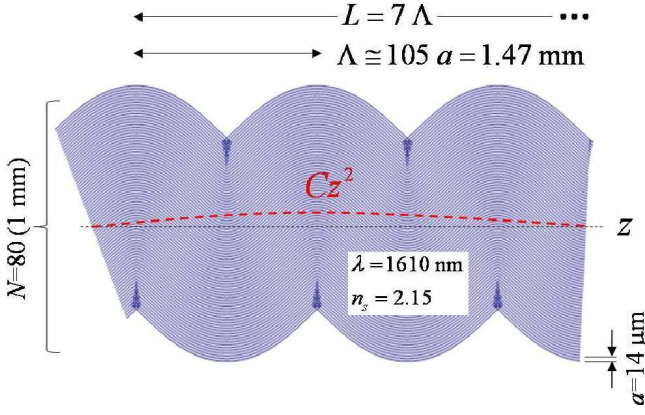


FIG. 4.— Arreglo experimental del efecto de “transición deslocalización-localización” propuesto en este trabajo, con los valores de los parámetros físicos tomados de Longhi *et al.* (Longhi et al. 2006). El arreglo de $N = 80$ fibras ópticas separadas entre sí por una distancia constante $a = 14\mu\text{m}$ y con índice de refracción $n_s = 2.15$, se acomoda en el eje transversal x . Un paquete de ondas láser centrado en 1610 nm incide sobre el arreglo y se propaga a lo largo de la coordenada z hasta una distancia $L = 7\Lambda$. Para este valor del periodo espacial Λ el paquete se debe dispersar, pero predécimos que una curvatura global parabólica con perfil Cz^2 debe confinar al paquete en la zona paraxial ($x' \sim 0$). El límite de Λ pequeño (correspondiente a un valor grande de ω en el dominio temporal del esquema de Kapitza) se logra aquí en el límite de “estrangulación” en el que las fibras ópticas en los extremos del arreglo pierden su perfil espacial suave.

pero

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} [-a^2 U(X) (-2A \langle \cos \eta a \rangle \cos Ka + U(X))] = \\ = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} 2Aa^2 U(X) = \frac{U(X)}{m^*},$$

de tal forma que finalmente

$$U_{eff}(X) = U(X) + \frac{1}{m^*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(X)}{n^2 \omega^2}, \quad (33)$$

que es el mismo resultado ya conocido en el continuo para el potencial efectivo $U_{eff}(X)$ (Kapitza 1951; Bandyopadhyay & Dattagupta 2008; Rahav et al. 2003). Notablemente, la corrección dinámica de alta frecuencia del orden de $O(\omega^{-2})$ en la Ec. (26) es formalmente similar a aquella asociada al límite del continuo, lo que se aplica asimismo a las aceleraciones respectivas. Podríamos conjeturar si acaso esta similitud se mantiene (cuando $\omega \rightarrow \infty$) hasta el siguiente orden $O(\omega^{-4})$ entre el resultado en el continuo y el resultado (aún desconocido) en la red. Finalmente, resulta interesante señalar que de la Ec. (17) para $\xi(t)$ se puede demostrar la fórmula

$$\frac{1}{2} m \langle \dot{\xi}^2 \rangle = \frac{1}{m} (\cos^2 Ka) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(X)}{n^2 \omega^2}; \quad (34)$$

así, para $a \rightarrow 0$ (en el continuo) la corrección de alta frecuencia para el potencial efectivo (para $\omega \rightarrow \infty$) es igual al valor medio de la energía cinética del movimiento oscilatorio dado por $\frac{1}{2} m^* \langle \dot{\xi}^2 \rangle$. En resumen, la nueva fórmula dada en la Ec. (26)

generaliza el célebre resultado de Kapitza para el péndulo invertido (Kapitza 1951) al caso de un electrón de enlace fuerte. De esta forma, surgen aplicaciones interesantes (entre otras) al caso del oscilador armónico en la red (Longhi 2007; Gallinar & Chalbaud 1991) y al efecto de la oscilación de Bloch (Bloch 1928), y asimismo se puede considerar como un primer paso conceptual importante en el estudio más profundo (hasta el orden de $O(\omega^{-4})$) de los efectos debidos a un campo forzador de alta frecuencia en la red. En particular, y motivados por la evidencia experimental reciente de localización dinámica y localización asintótica en arreglos de fibras ópticas, propusimos en la Sec. 4 un bosquejo de experimento que podría servir para verificar la predicción teórica de que en un arreglo tal con un perfil de curvatura parabólico (de periodo pequeño), un paquete de ondas fotónico se debería dispersar, pero si además se aplica a todo al arreglo una curvatura global parabólica, entonces se debería inhibir la dispersión del paquete y éste permanecería confinado en la región paraxial del arreglo. Este experimento propuesto podría permitir ampliar el rango de aplicaciones de los resultados presentados aquí.

APÉNDICE

A. DEDUCCIÓN DEL VALOR DEL TÉRMINO $\langle \cos \eta a \rangle$

Expandiendo $\cos \eta a$ hasta el orden de ω^{-2} y promediando, se obtiene

$$\langle \cos \eta a \rangle \simeq 1 - \frac{\langle \eta^2 \rangle a^2}{2} + O(\omega^{-4}), \quad (A1)$$

donde $\eta(t)$ está dada por la Ec. (16). Así,

$$\langle \eta^2 \rangle = - \sum_{n,m} \frac{f_n(X) f_m(X)}{nm \omega^2} \langle e^{i(n+m)\omega t} \rangle, \quad (A2)$$

donde

$$\langle e^{i(n+m)\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(n+m)\omega t} dt = \delta_{n,-m}, \quad (A3)$$

lo que da

$$\langle \eta^2 \rangle = - \sum_{n,m} \frac{f_n(X) f_m(X)}{nm \omega^2} \delta_{n,-m} = \sum_n \frac{f_n^2(X)}{n^2 \omega^2},$$

ya que $f_n(X) = f_{-n}(X)$. Finalmente, la Ec. (A1) resulta en

$$\langle \cos \eta a \rangle = 1 - \frac{a^2}{2} \sum_n \frac{f_n^2(X)}{n^2 \omega^2} + O(\omega^{-4}). \quad (A4)$$

B. DEDUCCIÓN DEL VALOR DEL TÉRMINO $\langle \xi \frac{\partial F}{\partial X} \rangle$

Sustituyendo $\xi(t)$ por su valor dado en la Ec. (17) y $f(X, t)$ dado en la Ec. (3), se obtiene

$$\begin{aligned}
\left\langle \xi \frac{\partial f}{\partial X} \right\rangle &= -2Aa^2 \cos Ka \sum_{n,m} \frac{f_n(X)}{n^2 \omega^2} \frac{\partial f_m(X)}{\partial X} \\
&\quad \cdot \left\langle e^{i(n+m)\omega t} \right\rangle \quad (B1) \\
&= -2Aa^2 \cos Ka \sum_n \frac{f_n(X)}{n^2 \omega^2} \frac{\partial f_{-n}(X)}{\partial X} \\
&= -2Aa^2 \cos Ka \sum_n \frac{1}{2n^2 \omega^2} \frac{\partial f_n^2(X)}{\partial X}; \quad (B2)
\end{aligned}$$

de lo que finalmente resulta (usando la Ec. (A3)):

$$\left\langle \xi \frac{\partial f}{\partial X} \right\rangle = 2A \cos Ka \frac{\partial \langle \cos \eta a \rangle}{\partial X}. \quad (B3)$$

Es conveniente señalar que la relación

$$E = -2A \langle \cos \eta a \rangle \cos Ka + U(X) = \text{const.} \quad (B4)$$

se puede obtener asimismo de las Ecs. (12) y (15), las que al dividirse dan

$$\frac{dX}{dK} = \frac{2Aa \sin Ka \langle \cos \eta a \rangle}{-\frac{\partial U}{\partial X} + 2A \cos Ka \frac{\partial \langle \cos \eta a \rangle}{\partial X}}, \quad (B5)$$

lo que conduce a la diferencial exacta $d(-2A \langle \cos \eta a \rangle \cos Ka + U(X)) = 0$, y de aquí se tiene la Ec.(B4). Es interesante notar que en la Ec. (B4) el factor de estrechamiento de la banda $\langle \cos \eta a \rangle$ coincide con la suma de los primeros dos términos de la expansión de $J_0(e\varepsilon a/\omega)$, donde J_0 es la función de Bessel de primer tipo y orden cero, i.e.,

$$\begin{aligned}
\langle \cos \eta a \rangle &= 1 - \frac{a^2}{2} \left(\frac{f_1^2 + f_{-1}^2}{\omega^2} \right) \simeq J_0 \left(\frac{e\varepsilon a}{\omega} \right) \\
&= 1 - \frac{a^2 e^2 \varepsilon^2}{4\omega^2} + O(\omega^{-4}), \quad (B6)
\end{aligned}$$

con $f_1(X) = f_{-1}(X) = -e\varepsilon/2$. Este resultado coincide hasta el orden de $O(\omega^{-4})$, como debe ser, con el resultado exacto para la condición de localización dinámica, i.e., $J_0(e\varepsilon a/\omega) = 0$, lo que equivale a la anulación del ancho de banda efectivo para el electrón de carga eléctrica ($-e$) en presencia de un campo eléctrico oscilante y homogéneo $\varepsilon \cos \omega t$.

C. CRITERIO DE KROOPNICK PARA MOVIMIENTO CONFINADO

En este apéndice mostramos que, de acuerdo al teorema de Kroopnick (Kroopnick 1972), una condición suficiente para que las soluciones $X(t)$ de la Ec. (25) estén confinadas (o acotadas) en el límite $t \rightarrow \infty$, está dada por $\lim_{|X| \rightarrow \infty} U^2(X) = \infty$

y/o $\lim_{|X| \rightarrow \infty} f_n^2(X) = \infty$ para algún entero n . El referido teorema de Kroopnick establece que: para la ecuación

$$\ddot{X} + a(t)b(X) = 0, \quad (C1)$$

donde $a(t) > 0$ y $b(X)$ son funciones continuas en los intervalos $R^+ = [0, \infty)$ y R respectivamente, si $\dot{a}(t) \leq 0$ (con $t \geq T$) y $\lim_{X \rightarrow \pm \infty} \int^X b(u)du = \infty$, entonces todas las soluciones $X(t)$ de la Ec. (C1) están confinadas en el límite $t \rightarrow \infty$. En efecto, comparando la Ec. (25) con la Ec. (C1) se puede establecer $a(t) = 1$ y elegir

$$b(X) \equiv a^2(U(X) - E) \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\sum_n \frac{f_n^2(X)}{n^2 \omega^2} \right); \quad (C2)$$

integrando $b(X)$ resulta entonces

$$\int^X b(u)du = \frac{a^2}{2} (U(X) - E)^2 + \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(X)}{n^2 \omega^2}. \quad (C3)$$

Así, la condición de Kroopnick $\lim_{X \rightarrow \pm \infty} \int^X b(u)du = \infty$ se cumple si $\lim_{|X| \rightarrow \infty} U^2(X) = \infty$ y/o $\lim_{|X| \rightarrow \infty} f_n^2(X) = \infty$ para algún entero n . Para que este resultado corresponda a la aplicación del teorema de Kroopnick es necesario que: $a(t) = 1 > 0$ y $\dot{a}(t) = 0 \leq 0$ (para algún T tal que $t \geq T$, por ejemplo, $T = 0$), donde $a(t)$ es una función continua en $R^+ = [0, \infty)$ y que $b(X)$ en (C.2) sea continua en R . Ya que todas estas condiciones se cumplen, entonces la aplicación del teorema de Kroopnick es válida.

D. FRECUENCIAS CUASI-ARMÓNICAS DE OSCILACIONES PEQUEÑAS

Aplicamos la fórmula

$$\Omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2 U_{eff}(X)}{\partial X^2} \right)_{X_0}, \quad (D1)$$

donde Ω es la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones cuasi-armónicas en torno al mínimo X_0 del potencial efectivo $U_{eff}(X)$, a fin de obtener expresiones apropiadas para Ω con las condiciones $f_n(X) \equiv 0$ para todo entero n . En efecto, tenemos entonces que (Cf. Ec. (26)):

$$\frac{1}{m} U_{eff}(X) = \frac{a^2}{2} U^2(X) - a^2 E U(X); \quad (D2)$$

derivando la Ec. (D2) obtenemos

$$\frac{1}{m} \frac{\partial U_{eff}}{\partial X} = a^2 \left(\frac{\partial U(X)}{\partial X} \right) (U(X) - E), \quad (D3)$$

y

$$\Omega^2 = a^2 \left(\frac{\partial^2 U(X)}{\partial X^2} \right)_{X_0} (U(X_0) - E) + a^2 \left(\frac{\partial U(X)}{\partial X} \right)_{X_0}^2. \quad (D4)$$

Si X_0 es un mínimo de $U_{eff}(X)$, entonces obtenemos de las Ecs. (D3) y (D4) para $\Omega_1 > 0$ y $\Omega_2 > 0$:

$$\Omega_1^2 = a^2 \left(\frac{\partial U(X)}{\partial X} \right)_{X_0}^2 \quad (D5)$$

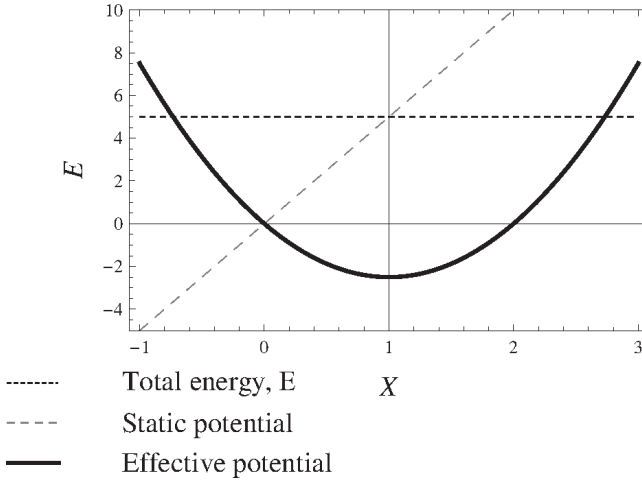


FIG. D1.— Potencial efectivo parabólico; la línea sólida representa U_{eff}/ma^2E .

cuando $U(X_0) = E$, o bien,

$$\Omega_2^2 = a^2 \left(\frac{\partial^2 U(X)}{\partial X^2} \right)_{X_0} (U(X_0) - E), \quad (D6)$$

cuando $(\partial U(X)/\partial X)_{X_0} = 0$. Para ilustrar la aplicación de las Ecs. (D5) y (D6) a un caso sencillo, consideremos la oscilación de Bloch. En este caso $U(X) = e\varepsilon_0 X$ para un electrón de carga eléctrica ($-e$) sujeto a un campo eléctrico estático y homogéneo ε_0 . Ya que $(\partial U/\partial X)_{X_0} \neq 0$, entonces sólo existe una frecuencia de la forma Ω_1 dada por la Ec. (D5). Luego, $U_{eff}(X)/m$ está dado por

$$\begin{aligned} \frac{U_{eff}(X)}{m} &= \frac{1}{2} a^2 e^2 \varepsilon_0^2 X^2 - a^2 E e \varepsilon X \\ &= \frac{a^2}{2} [(e\varepsilon_0 X - E)^2 - E^2]. \end{aligned} \quad (D7)$$

La Ec. (D7) corresponde a un pozo parabólico desplazado como se muestra en la Fig. D1. Obtenemos así la expresión independiente de la energía $\Omega_1 = ae\varepsilon_0$, que es la solución exacta conocida para la oscilación de Bloch, que en este caso es equivalente a un oscilador armónico simple.

