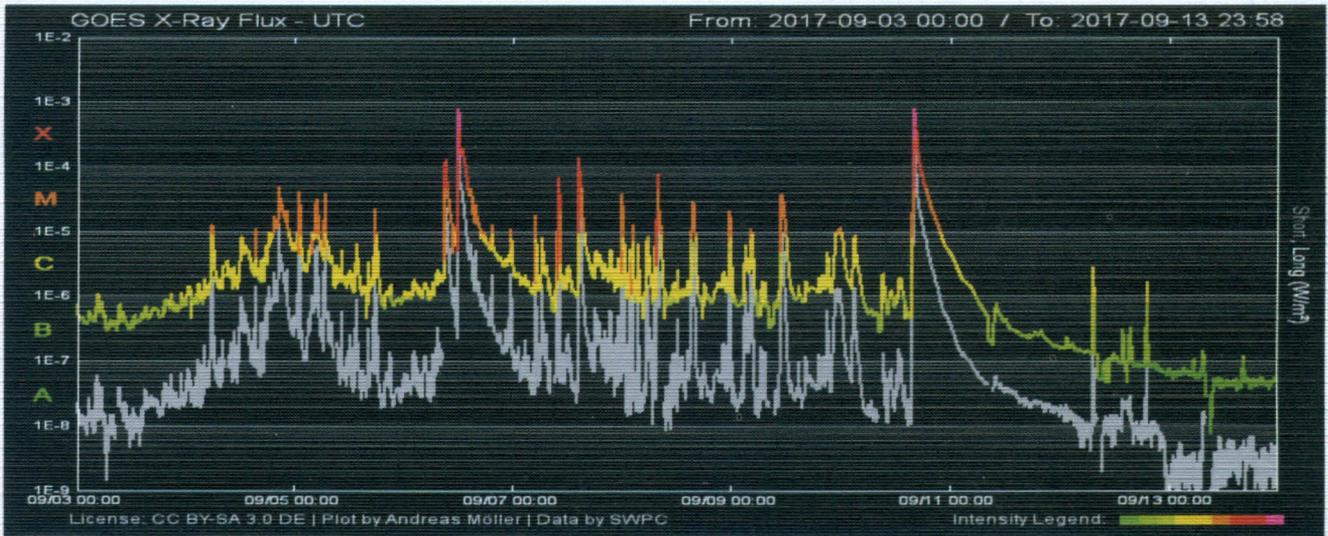


ISSN - 1562 - 3823

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 31

DICIEMBRE 2017 - LA PAZ - BOLIVIA



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

Ésta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Dr. Flavio Ghezzi Moris

Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos

Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

CONSEJO EDITORIAL

Dr. Oscar Antonio Rondón

Institute of Nuclear and Particle Physics

University of Virginia

McCormick Road, Charlottesville, VA 22901

804 924-6787, USA

Email: or@virginia.edu

Dr. Carlos Navia

Instituto de Física

Universidade Federal Fluminense

Av. Gen. Milton Tavares de Souza

24210-340, Niterói, RJ-Brasil

Email: gfcnoj@if.uff.br

Dr. Jason Alfredo Carlson Gallas

Departamento de Física

Universidade Federal da Paraíba

58051-970, João Pessoa

Brasil

Email: jgallas@fisica.ufpb.br

Dr. Nuno Miguel Melo Crokidakis Peregrino

Instituto de Física

Universidade Federal Fluminense

Av. Gen. Milton Tavares de Souza

24210-340, Niterói, RJ-Brasil

Email: nuno@if.uff.br

ISSN 1562-3823



Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
Y
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 31
DICIEMBRE DE 2017

Revista Boliviana de Física

ISSN 1562-3823

Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica

<http://www.scielo.org.bo>

<http://www.latindex.unam.mx>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

Diseño: A. Ticona

Dirección: Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.

Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

Portada: Registro del flujo de Rayos X solares obtenidos por el Satélite GOES de la NASA/SWPC., del 3 al 13 de septiembre de 2017, mostrando dos picos importantes.

Formato $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$. *Tipo de fuente utilizada:* newcentury

IMPRESO EN BOLIVIA — PRINTED IN BOLIVIA

CONTENIDO

EDITORIAL	<i>Editor</i>	1
A. ARTÍCULOS		
CARACTERIZACIÓN DE UN MODELO SOCIAL DISCRETO DE TOMA DE DECISIÓN BASADO EN REDES COMPLEJAS <i>Verónica Subieta-Frías & Gonzalo Marcelo Ramírez-Ávila</i>		3
FULGURACIONES SOLARES DE SEPTIEMBRE 2017 REGISTRADOS POR EL OBSERVATORIO GEOMAGNETICO DE VILLA REMEDIOS Y EL MONITOR DE NEUTRONES NM-64 DE CHACALTAYA COTEJADOS CON REGISTROS DE FLUJO DE RAYOS X SOLARES DEL SATELITE GOES <i>Ricaldi Y. E. L., Ticona P. R., Miranda L. P. & Quispe M. J.</i>		14
ESTUDIO TEÓRICO DE LA ACCIÓN DE RADIACIONES IONIZANTES EN LA DINÁMICA POBLACIONAL DE CÉLULAS CANCEROSAS <i>Gonzalo Marcelo Ramírez-Ávila</i>		25
B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES		
CALIBRACIÓN DE SOLMÁFOROS PARA SU INSTALACIÓN EN LA CIUDAD DE LA PAZ <i>René Gutierrez Colque</i>		35
E. HISTORIA		
TELEPORTACIÓN DE FOTONES <i>Gabriel Alejandro Aguilar & Michelle Balderrama</i>		41

EDITORIAL

Esta nueva entrega de la Revista Boliviana de Física (RBF) en su número 31 marca el final de 2017, año de importantes logros en lo que a investigación se refiere. Los diferentes grupos del Instituto de Investigaciones Físicas han tenido importantes logros, reflejados, en instalaciones con tecnología de punta, colaboraciones con importantes grupos mundiales, publicaciones en revistas internacionales, así como la formación de estudiantes de pre y posgrado que hacen sus primeras armas en la investigación con resultados sumamente importantes demostrando gran rigurosidad en sus trabajos.

En los últimos días, se han defendido tres tesis de maestría, todas ellas han valido calificaciones sobresalientes y a partir de ellas, se han generado resultados publicables tanto en la RBF como los debidos a [Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila(2012)] y [Subieta & Ramírez-Ávila(2017)], como en revistas internacionales. También destacamos que varios artículos de los nuevos posgraduados están en vías de publicación en la RBF.

También destacamos que después del evento internacional XV Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena que tuvo lugar recientemente en La Serena, Chile, La Paz ha sido elegida para organizar la XVI versión de este importante encuentro de científicos de todo el mundo y en particular de Latinoamérica trabajando en Fenómenos No Lineales. El nuevo evento está previsto para el mes de octubre de 2019 y será un gran desafío el albergar esta importante reunión. Por el momento se tiene un sitio web provisional alojado en: www.fiumsa.edu.bo/lawnp2019.

En este número de la RBF, se presentan tres artículos científicos sometidos a proceso de arbitraje internacional. Así, [Subieta & Ramírez-Ávila(2017)] presentan el análisis y la caracterización de un modelo social de formación de opinión, siendo las propiedades principales del modelo, el hecho de que las ecuaciones son discretas y los agentes son los nodos de una red compleja que puede presentar topologías diferentes. Un fenómeno muy interesante es reportado por [Ricaldi *et al.*(2017)] quienes con los datos obtenidos de las fulguraciones solares de septiembre de 2017 obtenidos en el observatorio geomagnético de Villa Remedios y en el laboratorio de física cósmica de Chacaltaya, cotejan los mismos con los registros de flujo de Rx solares del satélite GOES de la NASA, pudiendo así caracterizar los denominados *crochets* magnéticos. Finalmente, [Ramírez-Ávila(2017)] propone un modelo de población de células cancerosas, normales y efectoras basado en las ecuaciones logística y de Lotke-Volterra, al cual se le agregan términos ligados a la acción de radiaciones ionizantes, situación típica cuando se somete a un paciente a un tratamiento de radioterapia; el análisis de estabilidad lineal del modelo da lugar a la obtención de las regiones de estabilidad de acuerdo con los valores de los parámetros de control.

En la sección de contribuciones, [Gutiérrez R.(2017)] detalla la calibración de los denominados solmáforos a ser instalados en la ciudad de La Paz, los cuales permiten obtener medidas bastante exactas del índice UV, cuyo valor permite alertar y prevenir acerca de una exposición prolongada al sol. En la sección correspondiente a historia, [Aguilar & Balderrama(2017)], estudiantes excelentes de la Carrera de Física hacen una revisión detallada y amena de la paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen a través del fenómeno de teletransportación de fotones.

Esperamos que el contenido de este ejemplar de la RBF sea de su agrado y pueda motivar al lector en la profundización de los trabajos expuestos a través de estas páginas.

References

- [Aguilar & Balderrama(2017)] Aguilar G. A. & Balderrama M. 2017, Revista Boliviana de Física, **31**, 41.
- [Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila(2012)] Bustos-Espinoza R. O. E. & Ramírez-Ávila G. M. 2012, Revista Boliviana de Física, **22**, 1.
- [Ramírez-Ávila(2017)] Ramírez-Ávila G. M. 2017, Revista Boliviana de Física, **31**, 25.
- [Gutiérrez R.(2017)] Gutiérrez R. 2017, Revista Boliviana de Física, **31**, 35.
- [Subieta & Ramírez-Ávila(2017)] Subieta-Frías V. & Ramírez-Ávila G. M. 2017, Revista Boliviana de Física, **31**, 3.
- [Ricaldi *et al.*(2017)] Ricaldi-Yarvi E. L., Ticona-Peralta R. D., Miranda-Loza P. P. & Quispe-Mamani J. 2017, Revista Boliviana de Física, **31**, 14.

EDITORIAL

This new edition of the Revista Boliviana de Física (RBF), issue 31, marks the end of 2017, a year of important achievements for research in Bolivia. The different groups of the Institute of Physical Investigation (IIF) have had a fruitful year, including important accomplishments reflected in facilities with state of the art technology, collaborations with important world groups, publications in international journals, as well as, undergraduate and graduate training programs with students taking their first strides in research obtaining important results and demonstrating rigor in their work.

Recently, three Masters theses have been defended with excellent grades and have generated publishable results for the RBF and international journals, two of which, [Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila(2012)] and [Subieta & Ramírez-Ávila(2017)], are featured in this current issue. Also, several articles based on the research of new postgraduates are in the process of being published in the RBF.

Also worthy of mention is the news that following the XV Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena in La Serena, Chile, La Paz has been chosen to host the XVI Latin American Workshop. The event attracts scientists, working in nonlinear phenomena, from all over the world and in particular Latin America. Scheduled for October 2019 event details can be found provisionally at www.fiumsa.edu.bo/lawnp2019.

In this issue of the RBF, three scientific articles, submitted to international arbitration, are featured. SUBIETA, [Subieta & Ramírez-Ávila(2017)] present the analysis and characterization of a social model of opinion formation. The main properties of the model are that the equations are discrete and the agents are nodes within a complex network giving different topologies. A very interesting phenomenon is reported by [Ricaldi *et al.*(2017)] who with data obtained in September 2017 from the solar flares at the Villa Remedios Geomantic Observatory and at the Chacaltaya Laboratory carried out a comparison with the solar Rx flow registers of the NASA GOES satellite, making possible the characterization of so-called magnetic crochets. Finally, [Ramírez-Ávila(2017)] propose a population model for cancerous, normal and effector cells based on Logistic and Lotka-Volterra equations, to which are added terms related to the action of ionizing radiation typifying the situation patients are subjected to in radiotherapy treatment. A linear stability analysis of the systems identifies changes in dynamical regimes and their parameter values.

In the contributions section, [Gutiérrez R.(2017)] describe the calibration and comparison of two solmaforos, ultraviolet index (UV Index) warning signals designed to provide a real-time indication of the suns UV intensity in an easy to read traffic light design, which will be installed in La Paz. These signals will provide accurate measurements of the UV index alerting the population to and preventing prolonged exposure to the sun. In the history section, [Aguilar & Balderrama(2017)], students make a detailed and enjoyable review of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using the photon teleportation phenomenon.

We hope that this issue of the RBF is of interest to the scientific community and that at the same time it motivates scientists to send their intellectual work for publication. We are grateful for the SciELO platform which is freely accessible to the entire scientific community and the general public.

References

- [Aguilar & Balderrama(2017)] Aguilar G. A. & Balderrama M. 2017, Revista Boliviana de Física, **31**, 41.
- [Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila(2012)] Bustos-Espinoza R. O. E. & Ramírez-Ávila G. M. 2012, Revista Boliviana de Física, **22**, 1.
- [Ramírez-Ávila(2017)] Ramírez-Ávila G. M. 2017, Revista Boliviana de Física, **31**, 25.
- [Gutiérrez R.(2017)] Gutiérrez R. 2017, Revista Boliviana de Física, **31**, 35.
- [Subieta & Ramírez-Ávila(2017)] Subieta-Frías V. & Ramírez-Ávila G. M. 2017, Revista Boliviana de Física, **31**, 3.
- [Ricaldi *et al.*(2017)] Ricaldi-Yarvi E. L., Ticona-Peralta R. D., Miranda-Loza P. P. & Quispe-Mamani J. 2017, Revista Boliviana de Física, **31**, 14.

CARACTERIZACIÓN DE UN MODELO SOCIAL DISCRETO DE TOMA DE DECISIÓN BASADO EN REDES COMPLEJAS

CHARACTERIZATION OF A DECISION TAKING DISCRET SOCIAL MODEL BASED ON COMPLEX NETWORKS

VERÓNICA SUBIETA-FRÍAS[†] & GONZALO MARCELO RAMÍREZ-ÁVILA[‡]

Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

(Recibido 12 de julio de 2017; aceptado 21 de octubre de 2017)

RESUMEN

Se hace el análisis de la evolución de la opinión de un grupo de individuos bajo una situación de toma de decisión. Primero, se estudia el caso en el cual, los individuos del grupo no interactúan y solo están bajo la influencia de una fuente global externa constante, considerándose distintos tipos de conectividades entre la fuente y los individuos, pudiendo ser estas binarias o continuas, ya sean con intensidades constantes o variables en el tiempo. En segundo lugar, se analiza el caso en el que además de la fuente global externa, existe interacción entre los individuos, caracterizada por una red compleja. Posteriormente, se estudia el caso de la presencia de individuos denominados intransigentes en el grupo, los cuales tienen la característica de no modificar su opinión y por ende dificultar situaciones de consenso. Por último, se aborda el caso en el cual solo se tienen interacciones entre los individuos, sin considerar la fuente externa, encontrándose una sensibilidad a las condiciones iniciales en las opiniones individuales para la evolución del estado de opinión. En todos los casos, se analizan y comparan los efectos de las diferentes variantes del modelo en la opinión del grupo, siendo el alcance o no del consenso un aspecto esencial del estudio.

Código(s) PACS: 89.75.-k — 02.10.Ox — 05.50.+q — 89.65.-s

Descriptores: Sistemas complejos — Teoría de grafos — Modelo de Ising — Sistemas sociales

ABSTRACT

We perform the opinion evolution analysis of a group of individuals under a decision-making situation. Firstly, we study the case of a constant global external source's action on the group whose individuals do not interact; considering different connectivity types between the source and the group's members, namely, binary or continuous with constant or time-dependent intensities. Secondly, we analyze the case of a complex network featured interaction among individuals in addition to the action of the global source. Afterwards, we study the case in which there are the so-called inflexibles present in the group and whose main characteristic is that they are intransigent and opposed to changing their opinion thus, hindering consensus building. Finally, we address the situation in which there are only interactions between individuals, without considering the external source, this leads to a sensitivity towards the initial conditions of individual opinions for the evolution of the opinion state. In all cases, we analyze and compare the effects of the model variants on the group opinion, where the achievement or not of consensus is an essential aspect of the study.

Subject headings: Complex systems — Graph Theory — Ising model — Social systems

1. INTRODUCCIÓN

El marco conceptual de la física estadística es muy general y esto llevó a la tendencia de aplicarla a nuevas áreas donde se tienen sistemas de muchas partículas interactuando entre sí. Este último hecho sumado al gran avance tecnológico que se dio

en las últimas décadas, el cual permite el almacenamiento masivo de información y además la capacidad de realizar cálculos con gran rapidez, fue lo que motivó en los físicos el que traten de entender la conformación estructural y funcionamiento de las redes sociales con base en modelos de agentes en interacción.

El estudio de sistemas sociales a través de las redes complejas, como construcciones matemáticas

[†]veronica.subieta.f@gmail.com

[‡]http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/

susceptibles de análisis, tiene larga data. Así, se puede mencionar el experimento social llevado a cabo por Milgram (1967) y analizado en detalle por Travers & Milgram (1969), lo que sirvió como base para la formulación de las denominadas redes de mundo pequeño por Watts & Strogatz (1998). Por otra parte, Granovetter & Soong (1983) analizaron redes sociales con enlaces de diferente intensidad. El concepto de centralidad en una red social, fue introducido por Bavelas (1948) y su interpretación conceptual completa fue dada por Freeman (1978), además con el respaldo experimental aportado por Freeman *et al.* (1979). También es importante resaltar el trabajo de Castellano *et al.* (2009) que explica la dinámica social desde una perspectiva de la física estadística. Por otra parte, Weidlich & Haah (1983) introducen conceptos y modelos con el fin de cuantificar aspectos sociales que van desde la economía hasta la interacción de poblaciones. Un análisis completo del desarrollo de redes sociales se encuentra en el trabajo de Freeman (2004), y un enfoque formal de modelos sociales es descrito por Helbing (2010). La detección de estructuras comunitarias en redes es planteada por Newman (2004), donde hace una revisión de métodos algorítmicos para encontrar comunidades densamente conectadas, siendo este un aspecto muy importante en redes sociales. Aunque hubieron muchos intentos de explicar sistemas sociales utilizando implícitamente el concepto de red compleja, solamente en los últimos años se han desarrollado modelos que trascienden las analogías para convertirse, como lo señalan Newman *et al.* (2006), en modelos de simulación de la realidad. En años recientes, el estudio de redes complejas ha adquirido gran importancia en diferentes contextos y ha sido desarrollado formalmente con contribuciones tales como la de Barabási & Albert (1999) que estudia el surgimiento de leyes de escala en redes aleatorias con aplicaciones en diferentes tipos de sistemas que se aproximan al mundo real. El boom que ha alcanzado el estudio de redes complejas ha dado lugar a que se tengan excelentes trabajos de revisión tales como el de Strogatz (2001), donde sistematiza el estudio de redes complejas de acuerdo a su naturaleza: mundo pequeño y libre de escala, prestando particular atención a aspectos relacionados con la sincronización; en la misma línea se puede mencionar a Arenas *et al.* (2008) quienes consideran procesos de sincronización en diferentes tipos de sistema yendo desde físicos a sociales, todos ellos caracterizados por redes complejas y finalmente a Wu (2007) y Lu & Qin (2011) quienes hacen un estudio exhaustivo de la sincronización en redes complejas. La estructura de redes complejas ha sido también ampliamente analizada por Boccaletti *et al.* (2006) y por Estrada (2011). Los procesos dinámicos en redes complejas han merecido la atención de Barrat *et al.* (2008) quienes estudian, entre otras cosas, conceptos tales como la transición de fases, la resiliencia y la robustez en redes. La omnipresencia e importancia de las redes complejas ha producido que se trate

de popularizar este tema de estudio; así, se tienen excelentes libros de divulgación como el de Barabási (2002) y el de Caldarelli & Catanzaro (2012).

Los individuos que conforman los sistemas sociales son entes con muchas características distintas entre sí, tales como género, religión, edad, etc. que pueden ser utilizadas para la construcción de una red social compleja. La complejidad manifiesta en las interacciones sociales es muy grande que a veces sería imposible de describir las mismas con relaciones simples y pocos parámetros. Es así que para modelar redes sociales se deben hacer grandes simplificaciones del problema real. Las propiedades cualitativas e incluso algunas cuantitativas de los fenómenos a gran escala no dependen de los detalles microscópicos de los sistemas. Solo las características de mayor nivel tales como simetrías, dimensionalidad o leyes de conservación son relevantes para el comportamiento global, tal como lo señalan Castellano *et al.* (2009). En las sociedades humanas al igual que en los sistemas físicos, se dan transiciones de fase o cambios del desorden al orden como el adquirir un consenso de la población respecto a un tema dado. Este tipo de comportamiento social llamado, desde el enfoque de la física estadística, como fenómeno macroscópico, es la inspiración para intentar comprender las regularidades alcanzadas globalmente, es decir, son efectos a gran escala o efectos colectivos que surgen de la interacción entre individuos independientes considerados como entidades relativamente simples. El objetivo es ver como las interacciones entre los individuos o agentes sociales permiten alcanzar consensos de opinión; es decir, es posible generar una situación de orden a partir de un estado inicial de desorden (opiniones diversas). Si no hubiesen interacciones, la heterogeneidad o desorden predominaría y cada individuo escogería una opinión personal a situaciones y problemáticas comunes al grupo. El factor clave es la interacción de los individuos entre sí y/o con una fuente global; siendo esta interacción la que produce una tendencia en los individuos a tener opiniones cada vez más similares. Entonces, teniendo en mente el concepto de universalidad, se puede modelar los sistemas sociales tomando solo las propiedades más simples e importantes de un solo individuo buscando las características cualitativas generales que caractericen su comportamiento en los modelos.

El presente trabajo está estructurado del siguiente modo: en la Sec. 2 se describe el modelo de toma de decisión utilizado bajo ciertas circunstancias que exige la coyuntura. Posteriormente, se presentan los resultados de cada una de las situaciones estudiadas. Así, en la Sec. 3 se considera la situación en la cual solo existe la acción de una fuente global sobre los individuos. El caso en el cual además de la fuente global, existe también interacción entre individuos es descrito en la Sec. 4. La introducción de individuos intransigentes quienes no cambian de opinión en el modelo se expone en la Sec. 5. La situación en la que solo existe interacción entre individuos y no actúa una fuente global externa es desarrollada en la Sec. 6. Finalmente, se exponen las conclusiones y

perspectivas de esta investigación.

2. MODELO

Como punto de partida, consideramos un modelo de red social similar al planteado por Bassett *et al.* (2012), el cual está basado en una evolución discreta. La red consiste de N individuos (agentes) y cada uno de ellos tiene una variable de estado

$$S_j(t+1) = \frac{S_j(t) + \mu_j(t)G(t) + \sum_i a_{ij}(t)S_i(t)}{1 + \mu_j(t) + \sum_i a_{ij}}, \quad (1)$$

con $j = 1, 2, \dots, N$; donde $S_j(t)$ es el estado de opinión al tiempo t y $S_j(t) \in [0, 1]$. El estado de opinión de un agente $S_j(t)$ cambia con el tiempo como resultado de la información recibida de:

1. Una fuente vía una emisión global; por ejemplo a través de la radio o televisión.
2. El estado de opinión de todos los agentes que conforman la muestra, transmitido mediante la red de contactos entre agentes.

Para especificar los dos aspectos citados anteriormente, aclaremos el concepto de fuente global y red social:

Fuente global. Es un agente especial externo de información que influye sobre todos los individuos pero no recibe la acción de estos. El valor que es emitido por la fuente global, al tiempo t se representa por $G(t) \in [0, 1]$. En este trabajo, se toma el valor de $G(t) = 1$. Se asume que la recepción de esta opinión por el agente j está dada por $\mu_j(t)$; si esta variable es nula, el individuo no recibe la información de la fuente; por ejemplo será el caso en que se agotó la batería de su smarthphone, o se encuentra fuera del radio urbano, donde no llega señal de ningún tipo, etc. Esta fuente es el primer conductor externo de la dinámica del grupo.

Red social. La acción de compartir opiniones entre contactos es binaria, y está representada por los elementos de la matriz de adyacencia a_{ij} . Estos elementos toman el valor de 1 si el individuo i comparte su opinión con el individuo j . Según el caso real con el que se esté tratando, se la puede considerar simétrica, si cuando interactúan los individuos intercambian opiniones, lo que ocurre por ejemplo al comunicarse mediante celulares. La situación no simétrica se da por ejemplo en el caso de intercambio de opinión en una red social (facebook, twitter, etc), en el que uno de los individuos publica su opinión, pero no necesariamente sus amigos responderán a esa publicación. En este trabajo, la matriz es considerada simétrica. La diagonal de la matriz es nula pues la opinión de un individuo no influye sobre la suya propia. La naturaleza discreta de esta regla de actualización es consistente con el hecho de que la información es a menudo obtenida en unidades discretas de tiempo de diferentes tipos de fuentes: sociales, tecnológicas o gubernamentales.

3. DINÁMICA DE OPINIÓN BAJO LA INFLUENCIA DE SOLO UNA FUENTE DE EMISIÓN GLOBAL

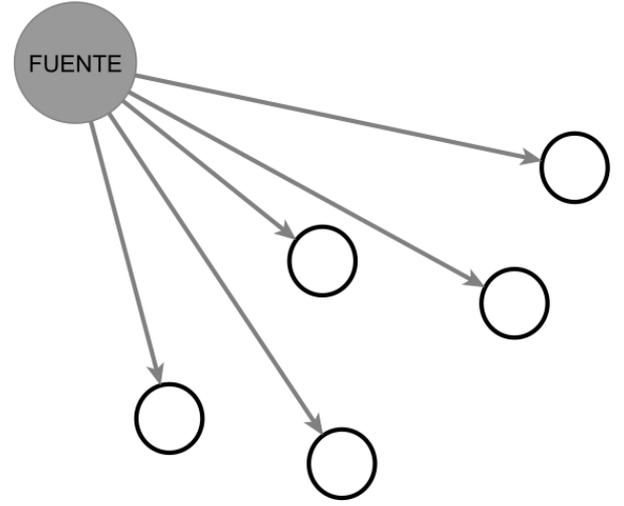


FIG. 1.— Representación de la acción de la fuente global sobre los individuos que conforman el grupo.

Se estudia el caso cuando no existe interacción entre los individuos, solamente actúa una fuente de emisión global de opinión que influye sobre los mismos. Por otro lado, la opinión de los individuos no influye en la fuente global; es decir, los vínculos de influencia existentes entre la fuente y los individuos son unidireccionales, van de la fuente hacia los individuos, como se muestra en la Fig. 1.

En este caso, la Ec. (1) queda:

$$S_j(t+1) = \frac{S_j(t) + \mu_j(t)G(t)}{1 + \mu_j(t)}, \quad (2)$$

donde $S_j(t)$ representa el estado de opinión del individuo j -ésimo a un tiempo t , $\mu_j(t)$ representa la conectividad del individuo j -ésimo con la fuente de emisión global y $G(t)$ representa la intensidad de emisión de la fuente. En la Ec. (2) consideramos que la opinión inicial de todos los individuos es cero.

$$S_j(0) = 0, \quad \forall j.$$

Se trabaja con una intensidad de la fuente global constante e igual a 1, es decir

$$G(t) = 1, \quad \forall t.$$

Se analizan cuatro casos distintos de conectividad μ_j ; primero, la denominada conectividad binaria que se da cuando la conexión de los individuos con la fuente global ocurre o no; es decir toma los valores discretos 0 ó 1:

$$\mu_j(t) = \{0, 1\}, \quad \forall t,$$

la cual puede ser constante o variable en el tiempo. Luego, se consideran otras dos posibilidades cuando la conectividad con la fuente es de diferente intensidad o continua (vínculos pesados), es decir que toma valores entre 0 y 1.

$$\mu_j(t) = [0, 1], \quad \forall t,$$

que igualmente puede ser constante o variable en el tiempo.

Se realizaron experimentos para estos cuatro casos y se obtuvo:

: **Conectividad fuente-individuo discreta y constante en el tiempo.** La evolución del estado de opinión de cada individuo no conectado ($\mu = 0$) permanece nulo; en tanto que el correspondiente a los siempre conectados ($\mu = 1$) evoluciona. Mediante un desarrollo analítico se obtiene:

$$S_j(t) = \sum_{i=1}^t \frac{1}{2^i}; \quad (3)$$

es decir, la evolución del estado de opinión es una función creciente y tiende asintóticamente a su máximo valor posible que es la unidad, como lo indica la Ec. (3). Además, se tiene consenso, de los individuos conectados durante toda la evolución del estado de opinión. Debido a que los individuos desconectados permanecen siempre en esta situación no se tendrá evolución de su estado de opinión que se mantiene nulo; por tanto, al promediar el estado de opinión de la muestra, este no podrá alcanzar el máximo valor.

: **Conectividad fuente-individuo discreta y variable en el tiempo.** En esta situación, los experimentos deben realizarse sobre intervalos de tiempo lo suficientemente largos, de manera que se garanticen cambios en la conectividad fuente-individuo. Para ejemplificar lo anterior, se puede pensar en un escenario donde los individuos pueden conectarse o desconectarse de la fuente de acuerdo a la disponibilidad y al uso de un determinado dispositivo: teléfono inteligente, tableta, etc. Se tiene en este caso, a diferencia del de conectividad constante, que el estado de opinión de los individuos no es el mismo en cada paso de tiempo pero sí se alcanza consenso con el valor máximo posible del estado de opinión después de tiempos largos. El tiempo o número de pasos necesarios para alcanzar el estado de equilibrio, igual a la unidad, depende de la probabilidad de conectividad que hayan tenido los individuos en cada paso de tiempo, siendo el mínimo igual a 17 pasos, correspondiente a un 100% de conectividad, resultado que coincide con el hallado en el caso de conectividad constante.

: **Conectividad fuente-individuo continua y constante en el tiempo.** Cuando se considera el caso en que la conectividad fuente-individuo toma valores continuos entre 0 y 1 siguiendo ya sea una distribución uniforme o una gaussiana, (se hizo el análisis para ambas distribuciones), todos los individuos que tienen una conectividad distinta de cero alcanzan el máximo valor posible del estado de opinión; lo que se logra después de cientos de pasos.

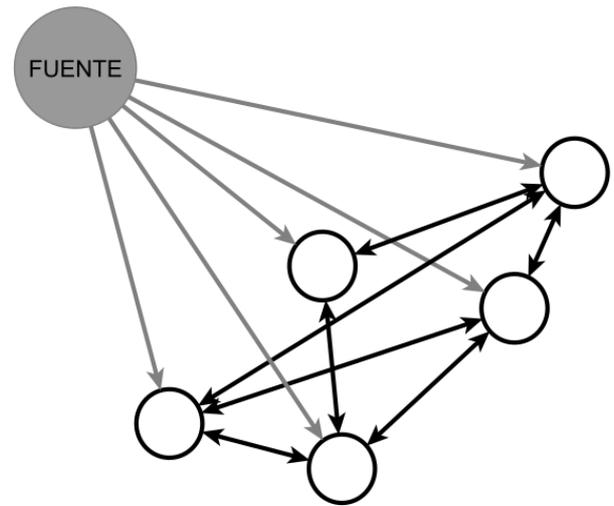


FIG. 2.— Representación de la red resultante de la acción de la fuente global y la interacción de los individuos que conforman el grupo.

: **Conectividad fuente-individuo continua y variable en el tiempo.** La conectividad promedio determina el tiempo de alcance del máximo valor posible del estado de opinión, el mismo que decae potencialmente a medida que aumenta el valor de la conectividad promedio. Así, para conectividades promedio de 8%, 20% y 50% se tienen respectivamente 255, 90 y 28 pasos de tiempo.

4. DINÁMICA DE OPINIÓN BAJO LA INFLUENCIA DE FUENTE DE EMISIÓN GLOBAL E INTERACCIÓN ENTRE INDIVIDUOS.

Se estudia ahora la evolución del estado de opinión de un grupo de N individuos, pero a diferencia de la Sec. 3 que marcó los primeros lineamientos, se considera además de la fuente global, la interacción entre individuos; es decir, ahora existe una red compleja. En la Fig. 2 se muestra la red resultante y las interacciones entre sus elementos. Nótese que las interacciones entre individuos (flechas de color negro) pueden ser bidireccionales a diferencia de las acciones que ejerce la fuente (flechas de color gris), esto significa que los individuos pueden intercambiar opiniones e influirse mutuamente. La interacción entre los individuos se caracteriza mediante los elementos de la denominada matriz de adyacencia a_{ij} que dan cuenta de los vínculos entre los mismos. Los elementos de esta matriz toman los valores de 0 en la posición (i, j) , si el individuo i no está vinculado al j y 1 en caso contrario. La matriz de adyacencia en este trabajo es simétrica porque se consideran vínculos bidireccionales. Se aplica entonces el modelo presentado en la Ec. (1), para ver cómo evoluciona para establecer la evolución del estado de opinión promedio del conjunto de individuos. Con base en el modelo propuesto por Erdős & Rényi (1960), se construyen grafos (redes) aleatorios que caracterizan los valores de $\mu_j(t)$ y $a_{ij}(t)$ lo que permite establecer el grado de conexiones promedio de los individuos, f_a , aspecto

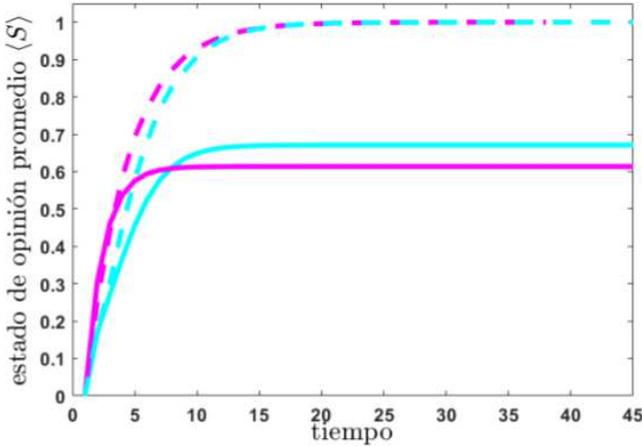


FIG. 3.— (Color online) Comparación de la evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ en el caso en que existe solo fuente (magenta) con la situación en que existe fuente mas red de interacción entre individuos (cian). Se tiene resultados para conectividad con la fuente constante (línea continua) y variable (línea segmentada)

que se explica con mayor detalle en la Sec. 4.2. Estos datos iniciales permitirán realizar las simulaciones numéricas.

4.1. Resultados y comparación con el caso de interacción solo con la fuente

Se quiere contrastar los resultados del modelo cuando se consideran conjuntamente la red y la fuente de emisión global, comparados con los casos en que solo se tiene esta última.

En la Fig. 3 se muestran los resultados obtenidos, cuando la probabilidad de conectividad permanece constante (línea continua) y cuando la probabilidad de conectividad es variable (línea segmentada). Las gráficas que se presentan en color cian corresponden a experimentos en los que se tiene fuente global y red de individuos interactuantes, caracterizada por la matriz de adyacencia. Las gráficas en color magenta corresponden al caso en que solo hay fuente de emisión global.

Se observa en la Fig. 3 que las líneas representando μ constante, (línea continua) se estabilizan para valores de $\langle S \rangle \neq 1$, donde $\langle S \rangle$ se torna constante. El valor de estabilización de $\langle S \rangle$ corresponde a un valor máximo para esta situación y al que denotaremos por $\langle S \rangle_{\text{MAX}}$. La estabilización de $\langle S \rangle$ significa que la opinión de cada individuo, puede diferir de las opiniones de los demás individuos, pero después de un transitorio, el promedio se mantiene constante en el tiempo; es decir, las opiniones individuales pueden estar variando en el tiempo pero el promedio del grupo no se modifica. Como ya se vio en la Sec. 3, el estado de opinión promedio máximo $\langle S \rangle_{\text{MAX}}$ (en el caso de conectividad μ a la fuente constante), no es igual a la unidad y como se ve en la Fig. 3 tampoco cuando se añade la red (curvas cian y magenta de línea continua respectivamente). La gran contribución de la red es que cuando esta actúa se alcanza un $\langle S \rangle_{\text{MAX}}$ que es mayor, al caso en el que no se la considera. Nótese que $\langle S \rangle_{\text{MAX}}$ con red compleja (cian) es mayor que $\langle S \rangle_{\text{MAX}}$ sin esta car-

acterística (magenta). Si definimos el tiempo de estabilización como el tiempo en el cual $\langle S \rangle$ se torna constante; es decir, cuando el estado de opinión alcanza un valor máximo $\langle S \rangle_{\text{MAX}}$, podemos ver que la estabilización ocurre para tiempos mayores que en el caso en el que solo actúa la fuente. Cuando se considera a la red, se alcanza $\langle S \rangle_{\text{MAX}}$ en tiempos mayores pero en compensación, el valor de este es mayor a $\langle S \rangle$ cuando no existe red.