REFERENCIAS

- Ashcroft N. & Mermin N. (1976), *Solid State Physics* (Holt, Rinehart Winston)
- Bandyopadhyay M. & Dattagupta S. (2008), *Pramana J. Phys.*, **70**, 381
- Bloch F. (1928), *Z. Phys.*, **52**, 555
- Buluta I. & Nori F. (2009), *Science*, **326**, 108
- Dreisow F., Bahat-Treidel O., Welt D. & Szameit A. (2011), *Opt. Lett.*, **36**, 2065
- Dunlap D. H. & Kenkre V. M. (1986), *Phys. Rev. B*, **34**, 3625
- Gallinar J. P. & Chalbaud E. (1991), *Phys. Rev. B*, **43**, 2322
- Gallinar J. P. & Mattis D. C. (1985), *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18**, 2583
- Garanovich I. L., Longhi S., Sukhorukova A. & Kivshar Y. (2012), *Phys. Rep.*, **518**, 1
- Georgescu I., Ashhab, S. & Nori F. (2014), *Rev. Mod. Phys.*, **86**, 153
- Hartmann T., Keck F., Korsch H. J. & Mossmann S. (2004), *New J. Phys.*, **6**, 2
- Holthaus M. & Hone D. (1996), *Phil. Mag. B*, **74**, 105
- Itin A. & Neishtadt A. (2014), *Phys. Lett. A*, **378**, 822
- Kapitza P. L. (1951), *Collected papers of P. L. Kapitza* (Pergamon Press, Oxford)
- Kroopnick A. (1972), *Proc. Amer. Math. Soc.*, **34**, 319
- Lenz G. (1999), *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 963
- Longhi S. (2007), *Phys. Rev. B*, **76**, 195119
- Longhi S., Marangoni M., Lobino M., Ramponi R. & Laporta P. (2006) arXiv: quant-ph/0511132v2
- Marte M. & Stenholm S. (1997), *Phys. Rev. A*, **56**, 2940
- Mattis D. C. (1986), *Rev. Mod. Phys.*, **58**, 361
- Mattis D. C. & Gallinar J. P. (1984), *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 1391
- Papp E. & Micu C. (2007), *Low-dimensional nanoscale systems on discrete spaces* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.)
- Rahav S., Gilary I. & Fishman S. (2003), *Phys. Rev. A*, **68**, 013820
- Sanjinés D. & Gallinar J. P. (2001), *Phys. Rev. B*, **64**, 054301
- Zhao X. G. (1991), *Phys. Lett. A*, **155**, 299

ACERCA DEL MOVIMIENTO ORBITAL DE LA LUNA

ON THE MOON'S ORBITAL MOVEMENT

DIEGO SANJINÉS C.

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

Se sabe que el Sol ejerce sobre la Luna una fuerza gravitacional aproximadamente igual al doble de la que la Tierra ejerce sobre la Luna. Entonces, ¿por qué la Luna permanece en su órbita alrededor de la Tierra? Esta cuestión se presenta como una oportunidad para revisar los conceptos básicos de la física heredados de los cursos tradicionales de la educación en ciencias. El problema del movimiento de la Luna se resuelve con un mínimo de aproximaciones y se demuestra que mientras la Tierra y la Luna se mueven simultáneamente en torno al Sol, la influencia de la Tierra perturba el movimiento de la Luna de tal forma que su movimiento relativo con respecto a la Tierra resulta ser *aproximadamente* elíptico, como si la Tierra estuviera en reposo y se ignorara la interacción entre la Luna y el Sol.

Código(s) PACS: 01.65.+g — 96.12.De

Descriptores: Historia de la ciencia — Dinámica orbital y rotacional

ABSTRACT

We know that the Moon is acted upon by the Sun with a force which is approximately the double of that with which the Moon is acted upon by the Earth. What is therefore the reason for the Moon to stay in its orbit around the Earth? This question is presented here as an opportunity to review basic concepts in physics inherited from the traditional courses in science education. The problem of the Moon's movement is solved here with a minimum of approximations and we demonstrate that while the Earth and the Moon move simultaneously around the Sun, the influence of the Earth perturbs the Moon's movement such that its resulting relative movement respect to the Earth is approximately elliptic, as if the Earth laid in rest and we ignored the interaction between the Moon and the Sun.

Subject headings: History of science — Orbital and rotational dynamics

La forma usual de introducir el concepto de gravitación universal en los cursos iniciales de ciencias es el enfoque newtoniano tradicional. Así, siguiendo la descripción original de Newton (Fig.1), el sistema Tierra-Luna sigue la misma evolución dinámica que los planetas en torno al Sol. Esto se sugiere en libros de texto conocidos, por ejemplo, Resnick-Halliday-Krane (Resnick et al. 2000) (capítulo 16) y aun en textos de Mecánica Clásica intermedia, como por ejemplo, Symon (Symon 1953), donde el sistema Tierra-Luna se puede considerar como un sistema gravitacionalmente aislado, es decir, donde la influencia de otros cuerpos celestes sea despreciable (Fig.2). Una cuestión interesante que se plantea en Resnick et al. (2000) llama sin embargo la atención: *La fuerza gravitatoria ejercida por el Sol sobre la Luna es de alrededor el doble de la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la Luna. ¿Por qué, entonces, no escapa la Luna de la Tierra?* La razón del “sin embargo” -lo confieso- es que durante casi 3 décadas de enseñar física siempre pensé que la

fuerza ejercida por el Sol sobre la Luna era despreciable comparada con la que la Tierra ejerce sobre la Luna, así que era natural considerar de manera aproximada al sistema Tierra-Luna como un sistema gravitacionalmente aislado del resto de los cuerpos celestes. Los cálculos confirman esta suposición pues las cifras que se obtiene son bastante aproximadas a los valores conocidos para la distancia y periodo del movimiento orbital de la Luna en torno a la Tierra (Resnick et al. 2000; Symon 1953). Y para mayor confirmación encontramos en los célebres *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* (Newton 1934) (Libro III) las palabras del mismo Newton:

PHENOMENON VI: That the moon, by a radius drawn to the earth's centre, describes an area proportional to the time of description. This we gather from the apparent motion of the moon, compared with its apparent diameter. It is true that the motion of the moon is a little disturbed by the action of the sun: but in laying down

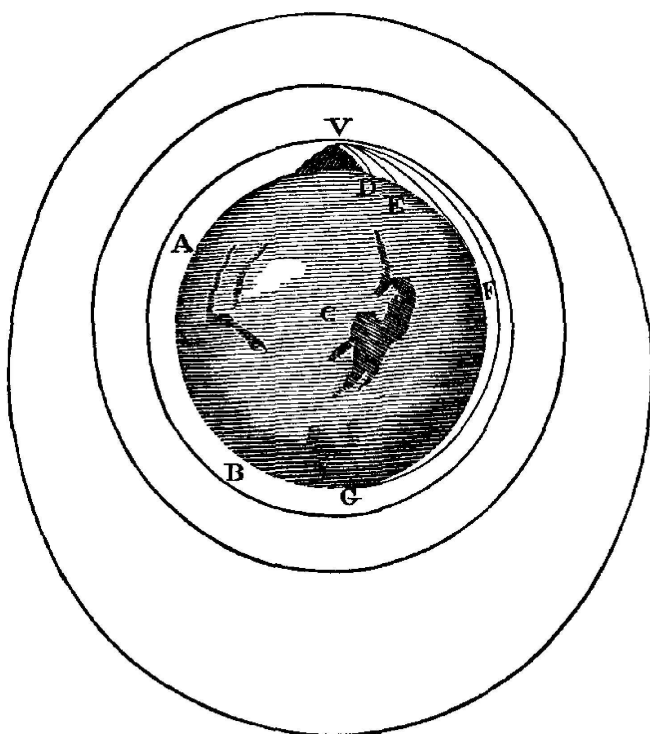


FIG. 1.— Esquema original realizado por Newton en los *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* (Newton 1934) (Libro III, El Sistema del Mundo) para ilustrar la forma en que se concibe el movimiento orbital de los satélites en torno a la Tierra a partir del movimiento de un proyectil sobre la superficie terrestre; en este caso el proyectil es una piedra que se lanza horizontalmente desde la cima de una montaña con velocidades cada vez mayores hasta sobrepasar la superficie, dando así lugar a la trayectoria orbital de la piedra. Newton supone ya la validez del modelo del sistema Tierra-Luna como un sistema gravitacionalmente aislado del resto de los cuerpos celestes, pues invoca la segunda ley de Kepler (el radio-vector Tierra-Luna r barre áreas iguales el tiempos iguales). En este esquema se ve claramente la intención de Newton de representar una trayectoria orbital elíptica.

*these Phenomena, I neglect those small and inconsiderable errors.*¹

Y en otro lugar de la obra citada se lee la suposición que hace Newton del sistema Tierra-Luna como un sistema gravitacionalmente aislado (ya que si no hubiera atracción de la Tierra, la Luna seguiría una trayectoria rectilínea):

PROPOSITION IV.1 THEOREM IV: *That the moon gravitates towards the earth, and by the force of gravity is continually drawn off from a rectilinear motion, and retained in its orbit.*

Nótese que en la última frase del *PHENOMENON VI* Newton sostiene despreciar los “pequeños e inconsiderables” errores debidos a la acción del Sol sobre la Luna. Sin embargo, un cálculo elemental muestra

¹ En la versión original en latín, la última frase es: *Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum a vi Solis, sed errorum insensibiles minutias Physicis in hisce Hypothesibus negligo.*

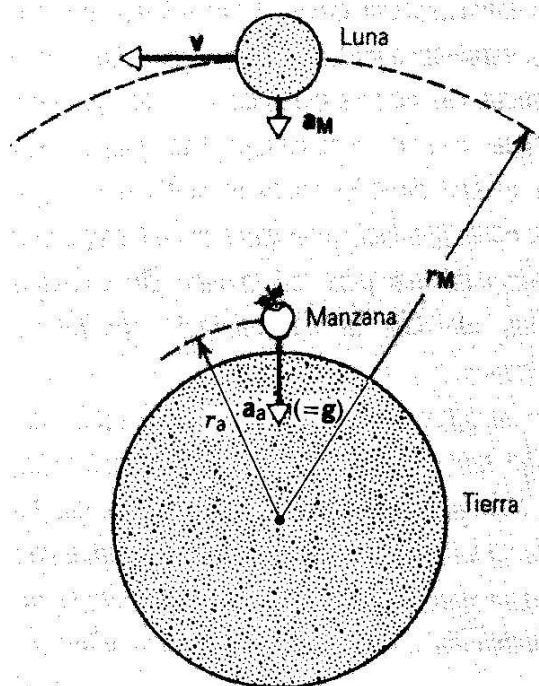


FIG. 2.— Esquema en (Resnick et al. 2000) donde se supone un sistema Tierra-Luna gravitacionalmente aislado en el que la Tierra se considera en reposo y atrae a la manzana y a la Luna según la ley de gravitación universal. En este caso es cierto que se puede despreciar el efecto del Sol sobre la manzana pues el cociente de fuerzas Sol-manzana y Tierra-manzana es una cantidad pequeña debido a la proximidad de la manzana a la Tierra (y no debido a la pequeña masa de la manzana). Sin embargo, el mismo razonamiento no se puede aplicar a la Luna pues el cociente de fuerzas Sol-Luna y Tierra-Luna ya no es una cantidad pequeña.

que esta afirmación debe interpretarse cuidadosamente, pues de otra forma podríamos suponer que Newton se equivocó. Veamos: la expresión para la fuerza de atracción gravitacional F entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 que están separados por una distancia r_{12} es $F = Gm_1m_2/r_{12}^2$, donde G es la constante de gravitación universal. Tomando los datos de las masas de la Tierra (M), el Sol (M_S) y la Luna (m), junto a las distancias Tierra-Luna (r), Sol-Luna (R_L) y Sol-Tierra (R), se obtiene los siguientes cocientes aproximados: $M/M_S = 3 \times 10^{-6}$, $m/M = 0.01228$, $r/R = 0.00255$, $R_L/R = 1 \pm 0.00255 \cong 1$; luego, el cociente aproximado de las fuerzas Sol-Luna (F_L) y Tierra-Luna (F) es $F_L/F = 2.16$. Es decir, la fuerza Sol-Luna es aproximadamente el doble de la fuerza Tierra-Luna, tal como se refiere en (Resnick et al. 2000).

A continuación se deducirá el movimiento de la Luna en el sistema de referencia en el que el Sol está en reposo. Para esto supondremos dos aproximaciones: (i) que dicho sistema de referencia se puede considerar inercial, es decir, que no está acelerado; (ii) que los movimientos orbitales de la Luna y la Tierra en torno al Sol son coplanares, es decir, que ambos cuerpos se mueven en el mismo plano de la

eclíptica². Así, si $\mathbf{R}$ es la posición de la Tierra en este sistema de referencia y $\mathbf{r}$ es la posición relativa de la Luna con respecto a la Tierra, la aceleración $\ddot{\mathbf{r}}$ de la Luna obedece la ecuación de movimiento

$$-\ddot{\mathbf{r}} = \frac{GM}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} + \frac{GM_S}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^3} (\mathbf{R} + \mathbf{r}) + \ddot{\mathbf{R}}, \quad (1)$$

donde la aceleración de la Tierra $\ddot{\mathbf{R}}$ obedece a su vez $-\ddot{\mathbf{R}} = GM_S R^{-3} \mathbf{R} - Gmr^{-3} \mathbf{r}$. Por otro lado, ya que el cociente de las distancias Tierra-Luna y Sol-Luna es pequeño ($r/R \cong 0.00255$), se puede desarrollar en serie $|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^{-3} \cong R^{-3} - 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R})R^{-5}$. Luego, la ecuación (1) se escribe como

$$-\ddot{\mathbf{r}} = GM \left(1 + \frac{m}{M} + \frac{(r/R)^3}{M/M_S} \right) \frac{\mathbf{r}}{r^3} - 3GM_S (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}) \frac{(\mathbf{r} + \mathbf{R})}{R^5}. \quad (2)$$

Ya que $1 \gg m/M \gg M/M_S \gg (r/R)^3$, la ecuación (2) se puede aproximar por

$$-\ddot{\mathbf{r}} \cong G \frac{M}{r^3} \mathbf{r} - 3G \frac{M_S}{R^5} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}, \quad (3)$$

donde el valor numérico del segundo término en el lado derecho es aproximadamente 0.005 veces el valor del primer término. Vemos entonces que dicho segundo término es una corrección de la ecuación $-\ddot{\mathbf{r}} = GMr^{-3} \mathbf{r}$ que corresponde al movimiento orbital de la Luna en torno a la Tierra cuando este sistema se considera gravitacionalmente aislado. Ésta es la forma en que se debe considerar que el efecto dinámico del Sol en el sistema Tierra-Luna es relativamente pequeño (recordemos que aún el Sol ejerce sobre la Luna casi el doble de la fuerza que la Tierra ejerce sobre la Luna), de donde resulta que el movimiento orbital de la Luna en torno a la Tierra es *aproximadamente* una elipse. La palabra “*aproxi-*

madamente” está enfatizada pues contrasta de manera radicalmente opuesta con una frase que se encuentra en *El Nuevo Cosmos* (Unsöld 1977) de A. Unsöld (cap. 4): “La órbita de la Luna alrededor de la Tierra es *exactamente* una elipse con excentricidad $e = 0.055$ ” (las itálicas son mías).

En vista del resultado expresado en la ecuación (3), ya podemos redactar una respuesta adecuada a la pregunta formulada al principio de este trabajo (¿Por qué, entonces, no escapa la Luna de la Tierra?): la Luna y la Tierra se mueven de forma simultánea en sus trayectorias orbitales en torno al Sol, donde el movimiento de la Luna está perturbado por la presencia próxima de la Tierra, por lo que la trayectoria orbital relativa de la Luna con respecto a la Tierra resulta ser *aproximadamente* una elipse. Esta conclusión puede suponerse provisional en tanto no se demuestre que los posibles efectos de no tomar en cuenta las aproximaciones (i) y (ii) consideradas en este trabajo tienen magnitudes numéricas suficientemente pequeñas con respecto a la magnitud de la corrección en la ecuación (3) (segundo término en el lado derecho). Sin embargo, no existe una razón *a priori* por la que dichos efectos puedan cancelar la corrección de la ecuación (3), por lo que aun sin las aproximaciones (i) y (ii) habrá una corrección al movimiento orbital elíptico de la Luna.

Así, en la frase *Perturbatur autem motus Lunarum aliquantulum a vi Solis* (traducida como “Ya que el movimiento de la Luna es ligeramente perturbado por la fuerza del Sol”) del *PHENOMENON VI* de los *Principia* podemos conceder que lo que Newton quiso decir fue que él desprecia los pequeños e inconsiderables “efectos dinámicos” que resultan de la acción del Sol sobre la Luna, aunque la fuerza entre el Sol y la Luna no sea pequeña comparada con la fuerza entre la Tierra y la Luna.

REFERENCIAS

Resnick R., Halliday D. & Krane K. (2000), *FÍSICA*, Vol. 1 (Grupo Patria Cultural)
Sir Isaac Newton's. (1934), *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World* (University of California Press)

Symon K. (1953), *MECHANICS* (Addison-Wesley)
Unsöld A. (1977), *EL NUEVO COSMOS* (Siglo XXI)

² El ángulo entre el plano orbital de la Luna en torno a la Tierra

y la eclíptica es aproximadamente 5° (Unsöld 1977).

SIMULACIÓN DEL MOVIMIENTO DE UN PÉNDULO DOBLE EN UN MEDIO VISCOSO

SIMULATION OF THE MOVEMENT OF A DOUBLE PENDULUM IN A VISCOUS MEDIUM

E. MARAZ[†] & O. BURGOA[‡]

Facultad de Ingeniería y Arquitectura - La Paz
Universidad Privada Boliviana

Se presentan las ecuaciones de movimiento de un péndulo doble con una resistencia proporcional a la velocidad usando el formalismo lagrangiano (este sistema de péndulo doble se simula con el lenguaje “yabasic”). Se resuelve dichas ecuaciones utilizando el método numérico de **Runge-Kutta**; como resultado se calcula el coeficiente de resistencia del medio mediante datos experimentales tomando como referencia un péndulo simple.

Código(s) PACS: 45.20.Jj — 02.60.Cb

Descriptores: Mecánica lagrangiana y hamiltoniana — Simulación numérica; solución de ecuaciones

ABSTRACT

We present the movement equations of a double pendulum with a resistance proportional to the velocity using the lagrangian formalism (the double pendulum system is simulated with the “yabasic” language). We solve these equations using the **Runge-Kutta** numerical method; as a result, we calculate the resistance coefficient of the medium using experimental data taken from a simple pendulum as a reference.

Subject headings: Lagrangian and Hamiltonian mechanics — Numerical simulation; solution of equations

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Mecánica lagrangiana

La mecánica lagrangiana es una reformulación de la mecánica clásica introducida por Joseph Louis Lagrange en 1788. En la mecánica lagrangiana, la trayectoria de un objeto es obtenida encontrando la trayectoria que minimiza la acción, que es la integral del lagrangiano en el tiempo; siendo éste la energía cinética del objeto menos la energía potencial del mismo.

La utilidad de la formulación lagrangiana se aprecia incluso en ejemplos sencillos. Por ejemplo, considere una cuenta en un aro. Si se calculara el movimiento de la cuenta usando la mecánica newtoniana, se obtendría un sistema complicado de ecuaciones que considerarían las fuerzas que el aro ejerce en la cuenta en cada instante.

En cambio, en la aproximación de Lagrange, uno mira todos los movimientos posibles que la cuenta podría tomar en el aro y encuentra matemáticamente el que reduce al mínimo la acción. Hay muy pocas ecuaciones puesto que no se está calculando directamente la influencia del aro en la cuenta en un instante dado.

Otro ejemplo es el caso del estudio de movimientos referidos a un sistema que gira, como por ejemplo

observaciones astronómicas vistas desde el planeta Tierra: en la formulación newtoniana es necesario introducir a mano las fuerzas ficticias o fuerzas de inercia como la fuerza centrífuga o la fuerza de Coriolis mientras que en la formulación lagrangiana estas fuerzas aparecen de modo natural.

Los dos problemas considerados anteriormente son mucho más sencillos de resolver empleando la formulación lagrangiana (Wikipedia 2014a).

1.2. Péndulo doble

En general, un doble péndulo es un sistema compuesto por dos péndulos, con el segundo colgando del extremo del primero. En el caso más simple, se trata de dos péndulos simples, con el inferior colgando de la masa pendular del superior.

Normalmente se sobreentiende que nos referimos a un doble péndulo plano, con dos péndulos planos coplanarios. Este sistema físico posee dos grados de libertad y exhibe un rico comportamiento dinámico. Su movimiento está gobernado por dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas (Wikipedia 2014b).

2. METODOLOGÍA

2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange para un péndulo doble

De acuerdo a la Figura 1 se determina las posiciones de las masas del péndulo doble:

[†]erickmaraz@gmail.com

[‡]osmanburgoa@lp.upb.edu

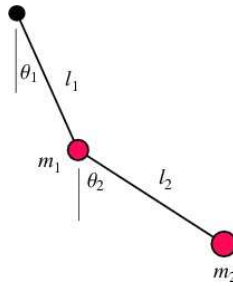


FIG. 1.— Péndulo doble

$$x_1 = l_1 \sin(\theta_1) \quad (1)$$

$$y_1 = -l_1 \cos(\theta_1) \quad (2)$$

$$x_2 = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) \quad (3)$$

$$y_2 = -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2) \quad (4)$$

Entonces $\theta_1 = \theta_1(t)$ y $\theta_2 = \theta_2(t)$.

La energía potencial y cinética del sistema son:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (5)$$

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \quad (6)$$

Reemplazando (1), (2), (3) y (4) en las ecuaciones (5) y (6) se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\theta}_2^2 l_2^2 m_2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_2 l_1 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 (m_1 + m_2) \right\} \quad (7)$$

$$V = -g (l_2 m_2 \cos(\theta_2) + l_1 (m_1 + m_2) \cos(\theta_1)) \quad (8)$$

La lagrangiana se expresa como:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (9)$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones (7) y (8) en (9) se consigue la función lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & g l_1 (m_1 + m_2) \cos(\theta_1) + g l_2 m_2 \cos(\theta_2) \\ & + \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 l_1^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 l_2^2 m_2 \\ & + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_2 l_1 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (10)$$

Considerando que el coeficiente de resistencia tiene la forma $\vec{Q} = (b \dot{\theta}_1, b \dot{\theta}_2)$ podemos formular las siguientes ecuaciones de **Lagrange** para este caso:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = - \left(\frac{\partial Q_{\theta_1}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \dot{\theta}_1 \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = - \left(\frac{\partial Q_{\theta_2}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) \dot{\theta}_2 \quad (12)$$

TABLA 1
DATOS PARA UN PÉNDULO SIMPLE

Longitud	Masa	Radio	Aceleración de la gravedad	b
(cm)	(g)	(cm)	$\left(\frac{cm}{s^2}\right)$	$\left(\frac{g \cdot cm^2}{s}\right)$
50	88.5	3.0	981.0	6743.89

TABLA 2
RESULTADOS DE MEDICIONES DE UN PÉNDULO SIMPLE

Tiempo (s)	Posición inicial (rad)	Velocidad inicial $\left(\frac{rad}{s}\right)$
146.3	$\pi/4$	0
145.7	$\pi/4$	0
140.0	$\pi/4$	0
143.3	$\pi/4$	0
143.6	$\pi/4$	0
144.2	$\pi/4$	0
145.5	$\pi/4$	0

Desarrollando las ecuaciones (11) y (12) se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden:

$$\begin{aligned} & l_1 \left\{ \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right. \\ & \left. + (m_1 + m_2) \left(g \sin(\theta_1) + l_1 \ddot{\theta}_1 \right) \right\} \\ & + l_1 \left(l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 \right) \cos(\theta_1 - \theta_2) = -b \dot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & l_2 m_2 \left(g \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_1^2 l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right) \\ & + l_2 m_2 \left(l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2 \ddot{\theta}_2 \right) = -b \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (14)$$

2.2. Cálculo del coeficiente b mediante un péndulo simple

Para el cálculo de este coeficiente se realizaron mediciones del tiempo que tarda un péndulo simple que comienza su trayectoria en reposo a 45° hasta que ya no sobrepasa los 5° . En la Figura 2 se muestra el sistema utilizado. Las Tablas 1 y 2 muestran los datos y resultados.

Este coeficiente se obtuvo con el promedio del tiempo necesario. Los modelos empleados para su cálculo tienen la forma de las ecuaciones (11) y (12).

2.3. Método Runge Kutta

Éste es el método numérico que se utiliza para el cálculo de θ_1 y θ_2 donde h es la tolerancia, f y g funciones que dependen de las velocidades v_x, v_y ; distancias x, y y tiempo t (Neumann 2010).

Las condiciones iniciales son $x(0), y(0), v_x(0), v_y(0)$ que representan posiciones y velocidades respectivamente:

$$\begin{aligned} & f(x, y, v_x, v_y, t) \\ & g(x, y, v_x, v_y, t) \end{aligned}$$

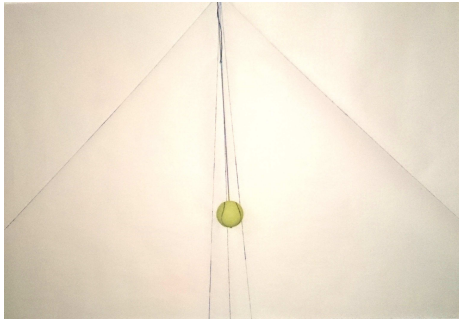
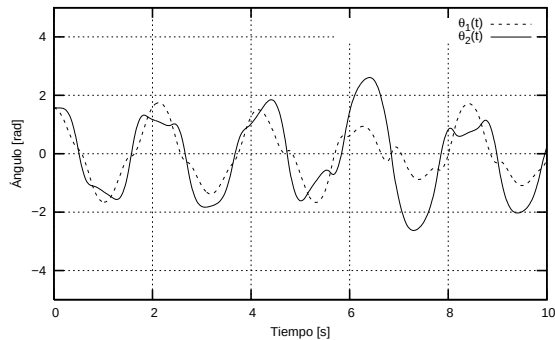


FIG. 2.— Péndulo simple

FIG. 3.— Gráfica de las funciones $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$

```

k1=h*vx0;
l1=h*f(x0,y0,vx0,vy0,t);
q1=h*vy0;
m1=h*g(x0,y0,vx0,vy0,t);
k2=h*(vx0+l1/2);
l2=h*f(x0+k1/2,y0+q1/2,
        vx0+l1/2,vy0+m1/2,t+h/2);
q2=h*(vy0+m1/2);
m2=h*g(x0+k1/2,y0+q1/2,
        vx0+l1/2,vy0+m1/2,t+h/2);
k3=h*(vx0+l2/2);
l3=h*f(x0+k2/2,y0+q2/2,
        vx0+l2/2,vy0+m2/2,t+h/2);
q3=h*(vy0+m2/2);
m3=h*g(x0+k2/2,y0+q2/2,
        vx0+l2/2,vy0+m2/2,t+h/2);
k4=h*(vx0+l3);
l4=h*f(x0+k3,y0+q3,vx0+l3,vy0+m3,t+h);
q4=h*(vy0+m3);
m4=h*g(x0+k3,y0+q3,vx0+l3,vy0+m3,t+h);
vx=vx0+(l1+2*l2+2*l3+l4)/6;
vy=vy0+(m1+2*m2+2*m3+m4)/6;
x=x0+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
y=y0+(q1+2*q2+2*q3+q4)/6;

```

3. RESULTADOS

3.1. Modelo computacional y simulación

Se realizó un programa en el lenguaje *yabasic* que permite la visualización de un péndulo doble en un medio viscoso, en este caso el aire.

El método **Runge Kutta** se realiza dentro de un bucle, esto se puede observar entre las líneas 21 y 55

del script del Código 1 y la gráfica de los resultados del cálculo se pueden apreciar en la Figura 3. Los datos de la Tabla 1 se presentan entre las líneas 10 y 20 del mismo script. Algunas escenas de la simulación se muestran en la Figura 4.

```

1 open window 500,500
2 window origin "cc"
3 sub f(x,y,vx,vy,t,b,m1,m2,g,l1,l2):
4     return (2*b*l1*vy*cos(x - y)
5         - l2*(2*b*vx + g*l1*(2*m1
6             + m2)*sin(x) + l1*m2*(g*sin(x
7                 - 2*y)+2*l2*vy**2*sin(x - y)
8                 + l1*vx**2*sin(2*(x - y))))
9         /(2*l1**2*l2*(m1 + m2 - m2
10             *cos(x - y)**2))
11 end sub
12 sub g(x,y,vx,vy,t,b,m1,m2,g,l1,l2):
13     return (-2*l2*m2*cos(x - y)
14         *(b*vx + l1*l2*m2*vy**2*sin(x - y))
15         + 2*l1*(m1 + m2)*(b*vy
16             - l2*m2*(l1*vx**2 + g*cos(x))
17             *sin(x - y)))/(l1*l2**2*m2*(-2*m1
18             - m2 + m2*cos(2*(x - y))))
19 end sub
20 h=0.01
21 b=6743.89 rem coeficiente b
22 mo1 = 88.5 rem masa
23         del primer pendulo
24 mo2 = 88.5 rem masa
25         del segundo pendulo
26 g=981.0 rem aceleracion
27         de la gravedadrem
28 x0 = pi/2.0 rem condicion inicial
29         de posicion en el eje x
30 y0 = pi/2.0 rem condicion inicial
31         de posicion en el eje y
32 vx0 = 0.0 rem condicion inicial de
33         la velocidad en el eje x
34 vy0 = 0.0 rem condicion inicial de
35         la velocidad en el eje y
36 lo1 = 50.0 rem longitud del
37         primer pendulo
38 lo2 = 50.0 rem longitud del
39         segundo pendulo
40 radio = 3.0
41 while(1)
42     clear fill circle lo1*sin(x0)
43         ,lo1*cos(x0),radio
44     clear fill circle lo1*sin(x0)
45         +lo2*sin(y0),lo1*cos(x0)
46         +lo2*cos(y0),radio
47     clear line 0,0,lo1*sin(x)
48         ,lo1*cos(x)
49     clear line lo1*sin(x),lo1*cos(x)
50         ,lo1*sin(x)+lo2*sin(y),lo1*cos(x)
51         +lo2*cos(y)
52     k1=h*vx0
53     l1=h*f(x0,y0,vx0,vy0,t,b
54         ,mo1,mo2,g,lo1,lo2)
55     q1=h*vy0
56     m1=h*g(x0,y0,vx0,vy0,t,b