Nótese que en los primeros pasos de tiempo, cuando no se considera a la red, la pendiente de la curva magenta es mayor a la pendiente de la cian; esto quiere decir que la evolución al principio es más rápida cuando no hay red; la presencia de la red ralentiza el ritmo de cambio, pero luego las curvas se intersectan y el comportamiento de las pendientes de las mismas bascula, ocasionando que en el caso donde solo actúa la fuente global, la estabilización ocurra antes que en el caso donde exista una estructura de red compleja.

De las curvas en línea segmentada, que corresponden al caso en el que la conectividad de los individuos con la fuente cambia a cada paso de tiempo, se tiene que, como se vio en la Sec. 3, siempre se alcanza la situación $\langle S \rangle = 1$; es decir, que se llegue al estado de opinión máxima.

Para que el estado de opinión promedio máxima sea $\langle S \rangle_{\text{MAX}} = 1$, cada uno de los individuos debe tener un estado de opinión individual igual a la unidad; es decir, se tiene consenso. Lo anterior es lo que diferencia del caso en el que la conectividad es constante. Por otra parte, se tiene también que la rapidez de evolución antes de la intersección es mayor y el tiempo de estabilización es menor cuando no hay red.

4.2. Caracterización de la evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$

Se quiere caracterizar la evolución del estado de opinión promedio y para ello se analiza cómo influyen las distintas variables involucradas en este modelo. Para esto, se llevan a cabo experimentos en cada uno de los cuales se varían dos magnitudes, primero el tamaño de la muestra o número de individuos N y segundo, el grado de conexiones promedio de los individuos entre sí, fa que es un indicador del promedio del número de vínculos que tiene cada individuo. La determinación de fa se la hace mediante la construcción de grafos aleatorios siguiendo el modelo de Erdős-Rényi. Por ejemplo, si $fa = 1$, significa que todos los individuos se hallan vinculados con todos los demás, por lo que la matriz de adyacencia será una matriz de tamaño $N \times N$ cuyos elementos serán todos iguales a 1, excepto los de la diagonal que tomarán el valor 0. Los valores de la diagonal son 0 porque un individuo no puede interactuar o influir sobre sí mismo. Si el valor de fa es por ejemplo 0.2, significa que cada individuo estará conectado solo con el 20% de los individuos que conforman la red, o en otras palabras, si se cuenta el número de unos en una fila o columna de la matriz de adyacencia (da lo mismo porque se trata de una matriz

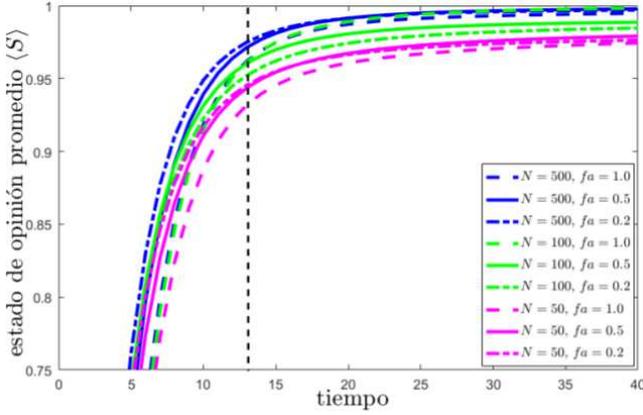


FIG. 4.— (Color online) Evolución del estado de opinión promedio (S) en el caso en que existe fuente global y además red entre individuos. La distribución de valores de los elementos de la conectividad es normal y comprendida en el intervalo $[0,1]$. Se hicieron varios experimentos para distintos tamaños de la muestra N y diferentes valores de fa .

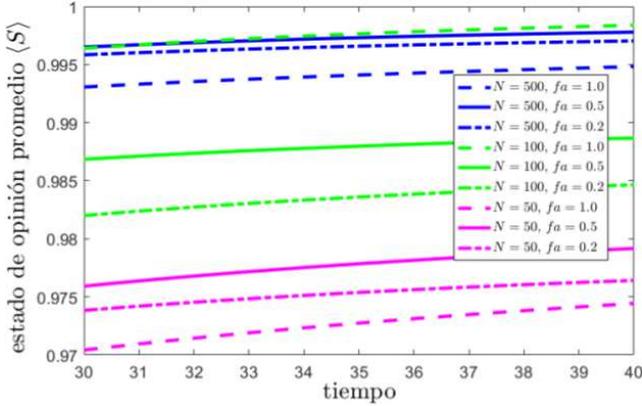


FIG. 5.— (Color online) Ampliación de la denominada segunda etapa de la Fig. 4.

simétrica), este será tan solo el 20% del número total de individuos N .

Se realizaron nueve experimentos cuyos resultados se presentan en la Fig. 4, notándose que en todos los casos se tienen comportamientos similares. El cambio drástico de pendiente se da aproximadamente después de 13 pasos de tiempo, en todos los casos, lo que se indica con una línea segmentada, vertical y negra. Antes del cambio de pendiente, la evolución de $\langle S \rangle$ es muy rápida lo que denominamos la primera etapa; en tanto que la segunda etapa ocurre después de este cambio.

Durante la segunda etapa, se observa que la evolución de $\langle S \rangle$ se ralentiza y que la pendiente de la curva tiende a cero; es decir, $\langle S \rangle$ se aproxima asintóticamente a un valor máximo $\langle S \rangle_{\text{MAX}}$. Este estado de opinión máximo es estacionario. También, se puede ver que el valor de $\langle S \rangle_{\text{MAX}}$ depende proporcionalmente del tamaño de la muestra N . Para ver cómo afecta el grado de conexión entre individuos fa , en la Fig. 4 se amplifica la región de estabilización correspondiente a la segunda etapa de la (Fig. 5). Es importante resaltar que las diferencias entre $\langle S \rangle_{\text{MAX}}$ alcanzados para distintos fa son menores al 0.5% por

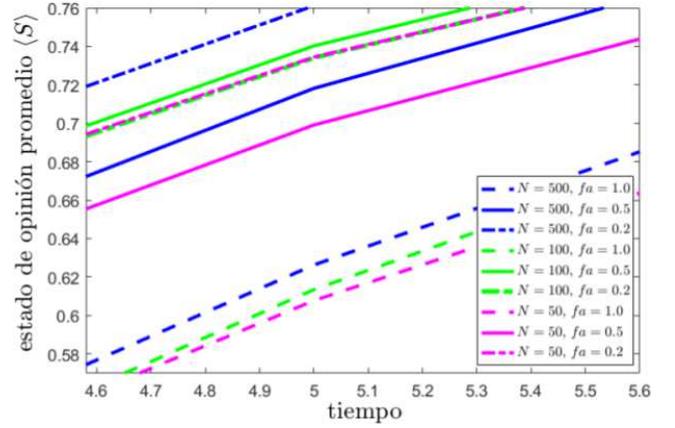


FIG. 6.— (Color online) Ampliación de la denominada primera etapa de la Fig. 4.

lo que se puede obviar este análisis.

En la magnificación de la primera etapa de la Fig. 4 que se muestra en la Fig. 6, se observa que las curvas están dispuestas según el valor de fa . Nótese por ejemplo que las curvas que corresponden a $fa = 1$ (línea segmentada), están próximas; a continuación, siguen las curvas que corresponden a $fa = 0.5$ (línea continua) y por último, las curvas que corresponden a $fa = 0.2$ (línea punto segmento). Las curvas que representan a la red más homogénea en la primera etapa dan como resultado $\langle S \rangle$ con menor valor de lo que se obtiene con redes menos homogéneas.

En resumen, en la primera etapa, la homogeneidad de la red es más importante que el tamaño de la misma. Lo contrario a esto es lo que sucede en la segunda etapa, donde lo preponderante es el tamaño de red y no cuán homogénea es la misma.

Se define como consenso al estado en el cual todos los individuos adquieren una misma opinión debido a la interacción entre ellos. Muchas veces el consenso es un factor determinante en las sociedades, pues en situaciones reales, se presentan casos en los cuales es necesario para un grupo alcanzar decisiones compartidas. Los acuerdos o consensos logran una posición más fuerte y amplifican su impacto.

Un indicador estadístico que estaría directamente relacionado con este concepto y que puede ser usado para definir el grado de consenso alcanzado, es la desviación estándar. Cuando se tiene un grupo de individuos, se puede calcular en un determinado tiempo el valor promedio del estado de opinión del grupo y la desviación estándar del conjunto de los estados de opinión de cada individuo $S_j(t_d)$ en un tiempo dado t_d . La desviación estándar es una medida de la dispersión de los datos, indica cuánto se alejan estos del valor promedio; por tanto, si se alcanza el consenso, el valor de la desviación estándar sería nulo, y mientras mayor es la desviación estándar, más alejado estará el sistema del consenso. Se obtuvo la evolución de la desviación estándar para distintos tipos de muestras y lo que se observa es que el consenso se alcanza cuando la red es completa $fa = 1$; es decir, todos los nodos se hallan vinculados con todos los otros, al disminuir el valor

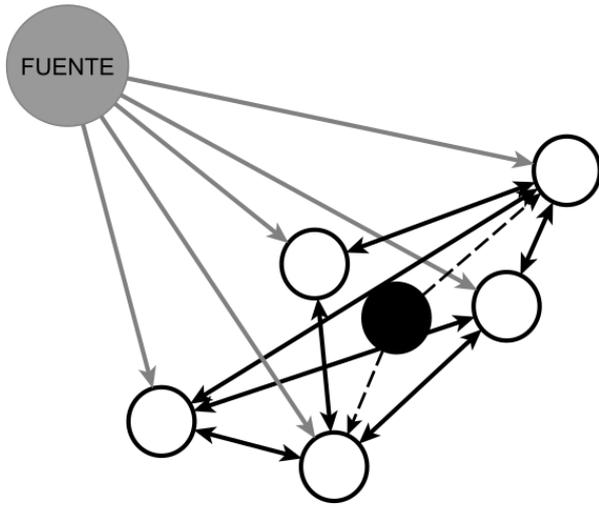


FIG. 7.— Representación gráfica de la interacción de un grupo de individuos, donde existe además un intransigente (nodo negro). El intransigente influye sobre los demás individuos (flechas segmentadas unidireccionales) pero sobre él no influye ni la fuente global representada en color gris, ni los otros individuos que conforman el grupo.

de este parámetro también se aleja la muestra del consenso. Por otra parte, se obtuvo que al aumentar el tamaño de la muestra N , mayor es la tendencia al consenso. Entonces, podemos concluir que lo determinante para alcanzar el consenso es la homogeneidad de la red, solo cuando es completamente homogénea y $fa = 1$; es decir, cuando todos los individuos se hallan vinculados a todos los demás, el consenso es alcanzable. Por otra parte, el tamaño de la muestra N , es una variable que puede ayudar a disminuir la dispersión de las opiniones. Mientras mayor es el tamaño de la red menos dispersos resultan los estados de opinión de los individuos; es decir, se trata de una variable que contribuye a acercarnos al consenso cuando es grande.

5. LOS INTRANSIGENTES EN EL MODELO

Se define como intransigente a un individuo que tiene una opinión definida de valor nulo y que permanece inalterable en el transcurso del tiempo, en acuerdo con la definición dada por Galam & Jacobs (2007). Estos individuos intransigentes no pueden ser influenciados por los demás individuos ni tampoco por la fuente global, su opinión permanece constante a cada paso del tiempo, no evoluciona; sin embargo, como forma parte de la sociedad, al interactuar con los otros individuos esta opinión intransigente puede afectar al estado de opinión media de la red. En la Fig. 7 se representa la red con la presencia de un intransigente.

5.1. Efecto de los intransigentes en el caso de conectividad a la fuente constante

A continuación se procede a analizar el efecto, en la evolución de estado de opinión promedio $\langle S \rangle$, con la introducción de individuos intransigentes en el modelo. Primero, se considera un modelo en el que

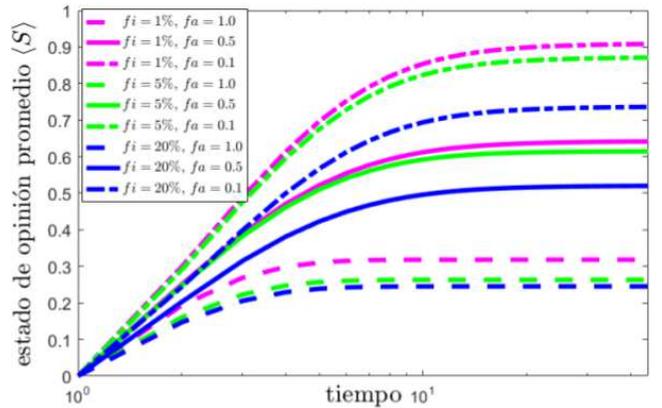


FIG. 8.— (Color online) Evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ en el caso en que existen individuos intransigentes, en el modelo se tiene fuente global y además red entre individuos. La distribución de probabilidad de conectividad con la fuente μ es gaussiana y toma valores entre $[0,1]$ que permanecen constantes en cada paso de tiempo y la matriz de adyacencia se la determina aleatoriamente. Se hicieron varios experimentos para distintos tipos de redes con $fa = 1$, $fa = 0.5$ y $fa = 0.2$ y para diferentes porcentajes de intransigentes fi , 1%, 5% y 20%. Nótese que debido a que la escala de tiempo es logarítmica, la parte inicial de la evolución de $\langle S \rangle$ tiene forma exponencial

la conectividad de los individuos a la fuente permanece constante. Para el análisis se toman distintas fracciones de intransigentes (en porcentaje) denotadas por fi en relación al número total de individuos y redes con distintos fa . Se procede a hacer el análisis sobre una muestra de 100 individuos. Se tienen estados de evolución promedio para tres distintos proporciones de intransigentes en la muestra: 1%, 5% y 20% correspondientes a las líneas magenta, verde y azul respectivamente como se muestra en la Fig. 8. A su vez, se aplicó a cada uno de estos casos, tres distintos tipos de red: $fa = 1.0$, $fa = 0.5$ y $fa = 0.1$ correspondientes a línea segmentada, continua y punto-segumento respectivamente. Nótese que las curvas de la Fig. 8, se comportan de la misma manera que las curvas de la Fig. 4, donde se estudiaba la evolución de $\langle S \rangle$ sin la existencia de intransigentes. La diferencia principal está en el alcance que se tiene de $\langle S \rangle_{MAX}$, se puede ver que en general, el efecto de introducir individuos intransigentes disminuye el valor de $\langle S \rangle_{MAX}$. En las curvas de la Fig. 4, cuando no existen intransigentes, para todos los tipos de muestras y grados de conectividad de la red se alcanzan valores mayores a 0.95 para el estado de opinión promedio máximo $\langle S \rangle_{MAX}$. La introducción de intransigentes hace que los valores para $\langle S \rangle_{MAX}$ sean considerablemente menores, llegando en algunos casos a ser menores a 0.3.

También se observa que el valor de $\langle S \rangle_{MAX}$ alcanzado difiere según los casos analizados. Así, cuando la red es débilmente conectada ($fa = 0.1$, curva punto-segumento), se tienen los valores mayores de $\langle S \rangle_{MAX}$; en contraposición, para una red homogénea, ($fa = 1.0$, curvas segmentadas), se tienen los valores menores de $\langle S \rangle_{MAX}$.

Por otra parte, $\langle S \rangle_{MAX}$ depende también de la pre-

sencia de intransigentes (caracterizada por el color de línea), pero en menor grado que de la conectividad de la red (caracterizada por el tipo de línea). Nótese que las curvas en magenta correspondientes a $fi = 1\%$ son las que alcanzan un valor mayor de $\langle S \rangle_{MAX}$, mientras que las azules ($fi = 20\%$, importante presencia de intransigentes) son las que tienen menores valores de $\langle S \rangle_{MAX}$.

Por tanto, el número de intransigentes en el grupo, no es la variable determinante en el alcance de $\langle S \rangle_{MAX}$, como se podría pensar intuitivamente. Lo importante es la combinación de este número con el tipo de red. Para una red con poca conectividad por muchos intransigentes que se tenga, el valor de $\langle S \rangle_{MAX}$ no se ve modificado de manera significativa; en cambio, si se tiene una red homogénea, aunque se tengan pocos intransigentes, el valor de $\langle S \rangle_{MAX}$ se reduce considerablemente.

Para estudiar cómo afecta la introducción de intransigentes en el consenso, como ya se explicó en la Sec. 4, analizamos la desviación estándar y se obtiene que cuando el número de intransigentes es mayor, también lo es la desviación estándar, es decir que se está más lejos del consenso; en cambio, cuanto menos intransigentes existen en la muestra, menor es la dispersión de las opiniones de los individuos o más cerca del consenso se está.

5.2. Efecto de los intransigentes en el caso de conectividad a la fuente variable

Para caracterizar la forma en cómo afectan los intransigentes, se realizan experimentos para ver su efecto sobre distintos tipos de muestras y con distintas fracciones de número de intransigentes en cada una de ellas.