```

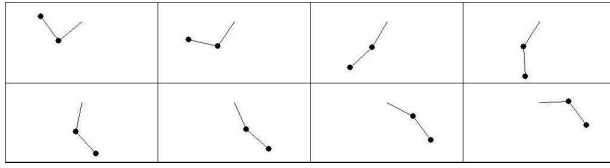


FIG. 4.— Simulación con datos de la Tabla 1

```

, mo1, mo2, g, lo1, lo2)
30 k2=h*(vx0+l1/2)
31 l2=h*f(x0+k1/2, y0+q1/2, vx0+l1/2
, vy0+m1/2, t+h/2, b, mo1, mo2, g
, lo1, lo2)
32 q2=h*(vy0+m1/2)
33 m2=h*g(x0+k1/2, y0+q1/2, vx0+l1/2
, vy0+m1/2, t+h/2, b, mo1, mo2, g
, lo1, lo2)
34 k3=h*(vx0+l2/2)
35 l3=h*f(x0+k2/2, y0+q2/2, vx0+l2/2
, vy0+m2/2, t+h/2, b, mo1, mo2, g
, lo1, lo2)
36 q3=h*(vy0+m2/2)
37 m3=h*g(x0+k2/2, y0+q2/2, vx0+l2/2
, vy0+m2/2, t+h/2, b, mo1, mo2, g
, lo1, lo2)
38 k4=h*(vx0+l3)
39 l4=h*f(x0+k3, y0+q3, vx0+l3, vy0+m3
, t+h, b, mo1, mo2, g, lo1, lo2)
40 q4=h*(vy0+m3)
41 m4=h*g(x0+k3, y0+q3, vx0+l3, vy0+m3
, t+h, b, mo1, mo2, g, lo1, lo2)
42 vx=vx0+(l1+2*l2+2*l3+l4)/6.0
43 vy=vy0+(m1+2*m2+2*m3+m4)/6.0
44 x=x0+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6.0
45 y=y0+(q1+2*q2+2*q3+q4)/6.0
46 line 0, 0, lo1*sin(x), lo1*cos(x)
47 line lo1*sin(x), lo1*cos(x)
, lo1*sin(x)+lo2*sin(y)
, lo1*cos(x)+lo2*cos(y)
48 fill circle lo1*sin(x), lo1*cos(x)
, radio
49 fill circle lo1*sin(x)+lo2*sin(y)
, lo1*cos(x)+lo2*cos(y), radio
50 x0=x
51 y0=y
52 vx0=vx
53 vy0=vy
54 wait(0.0001)
55 wend

```

CÓDIGO 1: Script en lenguaje yabasic.

4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

En base a un péndulo simple se calculó el coeficiente b (véase Tabla 1), dato que se utilizó en un sistema de dos péndulos ya que las funciones utilizadas con las ecuaciones de **Euler Lagrange** para la resolución de un péndulo simple en un medio viscoso mostraron un comportamiento muy cercano al del sistema armado (véase Figura 2).

En el cálculo del coeficiente b se observó que no puede existir una mayor precisión porque no cumplen las condiciones necesarias, esto puede ser causado por las unidades de los datos. Este coeficiente debido a las unidades puede significar muchas posibilidades, puede depender directamente del área de la esfera ya que está en un medio viscoso (en este caso el aire), masas, longitudes, aceleración de la gravedad y otros. Con una mayor cantidad de experimentos con diferentes longitudes, masas, radios, aceleración de gravedad se podría conocer si b es un coeficiente dependiente de los datos para cada caso o una constante para todos los casos en sistemas de péndulos. Un aspecto importante a tomar cuenta es que para este modelo las cuerdas tiene que ser barras sólidas que impidan una alteración en la longitud de éstas.

El análisis de las energías, posiciones, velocidades, etc. sugiere un estudio más especializado en dinámica no lineal y caos en el cual un péndulo doble siempre es un excelente ejemplo (Strogart 1994).

5. CONCLUSIONES

Las ecuaciones de **Euler-Lagrange** describen el movimiento de un péndulo doble correctamente y el método numérico **Runge Kutta** nos permite simularlo.

El coeficiente b (véase Tabla 1) calculado lleva mucha información dentro ya que esta constante puede depender directamente de la longitud, aceleración de gravedad, radio, área y masa del sistema por lo cual una simulación con diferentes datos de longitud y masa podrían ser alejados a la realidad. Se utilizó el sistema de unidades cegesimal para una mayor precisión en el valor de b .

REFERENCIAS

Neumann E. (2010),
http://www.myphysicslab.com/runge_kutta.html

Strogart S. H. (1994), *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Perseus Books)

Wikipedia. (2014a),
http://es.wikipedia.org/wiki/Mecánica_lagrangiana

—. (2014b),
http://es.wikipedia.org/wiki/Doble_péndulo

18^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA
8^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
1ra ETAPA: UNIDADES EDUCATIVAS
2ra ETAPA: DISTRITAL
3ra ETAPA: DEPARTAMENTAL
4ta ETAPA: FINAL NACIONAL: TARIJA, DEL 14 AL 17 DE AGOSTO DE 2013

RALJEVIC M.^{1,2}, TICONA A.^{1,2}, MAMANI E.^{1,2}, MUÑOZ R.², QUISPE C.^{1,2}, QUISPE L.^{1,2}, BALDERRAMA M.^{1,2},
VARGAS M.^{1,2}, AGUILAR J. C.³, DE LA TORRE M.³, RODRIGUEZ F.⁴, GUAYGUA T.⁵, CASTELO J. J.⁵, JEMIO C.⁵,
ANDRADE M.⁶, GUZMÁN R.⁶, MAMANI R.⁷, FUENTES W.⁷, VALDEZ S.⁸, JUSTINIANO I.⁹, JAILLITA J.⁹, PAYLLO J.
P.¹⁰, CABRERA J.¹¹, VARGAS C.¹², CORAITE O.¹³, QUIROZ Z.¹⁴, ORTEGA L.¹⁵, MALLCU A.¹⁶, MARTINEZ L.¹⁷,
TAQUICHIRI M.¹⁸, ZALLES R.¹⁹, ORTEGA M.²⁰, BUSTOS R.^{1,2,3}

¹ Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)

² Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), *Carrera de la Física, Planetario Max Schreier*, La Paz

³ Asociación Boliviana para el Avance de la Ciencia (ABAC)

⁴ Universidad Mayor, Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCH),
Facultad de Tecnología - Carrera de Ingeniería de Sistemas, Sucre

⁵ Universidad Técnica de Oruro (UTO), *Facultad Nacional de Ingeniería (FNI)*, Oruro

⁶ Universidad Mayor de San Simón (UMSS), *Facultad de Ciencia y Tecnología*, Cochabamba

⁷ Universidad Autónoma Tomás Frías (UATF), *Carrera de Física*, Potosí

⁸ Colegio Cardenal Cushing, Santa Cruz de la Sierra

⁹ Colegio María Auxiliadora, Cobija, Pando

¹⁰ Colegio Natush Bush, Yacuiba, Tarija

¹¹ Colegio Amor de Dios, La Paz

¹² Colegio Buenas Nuevas, Sucre

¹³ Colegio La Salle, Oruro

¹⁴ Instituto Americano, La Paz

¹⁵ Colegio Felipe Palazón, Tarija

¹⁶ CORIMEX LTDA., La Paz

¹⁷ Universidad Privada de Santa Cruz (UPSA), Santa Cruz de la Sierra

¹⁸ Universidad Autónoma Juan Misael Saracho (UAJMS), Tarija

¹⁹ Observatorio Astronómico Nacional (OAN), Tarija &

²⁰ Asociación Boliviana para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias (AMEC), Beni

RESUMEN

La 18^{va} Olimpiada Boliviana de Física (18^{va} OBF) y la 8^{va} Olimpiada Boliviana de Astronomía y Astrofísica (8^{va} OBAA) se llevaron a cabo con éxito en 4 etapas de la gestión 2013: 1ra ETAPA: exámenes internos de selección en cada UNIDAD EDUCATIVA, 2da ETAPA, DISTRITAL: exámenes simultáneos en cada uno de los 277 distritos de todo el país, 11 de Mayo de 2013, 3ra ETAPA: DEPARTAMENTAL: exámenes que se tomaron a l@s mejores estudiantes de la 2da etapa, 15 de Junio de 2013 y 4ta ETAPA: NACIONAL: donde participaron solo 3 categorías: 3°, 4° y 5° de secundaria. Se llevó a cabo del 14 al 17 de Agosto de 2013 en la ciudad capital de Tarija con la participación de 9 equipos por categoría por cada olimpiada.

Ambas olimpiadas (OBF – OBAA) se acoplaron, por tercer año consecutivo, al proyecto impulsado por el Ministerio de Educación del Estado Plurinacional de Bolivia, titulado: *Olimpiada Científica Estudiantil Plurinacional Boliviana (OCEPB)*, donde, se invitó a que participen 6 áreas de las ciencias puras y naturales: Astronomía y Astrofísica, Biología, Física, Informática, Matemática y Química.

La organización del evento contó también con la participación de los siguientes organismos e instituciones: Comité Olímpico Boliviano de Astronomía y Astrofísica, Comité Olímpico Boliviano de Física, Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI), la Asociación Boliviana para el Avance de la Ciencia (ABAC), la Dirección Departamental de Cochabamba; las Carreras de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), la Universidad Mayor de San Simón (UMSS), y la Universidad Autónoma Tomás Frías (UATF), los departamentos de Física de la Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA), la Universidad Técnica de Oruro (UTO), la Universidad Mayor, Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCh), la Universidad Autónoma Juan Misael Saracho (UAJMS) y la Asociación para el Mejoramiento de la enseñanza de las Ciencias (AMEC).

En la 18^{va} OBF y la 8^{va} OBAA se evaluaron 7 categorías, 6° de primaria y todos los grados

de secundaria, en las tres etapas previas al evento nacional. En la 4ta etapa: nacional, por la estructura de la *OCEPB* sólo participaron los cursos de 3º, 4º y 5º de Secundaria. Es recomendable dar el incentivo a toda la juventud Boliviana mediante la motivación y la sana competencia en el evento nacional. Con ello se logra el entrenamiento continuo no solo para la siguiente inmediata gestión, sino varios años de anticipación; dicha receta es sin duda la mejor manera de incrementar el conocimiento en la juventud boliviana y además para que nuestros representantes sean cada vez más competitivos a nivel internacional.

L@s ganador@s de las categorías: 5º, 4º, 3º, 2º, 1º de Secundaria y 6º de Primaria, forman los equipos Bolivianos preseleccionados postulantes a futuros eventos olímpicos: Latinoamericanos, Iberoamericanos e Internacionales a llevarse a cabo las siguientes gestiones 2014, 2015, 2016, 2017 y 2018 respectivamente. Cada año debe realizarse nuevamente la selección de los equipos mediante exámenes y en las concentraciones preparadas por el Comité Académico de cada área.

Los ganadores de la categoría de 6º de Secundaria, tienen como principal premio, el ingreso libre y directo a cualquiera de las carreras de Ciencias y/o Ingeniería de las universidades comprometidas con las olimpiadas.

¡Felicidades! a tod@s l@s jóvenes participantes y ganador@s de las distintas etapas y categorías así como también a sus respectiv@s maestr@s de todas las Unidades Educativas fiscales, particulares y de convenio de todo el país que se animaron a participar en el apasionante mundo de la Física, la Astronomía y Astrofísica, porque están dando un digno ejemplo a seguir por otros establecimientos, profesor@s, estudiantes contemporáneos y por todas las generaciones venideras.

A continuación, se presentan las soluciones de las pruebas de la 3ra ETAPA Departamental en todas las categorías de ambas olimpiadas: 18^{va} OBF y 8^{va} OBAA.

Página WEB: <http://www.fiumsa.edu.bo/olimpiada/>

OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA



OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

Código(s) PACS: 01.50.Rt — 01.10.Hx

Descriptor: Competencias de física — Actividades organizacionales de física

3^{ra} ETAPA
18^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

6^{to} DE PRIMARIA

PARTE TEÓRICA:(60%).

1. Responde V o F según corresponda.[10%]

- a) La materia posee masa, volumen y temperatura.
- b) La masa es la cantidad de materia que posee un cuerpo.
- c) La materia se mide con balanza.
- d) La materia ocupa un lugar en el espacio.
- e) Entre mayor es el movimiento de las partículas, menor es la energía térmica.
- f) Los estados de la materia son líquido, masa y temperatura.

2. Encierra con un círculo los sólidos, con un triángulo los líquidos y con un cuadrado las sustancias gaseosas.[10%]



3. Con tus palabras escribe los significados de las siguientes palabras:[20%]

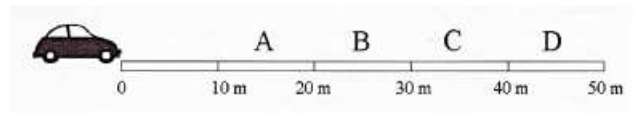
- a) Fusión
- b) Condensación
- c) Evaporación
- d) Solidificación
- e) sólido
- f) líquido

4. Indica 2 ejemplos donde se presentan los siguientes tipos de Energía:[20]

- a) Interna
- b) Eléctrica
- c) Térmica
- d) Electromagnética
- e) Nuclear

PARTE PRÁCTICA:(40%). CADA PREGUNTA VALE 20%:

1. Cuando el coche de la figura siguiente llega al punto 0 se le agota la gasolina. En ese instante posee 50000 unidades de energía, pero por cada metro de recorrido pierde 1450 unidades y se detiene cuando se agota toda su energía. Se detendrá finalmente en el sector marcado con la letra:



2. El Sol emite energía a razón de 10^{26} julios por segundo. Teniendo en cuenta que la energía radiada por el Sol proviene de la conservación de masa en energía y la conocida ecuación de Einstein la cual establece que $E = mc^2$, donde c es la velocidad de la luz ($3 \times 10^8 [m/s]$), se concluye que el Sol pierde cada segundo una masa, en kilogramos, igual a:

- a) $3,53 \times 10^{43}$
- b) $1,1 \times 10^9$
- c) $1,1 \times 10^{10}$
- d) $3,92 \times 10^{26}$
- e) 0

1^{ro} DE SECUNDARIA

PARTE TEÓRICA:(40%). Cada pregunta vale 10%:

1. En la Tierra se deforestan 30 hectáreas [ha] de jungla por minuto, por consiguiente la cantidad de hectáreas que son destruidas anualmente en el planeta es de cerca de:

a) 90 millones
b) 11 millones
c) 16 millones
d) 900 millones

2. Observe las dos siguientes columnas:

Fuente de Energía

I. Petróleo
II. Carbón
III. Hidroeléctrica
IV. Nuclear

Comentario

- a. Se agota rápidamente
b. Aumenta el efecto invernadero
c. No es debida a los rayos del Sol
d. El problema son los desechos
e. Su origen está en la energía Solar

De las siguientes asociaciones ¿cuál es la incorrecta?:

- a) I - a b
b) IV- c d
c) II - a c
d) III - e

3. La onza troy es una unidad inglesa de masa que equivale aproximadamente a 32 gramos. Teniendo en cuenta esto y la tabla adjunta, de las siguientes afirmaciones la correcta es:

Sustancia	Densidad [g/cm^3]
Agua	1
Hierro	7,6
Plomo	11,3

- a) Una onza de plomo pesa casi 11 veces más que una de agua.
b) Media onza de plomo pesa igual que 16 centímetros cúbicos de agua.
c) Una onza de hierro ocupa un volumen de 32 centímetros cúbicos.
d) Una onza de agua ocupa un volumen de 1 centímetro cúbico.

4. Indique cuantas cifras significativas tiene cada una de las siguientes cantidades:

a) 0,0530
b) 0,0042
c) 5,0048
d) 0,00004
e) 543,98

PARTE PRÁCTICA:(60%). CADA PREGUNTA VALE 20%:

1. El sonido se propaga en el aire a 340 [m/s] y en el agua a 1500 [m/s]. En un lugar del océano se produce una explosión y la tripulación de un barco situado a una distancia L capta los sonidos por el agua y por el aire con una diferencia de tiempo de 5,8 [s] mediante dos micrófonos, uno bajo el agua y el otro sobre la superficie. ¿Cuál es la distancia L a la que ocurrió la explosión?



2. En cierta región del altiplano Boliviano por cada metro cuadrado de superficie y cada segundo inciden 800 [J] de energía solar. En términos técnicos lo anterior se expresa diciendo que la potencia (medida en vatios, W) de la radiación solar por unidad de área es 800 [W/m^2]. De esta energía solo el 15% se convierte en energía eléctrica por un tipo de celdas solares. Un ingeniero eléctrico piensa suministrar energía a una ciudad del altiplano que consume 1[GW] ($10^9 W$), aplicando la tecnología de las celdas solares. El precio de cada cm^2 de celda solar es de 150 Bs. ¿Cuáles son el área y el precio de la celda solar que tendría que usar el ingeniero?
3. El diámetro y la altura de un cilindro de plastilina son respectivamente iguales a 10 [cm]. Si con esa misma plastilina se fabrica otro cilindro de doble altura ¿Cuánto medirá su nuevo diámetro?

2^{do} DE SECUNDARIA

PARTE TEÓRICA:(40%). Cada pregunta vale 10%:

1. Explique porqué la ropa se carga eléctricamente mucho más cuando el clima está especialmente seco.
2. Diga qué es un cuerpo electrizado, cuántos tipos de carga existen, cite las partículas que forman al átomo y diga qué tipo de carga tienen.

3. ¿En qué unidad se mide la carga eléctrica?
4. Un automóvil recorre 500 metros en 50 segundos con velocidad constante. La distancia que recorre durante 15 segundos expresada en metros es:
 - a) 50
 - b) 100
 - c) 150
 - d) 200
 - e) 250
5. Conociendo la velocidad media de movimiento de un cuerpo durante determinado intervalo de tiempo, podemos hallar el desplazamiento realizado por el cuerpo en el transcurso de cualquier parte de dicho intervalo.

(F) (V)

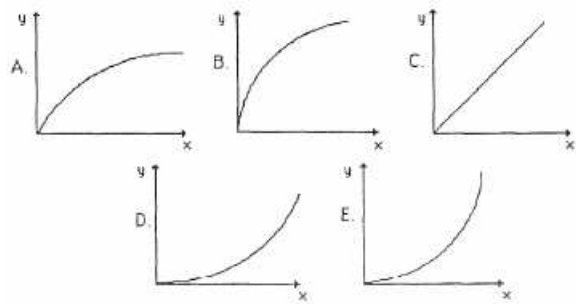
PARTE PRÁCTICA:(60%). CADA PREGUNTA VALE 20%:

1. Un auto y un camión parten al mismo tiempo y en la misma dirección desde cierto punto. El auto avanza con velocidad constante de 80 [km/h] y el camión a una velocidad constante de 60 [km/h]. Al cabo de tres horas ¿cuál será la distancia que los separa?
2. Usted conduce un automóvil y tiene planeado ir a cierto sitio. Durante la primera mitad de su jornada viaja a 40 [km/h] y entonces se da cuenta que de seguir así le tomara demasiado tiempo llegar al destino previsto pues para hacer el recorrido en una jornada debería viajar a razón de 60 [km/h]. ¿Cuál debe ser su rapidez durante la segunda mitad de la jornada para llegar en el tiempo previsto?
3. Análisis Sísmico. Los sismos producen varios tipos de ondas de choque. Las más conocidas son las ondas P (P por primarias o “de presión”) y las ondas S (S de secundarias o “de corte”). En la corteza terrestre, las ondas P viajan a alrededor de 6.5 km/s, mientras que las ondas S viajan alrededor de 3.5 km/s. Las velocidades reales varían dependiendo del tipo de material por el que se desplazan. El desfase de tiempo entre la llegada de estas dos ondas a una estación sísmica le informa a los geólogos que tan lejos ocurrió el sismo. Si el tiempo de retraso es 33 s, ¿qué tan lejos de la estación sísmica ocurrió el terremoto?

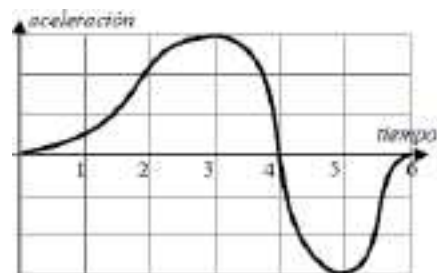
3^{ro} DE SECUNDARIA

PARTE TEÓRICA [30%]

1. Un cuerpo se mueve con una velocidad constante en la dirección positiva del eje Y, y sujeto a una aceleración constante en la dirección X.Cuál de las gráficas representa la trayectoria correcta del cuerpo.



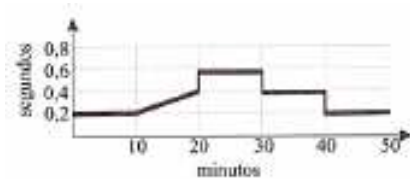
2. La figura adjunta muestra la gráfica de aceleración contra tiempo de un cuerpo que partiendo del reposo se desplaza en línea recta. El instante en que el cuerpo tuvo su máxima velocidad es el que corresponde al tiempo:



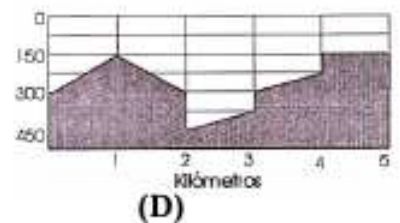
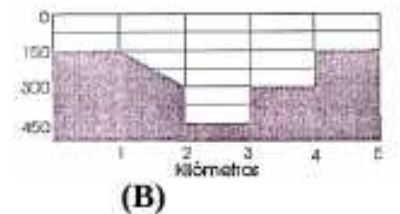
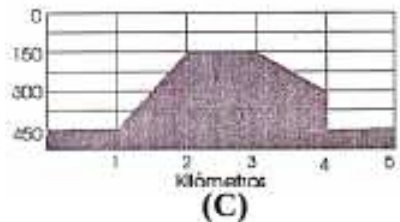
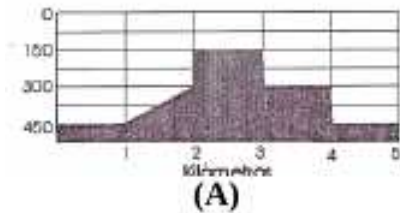
- a) 2
 - b) 3
 - c) 4
 - d) 5
 - e) 6
3. La regla de la mano derecha permite encontrar para un vector resultante:
 - a) Magnitud y dirección
 - b) Magnitud y sentido
 - c) Dirección y sentido
 - d) Magnitud, dirección y sentido
 - e) Ninguna

PARTE PRÁCTICA [70%]

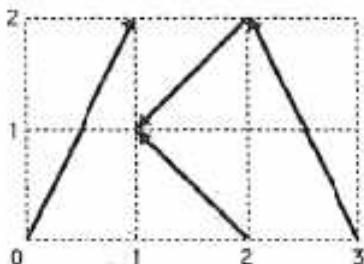
1. La mayoría de los barcos tienen un instrumento llamado sonar, el cual es un dispositivo que permite determinar la profundidad del mar el sonar funciona midiendo el tiempo que transcurre una señal sonora en ir hasta el fondo del mar y regresar. Un barco va midiendo la profundidad del lecho marino mientras avanza en línea recta durante 50 minutos y obtiene la siguiente señal de intervalos de tiempo recibidos: [20%]



La interpretación correcta del lecho marino es la indicada en la gráfica: (explique el porqué de su selección)



2. Hallar la magnitud resultante de los vectores de la figura: [10%]



3. Dos barcos separados una distancia de $10[km]$, avanzan aproximándose entre si cada uno con velocidad de $10[km/h]$ respecto al agua. Una gaviota vuela del primer barco al segundo con una velocidad de $20[km/h]$. ¿Cuánto tarda la gaviota en alcanzar el segundo barco? [20%]

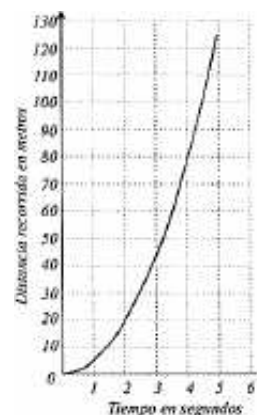
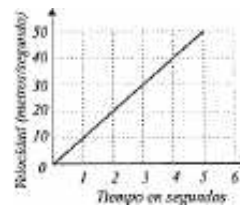


4. Un coche que se desplaza a $v_0 = 90[Km/h]$ comienza a frenar con movimiento uniformemente retardado hasta alcanzar una cierta velocidad mínima (v_m) luego comienza a acelerar con movimiento uniformemente acelerado hasta alcanzar de nuevo la velocidad de $90[Km/h]$. En realizar esta maniobra emplea un tiempo de un minuto y recorre una distancia de $1[km]$ ¿Cuál es la velocidad mínima del coche? [20%]

4^{to} DE SECUNDARIA

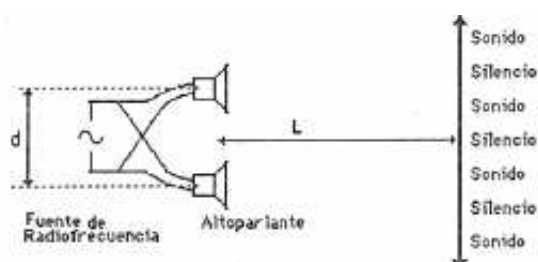
PARTE TEÓRICA:(40%). Cada pregunta vale 10%:

1. Las gráficas siguientes representan la velocidad de un móvil y la distancia que recorre en función del tiempo. A partir de ellas se deduce que cuando el móvil alcanza la velocidad de $30 [m/s]$ la distancia expresada en metros que ha recorrido es aproximadamente:



- a) 10
b) 20
c) 30
d) 40

2. Un buzo sumergido puede escuchar el motor de su embarcación. Este hecho es suficiente para probar que:
 - a) El sonido viaja a velocidad constante
 - b) El sonido viaja a una velocidad de 1450 [m/s] en el agua
 - c) Los sonidos también pueden transmitirse por el agua
 - d) En la refracción del sonido entre el agua y el aire, la longitud de onda cambia
 - e) En la refracción del sonido entre el aire y el agua, la longitud de onda no cambia
3. Desde la ventana de un tren un pasajero arroja un cuerpo hacia atrás con cierta velocidad v . Consideremos para el tren cuatro situaciones: a) esta inmóvil, b) se mueve con velocidad constante, c) está acelerando y d) está frenando. Es cierto que:
 - a) En todas las ocasiones el cuerpo tarda el mismo tiempo en caer.
 - b) En todas las ocasiones el cuerpo desciende formando una parábola con respecto al pasajero.
 - c) En las situaciones a) y b) un observador sobre la vía ve que el cuerpo cae en línea recta.
 - d) En el caso d) el cuerpo cae más lentamente que en el c).
 - e) En el caso d) el movimiento del cuerpo forma una parábola hacia atrás y en el c) hacia adelante.
4. La figura muestra dos altoparlantes igualmente alimentados, en fase, por una autofrecuencia.



Cuando un estudiante se mueve a lo largo de la línea XY nota zonas alternadas de silencio y sonido. La distancia entre las zonas de silencio puede disminuir si:

- a) Se reduce el volumen de un autoparlante
- b) Disminuye la distancia d
- c) Aumenta la distancia L
- d) Aumenta la frecuencia de la fuente de audio
- e) Aumenta la potencia de la fuente de audio frecuencia

PARTE PRÁCTICA:(60%). CADA PREGUNTA VALE 20%:

1. Un grifo gotea sobre una superficie de agua. El goteo tiene lugar a razón de 80 gotas por minuto y genera en el agua ondas circulares separadas 45 [cm]. ¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas en la superficie de agua?
2. Dos amigos se encuentran en una caseta de apariencia misteriosa. Luis, a quien le encantan las historias de casas abandonadas, pide a sus amigos entrar y explorar el sitio. Hacia el fondo de la primera habitación hay un murciélago que, asustado, escapa emitiendo ultrasonidos de frecuencia 60000 [Hz]. El oído de un perro que acompaña a Luis puede detectar frecuencias de hasta 58000 [Hz]. ¿a qué velocidad se debe alejar el murciélago del perro para que este puede percibir sus chillidos?
3. Se lanza un proyectil formando un ángulo α con la horizontal. En el punto más alto de su trayectoria h su velocidad es v_1 . La velocidad en un punto de la trayectoria que es la mitad de la altura máxima $h/2$ es v_2 y entre ambas velocidades existe la relación:

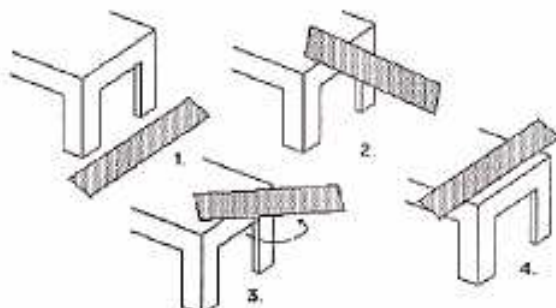
$$v_1 = \sqrt{\frac{6}{7}} v_2$$

Calcular el ángulo α de lanzamiento.

5^{to} DE SECUNDARIA

PARTE TEÓRICA:(40%). Cada pregunta vale 10%:

1. Suponga que el tablón de peso V de la figura se sube a la mesa de altura h siguiendo la secuencia que se muestra: primero se mantiene un extremo apoyado en el piso, y se sube el otro extremo, y luego se sube el otro extremo del tablón. Llamemos T al trabajo que se habría levantado del modo usual (en un solo movimiento). El trabajo que se realiza de la otra manera, despreciando rozamientos es:

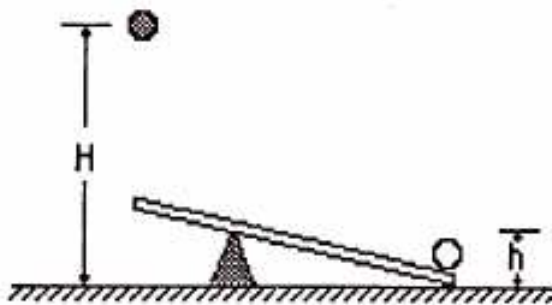


- a) Prácticamente T
- b) Exactamente T
- c) Exactamente la mitad de T

d) Aproximadamente $T/4$

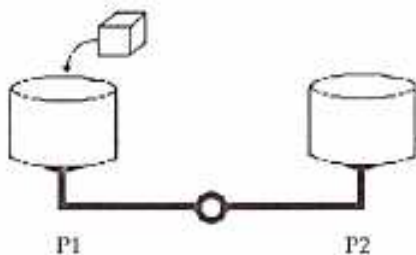
e) No es posible determinarlo con los datos suministrados

2. La bola negra se deja caer desde una altura H con respecto al piso. Esta bola golpea al tablón de masa M y longitud L que se apoya en un soporte de altura h , a la distancia $L/3$. El choque en el que no hay pérdidas por calor, es tal que cuando la bola negra alcanza su mínima altura, la bola blanca alcanza su máximo. Las dos bolas tienen la misma masa m , el valor de la altura máxima es:



- a) Exactamente H
 b) Un poco mayor que H
 c) Independiente de H
 d) Un poco menor que H
 e) Independiente de m

3. Un estudiante tiene en cada uno de los platillos de una balanza en equilibrio, recipientes de tres litros de capacidad llenos de agua hasta los bordes. Introduce en el primer recipiente un cubo de madera de $10[cm]$ de arista y densidad $0.8[gr/cm^3]$. ¿Qué relación P_1/P_2 obtendrá entre los pesos de los dos platillos?