En la Fig. 9 comparamos el efecto de los intransigentes sobre muestras con conectividad fuente-individuo variable (curvas continuas) con el caso fuente-individuo constante (curvas segmentadas). Nótese que en todos los casos, para los distintos tipos de muestras se tiene que el efecto de intransigentes es mayor en las muestras con conectividad variable puesto que las curvas continuas siempre están por debajo de las segmentadas del mismo color; es decir, disminuyen el valor de $\langle S \rangle_{MAX}$ aún más, en muestras con conectividad variable, de lo que lo hacen en las muestras de conectividad constante. Lo anterior resulta contraintuitivo ya que cuando la conectividad es variable, sin intransigentes se alcanza el máximo valor posible de $\langle S \rangle_{MAX}$.

Por otra parte, se nota también que el efecto de los intransigentes es más importante en redes homogéneas, en las que $fa = 1.0$ (curvas azul y roja) pues están más distantes de sus correspondientes curvas en línea segmentada, que en el caso de las muestras con redes con grado de conectividad menor $fa = 0.5$ (curvas cian y magenta). En estas últimas redes, las curvas cian y magenta de trazo continuo y las de trazo segmentado, están casi sobrepuestas; es decir, el efecto de los intransigentes es menor.

Al igual que en la Sec. 5.1 el efecto de los intransigentes no depende solo de su número sino de la com-

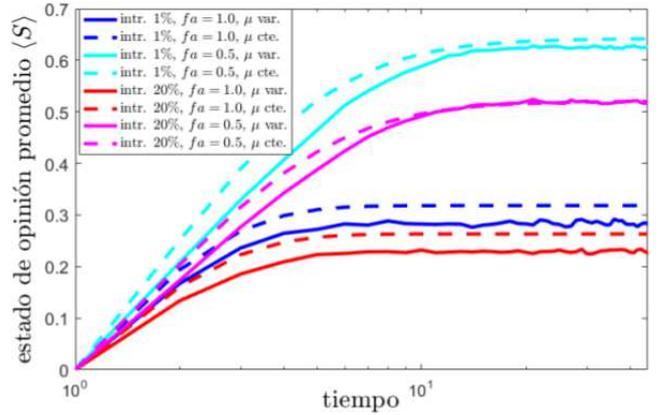


FIG. 9.— (Color online) Evolución del estado de opinión promedio en presencia de intransigentes. Se compara el efecto de los intransigentes sobre muestras con conectividad fuente-individuo variable (curvas continuas) con el caso fuente-individuo constante (curvas segmentadas). Se grafican resultados para dos fracciones de número de intransigentes: $fi = 1\%$ (azul y roja) y $fi = 20\%$ (cian y magenta), así como para dos valores de grado de conectividad de la red $fa = 1.0$ (azul y roja) y $fa = 0.5$ (cian y magenta). Al igual que en la Fig. 8, debido a que la escala de tiempo es logarítmica, la parte inicial de la evolución de $\langle S \rangle$ tiene forma exponencial.

binación de este con la conectividad.

Una de las principales diferencias entre los gráficos de conectividad variable (trazo continuo) con los de conectividad constante (trazo segmentado), es que en los primeros, se puede ver una fluctuación en la parte de estabilización de $\langle S \rangle$.

El efecto principal de la presencia de intransigentes en las redes con conectividad fuente-individuo variable, es que la desviación estándar no se anula en ningún caso; en cambio, en las redes homogéneas de conectividad fuente-individuo constante, el valor de la desviación estándar se anula; es decir, se alcanza el consenso.

6. EVOLUCIÓN DEL ESTADO DE OPINIÓN PROMEDIO CUANDO NO ACTÚA UNA FUENTE DE EMISIÓN GLOBAL

Se analiza la evolución del estado de opinión de un grupo de N individuos pero a diferencia de la Sec. 4, se considera esta vez que la fuente global no actúa sobre los individuos. La interacción se da solo entre los individuos que conforman la red. En la Fig. 10, se hace una representación gráfica de esta situación.

El modelo, para este caso queda expresado del siguiente modo

$$S_j(t+1) = \frac{S_j(t) + \sum_i a_{ij}(t) S_i(t)}{1 + \sum_i a_{ij}}. \quad (4)$$

A diferencia de los anteriores casos (Secs. 3 y 4) la opinión inicial de todos los individuos no es cero, se realiza un sorteo para asignar opiniones iniciales a los mismos con valores en el intervalo $[0,1]$, bajo una distribución gaussiana por lo que el promedio del valor del estado de opinión inicial del grupo es aproximadamente de 0.5.

Se realizan simulaciones para tres tamaños de muestras diferentes $N = 50$, $N = 200$ y $N = 500$.

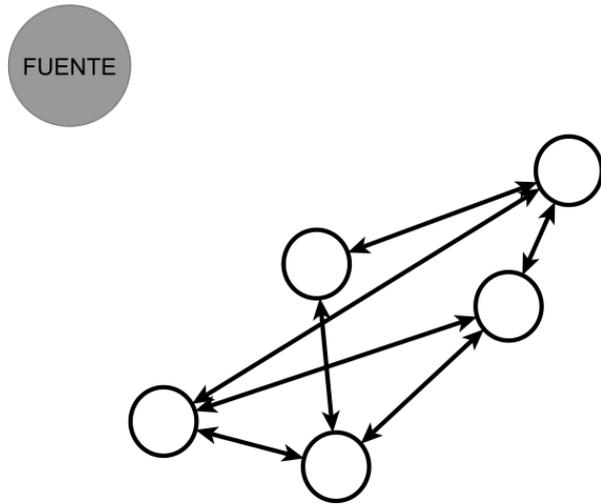


FIG. 10.— Representación gráfica de la interacción entre individuos que conforman la muestra flechas negras bidireccionales; en este caso, no existe interacción con la fuente de emisión global, por lo que no existen flechas entre los individuos (nodos blancos) y la fuente de emisión global (nodo gris).

Para cada tamaño de muestra se consideran distintos valores de fa : 1.0, 0.5 y 0.1. En la Fig. 11, se distinguen las curvas para cada valor de fa por el color de línea: naranja para $fa = 1.0$, magenta para $fa = 0.5$ y cian para $fa = 0.1$. Se puede ver que las curvas correspondientes a todos estos casos, presentan evoluciones muy diversas del estado de opinión promedio; por ejemplo, en algunos casos se tiene una evolución del estado de opinión promedio inicial creciente y en otros decreciente; sin embargo, al transcurrir el tiempo, en todos los casos se alcanza una situación de estabilización, en la que el estado de opinión promedio se mantiene constante. Este tiempo en el que se alcanza la estabilización está entre los 5 y 10 pasos. En la Sec. 4, donde se tenía además la acción de la fuente de emisión global, se obtuvieron tiempos de estabilización entre 10 y 15 pasos.

A diferencia del caso en el que actúa también la fuente de emisión global, ahora no es importante el tamaño de la muestra N para la determinación del estado de opinión promedio. Sin embargo, el valor de fa , que es una característica de la red, afecta en la evolución del estado de opinión promedio: cuando fa es pequeño, el estado de opinión promedio casi no cambia, se mantiene muy cerca a su valor inicial (aproximadamente 0.5). A medida que el valor de fa se acerca a 1.0, el estado de opinión promedio evoluciona alejándose cada vez más del valor inicial promedio, véase las curvas de la Fig. 11, donde la línea negra horizontal en el valor de 0.5 (estado de opinión promedio inicial aproximado y usado como referencia) permite ver cómo los estados de opinión promedio en el equilibrio resultan más alejados del valor de referencia cuando fa es mayor.

El valor de fa que caracteriza la red, también es muy importante en la dispersión de las opiniones de los individuos que conforman la red como se muestra

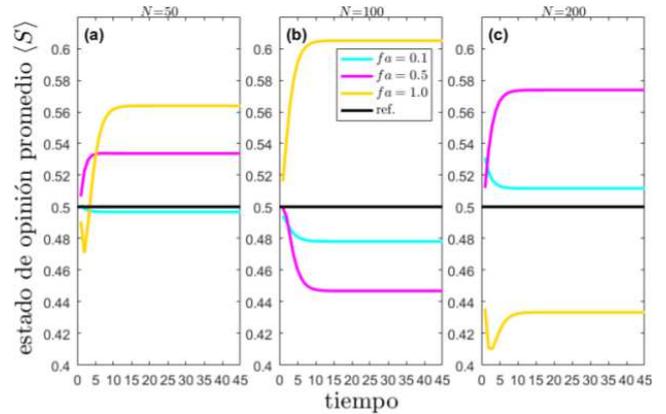


FIG. 11.— (Color online) Evolución del estado de opinión promedio en el caso en que no existe fuente global y solo existe una red de interacción entre individuos. Se realizaron experimentos para distintos tamaños de muestra N y para distintos grados de conectividad fa

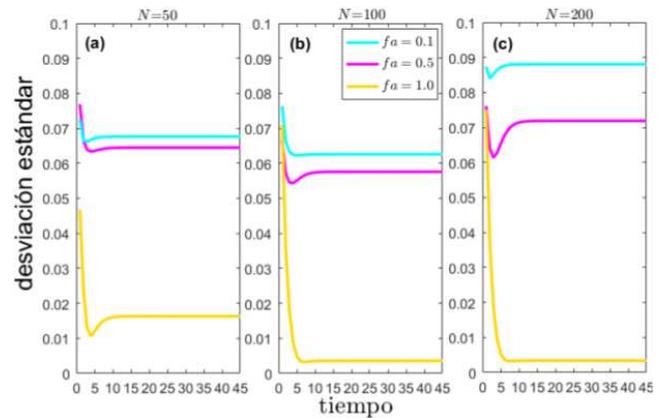


FIG. 12.— (Color online) Evolución de la desviación estándar en relación a la Fig. 11.

en la Fig. 12. A medida que el valor de fa aumenta, la dispersión de las opiniones disminuye; sin embargo, no se alcanza el consenso porque en ningún caso el valor de la desviación estándar se anula, pero tiende a hacerlo cuando fa toma el valor de 1.0. Nótese que si bien los valores de $\langle S \rangle$ se estabilizan, esto no implica que todos los agentes tengan la misma opinión; es decir, este hecho no garantiza consenso. Por otro lado, si la desviación estándar se aproxima a cero o tiende a cero, como en el caso de las curvas correspondientes a $fa = 1.0$ en la Fig. 12, podemos decir que existe una tendencia al consenso. Para aclarar más el concepto de consenso que utilizamos, observemos en la Fig. 11 que todas las curvas se estabilizan después de un cierto tiempo pero solo la curva correspondiente a la situación con $fa = 1.0$ tiende a tener una desviación estándar pequeña, lo que no ocurre con las curvas correspondientes a $fa = 0.1$ y $fa = 0.5$. Sin importar el valor que adquiera $\langle S \rangle$, se tendrá consenso si su desviación estándar correspondiente tiende a cero.

A continuación se muestra cómo influyen las condiciones iniciales de cada individuo en la evolución de la opinión promedio. Para ello se fijan los valores: $N = 50$, $fa = 1$ (red completamente ho-

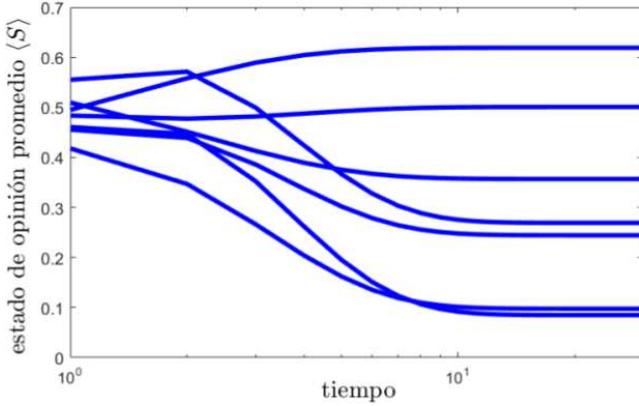


FIG. 13.— (Color online) Evolución del estado de opinión promedio (S) del grupo, para una muestra de 50 individuos y $fa = 1$ (red completamente homogénea). Las curvas han sido obtenidas a partir de una distribución normal de la opinión inicial de cada uno de los individuos cuya media está alrededor de 0.5.

mogénea), haciéndose variar la opinión inicial de cada individuo, siendo que estas están normalmente distribuidas con medias alrededor de 0.5 como se muestra en la Fig. 13, notándose que aún cuando los valores promedios de la opinión inicial son muy próximos, la evolución del estado de opinión promedio puede ser muy diferente de un experimento a otro, lo que indica una sensibilidad a las condiciones iniciales de las opiniones individuales.

7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se hizo el análisis de la evolución del estado de opinión de un grupo de individuos basado en un modelo discreto. Se analizaron cuatro casos para este modelo.

El primer caso corresponde a la situación en el que solo existe acción de una fuente global sobre los individuos. Se estudiaron los casos en que la conectividad a la fuente es binaria, es decir que toma solo los valores discretos 0 ó 1; o continua, en la que toma valores continuos en el intervalo entre 0 y 1, tomándose para cada caso las variantes constante o variable en el tiempo. Se obtuvo que no hay grandes diferencias entre los casos desarrollados, la diferencia principal, se da entre la situación de si la conectividad es constante o variable en el tiempo. Para la situación de conectividad variable, se tiene que el valor de estado de opinión promedio máximo alcanzado $\langle S \rangle_{MAX}$ es la unidad, con o sin red. Para conectividad constante, el valor alcanzado, es menor a la unidad. Las otras variantes de la conectividad fuente-individuo (discreta o continua, de distribución uniforme o gaussiana), dan lugar al mismo comportamiento al introducir la red. Consecuentemente, no es relevante cuál se escoja; sin embargo, la distribución gaussiana tanto para la conectividad fuente-individuo como para la red puede considerarse la situación más próxima a la realidad.

Como segundo caso, se consideró que además de la acción de la fuente de emisión global sobre los individuos, existe interacción entre los mismos mediante una red. Cuando se introduce la red, su efecto en una primera etapa es de ralentizar la evolución

de opinión promedio, pero durante la segunda etapa mas bien es el de contribuir a alcanzar una opinión promedio, mayor a la que se obtendría sin red. Lo anterior sucede independientemente del tipo de conectividad que exista entre los individuos y la fuente. Un segundo aspecto consistió en caracterizar este modelo realizando varios experimentos para distintos tamaños de muestras N y de grado de conectividad de la red fa . La importancia del grado de la red fa se manifiesta en el hecho de que presenta una proporcionalidad inversa con el estado de opinión promedio. Durante la segunda etapa, la variable fa deja de ser relevante y es más bien el tamaño de la muestra N el que determina el valor de opinión promedio máximo, de manera directamente proporcional. Cuando se tienen muestras muy grandes, el estado de opinión promedio tiende a 1, independientemente del grado de conexión de la red fa . Cuando las muestras son pequeñas no necesariamente se alcanza la unidad y el valor depende del grado conectividad de la red fa . Este efecto de añadir red es el mismo independientemente del tipo de conexión con la fuente. Un tercer aspecto, fue analizar el consenso y se encontró que el mismo siempre es alcanzado cuando $fa = 1$; además, mientras mayor es el tamaño de la red menor es la dispersión de las opiniones.

Como tercer caso, se consideró la introducción de individuos intransigentes en la muestra que tiene como efecto el de disminuir la opinión promedio máxima alcanzada. Se obtuvo que el efecto de los intransigentes no depende fuertemente de su número o fracción, sino del grado de conectividad de la red fa , dependiendo de una manera directamente proporcional. La variabilidad de la conectividad a la fuente magnifica el efecto de los intransigentes, produciendo además una fluctuación en la opinión promedio máxima. La presencia de intransigentes provoca dispersión de las opiniones y alejamiento del consenso.

Para el cuarto caso, se consideró que solamente existe red de individuos, observándose que el tamaño de la muestra N deja de ser relevante para el alcance del estado de opinión promedio de la estabilización; en contraposición, el grado de conectividad fa juega un rol importante, cuando es significativamente grande, provocando cambios drásticos en los valores de opinión promedio, cuando este es pequeño casi no existe evolución del estado de opinión promedio. Un resultado muy importante es la sensibilidad a las condiciones iniciales (en las opiniones individuales) para la evolución del estado de opinión promedio $\langle S \rangle$ que se manifiesta cuando se fijan los valores de N y fa . Este último resultado es muy importante pues es la rúbrica de un comportamiento no lineal que además permite pensar en la obtención de las cuencas de atracción y en posibles situaciones de control con base en el conocimiento de estas.

Este estudio puede ser ampliado considerando otro tipo de individuos tales como los denominados contrarios, los cuales son agentes que adoptan siempre una posición opuesta a la de la mayoría, cualquiera fuere esta, como lo especifica Galam (2004) o con

los denominados agentes flotantes que cambian su opinión para que esta sea acorde con la de la mayoría.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Carrera de Física y al Instituto de Investigaciones Físicas por habernos permitido

desarrollar esta investigación en las mejores condiciones.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Milgram S. (1967), *Psychology Today* **1**, 61.
- Travers J. & Milgram S. (1969), *Sociometry* **321**, 425.
- Watts D. J. & Strogatz S. H. (1998), *Nature* **393**, 440.
- Granovetter M. & Soong R. (1978), *The Journal of Mathematical Sociology* **9**, 165.
- Bavelas A. (1948), *Human Organization* **7**, 16.
- Freeman L. (1978), *Social Networks* **1**, 215.
- Freeman L., Roeder D. & Mullholland R. R. (1979), *Social Networks* **2**, 119.
- Castellano C., Fortunato S. & Vitorrio L. (2009), *Review of Modern Physics* **81**, 591.
- Weidlich W. & Haah G. (1983), *Concepts and models of a quantitative sociology*. (New York: Springer Verlag)
- Freeman L. (2004), *The development of social network analysis*. (Vancouver: Empiracl Press)
- Helbing D. (2010), *Quantitative sociodynamics: stochastic methods and models of social interaction processes*. (Berlin: Springer)
- Newman M. E. J. (2004), *The European Physical Journal B* **38**, 321.
- Newman M., Barabási A. L. & Watts D. J. (eds.) (2006), *The structure and dynamics of networks*. (Princeton: Princeton University Press)
- Barabási A. L. & Albert R. (1999), *Science* **286**, 509.
- Strogatz S. H. (2001), *Nature* **410**, 268.
- Arenas A., Díaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y. & Zhou C. (2008), *Physics Reports* **469**, 93.
- Wu C. W. (2007), *Synchronization in complex networks of non linear dynamical systems* (Londres: World Scientific Publishing)
- Lu X. B. & Qin B. Z. (2011), *Synchronization in complex networks* (Nueva York: Nova Science Pub. Inc)
- Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M. & Hwang D. U. (2006), *Physics Reports* **424**, 175.
- Estrada E. (2011), *The structure of complex networks: theory and applications* (Oxford: University Press)
- Barrat A., Barthélemy M. & Vespignani A. (2011), *Dynamical processes on complex networks* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Barabási A. L. (2002), *Link the new science of networks* (Cambridge: Perseus Publishing)
- Caldarelli G. & Catanzaro M. (2012), *Networks: a very short introduction* (Oxford: Oxford University Press)
- Bassett D., Alderson D. L. & Carlson J. M. (2012), *Physical Review E* **86**, 36105.
- Erdős P. & Rényi A. (1960), *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **5**, 17.
- Galam S. & Jacobs F. (2007), *Physica A* **381**, 366.
- Galam S. (2004), *Physica A* **333**, 453.