- a) Aproximadamente 0.75
 b) 1
 c) Aproximadamente 1.33
 d) 2
 e) Ninguna de las anteriores
4. En uno de los platillos de una balanza hay un recipiente con aguay en el otro, un soporte del cual esta suspendida una carga. Los platillos de

la balanza están equilibrados (fig. a). Giramos el soporte de tal manera que la carga que de este cuelga resulte sumergida completamente en el agua. Evidentemente el equilibrio de la balanza se destruye, puesto que el platillo con el soporte resulta mas liviano que antes (fig. b). ¿Qué hay que agregar al patillo con el soporte para restablecer nuevamente el equilibrio de la balanza? Explique su respuesta.

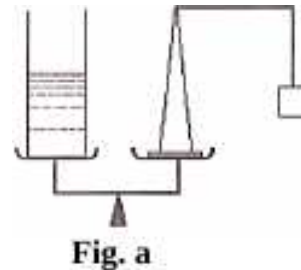


Fig. a

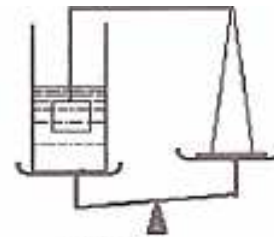
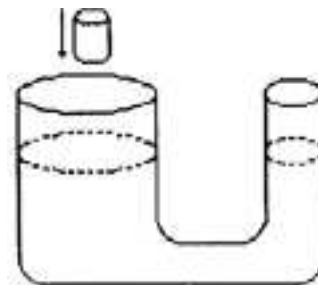


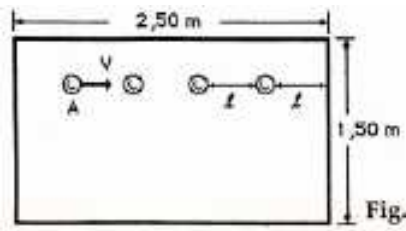
Fig. b

PARTE PRÁCTICA:(60%). Cada pregunta vale 20%:

1. En dos recipientes comunicados de diámetros $4[cm]$ y $3[cm]$ se vierte agua. ¿Cuánto aumenta el nivel de agua si se coloca un cilindro de madera con diámetro de $1[cm]$ y altura $25[cm]$ en el primer recipiente? La densidad de la madera es $2[gr/cm^3]$.



2. Se tienen cuatro bolas de billar situadas a lo largo de una recta paralela a una de las bandas situadas a la distancia l una de la otra. A la bola A se le comunica una velocidad de $50[cm/s]$. Hallar el tiempo mínimo después del cual las bolas vuelven a pasar por sus posiciones iniciales y explique su solución. Considere lo choques absolutamente elásticos.

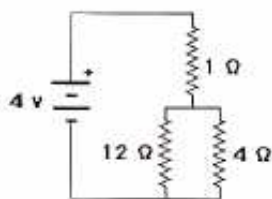


3. En una balanza electrónica (precisión 0,1 g) se encuentra un vaso de precipitados de 25 cm de altura y 10 cm de diámetro interior, con agua. El agua en el vaso llega a una altura de 20 cm sobre el fondo y la balanza marca 1800,0 g. Con ayuda de un hilo se introduce verticalmente en el vaso un cilindro de aluminio (densidad $2,7 \text{ g/cm}^3$) de 10 cm de longitud y 5 cm de diámetro, hasta depositarlo (verticalmente) en el fondo del vaso. Representa gráficamente en función a la distancia desde la base inferior del cilindro al fondo del vaso, la masa indicada por la balanza a medida que se va introduciendo lentamente el cilindro en el agua. (Densidad del agua = 1 g/cm^3 . Se desprecia el efecto del hilo y los efectos de tensión superficial.)

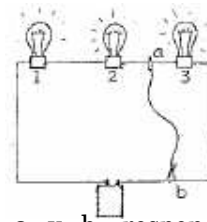
6^{to} DE SECUNDARIA

PARTE TEÓRICA: [45%]

1. Una resistencia de 1 ohmio, una de 4 ohmios y otra de 12 ohmios, hechas del mismo material hansiendo conectados a una batería de 4 voltios como se muestra en la figura. Todas las resistencias tienen la misma capacidad de desprender calor. ¿Cuál resistencia desprende más calor? La resistencia de 12 ohmios.[10%]



- La resistencia de 4 ohmios.
 - La resistencia de 1 ohmio.
 - La resistencia de 12 ohmios y la de 4 ohmios alcanzan la misma temperatura.
 - Las tres resistencias alcanzan la misma temperatura
2. ¿Por qué se hace necesario especificar que las cargas son puntuales? ¿Hay cargas puntuales en la naturaleza? ¿Qué interpretación se le da?[10%]
3. El simple circuito en serie consiste de tres lámparas idénticas energizadas por una batería. Cuando un cable se conecta entre



los puntos a y b, responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué pasa con la intensidad de la lámpara 3?[5%]
- ¿La corriente en el circuito aumenta, disminuye o permanece igual?[5%]
- ¿Qué pasa con el brillo de las lámparas 1 y 2?[5%]
- ¿La caída de voltaje entre las lámparas 1 y 2 aumenta, disminuye o permanece igual?[5%]
- ¿La potencia disipada por el circuito aumenta, disminuye o permanece igual?[5%]

PARTE PRÁCTICA: [55%]

1. Una carga de $30\mu\text{C}$ se encuentra fija en el origen de coordenadas. Otra carga de $10\mu\text{C}$ y masa 10g se coloca, estando inicialmente en reposo, a 3m de la anterior. ¿Qué velocidad tendrá cuando se halle a 10m del origen? ¿Con qué velocidad llegará al infinito?[20%]

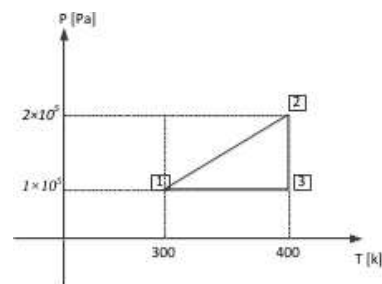
Dato: $k = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$

2. Dos esferas de 25g de masa cada una poseen idéntica carga eléctrica y cuelgan de sendos hilos inextensibles de masa despreciable y de 80cm de longitud, suspendidos del mismo punto. Cada uno de los hilos forma idéntico ángulo de 45° con la vertical. Calcula la carga de cada esfera y la tensión de los hilos.[20%]

Dato: $k = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$

3. En el diagrama P vs.T (Presión - Temperatura) se representa el proceso cerrado que realiza cierta masa de oxígeno (considere al oxígeno como un gas ideal). Se sabe que el volumen máximo que ocupa el gas en este proceso es $V_{\text{max}} = 16,4\text{m}^3$. Determinar la masa del gas y su volumen en el punto 1. Los valores de T_1 , T_2 , P_1 y P_2 se indican en la figura.[15%]

(la masa del gas es de 16g)



3^{ra} ETAPA
8^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE
ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

6^{to} DE PRIMARIA

- 1.Cuál de las siguientes estrellas está más próxima a nosotros.
 - a) Alfa Centauro A
 - b) Sirius
 - c) próxima Centauro
 - d) Vega
2. Copérnico que año planteó la teoría Heliocéntrica
 - a) 1475
 - b) 1500
 - c) 1543
 - d) 1600
3. El año en Marte cuantos días terrestres tiene
 - a) 365 días
 - b) 687 días
 - c) 400 días
 - d) 300 días
 - e) 800 días
4. Cuanto es el periodo de la luna alrededor de la Tierra
 - a) 26 días
 - b) 700 horas
 - c) 40320 minutos
 - d) 580 horas
 - e) 14 días
5. Distancia de la Tierra al Sol es conocida como
 - a) 1 parsec
 - b) año luz
 - c) 1 unidad astronómica
6. Planetas visibles a simple vista son (puede seleccionar más de uno)
 - a) Júpiter
 - b) Mercurio
 - c) Urano
 - d) Venus
 - e) la Luna
 - f) Neptuno
 - g) Marte

7. Cuál de los planetas no tienen satélites
 - a) Mercurio
 - b) Venus
 - c) Marte
 - d) Urano
 - e) Neptuno
8. Las mareas se producen por:
 - a) gravedad de la tierra
 - b) rotación de la tierra sobre su propio eje
 - c) gravedad que ejerce la luna durante su traslación
 - d) gravedad de un cometa
 - e) gravedad del Sol
9. La Teoría Heliocéntrica pertenece a
 - a) Tolomeo
 - b) Kepler
 - c) Copérnico
 - d) Aristóteles
 - e) Newton
10. Realice un gráfico que nos muestre como se produce un eclipse total de Luna

1^{ro} DE SECUNDARIA

1. La teoría que planteó el Astrónomo Nicolás Copérnico fue:
 - a) La Geocéntrica
 - b) Big Bang
 - c) Heliocéntrica
 - d) Gravitación Universal
2. Quien observó por primera vez los cráteres lunares con un telescopio:
 - a) Newton
 - b) Copérnico
 - c) Galileo
 - d) Hubble
3. La distancia de la Tierra a la Luna es aproximadamente:
 - a) 1 Unidad Astronómica
 - b) 1 parsec
 - c) 300000 Km
 - d) 1 ano luz
 - e) 100000 Km

4. Respecto a nuestro Sistema Solar, se puede afirmar que:
 - a) El Sol concentra más del 95% de la masa total
 - b) Es el más antiguo de nuestra galaxia
 - c) Posee al planeta más grande descubierto a la fecha
 - d) Ocupa aproximadamente el 1% del volumen de la Vía Láctea
 5. La razón por la cual algunos eclipses son totales, en cambio otros son anulares, es:
 - a) Refracción de la luz en la atmósfera
 - b) En los anulares el Sol, La Luna y La Tierra no están perfectamente alineados
 - c) La variación en las distancias Sol-Tierra y Tierra-Luna debido a que las órbitas no son circulares
 - d) Los eclipses totales ocurren de noche y los anulares de día
 - 6.Cuál es la velocidad de movimiento de la Tierra al rededor del Sol, suponiendo que esta se mueve uniformemente por un círculo de radio de 149.600.000 Km con un periodo orbital igual a un año
 - a) 30 Km/h
 - b) 55 Km/s
 - c) 30 Km/s
 - d) 65 Km/h
 - e) ninguno de los anteriores
 7. Cuánto tiempo tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra
 - a) 1 min
 - b) 10 min
 - c) 8 min
 - d) 8 seg
 8. Nuestra galaxia es de tipo:
 - a) Elíptica
 - b) Irregular
 - c) Espiral
 - d) Peculiar
 9. De los planetas visibles a simple vista, cuáles son los más brillantes:
 - a) Mercurio
 - b) Marte
 - c) Venus
 - d) Júpiter
 - e) Saturno
 10. Lo más lejos que han llegado naves fabricadas por humanos es:
 - a) Hasta La Luna
 - b) Hasta Marte
 - c) Hasta Saturno
 - d) Hasta afuera del Sistema Solar
 - e) Hasta Alfa Centauro, el Sistema Estelar más cercano al nuestro
- 2^{do} DE SECUNDARIA**
1. Cuál de los planetas debido a su densidad flotaría en el agua:
 - a) Marte
 - b) Mercurio
 - c) Saturno
 - d) Júpiter
 - e) Venus
 2. Cuál de los planetas no pueden ser vistos a simple vista a media noche (puede seleccionar más de uno):
 - a) Saturno
 - b) Venus
 - c) Júpiter
 - d) Mercurio
 - e) Marte
 3. Titán y Encelado son satélites de:
 - a) Marte
 - b) Júpiter
 - c) Saturno
 - d) Neptuno
 4. Indique dos estrellas brillantes visibles a simple vista en estas noches sobre nuestro cielo:
 - a) Albedarón
 - b) Rigel
 - c) Arturo
 - d) Antares
 - e) Polar
 5. La Luz del Sol cuánto tiempo demora en llegar a nuestra superficie:
 - a) Una milésima de segundo
 - b) 1/2 segundo
 - c) 480 segundos
 - d) 3/4 de hora
 - e) 7 minutos

6. A simple vista en noche despejada sin Luna aproximadamente cuántas estrellas podemos ver:
 - a) 2000
 - b) 5000
 - c) 6000
 - d) 8000
 - e) 10000
7. Magnitud estelar se refiere a:
 - a) Color de la estrella
 - b) Temperatura de la estrella
 - c) Brillo Estelar
8. Un “minuto de luz” corresponde a:
 - a) Aproximadamente 18 millones de Km
 - b) Aproximadamente 300.000 Km
 - c) Aproximadamente 5000 Km
 - d) 60 Hz
9. Para explicar las estaciones del año.Cuál de los siguientes elementos es relevante:
 - a) El movimiento de la Tierra sobre su propio eje
 - b) La inclinación del eje de rotación de la Tierra con respecto a su plano orbital
 - c) El achatamiento de la Tierra, debido a su rotación
10. La nave cósmica Cassini esta fotografiando el planeta Saturno que se encuentra a 28,46 Unidades Astronómicas, en que tiempo esa información llega a la Tierra.
3. Sirius (Can Mayor) es una estrella que se caracteriza por ser:
 - a) La más grande de la galaxia
 - b) La más brillante en el cielo nocturno
 - c) La más densa de la galaxia
 - d) La más cercana al Sol
 - e) Ninguna de las anteriores
4. En telescopios con montura ecuatorial que coordenadas se utilizan.
 - a) Ascensión Recta y Declinación
 - b) Altura y Acimut
 - c) Distancia y Brillo
 - d) Todas las anteriores
 - e) Ninguna de las anteriores
5. Cuál es la fecha aproximada cuando el camino del Sol a lo largo de la eclíptica cruza el ecuador terrestre moviéndose hacia el sur
 - a) 3 de Enero
 - b) 21 de Marzo
 - c) 21 de Junio
 - d) 22 de Septiembre
6. Cada noche la primera estrella visible se encuentra en el mismo lugar del cielo
 - a) Verdadero
 - b) Falso
7. Cuáles de los siguientes objetos estelares no pertenecen a nuestro Sistema Solar
 - a) Cometa
 - b) Galaxia
 - c) Asteroide
 - d) Pulsar
 - e) Cuásar
8. Cuál de las siguientes estrellas es la más brillante en el hemisferio norte:
 - a) Arturo
 - b) Polar
 - c) Sirius
 - d) Vega
 - e) Capella
9. Bolivia se encuentra a 60° oeste del meridiano cero (Greenwich), cuál es su uso horario
 - a) 2 horas
 - b) +4 horas
 - c) 4 horas
 - d) -4 horas
 - e) 6 horas

3^{ro} DE SECUNDARIA

1. Las “estrellas fugaces” son:
 - a) Partículas de polvo y hielo, o rocas que se encuentran en el espacio y que son interceptadas por la órbita terrestre
 - b) Restos de cometas o de la formación del Sistema Solar
 - c) Objetos que en ocasiones alcanzan la superficie de la Tierra debido a que no se desintegran por completo en la atmósfera
 - d) Todas las anteriores
 - e) Ninguna alternativa es correcta
2. Un año luz corresponde a:
 - a) La distancia entre la Tierra y el SOL
 - b) 365 días
 - c) La distancia que recorre la luz durante 365 días
 - d) 300000 [Km/s]
 - e) La distancia al centro de la Tierra

10. El 23 de febrero de 1987 en la Gran Nube de Magallanes situada a 55000 parsecs de nosotros se observó una supernova, hace cuántos años que explotó la estrella?