FULGURACIONES SOLARES DE SEPTIEMBRE 2017 REGISTRADAS POR EL OBSERVATORIO
GEOMAGNÉTICO DE VILLA REMEDIOS Y EL MONITOR DE NEUTRONES NM-64 DE CHACALTAYA
COTEJADAS CON REGISTROS DE FLUJO DE RAYOS X SOLARES DEL SATÉLITE GOES

SOLAR FULGURATIONS REGISTERED IN SEPTEMBER 2017 BY THE GEOMAGNETIC
OBSERVATORY IN VILLA REMEDIOS AND THE NEUTRON MONITOR NM-64 OF CHACALTAYA
CORRELATED WITH SOLAR X-RAYS FROM THE GOES SATELLITE

EDGAR LIBORIO RICALDI-YARVI¹, ROLANDO TICONA-PERALTA², PEDRO MIRANDA-LOZA³, & JAVIER
QUISPE-MAMANI⁴

Instituto de Investigaciones Físicas, Área de Geofísica (AGF)
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

(Recibido 25 de septiembre de 2017; aceptado 13 de noviembre de 2017)

RESUMEN

El Observatorio Geomagnético de Villa Remedios, latitud de $16^{\circ}46'0''$ S, longitud de $68^{\circ}10'0.1''$ W y está situado a 3949 metros sobre el nivel del mar (msnm), en tanto que el Monitor de Neutrones (NM-64) del Laboratorio de Rayos Cósmicos de Chacaltaya, está ubicado a una latitud de $16^{\circ}25'60''$ S, una longitud de $68^{\circ}10'0.1''$ W y 5220 msnm; ambos situados en las cercanías de la ciudad de La Paz, Bolivia, registran continuamente el comportamiento tanto del campo magnético de la Tierra como el arribo de radiación y partículas de rayos cósmicos. Sus registros de septiembre 2017 muestran eventos, denominados crochets magnéticos que están en correlación con los aumentos de intensidad del flujo de rayos X (Rx) registrados por los sensores instalados en los satélites GOES de la NASA ampliamente publicados que son el resultado del desarrollo de dos fulguraciones solares notables, además de sus consecuencias: la generación de una Tormenta de Radiación denominada GLE, inmediatamente después de la fulguración del 06.09.2017 y el 10.09.2017 y Tormentas Geomagnéticas, unas horas después, debidas a la eyección de masa coronal. Las fulguraciones solares convierten al Sol en un potente acelerador natural de partículas y en un emisor de masa coronal. Aquí se discuten algunas de las características de estos eventos y su posible aislamiento para posteriores estudios de detalle.

Código(s) PACS: 91.25.-r — 13.85.Tp — 28.20.-v

Descriptor: Geomagnetismo — Interacciones de rayos cósmicos — Física del neutrón

ABSTRACT

The Geomagnetic Observatory of Villa Remedios, with latitude $16^{\circ}46'0''$ S and longitude $68^{\circ}10'0.1''$ W located at 3949 masl and the Neutron Monitor (NM-64) of the Cosmic Ray Laboratory of Chacaltaya, located at a latitude of $16^{\circ}25'60''$ S, and longitude $68^{\circ}10'0.1''$ W and 5220 masl, both located in the vicinity of the city of La Paz Bolivia, continuously record the behavior of both the earths magnetic field and the radiation from cosmic ray particles. The September 2017 records show events called magnetic crochets, that correlate to increases in X-ray flux intensity recorded by sensors installed on the widely published NASA GOES satellites. These events are the result of the development of two notable solar flares, and the consequent generation of a radiation storm called GLE immediately arising from the fulguration of 06.09.2017 and 10.09.2017 together with geomagnetic storms which occurred a few hours after the coronal mass ejection, are shown. The solar flares convert the Sun into a powerful natural particle accelerator and a coronal mass emitter. Here we discuss some of the characteristics of these events and their possible isolation and use in further more detail studies.

Subject headings: Geomagnetism — Cosmic-ray interactions — Neutron physics

¹ericaldi@fiumsa.edu.bo

²rticona@fiumsa.edu.bo

³pmiranda@fiumsa.edu.bo

⁴javierlinux21@gmail.com

1. INTRODUCCIÓN

Los primeros días del mes de septiembre de 2017, la NOAA/SWPC anuncia la evolución de algunas regiones activas del Sol a la producción de potentes fulguraciones (Boulder (2017)). Estas condiciones del Sol implican poderosos campos magnéticos, una temperatura promedio de 60 000 K en su superficie y que su atmósfera en la parte de su corona sea muy caliente, alcanzando millones de K, genera dos hipótesis que tratan de explicarlas Zeilik & Gregory (1997): calentamiento de la corona solar a través de interacciones magnéticas, los bucles magnéticos coronales realizarían reconexiones y chasquidos desprendiendo calor, y ondas magnéticas que se originarían al interior de la superficie del Sol que por burbujeo liberarían energía magnética a la corona, la cual se tornaría en energía térmica. Estas estructuras convierten al Sol en un formidable acelerador de partículas, permitiendo así, el estudio detallado de la aceleración de los electrones y protones pero aun inconclusa de los iones, que a veces alcanzan energías correspondientes a velocidades relativistas. La superficie solar emite la mayor parte de la radiación electromagnética como luz visible como lo señalan Murphy (2008) y Hoeksema *et al.* (1982).

Con la finalidad de evitar el efecto de estos campos magnéticos, se estudian (observan) las partículas secundarias neutras y las radiaciones solares, puesto que estas se registran con excelente resolución espacial y temporal. Los neutrones solares se producen por reacciones nucleares a partir de la interacción entre los iones acelerados con energías de alrededor de 100 MeV y la atmósfera solar, librándose de la contaminación de radiación de electrones como lo exponen Ricaldi-Yarvi *et al.* (2007), Sako *et al.* (2007) y Muraki *et al.* (2008). Los electrones acelerados que habitan la atmósfera solar se mueven a energías extremadamente elevadas, convirtiendo a esta en una fuente natural de Rx por efecto sincrotrón, desaceleración de electrones, reducción de su velocidad en trayectorias espirales alrededor de las líneas de campo magnético de las protuberancias solares, produciendo pérdida de energía que genera Rx como lo mencionan Cordaro *et al.* (2018), y Kumar *et al.* (2015). La energía de estos Rx se reduce grandemente durante su viaje a la Tierra y pueden ser registrados de diversas formas, ya sea de manera directa o por sus efectos secundarios; entre estos, por variaciones del campo magnético de la Tierra en los observatorios geomagnéticos tal como lo indican Sako *et al.* (2007), y Matsushita & Campbell (1967).

2. INTERACCIÓN SOL-TIERRA

El campo magnético del Sol varía de estructuras complejas en años de Sol activo a configuraciones más simples en años de Sol quieto. Muchas de las variaciones magnéticas observables en la superficie de la Tierra tienen su origen en el comportamiento del Sol; estableciéndose relaciones entre el interior del Sol con la corona solar y en consecuencia relaciones entre el comportamiento del Sol

y la Tierra. Eventos solares, especialmente aquellos que ocurren en las zonas de actividad del Sol, las manchas solares, que producen radiación electromagnética pueden ser registrados por los correspondientes sensores instalados en satélites de investigación, de manera continua, como el satélite GOES de la NOAA/SPWC, que pueden medir el flujo de Rx que provienen del Sol, como lo especifican NOAA-SWPC (2017), Boulder (2017), y Hoeksema *et al.* (1982). Los observatorios geomagnéticos instalados sobre determinados puntos de la superficie de la Tierra, pueden también registrar estos eventos solares si son suficientemente intensos y únicamente en horas en que estos puntos están de frente al disco solar; es decir, durante las horas en que se tiene al Sol de frente y en consecuencia no registrarán eventos que se produzcan en horas de la noche terrestre, puesto que estos eventos, los electromagnéticos se producen a grandes velocidades por cortos intervalos de tiempo. Entonces, muchas de las fulguraciones del Sol no dejarán huellas en los registros magnéticos de otros puntos de la superficie de la Tierra tal como lo establece Hoeksema *et al.* (1982).

Las masas coronales eyectadas (MCE, CME, Coronal Mass Ejection en inglés) consecuencia de las Fulguraciones Solares también son registradas por los Observatorios Magnéticos de Superficie (OMS) con determinadas características. Así por ejemplo, un Comienzo Repentino de Tormenta (CRT, SSC, Sudden storm commencement por sus siglas en inglés) nítidas o difusas, a cualquier hora del día, incluidas horas de la noche, continuadas por las Tormentas Magnéticas (TM, MS, Magnetic Storm por sus siglas en inglés), intensas o débiles, como resultado de la interacción de la Nube de Plasma Eyectada (CME-Coronal Mass Ejection) por el Sol con el Campo Magnético (propio) de la Tierra. Lo anterior es explicado por Zeilik & Gregory (1997).

El nexo entre los fenómenos solares y los de la Tierra se realiza a través del Viento Solar (VS, SW, Solar Wind), la radiación solar constante y esporádica, el Campo Magnético Interplanetario (CMI, IMF, Interplanetary Magnetic Field), que se expanden en el espacio entre el Sol y la Tierra. El Campo Magnético del Sol se extiende allende de la posición de la Tierra; espacio a través del cual viaja la MCE (CME, Coronal Mass Ejection) del Sol, tal como lo establecen Matsushita & Campbell (1967), y Iyemori *et al.* (1979).

3. REGISTROS DE FLUJO DE RX Y OTROS, POR SENSORES INSTALADO EN EL SATÉLITE GOES DE LA NOAA/SPWC

Las Figs. 1 y 2 ilustran por separado los registros temporales de incremento significativo del flujo de Rx, obtenidos por los sensores del satélite GOES de la NOAA/SPWC. Con un incremento de $\Delta = 10^3$ W/m² sobre el nivel base para el 06.09.2017 y un incremento de $\Delta = 10^5$ W/m² sobre el nivel base para el 10.09.2017, respectivamente. Siendo este último el más significativo.

En la Tabla 1 se procede a elaborar una lista de los momentos significativos del comportamiento de

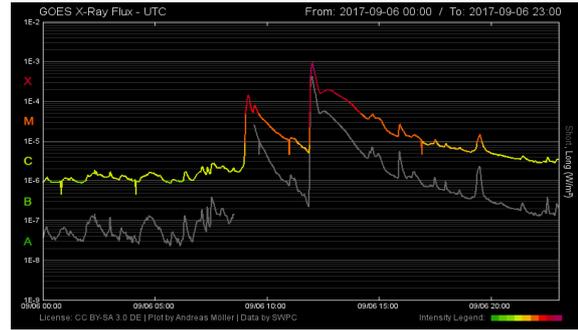
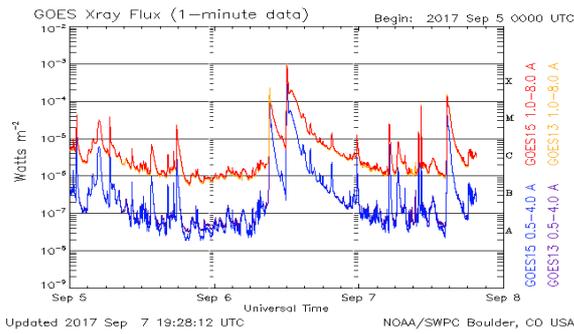


FIG. 1.— Registro del flujo de Rx del 06.09.2017.

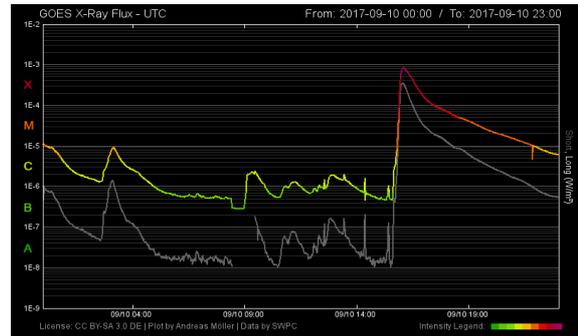
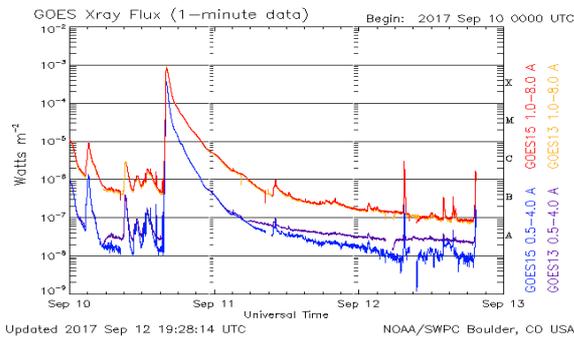


FIG. 2.— Registro del flujo de Rx del 10.09.2017.

CORRELACION: DATOS FLUJO DE RAYOS X CON REGISTROS MAGNETICOS
 Registros: GOES X - ray Flux (1-Minute data)
 Registros: Componentes H,D y Z, Observatorio Villa Remedios - Bolivia (1-Minute data)

AÑO	MES	DIA	INICIO	MAXIMO	FINAL	Flujo, Watts/m ²	Clase	Registro magnetico del Flare	Tiempo viaje radiacion	Posicion Area activa solar	Registro magnetico, componente H	Tiempo viaje Nube plasma
2017	9	3	4:18	4:41	4:54	10 ⁻⁵	C1.0	Imperceptible			Quieto	
2017	9	4	8:08	8:14	8:24	10 ⁻⁵	C2.9	Imperceptible			Quieto	
2017	9	4	12:12	12:25	12:33		C8.3	Imperceptible			Quieto	
2017	9	4	20:45	20:50	20:55	10 ⁻⁵	C1.9	Imperceptible			Quieto	
2017	9	5	0:30	0:36	0:41	10 ⁻⁵	C9.8	Imperceptible			Quieto	
2017	9	5	4:33	4:53	5:07		M3.2	Imperceptible			Quieto	
2017	9	5	16:14	16:19	16:22	10 ⁻⁵	C3.7	Imperceptible			Quieto	
2017	9	5	17:20	17:39	17:48	10 ⁻⁵	C6.0	Crochet, 17:47:00, apenas reconocible	0:08	Casi frontal, 12674-E	Quieto	
2017	9	6	7:29	7:34	7:48		C2.7	Imperceptible			Quieto	
2017	9	6	8:57	9:10	9:17	10 ⁻⁶	X2.2	Crochet, 09:18:00, reconocible	0:08	Casi frontal, 12674-E-N	Quieto	
2017	9	6	11:53	12:02	12:10	10 ⁻³	X9.3	Crochet, 12:10:00, bien definida	0:08	Frontal, 12673-E-S	Quieto	
2017	9	6	21:06	21:12	21:20		C1.5	Imperceptible			Quieto	
	9	6	23:50								Variable, 23:50 SSC, tormenta, Kp=5, G1	1 dia 6 h 3 min
2017	9	7	4:59	5:02	5:08	10 ⁻⁴	M2.4	05:12:00, apenas reconocible.	0:08		Disturbado	
2017	9	7	6:19	6:28	6:42		C8.2	Imperceptible			Disturbado	
2017	9	7	10:11	10:15	10:18		M7.3	10:23:00, apenas reconocible.	0:08		Disturbado	
2017	9	7	14:20	14:36	14:55		X1.3	Crochet, 14:44:00, reconocible.	0:08	Casi frontal, 12673-E-S	Disturbado	
	9	7	20:50								Variable, 20:50, sin SSC, Tormenta, Kp=6, G2	1 dia 11h 42min
	9	7	23:05								Variable, 23:05 SSC, tormenta, Kp=6, G2	1 dia 10h 50min
2017	9	7	23:33	23:39	23:44		M1.2	Imperceptible				
2017	9	8	5:31	5:48	5:53	10 ⁻⁴	C8.2	05:56:00, apenas reconocible	0:08		Disturbado	
2017	9	8	7:40	7:49	7:58		M8.1	07:57:00, apenas reconocible	0:08		Disturbado	
2017	9	8	15:09	15:47	16:04		M2.9	Crochet, 15:55:00, reconocible	0:08	12673, Lejano E	Disturbado	
	9	8	22:50								Variable, 22:50 SSC, sin tormenta	1 dia 8h 4min
	9	8									Disturbado, alta frecuencia entre 12:00-18:00	
2017	9	9	0:36	0:39	0:46	10 ⁻⁴	C1.0	Imperceptible			Quieto	
2017	9	9	3:57	4:01	4:07		C4.2	Imperceptible			Quieto	
2017	9	9	10:57	11:04	11:42		M3.7	Crochet, 11:12:00, apenas reconocible	0:08	12673 en el limbo E	Quieto	
2017	9	9	23:33	23:45	23:56		M2.1	Imperceptible			Quieto	
2017	9	10	2:40	3:09	3:25	10 ⁻⁵	C9.0	Imperceptible			Quieto	
2017	9	10	9:02	9:20	9:37		C2.9	09:28:00, apenas reconocible	0:08		Quieto	
2017	9	10	12:38	12:54	13:24	10 ⁻⁵	C1.9	13:02:00, apenas reconocible	0:08		Quieto	
2017	9	10	15:35	16:02	16:31	10 ⁻³	X8.2	Crochet, 16:10:00, bien definido	0:08	Frontal, 12678	Quieto	
	9	10	22:45								Variable, 22:45 SSC, tormenta, Kp=5, G1	1 dia 11h 33min
2017	9	11	10:00	10:12	10:xx	10 ⁻⁶		10:19			Quieto	
2017	9	12	7:22	7:27	7:34	10 ⁻⁶	C3.0	07:35:00, apenas reconocible	0:08		Disturbado	
											Variable, 00:40 SSC, sin tormenta	1 dia 9h 26min
2017	9	12	20:01								Variable, 20:01 SSC, tormenta, Kp=6, G2	1 dia 9h 32min

TABLA 1
EL COMPORTAMIENTO DE LA ACTIVIDAD SOLAR

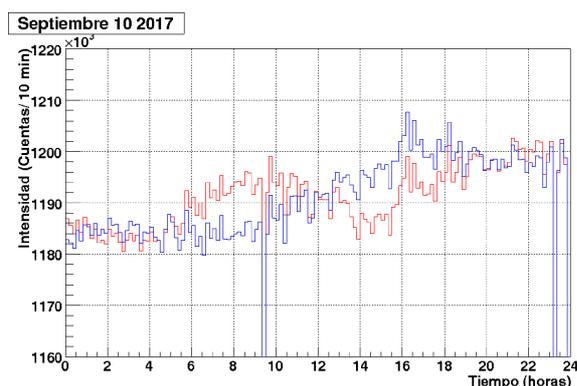


FIG. 3.— Registro de la fulguración solar del 10.09.2017 por el Monitor de Neutrones (MN) del Observatorio de Rayos Cósmicos de Chacaltaya (ORCCh) con una resolución promedio de cuentas cada 10 minutos. La línea azul es el registro de los eventos de neutrones, pasando de un nivel de 1185×10^2 a un nivel de 1208×10^2 cuentas por algunas horas, con un aumento de $23 \times 10^2 = 2300$ cuentas, la línea roja es el registro de la presión en el observatorio para corregir los eventos.

la actividad solar: fechas y horas de los eventos de Fulguraciones solares que se dieron en el transcurso del tiempo (del 3 al 13 de Septiembre), el Flujo expresado en W/m^2 , su clasificación correspondiente de acuerdo a escala en uso, la localización de la zona activa sobre el disco solar y se incluyen sus efectos más notables sobre el campo magnético de la Tierra, los Crochets y las Tormentas magnéticas, con finalidades de correlación.

4. REGISTROS DEL MONITOR DE NEUTRONES NM-64 DE CHACALTAYA

La Fig. 3 que se presenta a continuación ilustra el incremento temporal de las cuentas de neutrones solares para promedios de 10 minutos. La línea azul representa los eventos de neutrones y la línea roja la presión en el observatorio para fines de corrección.

La fulguración solar del 10.09.2017 de categoría X8.2 generó una Tormenta de Radiación (TR, RS Radiation Storm) de categoría S3 en la escala de la NOAA, que duró algunas horas. Además de producir neutrones, aceleró otras partículas como protones que arriban a la Tierra 30 minutos después, siendo estas denominadas Partículas Solares Energéticas (PSE, SEP solar energetic particles). Este Registro es uno de los más apropiados que define el denominado Aumento del Nivel de Base (ANB, GLE por sus siglas en inglés, Ground Level Enhancement), representando la segunda GLE del presente ciclo solar; en este caso, obtenido por un monitor de neutrones localizado a bajas latitudes, como lo es el Observatorio de Rayos Cósmicos de Chacaltaya (ORCCh) situado a una Latitud geográfica de $16^{\circ}25'60''$ S, a una longitud de $68^{\circ}10'0.1''$ W y a 5249 msnm. caracterizado por un cutoff, rigidez de corte magnética, alto de 12 GV. En este caso la conexión magnética Sol-Tierra se realiza por la Lámina de Corriente de la Heliosfera (LCH, HCS heliospheric Current Sheet) que consiste de una lámina que se origina en el ecuador solar y se extiende flameando como una pollera de bailar-

ina por todo el sistema solar. Todos los nueve planetas orbitan dentro de ella, esta es una Lámina de corrientes donde la polaridad del campo magnético del Sol cambia de positivo en el norte a negativo en el sur, dentro de ella fluye una corriente eléctrica muy pequeña de cerca de $10^{-10} [A/m^2]$. El espesor del plano de corriente es de cerca de 10000 km cerca de la órbita de la Tierra. La Tierra se zambulle hacia abajo y hacia arriba de la lámina de corriente ondulante. En una parte, el campo magnético del Sol apunta hacia el norte (hacia el Sol), en la otra parte este apunta hacia el sur (hacia fuera del Sol). Los campos magnéticos del Sol que apuntan hacia el sur tienden a cancelar el campo magnético propio de la Tierra, entonces la energía del viento solar puede penetrar el espacio local alrededor de nuestra planeta y alimentar las tormentas magnéticas.

5. REGISTROS DEL OBSERVATORIO GEOMAGNÉTICO DE VILLA REMEDIOS

El Observatorio Geomagnético de Villa Remedios (VRE) localizado en las coordenadas geográficas, $19K588448.58$ m W, 8145634 m S y 3949 m de elevación sobre el nivel del mar, ubicada a 13 Km al sur de la ciudad de La Paz, en sus registros correspondientes a los primeros días de Septiembre, 3 al 13 del 2017, en sus tres componentes: H , D y Z , muestra señales muy claras de origen solar.

La parte Variográfica del Observatorio consiste de una cabeza sensora de tres componentes, X, Y y Z , tipo Flux-gate, que junto a un sensor GPS y un Magnetómetro de Protones está conectado a un Registrador de Datos donde se registran los valores de t y F con X, Y, Z como variaciones relativas y se calculan H y D preliminares. A estos registros se acompaña con mediciones de Valores Absolutos de las componentes D e I que se realiza con un Teodolito magnético en la sala de Absolutas, los datos son procesados para producir los valores de H , D y Z en sus correspondientes magnitudes físicas y sus respectivas Líneas Base de control.

Las Figs. 4 y 5, que continúan, por separado ilustran claramente por correlación temporal en sus tres componentes H , D y Z el momento y desarrollo de los Crochets magnéticos, variaciones algunas veces intensas y de corta duración, señales magnéticas impresas por los Rx y por los Neutrones emitidos por las fulguraciones solares del 6 y el 10 de Septiembre 2017, respectivamente.

De todos los registros disponibles y la información contenida en la Tabla 1, a continuación se resumen los eventos más notables:

SEÑALES RECONOCIBLES Y DESTACADAS EN LOS REGISTROS MAGNÉTICOS DE VILLA REMEDIOS

- 05.09.2017 17:47 crochet magnético claramente perceptible.
- 06.09.2017 09:16 Crochet magnético apenas perceptible, Fulguración clase X8.3
- 06.09.2017 12:10 crochet magnético bien definido, 30 [nT]/10 [min] en la componente H , Recuperando altura apuntando hacia el W., Fulguración X9.3, muy intensa.

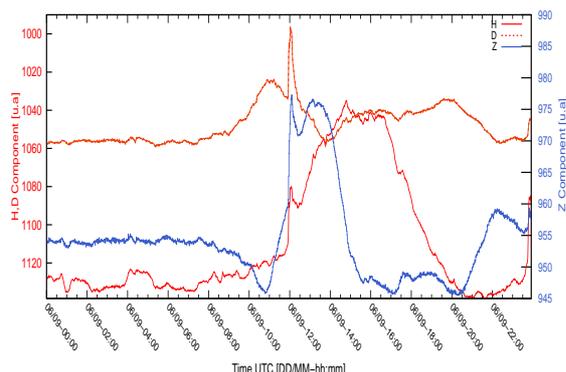


FIG. 4.— Registro de un Crochet, en las tres componentes del campo magnético, mejor definido en sus componentes H y Z , correspondiente al 06.09.2017, obtenido por el Observatorio Geomagnético de Villa Remedios (VRE) - Bolivia. H y Z se miden en [nT] (nano tesla) y D en minutos de arco (u.a. unidades arbitrarias) con el propósito de graficarlas todas en una sola figura.

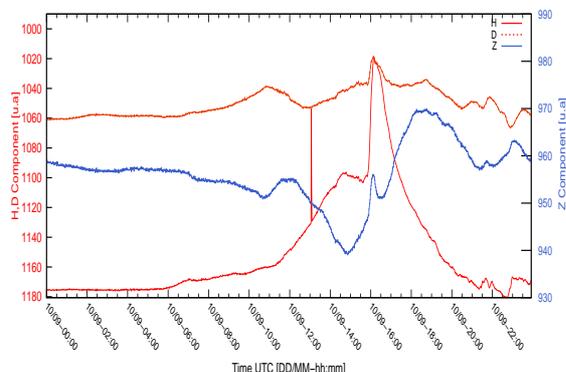


FIG. 5.— Registro de un Crochet, en las tres componentes del campo magnético, notable en su componente H , correspondiente al 10.09.2017, obtenido por el Observatorio Geomagnético de Villa Remedios (VRE), Bolivia. H y Z se miden en nT y D en minutos de arco (u.a. unidades arbitrarias) con el propósito de graficarlas todas en una sola Figura.

- 07.09.2017 14:44 crochet magnético perceptible, circuito horizontal hacia el E, cambio al W.
- 08.09.2017 15:55 Crochet magnético perceptible, compresión de H y Z , cambio hacia el W.
- 09.09.2017 11:12 crochet magnético apenas perceptible con cambio hacia el W.
- 10.09.2017 16:10 crochet magnético **bien definido**, 120 [nT]/80 [min] en H , cambio de dirección al W., Fulguración X 8.2
- 11.09.2017 10:19 crochet magnético apenas perceptible, cambios muy pequeños.

De la lista (items) mostrada se enlistan algunas de las señales magnéticas perceptibles al ojo humano que están en correspondencia (correlación) con los registros de Flujo de Rx solares del satélite GOES de las mismas fechas. Ver las Figs. 1, 2 y 3 correspondientes para mayor detalle.

6. DISTURBANCIA DEL CAMPO MAGNÉTICO EN EL ECUADOR DE LA SUPERFICIE DE LA TIERRA, EL ARO DE CORRIENTE ECUATORIAL, LOS ÍNDICES DST

Las Figs. 6, 7 y 8 que se muestran a continuación ilustran los registros magnéticos de días continuados en sus:

Componente H superpuesto con el modelo (p.a., primera aproximación) de su Variación Diaria Solar (VDS), aclarando los excesos de campo magnético, correspondientes a circuitos eléctricos ionosféricas y otros, y los déficits de campo magnético producidos por interacción entre la Masa Coronal Eyectada (MCE) con la Magnetosfera terrestre, Tormentas Magnéticas (MT). La Componente D superpuesta con su modelo VDS p.a. correspondiente, y La Componente Z , también superpuesta con su VDS p.a., respectivamente.

7. COMPARACIÓN DE LOS REGISTROS DE LOS DIFERENTES EXPERIMENTOS

A continuación con fines de comparación (correlación) presentamos los registros de días continuados, del 03 al 13 septiembre 2017, de los diferentes experimentos en consideración, adicionando la Curva de índices Dst para el mismo lapso de observación.

7.1. Curva de Residuos de la Componente H

La Fig. 9, Curva de residuos de la componente H , es el resultado de la supresión de la Variación Diaria Solar (VDS), la misma que fue definida como la media de las VDS's de los días más quietos del mes.

7.2. Curva de Residuos de la Componente H y la Curva de índices Dst .

La Fig. 10, muestra la superposición de la Curva de residuos de la Componente H con la Curva de índices Dst producida por el centro mundial de datos de Kyoto-Japón para las mismas fechas.

Los Excesos significativos por encima de la curva de índices Dst en la Figs. 10 y 11 corresponderían a los eventos denominados Crochets magnéticos desarrollados en fechas 06.09.2017 y 10.09.2017, que posiblemente no son considerados por el mecanismo que calculan estos índices, precisamente porque los crochets magnéticos son eventos generalmente de corta duración de menos de una hora y esporádicos, temporalmente irregulares, generados por fenómenos exclusivos de naturaleza electromagnética, radiaciones y partículas solares energéticas. Son premonitorios al desarrollo de las Tormentas Magnéticas, interacción del campo magnético de la Tierra con el plasma eyectado por la fulguración solar de naturaleza mecánica, no necesariamente registrable en los observatorios geomagnéticos debido a la direccionalidad de las erupciones del material solar. La sustracción de la Curva de índices Dst de la curva de Residuos de la Componente H proporciona una curva que denominamos Residuo final de H , que visualiza con mayor nitidez los eventos geomagnéticos de alta frecuencia, que se desarrollan rápidamente. Estos eventos positivos son de carácter electromagnético y en gran medida están vinculados a la Ionosfera en sus diferentes niveles y

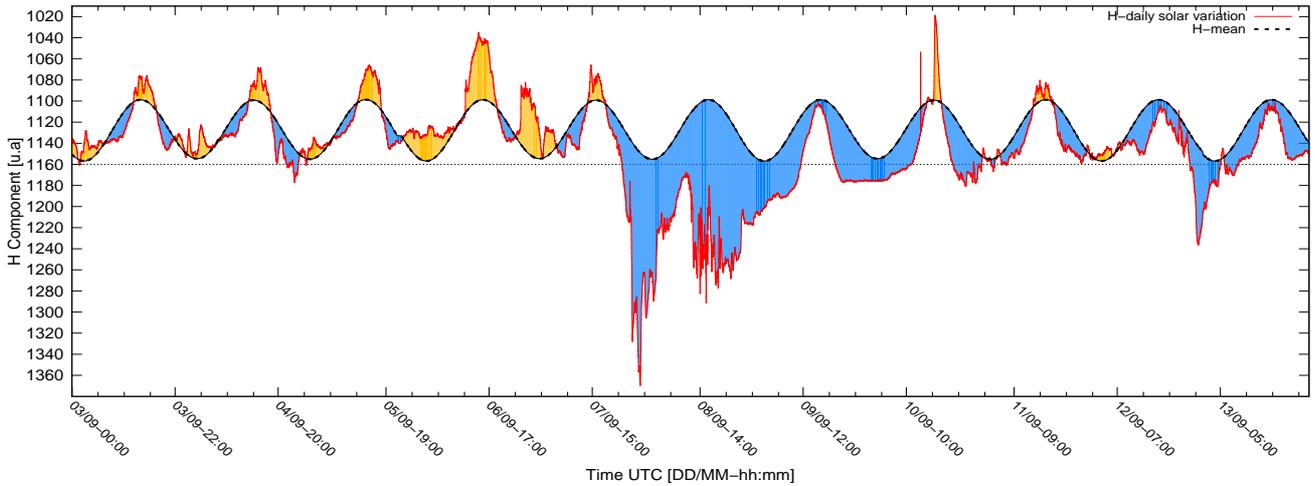


FIG. 6.— Registros de días continuados de la componente H incluyendo la superposición del modelo de la Variación Diaria solar (VDS p.a.), el remarcado con amarillo de los excesos de campo magnético correspondientes a Crochets y otros eventos magnéticos producto de corrientes eléctricas ionosféricas incrementadas y con azul los déficits de campo magnético producto de la interacción de la Masa Coronal Eyectada (MCE) con la Magnetosfera terrestre, Tormentas Magnéticas (TM).

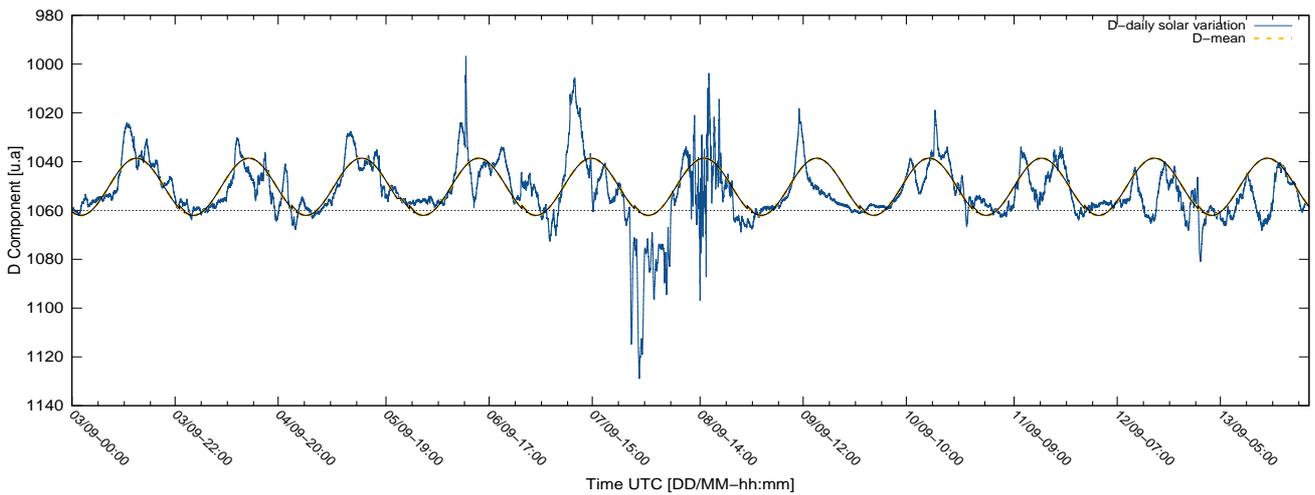


FIG. 7.— Registro de días continuados de la componente D con superposición del modelo de la VDS p.a, correspondiente.