4^{to} DE SECUNDARIA

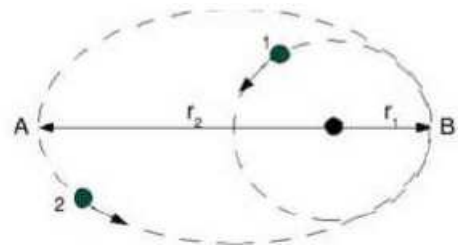
- 1.Cuál es la estrella más brillante del cielo nocturno
2. La Galaxia Andrómeda es parte de nuestra Galaxia
 - a) Si
 - b) No
3. Que color tienen las estrellas más calientes
 - a) Amarillo
 - b) Rojo
 - c) Azul
 - d) Naranja
- 4.Cuál es la Galaxia visible a simple vista en el hemisferio norte sin tomar en cuenta la Vía Láctea
 - a) Orión
 - b) Magallanes
 - c) Andrómeda
 - d) M 81
5. La estrella Alpha Centauro se encuentra a 4.3 Años Luz. A cuánto equivale eso en parsecs
 - a) 1.8
 - b) 1.3
 - c) 2
 - d) 5
 - e) 4.3
6. La distancia del Sol al centro de la Vía Láctea es aproximadamente
 - a) 4 años luz
 - b) 65 años luz
 - c) 350 años luz
 - d) 27 mil años luz
 - e) 20 millones de años luz
7. Sigue un cometa periódico exactamente la misma órbita en sus regresos sucesivos al Sol
 - a) Si
 - b) No
8. 110 objetos estelares componen el catálogo
 - a) Yale
 - b) SAO
 - c) Messier
 - d) NGC
 - e) Bayer

9. El Sol gira al rededor del centro de la galaxia situada a 300000 años luz en unos 200 millones de años. Los científicos han demostrado que ese movimiento depende tan solo de la masa de la galaxia más cercana al centro del propio Sol. Calcular esa masa galáctica.

5^{to} DE SECUNDARIA

- 1.Cuál de los telescopios es el más adecuado para observaciones y búsqueda de cometas
 - a) D=10 cm; F=120 cm
 - b) D=10 cm; F=50 cm
 - c) D=5 cm; F=20 cm
2. En galaxias espirales o de disco, hay fuerte evidencia para la existencia de materia oscura, basada en que:
 - a) Todas las estrellas se van moviendo hacia el centro
 - b) No es posible ver todas las estrellas, porque su luz es absorbida por la materia oscura
 - c) La velocidad orbital de las estrellas en torno al centro de la galaxia es demasiado alta para ser explicable sólo por la atracción por parte de las otras estrellas
 - d) No hay muchas estrellas
 - e) Se observa un hoyo negro supermasivo en su entorno y muchos otros menores distribuidos en los brazos espirales
3. Los astrónomos intentan encontrar objetos cada vez más lejanos.Cuál es la principal motivación científica para esto?
 - a) Ver si en alguna parte se acaba el Universo
 - b) Ver si el Universo es cerrado y si podemos vernos a nosotros mismos a lo lejos
 - c) Estudiar el pasado de la evolución cósmica
 - d) Encontrar el lugar donde ocurrió el Big Bang
 - e) Ver si en alguna otra parte hay vida
4. El enunciado de que todos los planetas se desplazan al rededor del Sol describiendo órbitas eclípticas y el Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse, pertenece a:
 - a) Leyes de Newton
 - b) Leyes de Murphy
 - c) Leyes de Kepler

5. Las ondas de radio:
 - a) Se propagan por cualquier medio, a la velocidad del sonido
 - b) No se propagan por el vacío
 - c) Se propagan por el vacío, a la velocidad de la luz
 - d) Existen sólo gracias a la tecnología creada por el hombre
 - e) Son emitidas por objetos astronómicos particularmente calientes
6. Se llama satélite geoestacionario a:
 - a) La Luna, nuestro satélite natural
 - b) Deimos, uno de los satélites de Marte
 - c) Satélites que se mantienen fijos sobre algún punto de la Tierra, rotando con ésta
 - d) Un grupo de sondas que orbitan al rededor de las "lunas" de Júpiter
 - e) Un tipo de basura espacial
7. Según la 2ª Ley de Kepler, al orbitar un planeta en torno al Sol, la línea que los une barre áreas iguales en tiempos iguales. En este contexto, cuál de las siguientes afirmaciones NO es correcta:
 - a) El planeta se mueve más rápido mientras más rápido se mueve más cerca del Sol
 - b) El momento angular del planeta es constante
 - c) La atracción del Sol acelera al planeta mientras se va acelerando y lo desacelera a medida que se aleja
 - d) Dada la órbita y el periodo orbital del planeta, podemos calcular su velocidad en cualquier punto de la órbita
 - e) El movimiento angular del planeta es mayor mientras más cerca esté el Sol
8. Cuando decimos que el Universo se expande, queremos decir que:
 - a) Los átomos y todos los objetos compuestos por ellos se van haciendo más grandes
 - b) Las galaxias lejanas se alejan unas de otras, sin cambiar su tamaño en forma apreciable
 - c) Todos los objetos se alejan de un punto bien definido, donde ocurrió el Big Bang
 - d) Hay cada vez más objetos astronómicos
 - e) Hay cada vez más materia oscura
9. Dos planetas de masas iguales orbitan al rededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 describe una órbita circular de radio $r_1 = 10^8 \text{ Km}$ con un periodo de rotación $T_1 = 2$ años, mientras que el planeta 2 describe una órbita elíptica cuya distancia más próxima es $r_1 = 10^8 \text{ Km}$ y la más alejada es $r_2 = 1.8 \times 10^8 \text{ Km}$ y como muestra la figura. Cuál es el periodo de rotación del planeta 2

6^{to} DE SECUNDARIA

1. En la observación de una estrella, el efecto Doppler presentado por el espectro electromagnético obtenido, puede permitir a un astrónomo:
 - a) Obtener información de la composición química
 - b) Calcular la masa
 - c) Estimar la velocidad tangencial respecto a nuestra línea de visión
 - d) Conocer el gradiente de temperatura
 - e) Calcular su luminosidad
2. Las estrellas nos envían no solo el espectro visible sino además:
 - a) Radiación ultravioleta
 - b) Rayos infrarrojos
 - c) Electrones y positrones
 - d) Todas las anteriores
 - e) Ninguna de las anteriores
3. Una estrella muy luminosa de color blanco azulado con temperatura superficial entre 10000 y 30000 K es de tipo espectral:
 - a) G
 - b) O
 - c) B
 - d) A
 - e) K
4. La galaxia más grande de nuestro Grupo Local de galaxias es:
 - a) Galaxia Andrómeda
 - b) Nuestra galaxia, la Vía Láctea
 - c) Nube Grande de Magallanes
 - d) Una de las galaxias satélites de la Vía Láctea
 - e) Nube Pequeña de Magallanes
5. Nuestro Sol se encuentra en uno de los cuatro brazos de la galaxia denominado:
 - a) brazo de Carina
 - b) brazo de Sagitario
 - c) brazo de Perseo
 - d) brazo de Orión
 - e) ninguna de las anteriores

6. Los telescopios ópticos a veces se ubican en satélites para:
 - a) No dañar la salud de la población circundante
 - b) No dañar el ecosistema terrestre
 - c) Poder detectar pruebas nucleares de países enemigos
 - d) Poder detectar radiación energética del espacio, que no penetra la atmósfera terrestre
 - e) Impedir que las imágenes se distorcionen por efectos de la turbulencia atmosférica
7. El espectro de una estrella NO sirve para determinar directamente:
 - a) Su temperatura superficial
 - b) Su temperatura interna
 - c) Los elementos químicos presentes en su superficie
 - d) Su rotación
 - e) Su velocidad radial con respecto a nosotros
8. La astronomía de rayos X permite estudiar, especialmente:
 - a) Objetos muy fríos, como las nubes donde se forman estrellas
 - b) El interior de las estrellas
 - c) El Big Bang
 - d) Procesos de alta energía y regiones de alta temperatura
 - e) Ninguna de las anteriores
9. El Sol tiene una masa M_S de $1,989 \times 10^{33}g$ y un radio R_S de $6,96 \times 10^{10}cm$ y emite aproximadamente como un cuerpo negro a $T = 5700K$. ¿Qué energía es emitida cada año en forma de radiación electromagnética? ¿Qué fracción de la masa solar representa esta energía?
Teniendo en cuenta la ley de Stefan-Boltzmann, calcule la energía emitida por el Sol en un segundo y por unidad de superficie.

SOLUCIONES 3^{ra} ETAPA

18^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA FÍSICA

6^{to} DE PRIMARIA

PARTE TEÓRICA

- V
 - V
 - F
 - V
 - F
 - F
- (Figura)
- el proceso físico que consiste en el cambio de estado de la materia, del estado sólido al estado líquido, por la acción del calor
 - Cambio de estado de la materia que se encuentra en forma gaseosa a forma líquida. Es el proceso inverso a la vaporización
 - Es un proceso físico que consiste en el paso lento y gradual de un estado líquido hacia un estado gaseoso, tras haber adquirido suficiente energía para vencer la tensión superficial
 - es un proceso físico que consiste en el cambio de estado de la materia de líquido a sólido producido por una disminución en la temperatura o por una compresión de este material
 - es uno de los cuatro estados de agregación de la materia (siendo los otros gas, líquido, Plasma y el Bose-Einstein), se caracteriza porque opone resistencia a cambios de forma y de volumen. Sus partículas se encuentran juntas y correctamente ordenadas. Las moléculas de un sólido tienen una gran cohesión y adoptan formas bien definidas.
 - Es un estado de agregación de la materia en forma de fluido altamente incompresible (lo que significa que su volumen es, muy aproximadamente, constante en un rango grande de presión).
- Un gas a una temperatura T_0 , luego aumenta la temperatura a un T mayor a T_0 por el cambio de temperatura aumenta la energía interna. Considere un vaso de agua con hielo después de un tiempo el hielo se derrite y la temperatura del agua habrá disminuido por lo que la energía interna del agua habrá disminuido.
 - Plancha, el televisor.
 - Caldera de vapor, Estufa, horno a gas.
 - Horno de microondas, un laser utilizado para cortar un metal.
 - Un reactor nuclear, la energía liberada en un proceso de fisión nuclear.

PARTE PRÁCTICA

- C, puesto que el coche de la figura por cada metro pierde 1450 unidades de energía, recorrerá $50000/1450$ metros, es decir 34,48 m y se detendrá en el tramo C.
- b) $1,1 \times 10^9$

1^{ro} DE SECUNDARIA

PARTE TEÓRICA

- c)
- c)
- a)
- 3
 - 2
 - 5
 - 1
 - 5

PARTE PRÁCTICA

- Si t_1 es el tiempo que tarda el sonido para recorrer la distancia L por el agua, el tiempo de viaje del sonido por el aire será igual a $(t_1 + 5.8)$ segundos; así

$$L = 340 \left(\frac{m}{s} \right) (t_1 + 5,8[s])$$

$$L = 1500 \left[\frac{m}{s} \right]$$

Si de la segunda ecuación despejamos t_1 y lo reemplazamos en la primera ecuación, se obtiene:

$$L = 340 \left(\frac{L}{1500} + 5.8 \right)$$

Si agrupamos L y factorizando se tiene que:

$$L \left(1 - \frac{34}{150} \right) = 34 \times 58 = 2550[m]$$

- La potencia utilizable de la radiación solar que incide en la región es:

$$P.U. = 800 \left[\frac{W}{m^2} \right] \times 0.15 = 120 \left[\frac{W}{m^2} \right],$$

para generar 1 [GW] se requiere un área de $833.333.3m^2$ aproximadamente, si la celda fuera cuadrada cada uno de sus lados mediría $2886.8m$, el exagerado tamaño del dispositivo es un gran inconveniente técnico. Si cada cm^2 cuesta \$150, la celda tendría un costo de 1249999950000, lo cual indica que no es un negocio rentable.

3. Lo importante es que se conserva la masa. Pero como es obvio que la densidad de la plastilina no cambia también se conserva el volumen. Por lo tanto el volumen del cilindro inicial debe ser igual al del cilindro final. Es decir:

$$\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \times D = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times (2D)$$

En donde D es igual a 10 cm y d es el diámetro pedido. Fácilmente de esta ecuación se halla que:

$$d = \sqrt{\frac{D^2}{2}} = \sqrt{50} = 7.01[cm]$$

2^{do} DE SECUNDARIA

PARTE TEÓRICA

1. Durante el día la ropa, especialmente la sintética, se carga eléctricamente debido a la constante frotación de la ropa, consigo mismo, con el cuerpo y con el aire.
2. Es un cuerpo que ha ganado o perdido carga eléctrica. La carga eléctrica puede ser positiva o negativa. Las partículas que forman el átomo son los Protones con carga eléctrica positiva, los Neutrones con carga eléctrica nula o Cero y los electrones con carga eléctrica negativa, los protones y los neutrones se disponen dentro del núcleo atómico y forman las partículas Infraatómicas o Subatómicas y los electrones se disponen en la periferia del núcleo atómica girando alrededor de él en órbitas, capas electrónicas, en niveles cuánticos principales de energía y en subniveles de energía, los protones, neutrones y electrones forman las partículas elementales o fundamentales del átomo.

3. En Coulombs

4. c)

5. (F)

PARTE PRÁCTICA

1. El auto se aleja del camión con una velocidad relativa de 20 [km/h], por lo tanto en tres horas le tomara una ventaja de 60 [km].
2. Si t es el tiempo total de la jornada la distancia que debe recorrer el viajero es de $(60km/h \times t)$. Durante la primera mitad de la jornada recorre una longitud igual a $40km/h \times t/2$, por consiguiente la velocidad V que debe tener durante el resto de jornada debe ser tal que $60km/h \times t = 40km/h \times t/2 + V \times t/2$ de donde se halla fácilmente que V es igual a 80km/h.

3. A una distancia de 250 [km].

3^{ro} DE SECUNDARIA

PARTE TEÓRICA

1. A

2. b)

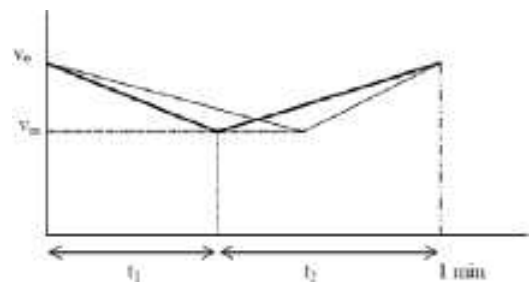
3. c)

PARTE PRÁCTICA

1. Entre menos tiempo tarde en recibirse el eco, menos profundo estará el lecho marino. Simplemente teniendo esto en cuenta se deduce que la gráfica es la marcada con la letra B.

2. t = 20 min.