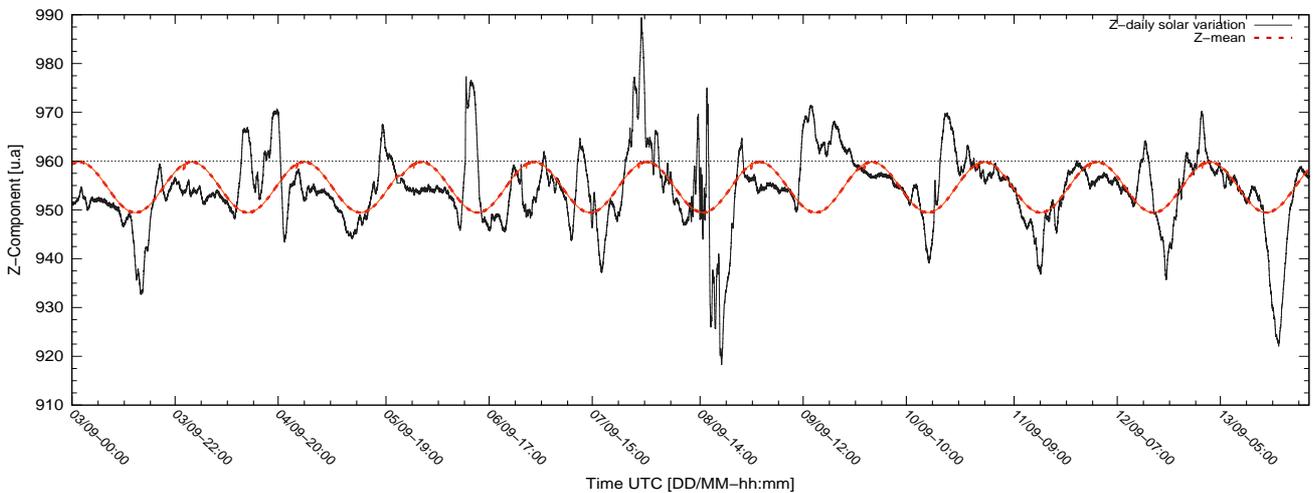


FIG. 8.— Registro de días continuados de la componente Z con superposición del modelo de la VDS p.a, correspondiente.

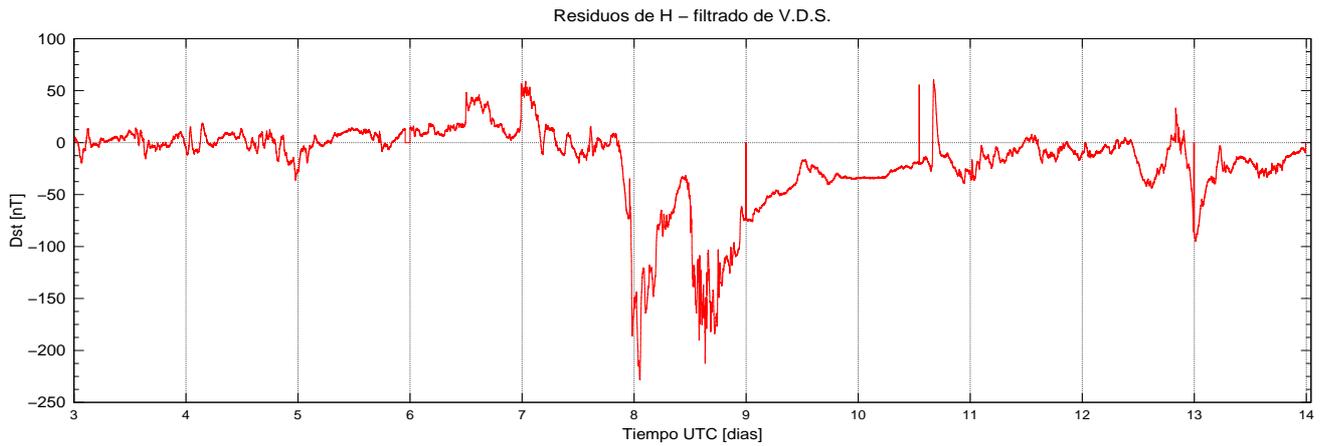


FIG. 9.— Curva de Residuos de la componente H , filtrada la Variación Diaria solar (VDS), registrada por el Observatorio Geomagnético de Villa Remedios (VRM) de Bolivia.

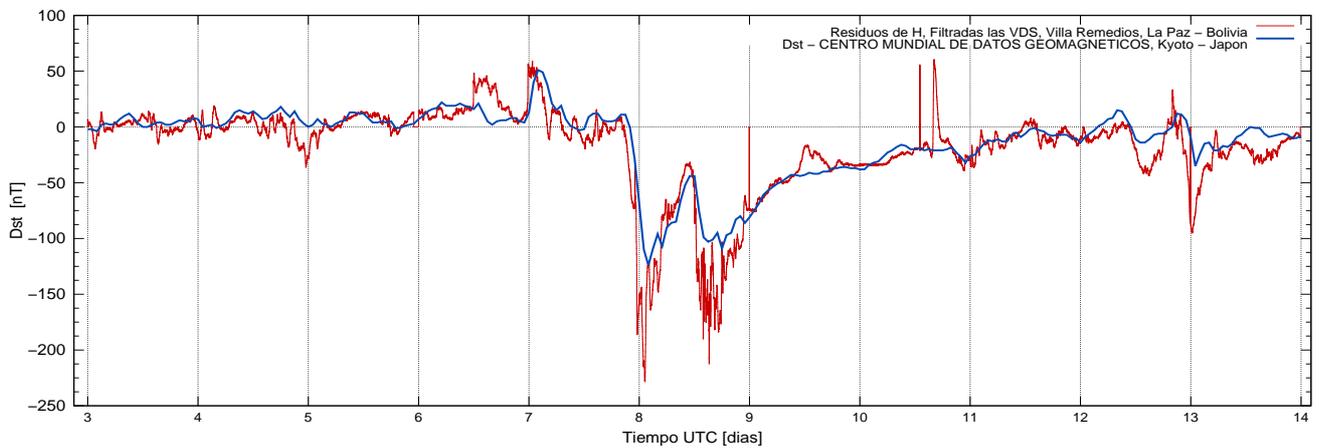


FIG. 10.— Superposición de la curva de residuos de la componente H , filtrada la Variación Diaria Solar (VDS), registrada por el Observatorio Geomagnético de Villa Remedios (VRM) de Bolivia con la Curva de índices Dst producida por el Centro Mundial de Datos de Kyoto- Japón para las mismas fechas.

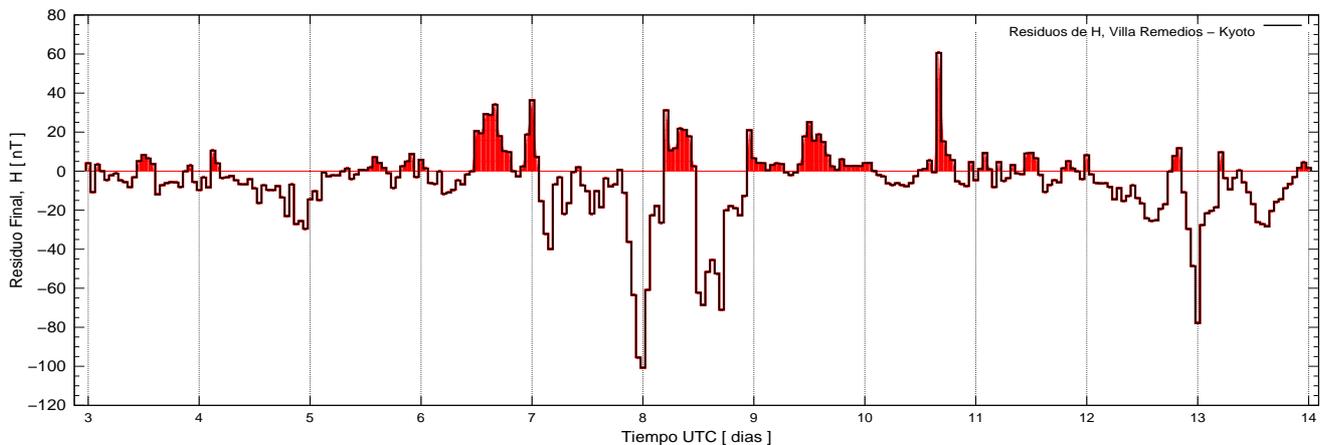


FIG. 11.— Curva de residuos finales de H . Las señales positivas pintadas de rojo corresponden a circuitos eléctricos que se desarrollan en la ionosfera, dos de los más notables son los de los días 06.09.2017 y 10.09.2017. Los demás no son inmediatamente reconocibles en el registro inicial. Las variaciones negativas también son de alta frecuencia en consecuencia de carácter electromagnético que se dan en la magnetosfera.

a flujos de corriente por la lámina neutral de la magnetosfera, mientras que los negativos estarían vinculados a fluctuaciones rápidas de la magnetosfera en su aro de corriente.

7.3. Registros del Flujo de Rx del Satélite GOES de la NASA

Los excesos significativos del flujo de Rx de la Fig. 12 obtenidos por el Satélite GOES de la NASA/SWPC, corresponden a los eventos denominados Crochets magnéticos desarrollados en fechas 06.09.2017 y 10.09.2017.

7.4. Registros del monitor de neutrones MN-64 del observatorio de rayos cósmicos de Chacaltaya - Bolivia.

Los registros de las Figs. 11 y 13 no alcanzan a ilustrar una clara correlación inversa entre los comportamientos del Campo Magnético de la Tierra (CMT) y el Flujo de Neutrones Solares (FNS) que llegan a la Tierra. La Tormenta Magnética (TM) generada el 10.09.2017, no es clara en su CRT y también es baja en intensidad. Pero si se observa un GLE muy nítido.

8. CROCHETS MAGNÉTICOS

Dos de los Crochet magnéticos enlistados están claramente muy bien definidos y están en correspondencia con la emisión de Rx, emitidos desde una posición frontal de la Región Activa (Mancha Solar) Nro. 12673 en Septiembre 6 y de la Región Activa Nro. 12678 no frontal en Septiembre 10, respectivamente, observados con relación a la posición terrestre de Villa Remedios donde fueron registrados a las 12:10 y 16:14 UT, 8:10 y 12:14 hora local (LT), horas de la mañana, en el lugar de registro, respectivamente. En los registros de Flujo de Rx del GOES, los momentos de máxima intensidad de las Fulguraciones son indicadas con las horas 12:02 y 16:06 UT, respectivamente. De los datos indicados se infiere una diferencia de tiempo igual a 8 minutos que correspondería al tiempo de viaje entre el Sol y la Tierra de esta radiación de alta energía. La intensidad de la Variación del Campo Magnético Terrestre producidas por ambas Fulguraciones solares son relativamente pequeñas, de 30 [nT] con 20 [min] de duración y de 120 [nT] con 80 [min] de duración en la componente H , respectivamente. Son campos magnéticos adicionales que se enganchan al Campo Magnético Propio de la Tierra, denominados Crochets magnéticos (CM). El primer crochet magnético sería el resultado de un chorro de corriente eléctrica que se mueve hacia el Este hacia alturas mayores con un gran cambio de dirección hacia el Oeste en horas de la mañana (8:10 LT). El segundo provendría de un chorro de corriente eléctrica que se mueve horizontalmente hacia el Este sin un cambio de dirección significativo hacia el Oeste, comenzando justo al medio día con un tiempo de duración de 80 minutos, que como se dijo anteriormente están en correspondencia con las Fulguraciones solares con emisión de Rx de gran intensidad de clase X.

8.1. Tormentas magnéticas

Ambas Fulguraciones solares han logrado la Eyección de Masa Coronal (CME), Nube de Plasma Solar (NPS), que producen Tormentas Magnéticas (TM) en el Campo Magnético Propio de la Tierra (CMT). La primera de aproximadamente 800 nT, y la segunda de muy escasa magnitud, al haberse producido el contacto de la MCE con el Campo Magnético de la Tierra (CMT, Magnetósfera) con las siguientes características:

- A las 23:05 UT del 7 de Septiembre, significando un tiempo de viaje de 34 h 45 min, es decir 1 día 10 h y 45 min, generando un Comienzo Repentino de Tormenta (CRT=SSC, Sudden Storm Commencement) pequeño de 30 [nT] y 15 minutos de duración, correspondiente a la etapa de compresión del CMT para continuar con una abrupta caída de su Fase Principal (FPT), descompresión o expansión de la magnetosfera terrestre o del CMT, a niveles muy bajos respecto del Nivel de Referencia Normal (NRN), 250 [nT] aproximadamente. Continuada por una Fase de Recuperación (FR) suave de más de 1 día de duración. El nivel de la componente H retorna a valores bajos durante todo el día, 8 de Septiembre. Debido a la ocurrencia de una nueva perturbación se presentan altas frecuencias a partir de las 12:00 UT hasta las 16:00 UT para luego alcanzar una fase recuperativa nueva suave hasta el medio día del siguiente día, 9. Tormenta Magnética (TM) que puede ser calificada de nivel: índice $K_p = 7$ a 8, $G3$ a $G4$.

La segunda que arriba a las 00:40 UT del 12 de septiembre que no genera un CRT (Storm Sudden Commencement) claro, de apenas 8 nT y 20 min, de duración y que tampoco genera una Tormenta (Magnetic Storm) de características intensa, pero si logra generar una fase principal de 100 nT y una fase recuperativa suave característica de 1 día de duración.

Los demás registros de las Fulguraciones Solares (Flares) muestran características similares pero son difíciles de reconocerlas magnéticamente.

En fecha 10.09.2017 el Monitor de Neutrones NM-64 localizado en el monte Chacaltaya, también en sus registros muestra una señal notable en su gráfica construida con base en promedios de 10 minutos, que coinciden con los tiempos de arribo del flujo de Rx del sensor del satélite GOES. Los Rx junto con otras radiaciones penetrantes no cuentan con masa ni carga viajan a velocidades iguales a la de la Luz y no son interferidos por los campos magnéticos interplanetarios y tiene capacidad de ionización. Los neutrones que si tienen masa se mueven a velocidades por debajo de la velocidad de la luz, es decir tardan un poco más que las radiaciones y tienen capacidad de ionización por interacción nuclear.

Estos eventos solares, como ya dijimos, impactan

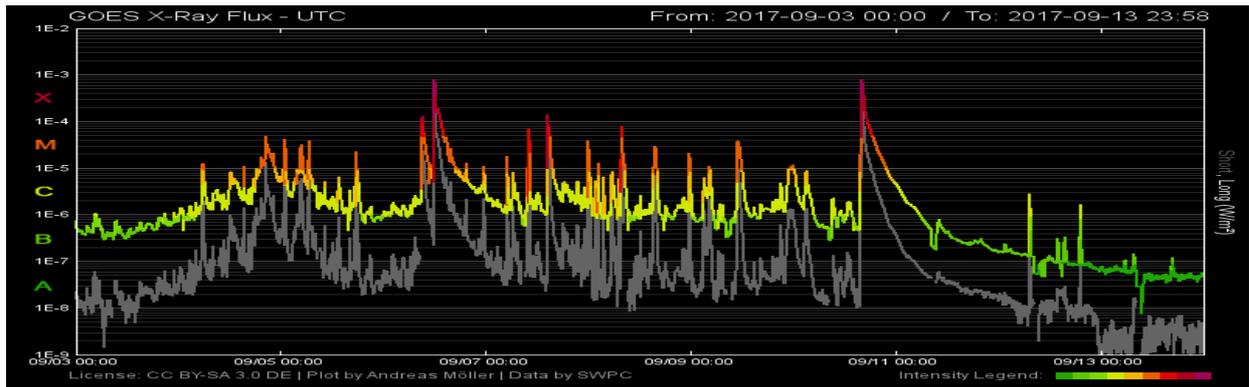


FIG. 12.— Registro de días continuados de flujo de Rx solares obtenidos por el Satélite GOES de la NASA/SWPC., mostrando dos picos notables en fechas: 06.09.2017 y 10.09.2017 que están en correspondencia con las fulguraciones que se desarrollan en la superficie del Sol.

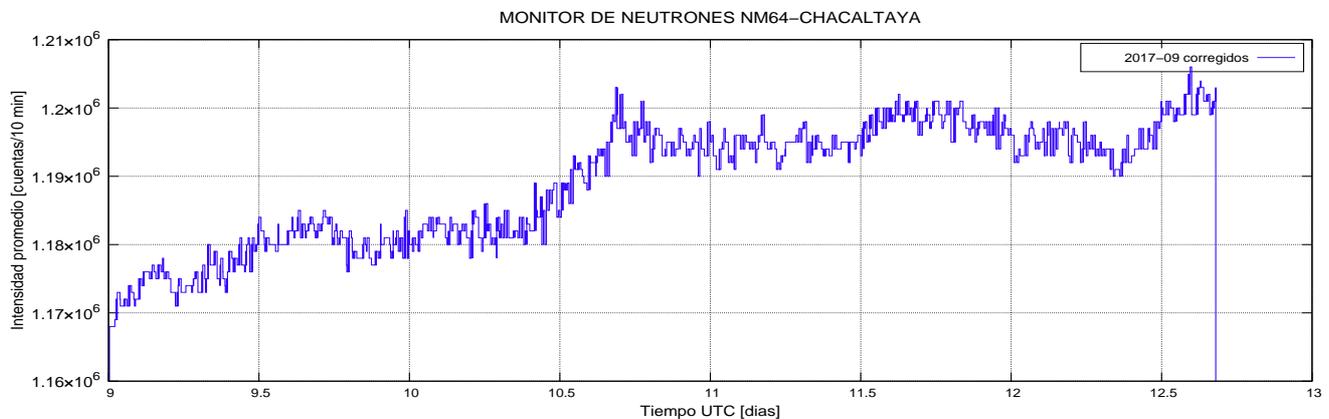


FIG. 13.— Registro de días continuados de las Cuentas de neutrones con promedio de 10 minutos, corregidos ilustrando el paso de un nivel de 1.18×10^6 a 1.2×10^6 representando un incremento de $\Delta = 0.02 \times 10^6 = 2.0 \times 10^4 = 20000$ cuentas en la intensidad de los neutrones solares, definiendo un GLE (Ground Level Enhancement) que sería el segundo del presente ciclo solar, a continuación del momento de desatarse la fulguración solar del 10.09.2017.

de acuerdo a su comportamiento sobre los átomos de la ionosfera que principalmente son de oxígeno, generando circuitos eléctricos intensos de corta duración que modifican de acuerdo a dirección de arribo los circuitos eléctricos a nivel ionosfera circunscriptos al lado iluminado de la Tierra que son los responsables para la generación de los campos magnéticos secundarios denominados Crochets magnéticos.