3. Este problema es mas fácil resolverlo gráficamente que analíticamente.



El valor numérico del área de los dos trapezoides vale 1 km

$$1 = \frac{V_0 + V_m}{2} t_1 + \frac{V_0 + V_m}{2} t_2 = \left(\frac{V_0 + V_m}{2}\right) (t_1 + t_2)$$

$$V_m = \left(\frac{2}{t_1 + t_2}\right) - V_0 = \frac{2}{\frac{1}{90}} - 90 = 30[Km/h]$$

4^{to} DE SECUNDARIA

PARTE TEÓRICA

1. d)

2. c)

3. a)

4. d)

PARTE PRÁCTICA

1.

$$v = \lambda \times f = 0.45 \times \frac{80}{60} = 0.6[m/s]$$

2. Como la velocidad del murciélago sera pequena frente a la velocidad del sonido, se puede calcular de forma aproximada, según:

$$\frac{f_{obs} - f_0}{f_0} = -\frac{v}{d}$$

Donde f_{obs} es la frecuencia observada por el perro, f_0 la que emitió el murciélago, v la velocidad del murciélago y c la velocidad del sonido. Así,

$$\frac{58000 - 60000}{60000} = -\frac{v}{340}$$

$$v = 11.3[m/s]$$

3. Las ecuaciones parametricas del movimiento del proyectil son:

$$x = v \cos \alpha t$$

$$y = v \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

Las ecuaciones de las velocidades sobre los ejes coordenados son:

$$v_x = v \cos \alpha$$

$$v_y = v \sin \alpha - g t$$

En el punto más alto de la trayectoria la componente v_y de la velocidad es nula. El tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima es:

$$0 = v \sin \alpha - g t_h$$

$$t_h = \frac{v \sin \alpha}{g}$$

Y el valor de h:

$$h = v \sin \alpha t_h - \frac{1}{2} g t_h^2 =$$

$$= v \sin \alpha \frac{v \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

La velocidad en el punto más alto de la trayectoria:

$$v_1 = v_x = v \cos \alpha$$

Cuando el proyectil se encuentra a una altura $h/2$ la velocidad v_2 tiene dos componentes v_{2x} y v_{2y} , cuyos valores son respectivamente

$$v_{2x} = v \cos \alpha$$

$$v_{2y} = v \sin \alpha - g t_{h/2}$$

Para averiguar la componente v_{2y} necesitamos saber el tiempo que el proyectil emplea en alcanzar la altura $h/2$, para ello sustituimos en una de las ecuaciones paramétricas.

$$\frac{h}{2} = v \sin \alpha t_{h/2} - \frac{1}{2} g t_{h/2}^2$$

$$t_{h/2}^2 - \frac{2 v \sin \alpha t_{h/2}}{g} + \frac{h}{g} = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$t_{h/2}^2 = \frac{\frac{2 v \sin \alpha}{g} - \sqrt{\frac{4 v^2 \sin^2 \alpha}{g^2} - \frac{4 h}{g}}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{2 v \sin \alpha}{g} - \sqrt{\frac{4 v^2 \sin^2 \alpha}{g^2} - \frac{4 \frac{1}{2} v^2 \sin^2 \alpha}{g}}}{2}$$

$$t_{h/2}^2 = \frac{\frac{2 v \sin \alpha}{g} - \frac{v \sin \alpha}{g} \sqrt{2}}{2} = \frac{v \sin \alpha}{g} \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)$$

Se ha escogido de las dos soluciones la que corresponde al tiempo menor, que es cuando la altura $h/2$ la alcanza el proyectil antes de llegar a la altura h . La otra solución es cuando el proyectil llega a la altura $h/2$ después de alcanzar la máxima altura h . Sustituimos el tiempo en la expresión de la velocidad v_{2y}

$$v_{2y} = v \sin \alpha - g \frac{v \sin \alpha}{g} \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= v \sin \alpha \left(1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) = v \sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{v^2 \cos^2 \alpha + \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2}}$$

De acuerdo con el enunciado del problema

$$v_1 = \sqrt{\frac{6}{7}} v_2$$

$$v^2 \cos^2 \alpha = \frac{6}{7} \left(v^2 \cos^2 \alpha + \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2} \right)$$

$$v^2 \cos^2 \alpha = 3 v^2 \sin^2 \alpha$$

$$1 - \sin^2 \alpha = 3 \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

5^{to} DE SECUNDARIA

PARTE TEÓRICA

1. b)

Un modo intuitivo de resolverlo es este: el trabajo se almacena como energía potencial del tablón (estamos despreciando efectos de rozamiento). Esto implica que el trabajo necesario para moverlo entre dos posiciones cualesquiera es independiente del camino seguido y eso será exactamente T.

2. d)

Consideremos la situación límite en la que la esfera negra está totalmente abajo y la blanca totalmente arriba.

E inicial=E potencial de la esfera negra

E final=E potencial de la blanca + E potencial del tablón

Pero el centro de masa del tablón sube una pequeña altura que puede calcularse geoméricamente (esto es consecuencia de que este apoyado a 1/3 de su extremo). Así que E potencial de la esfera negra < E potencial de la esfera blanca, como sus masas son iguales, la altura a la que sube la blanca es menor que la altura inicial de la esfera negra.

3. b)

De acuerdo a la ley de Arquímedes tendremos que el cubo desalojara una cantidad de agua cuyo peso será exactamente igual al peso del cubo.

4. De acuerdo a la tercera ley de Newton, según la fuerza con la cual el agua del recipiente actúa sobre la carga, con igual fuerza pero en sentido contrario actuara la carga sobre el agua. Por lo tanto, al disminuir el peso del platillo con el soporte, simultáneamente aumentara el peso del platillo con el recipiente. Por consiguiente, para establecer el equilibrio se necesita un peso igual a 2P.

PARTE PRÁCTICA

1. Datos:

Densidad de la madera $\rho_m = 2[g/cm^3]$

Densidad del agua $\rho_{H_2O} = 1[g/cm^3]$

Diámetro primer recipiente $\varnothing_1 = 4[cm]$

Diámetro segundo recipiente $\varnothing_2 = 3[cm]$

Diámetro cilindro madera $\varnothing_m = 1[cm]$

Altura cilindro madera $h_m = 25[cm]$

De acuerdo al Principio de Arquímedes, la masa del volumen desplazado por el agua será igual a la masa del cilindro de madera.

$$\rho_m = \frac{M_m}{V_m}$$

el volumen del cilindro de madera será

$$V_m = h_m \times \pi \times \frac{\varnothing_m^2}{2}$$

$$V_m = 25[cm] \times \pi \times \left(\frac{1[cm]}{2}\right)^2 = 19.63[cm^3]$$

El volumen del cilindro es iguala al volumen desplazado. Este volumen se reparte entre ambos recipientes. En los mismos, el nivel que sube el agua (H) será el mismo, por lo que el volumen total (V_T) será.

$$V_T = V_1 + V_2$$

$$V_T = H \times \pi \times \left(\frac{\varnothing_1}{2}\right)^2 + H \times \pi \times \left(\frac{\varnothing_2}{2}\right)^2$$

$$V_T = H \times \pi \times \left(\frac{\varnothing_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varnothing_2}{2}\right)^2$$

$$V_T = H \times \pi \times \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Entonces

$$H = \frac{V_T}{\pi \times ((2)^2 + (1.5)^2)}$$

$$H = \frac{19.63}{\pi \times 6.25}$$

$$H = \frac{19.63}{19.63} = 1$$

2. Las colisiones son completamente elasticas, por lo que todo el movimiento es transmitido a la siguiente bola, de manera instantanea, al igual que la última bola hacia la pared, y viceversa.

Como no se pierde energía ni en las colisiones ni por el rozamiento el tiempo entre cada colisión será

$$T = \frac{l}{V}$$

Dónde l es la distancia entre las bolas y V es la velocidad con la que se golpea la primera bola.

Entonces, para n bolas el tiempo en que la velocidad se transmite en un sentido será:

$$T_n = n \times \left(\frac{l}{v} \right)$$

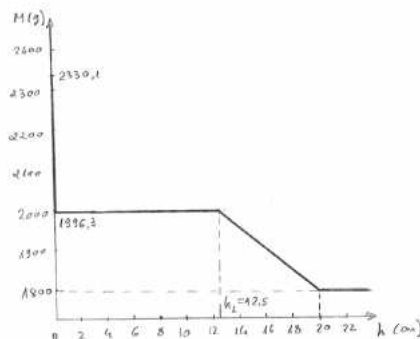
Del gráfico, sabemos que $l = 50[cm]$

$$T_n = 4 \times \left(\frac{50[cm]}{50[cm/s]} \right) = 4[s]$$

para la vuelta, y dado que las distancia son exactamente las mismas, el tiempo será exactamente el mismo, entonces, el tiempo total será

$$T_T = 2 \times T_n = 2 \times 4 = 8[s]$$

3. El comportamiento está dado por:



6^{to} DE SECUNDARIA

PARTE TEÓRICA

1. a)

El calor desprendido Q en la unidad de tiempo es igual a IU. Analizando el circuito vemos que el mayor valor para este producto se logra en la resistencia de 4 ohmios.

2. Para no confundir con una distribución de cargas. Si hay cargas puntuales en la naturaleza, son el protón y el electrón. Es un monopolo eléctrico.

3. a) se apaga

b) aumenta en el circuito

c) al aumentar la potencia, aumenta el brillo

d) disminuye

e) aumenta

PARTE PRÁCTICA

1.

$$E_{cin-inic} + E_{pot-inic} = E_{cin-final} + E_{pot-final}$$

$$0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d_{inic}} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d_{fin}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \left(\frac{1}{d_{inic}} - \frac{1}{d_{fin}} \right)}$$

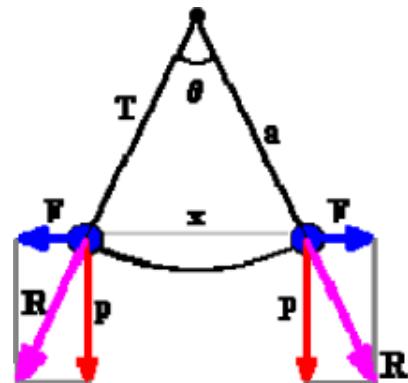
para: $d_{fin} = 10$; $v = 11.2(m/s)$

$d_{fin} \rightarrow infinito$; $v = 13.4(m/s)$

2. La fuerza F que separa las cargas se debe a la repulsión electrostática, pues ambas son del mismo signo.

$$F = k \times q^2 / x^2$$

$$x = 2 \times a \times \sin(\theta/2)$$



Si están en equilibrio, la suma de la fuerza electrostática y el peso debe tener la dirección de la cuerda:

$$\tan(\theta/2) = F/p$$

$$F = p \times \tan(\theta)$$

$$k \times \frac{q^2}{x^2} = m \times g \times \tan(\theta/2)$$

$$q^2 = m \times g \times x^2 \times \frac{\tan(\theta/2)}{k}$$

$$q = 2 \times a \times \sin(\theta/2) \left[m \times g \times \frac{\tan(\theta/2)}{k} \right]^{1/2}$$

$$q = 5.9 \times 10^{-6}[C]$$

$$F = 0.245[N]$$

$$T = R = \frac{p}{\cos(\theta/2)} = 0.35[N]$$

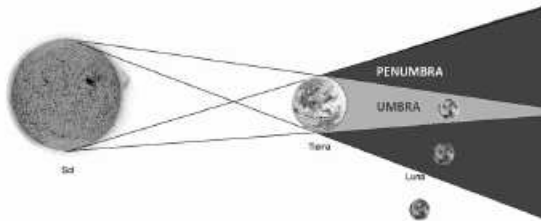
3. El volumen del gas es proporcional a la razón T/P. Esta magnitud es máxima en el punto 3. Para el punto 1 se tiene que:

$$V_1 = V_{max} \frac{T_1}{T_2} = 12.3 m^3$$

Por la ecuación del estado gaseoso se halla que la masa del gas es $m=16 g$.

SOLUCIONES 3^{ra} ETAPA8^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE
ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA**6^{to} DE PRIMARIA**

1. c)
2. c)
3. b)
4. c)
5. c)
6. a) b) d) g)
7. a) b)
8. c)
9. c)
10. El gráfico es:

**1^{ro} DE SECUNDARIA**

1. c)
2. c)
3. c)
4. a)
5. c)
6. c)
7. c)
8. c)
9. c)
10. d)

2^{do} DE SECUNDARIA

1. c)
2. b) d)
3. c)
4. c) d)
5. c)

6. c)

7. c)

8. a)

9. b)

10.

$$28,46UA \times \frac{150 \times 10^6 Km}{1UA} = 4,27 \times 10^9 Km$$

$$x = v \times t \rightarrow t = \frac{x}{v} = \frac{4,27 \times 10^9 Km}{3 \times 10^5 Km/s} = 14.23 \times 10^3 s$$

3^{ro} DE SECUNDARIA

1. d)
2. c)
3. b)
4. a)
5. d)
6. b)
7. b) d) e)
8. d)
9. d)
10. 1[PC] = 3.26 [años Luz]

$$d = 55000 \times 3.26 = 179\,389.87 \text{ [años Luz]}$$

Un año luz es la distancia que recorre la Luz en un año, entonces el tiempo es: 179 389.87 años.

4^{to} DE SECUNDARIA

1. Sirius, del Can Mayor.

2. b)

3. c)

4. c)

5. b)

6. d)

7. b)

8. c)

9. Datos: Periodo : $T = 200 \times 10^6$ [años]

$$\text{distancia: } R = 30000[\text{años luz}] \times \frac{63239.71[AU]}{1[\text{año luz}]} = 1.9 \times 10^9[AU]$$

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2}$$

$$M_{Sol} = \frac{4\pi^2 (1.9 \times 10^9)^3}{(2 \times 10^8)^2} = 6.7 \times 10^{12} M_{Sol}$$

5^{to} DE SECUNDARIA

1. b)
2. c)
3. c)
4. c)
5. c)
6. c)
7. e)
8. b)

9. Datos:

Planeta 1 $r_1 = 10^8 [Km]$ $T_1 = 2$ años

Planeta 2 $r_1 = 10^8 [Km]$ $r_2 = 1.8 \times 10^8 [Km]$

calculamos el semieje mayor de la órbita del segundo planeta

$$a_2 = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{10^8 [Km] + 1.8 \times 10^8 [Km]}{2} = 1.4 \times 10^8 [Km]$$

ahora por la tercera ley de Kepler

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

$$\frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{a_1^3}$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{T_1^2 \times a_2^3}{a_1^3}}$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{2[años]^2 \times 1.4 \times 10^8 [km]^3}{1 \times 10^8 [km]^3}} = 3.31 [años]$$

6^{to} DE SECUNDARIA

1. a)
2. d)
3. c)
4. a)
5. d)
6. d)
7. b)
8. d)

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Dr. Diego Sanjinés Castedo

Email: sanjines@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Dr. Eduardo Palenque Vidaurre

Email: edyrui@yahoo.es

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos

Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

Misión

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica semestralmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

Instrucciones para los autores

Los trabajos enviados para su publicación deberán estar escritos preferentemente en castellano. Trabajos escritos en inglés podrán ser aceptados por el Comité Editorial y, pasado el proceso de aceptación, serán traducidos al castellano para su publicación en la RBF.

Los autores deberán enviar sus trabajos preferentemente en los formatos $\text{\LaTeX 2}_{\epsilon}$, MS Word, o sólo texto (con extensiones .tex, .doc y .txt, respectivamente), ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. Las figuras deberán tener una resolución razonable a fin de que puedan ser vistas con suficiente claridad por el lector.

Los artículos científicos serán revisados por el Comité Editorial y posteriormente por un par de árbitros anónimos quienes dan el veredicto sobre si el artículo es aceptado o no.

La comunicación de los autores con los árbitros se realiza únicamente a través del editor encargado del área.

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

Conflicto de interés: Los autores que envíen artículos para su publicación en la RBF admiten que no tienen conflicto de interés en relación a los trabajos realizados y presentados.