9. CONCLUSIONES

La observación cuidadosa de los registros de la Tabla 1 de resumen muestra las características del comportamiento del campo magnético terrestre relacionado al comportamiento del Sol, que es motivo de estudio en el presente trabajo, y que nos conducen a las siguientes conclusiones:

- Las imágenes del Sol en diferentes frecuencias y para diferentes radiaciones y los registros del flujo de Rx logrados por el satélite GOES proporcionan abundante información de lo que sucede en la superficie y la atmósfera solar: Velocidad de movimiento rotacional del Sol alrededor de su propio eje de rotación, número y posición de las regiones activas (manchas) del

Sol y proporciona la posibilidad de estudiar los mecanismos de generación de las diferentes radiaciones como: los rayos gamma, Rx, protones e iones en general, las estructuras que las disparan al espacio exterior, las direcciones preferenciales de emisión de las radiaciones electromagnéticas y la eyección de masa coronal (partículas), además de otros.

- Al momento de estudiar los registros de los observatorios geomagnéticos de superficie es muy importante considerar la posición relativa de estos respecto a lo que sucede en la atmósfera solar como por ejemplo la posición de frente del observatorio geomagnético respecto del disco solar, la posición de las regiones activas del Sol respecto de su meridiano central, si están adelantadas retrasadas o están en el limbo del disco solar a punto de pasar al otro lado, parte trasera del disco solar.
- No todas las señales de flujo de Rx registradas por los detectores y las cámaras fotográficas de los satélites están registradas como señales magnéticas en los registros de los observatorios

de superficie.

- Porque, sin importar la posición de la región activar solar que la genera, La dirección de emisión de los Rx emitidos por el Sol parece ser radial (hay que estudiar con mas detenimiento para determinar si tiene alguna dirección preferencial, que parece que la tiene!), produciendo señales de diferente intensidad.
- Las fulguraciones que se produjeron en horas de la noche correspondiente al observatorio en consideración.
- Los efectos magnéticos de los Rx y del proceso de fulguración en sí, son tan rápidos que no pueden dejar huellas en otros instantes.
- Fulguraciones poderosas de regiones activas del Sol que no estuviera en posición frontal no están en posibilidad de generar señales geomagnéticas observables en horas del día del observatorio.
- No todas las Eyecciones de masa coronal (CME) que pudieran generar las fulguraciones solares están en posibilidades de generar Tormentas magnéticas, ni siquiera SSC claras debido a que:
- Las CME son direccionales, con dirección preferencial radial. Para lograr generar tormentas magnéticas deben tener una posición muy cercana a la frontal, adelante o atrás, observada desde el observatorio geomagnético. De lo contrario, por más que en la superficie del Sol se produzcan poderosas fulguraciones con gran emisión de CME estas no impactaran sobre la magnetosfera terrestre.
- La Fulguración de categoría X9.3 ocurrida, el 06.09.2017, en la superficie solar produjo:
- Un crochet magnético claramente definido por la correlación temporal de señales en las tres componentes del campo magnético terrestre registradas por el Observatorio Geomagnético de Villa Remedios, las mismas que también están en correlación temporal con los registros de Flujo de Rx obtenidos por los sensores instalados sobre el satélite GOES de la NASA.

- Esta misma fulguración solar eyecta masa coronal que después de un viaje de 34 horas con 45 minutos impactan sobre la magnetosfera terrestre generado una Tormenta Magnética típica
- la Fulguración solar del 10.09.2017 de categoría X8.2, también produce:
- Un crochet magnético, como resultado de una clarísima correlación temporal de las variaciones en los registros de las tres componentes del campo magnético, obtenidos por el Observatorio Geomagnético de Villa Remedios. También, estas señales están en perfecta correlación temporal con los registros de Flujo de Rx obtenidos por el satélite GOES de la NASA y con los registros de Flujo de Neutrones del Monitor de Neutrones del observatorio de Rayos cósmicos de Chacaltaya, en este caso continuada por una Tormenta de Radiaciones.
- Esta fulguración, aun siendo muy potente, habiendo eyectado masa coronal, esta no impacta frontalmente con la magnetosfera de la Tierra y en consecuencia no genera una Tormenta Magnética típica, resulta con un Comienzo Repentino de Tormenta nada nítida y una Tormenta Magnética débil en intensidad.
- La superposición de la curva de Residuos de la Componente H del campo magnético de la Tierra y la curva de índices *Dst*, ilustran que los residuos positivos respecto de la curva de índices *Dst* corresponden a los crochet magnéticos y los negativos a efectos magnetosféricos residuales, posiblemente vinculados a las corrientes que circulan por el plano neutro de la magnetosfera. La curva resultante de la sustracción de la curva de índices *Dst* de la curva de Residuos de la componente H podría convertirse en una muy buena herramienta para el aislamiento de las curvas producidas por eventos como los crochets magnéticos, eventos de carácter totalmente electromagnéticos y otros de carácter electromecánicos.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Boulder, N. 2017, GOES X-ray flux data (NOAA/AWPC)
- Calcina, M. 2009, Revista Boliviana de Física, **15**, 44
- Chu, W. & Qin, G. 2016, Annales Geophysicae, **34**, 45
- Cordaro, E. G., Venegas, P., & Laroze, D. 2018, Annales Geophysicae, **36**, 275
- Echer, E., Vieira, L. E. A., Rigozo, N. R., Pereira de Souza, M., & Nordemann, D. J. R. 2001, Proceedings of the 7th International Congress of the Brazilian Geophysical Society, Salvador, Brazil, 1369
- Hoeksema, J. T., Wilcox, J. M., & Scherrer, P. H. 1982, Journal of Geophysical Research: Space Physics, **87**, 10331
- Iyemori, T., Maeda, H., & Kamei, T. 1979, Journal of Geomagnetism and Geoelectricity, **31**, 1
- Kugi–Kyoto. 2018, http://wsc.kugi.kyoto-u.ac.jp/dst_real-time/index.html. (Kyoto, Japón)
- Kumar, P., C Bhatt, Y., Jain, R., & S Shishodia, Y. 2015, 1
- Matsushita, S. & Campbell, W. H., Eds. 1967, Physics of geomagnetic phenomena: International Geophysics Series, Vol. 2 (New York, Academic Press)
- Mayaud, P. N. 1980, Derivation, meaning, and use of geomagnetic indices, Vol. 22 (Washington DC, American Geophysical Union)
- McLeod, M. G. & Coleman Jr, P. J. 1980, Physics of the Earth and Planetary Interiors, **23**, P5
- Mendoza, M. & Morales, J. 2004, Analysis of the Interaction of the Solar Wind with the Terrestrial Magnetosphere, Tech. Rep. Physics/0409012

- Muraki, Y., Matsubara, Y., Masuda, S., Sakakibara, S., Sako, T., Watanabe, K., Bütikofer, R., Flückiger, E., Chilingarian, A., Hovsepyan, G., et al. 2008, *Astroparticle Physics*, **29**, 229.
- Murphy, R. 2008, *Exploring solar flares with gamma rays and neutrons*, Technical Reports, Naval Research Laboratories, Washington DC
- Noaa-Swpc. 2017, <http://www.swpc.noaa.gov/products/goes-x-ray-flux>.
- Observatorio Geomagnético de Villa Remedios. 2017, Informe IIF, Carrera de Física, UMSA.
- Observatorio de Rayos Cósmicos de Chacaltaya 2017, Informe IIF, Carrera de Física, UMSA.
- Polar-Light. 2018, <http://www.polarlightvorhersage.de/goes/2018-08>.
- Rangarajan, G. 1989, *Geomagnetism*, **3**, 323
- Ricaldi Yarvi, E., Miranda Loza, P., Bustos, R., Ticona I, R., Burgoa, O., López, D., & Matsubara, Y. 2007, *Revista Boliviana de Física*, **13**, 29.
- Ricaldi-Yarvi, E. & Miranda-Loza, P. 2008, *Revista Boliviana de Física*, **14**, 85.
- Sako, T., Watanabe, K., Muraki, Y., Matsubara, Y., Tsujihara, H., Yamashita, M., Sakai, T., Shibata, S., Vald-Galicia, J., González, L., Hurtado, A., Musalem, ., Miranda, P., Martinic, N., Ticona, R., Velarde, A., Kakimoto, F., Ogio, S., Tsunesada, Y., Tokuno, H., Tanaka, Y., Yoshilawa, I., Terasawa, T., Saito, Y., Mulai, T., & Grosm, M. 2007, *Revista Boliviana de Física*, **13**, 39.
- Zeilik, M. & Gregory, A. 1997, *Introductory astronomy and astrophysics* (New York, Saunders College Publishing),

ESTUDIO TEÓRICO DE LA ACCIÓN DE RADIACIONES IONIZANTES EN LA DINÁMICA POBLACIONAL DE CÉLULAS CANCEROSAS

THEORETICAL STUDY OF THE ACTION OF IONIZING RADIATIONS ON THE CANCER CELLS POPULATION DYNAMICS

GONZALO MARCELO RAMÍREZ-ÁVILA*

Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

(Recibido 29 de noviembre de 2017; aceptado 20 de diciembre de 2017)

RESUMEN

Se postulan modelos poblacionales basados en un sistema de Lotka-Volterra que incluye células cancerosas, normales y las ligadas al sistema inmunológico. En el primer modelo no se considera la radiación; en el segundo modelo se introduce un término de radiación ionizante actuando solamente sobre las células cancerosas; en tanto que en el tercero, la radiación actúa también sobre las células normales. Se realizó el análisis de estabilidad lineal de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales ligados a cada modelo, así como una exploración de valores de los parámetros considerando como indicador al máximo exponente de Lyapunov. Se encontró que la radiación tiene un efecto sobre las poblaciones celulares mostrando cambios de regímenes dinámicos, lo que indica que se puede modular el valor de los parámetros, en particular los ligados a la radiación con el fin de disminuir la población de las células cancerosas, aspecto que optimizaría los tratamientos de radioterapia.

Código(s) PACS: 89.75.k — 87.23.Cc — 87.19.xj

Descriptor: Sistemas complejos — Dinámica de poblaciones — Cancer

ABSTRACT

Lotka-Volterra-based population models were proposed for cancerous, normal and effector cells; the latter related to the immunological system. The first model is the basis of the dynamics of cell populations (cancerous, normal and immune effectors) and their interactions. The second model only considers the radiation action on the malignant cells, while, the third one also takes into account the effect on the healthy cells. A linear stability analysis of the systems of nonlinear differential equations related to each model was performed, as well as, an exploration of the parameter values considering as an indicator the largest Lyapunov exponent. We found that the radiation affects the cellular populations which exhibit changes in their dynamical regimes. The latter indicates that the value of the parameters can be modulated, in particular, those linked to the radiation to diminish the population of the cancerous cells. This is an important result that has the potential to optimize radiotherapy treatments.

Subject headings: Complex system — Population dynamics — Cancer

1. INTRODUCCIÓN

El cáncer es una de las patologías más comunes y letales que se dan en los seres humanos y constituye un problema sanitario de importancia. De acuerdo con la Organización Mundial de la Salud (2017), en 2012 se registraron 1.4×10^7 nuevos casos, teniéndose en 2015, 8.8×10^6 decesos ligados a esta enfermedad; lo que significa que alrededor del 17% de las muertes humanas son debidas al cáncer. Entre los tratamientos que se utilizan para combatir al cáncer, se tienen los basados en aspectos netamente médicos (cirugía), físicos (radioterapia), químicos (quimio-

terapia), biológicos (inmunoterapia, terapias génica dirigida, oncolítica y hormonal) y combinaciones de los anteriormente mencionados.

El problema del cáncer adquirió singular importancia en las últimas décadas debido al impacto que causa en la sociedad y a los esfuerzos que se dedican para combatirlo. Una de las formas de entender los procesos subyacentes al desarrollo de tumores es mediante experimentos y modelos que puedan explicar los resultados experimentales y además puedan hacer predicciones de diversas situaciones que no son fácilmente accesibles a las mediciones. Es así que diferentes grupos científicos comenzaron a formular modelos tanto del crecimiento de tumores

*<http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/>

tales como los propuestos por Norton (1988), como de la dinámica poblacional de células cancerosas y de su interacción con otros tipos de células y/o diferentes agentes externos que actúan sobre los tumores.

Varios modelos han sido postulados para estudiar diferentes situaciones ligadas a tumores (enfoque macroscópico) y células cancerosas (visión microscópica). Así, un modelo paradigmático utilizado en dinámica poblacional de células cancerosas es el debido a Kuznetsov et al. (1994) que considera tumores inmunogénicos y el cálculo de bifurcaciones locales y globales con valores realistas de los parámetros; en la misma línea, otro modelo importante es el propuesto por Kirschner & Panetta (1998), donde se propone un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) cada una de las cuales está relacionada con la población de células de tipo inmune, tumoral y la concentración de interleucina-2 citoquina (IL-2), compuesto que activa al sistema inmune a combatir los tumores. Con similares características, se puede mencionar los modelos basados en inmunoterapia celular adaptiva (ACI por su sigla en inglés), en especial, el propuesto por Nani & Freedman (2000), el cual es una extensión de los anteriores, teniendo como principales variables a las concentraciones de células normales y cancerosas en el espacio fisiológico, así como las concentraciones de linfoquina (por ejemplo, la IL-2) y de linfocitos anticancerígenos (como las células asesinas activadas por linfocina) en la vecindad de células normales y cancerosas. El efecto de retardos de tiempo en la competición entre el sistema inmunitario y el tumor es considerado por Gałach (2003). Aspectos geométricos de los tumores son valorados en el modelo propuesto por Frascoli et al. (2014) con el fin de precisar las interacciones entre los diferentes grupos de células. Un enfoque de población estructurada es planteado por Delitala et al. (2015) donde la competición entre las células inmunes y cancerosas se manifiesta claramente en la inmunoterapia.

En lo que concierne a los modelos para tratamientos de quimioterapia, se tiene como ejemplo el formulado por Pinho et al. (2002), en el cual, se considera la interacción entre células cancerosas y normales en dos sitios específicos con metástasis entre los sitios primarios y secundarios con retardo de tiempo. Otros modelos que involucran quimioterapia fueron planteados por Ershov & Kotin (2005) y por López et al. (2014). En cuanto a modelos que implican el uso de radioterapia, se puede mencionar el propuesto por Belostotski & Freedman (2005) en el cual se describe la competición de células sanas y cancerosas por medio de ecuaciones de Lotka-Volterra y la acción de las radiaciones se considera que está sujeta a cuatro posibles modos de control en su administración: constante, lineal, de retroalimentación y periódico; el anterior modelo es completado por Freedman & Belostotski (2009) que considera que la radiación actúa también sobre las células sanas; de la misma manera, otros modelos tienen en cuenta este último aspecto tales como los propuestos por Jiménez & Hernandez (2011), además de Liu & Yang (2014), donde

desde el punto de vista matemático, están basados en sistemas de dos ODEs no lineales; en tanto que Isea & Lonngren (2015) plantean un modelo consistente en un sistema de tres ODEs no lineales. Un otro enfoque de modelo multiescala para cáncer fue formulado por Ribba et al. (2006) con el fin de mejorar las radioterapias. Radiación periódica ha sido considerada por Liu et al. (2011) en un modelo que entre sus soluciones conduce a la extinción de células. Es menester indicar que para los tratamientos de radioterapia es esencial considerar las leyes de crecimiento tumoral tales como la de Gompertz y la denominada "universal" como es explicado por Castorina et al. (2007).

Modelos que implican combinaciones de tratamientos también fueron desarrollados; así, de Pillis & Radunskaya (2003) consideran la respuesta inmunitaria y la quimioterapia para el control de crecimiento de tumores y de Pillis et al. (2006) dan una interpretación biológica de este tipo de modelos. Con base en el modelo planteado por de Pillis & Radunskaya (2003) diferentes análisis desde un punto de vista físico-matemático han sido desarrollados con el fin de describir la evolución de poblaciones de células cancerosas logrando aportes notables a la ciencia no lineal aplicada a aspectos médicos. Entre estos análisis conducentes a típicos comportamientos no lineales, se pueden mencionar los trabajos realizados por Itik & Banks (2010), donde se encuentran comportamientos caóticos; y por Letellier et al. (2013) quienes por medio de análisis de bifurcación y topológico, encuentran nuevas tendencias en la comprensión del crecimiento de ciertos tumores e incluso en la forma del tratamiento aplicado a los mismos. Otros refinamientos de análisis de un modelo basado en el de Itik & Banks (2010) fueron expuestos por Galindo et al. (2015), una de cuyas conclusiones más importantes es la de proponer que la dinámica caótica puede estar en relación con un mecanismo de tratamiento conducente a una posible cura de cáncer a través de la eliminación de células tumorales para ciertos intervalos de valores de los parámetros. Un análisis exhaustivo del espacio de parámetros del modelo de cáncer de de Pillis & Radunskaya (2003) fue realizado por Gallas et al. (2014) donde se determinan regiones caóticas e isoperiódicas que podrían ser de suma utilidad en la planificación de tratamientos. El modelado de interacciones entre células cancerosas, inmunes y virus bajo una terapia oncolítica ha sido desarrollado por Eftimie et al. (2016), en el que encuentran una dinámica asintótica compleja caracterizada por bifurcaciones y caos. Un modelo anti-tumor que combina inmunoterapia y quimioterapia fue propuesto por Zhong et al. (2006) en el que se consideran fluctuaciones en la tasa de crecimiento del tumor, una forma inmune y una modulabilidad estacional débil debida a la quimioterapia; cuyo resultado principal es la inducción de resonancia estocástica por un ruido multiplicativo puro en el sistema anti-tumor. Para terminar con ejemplos de modelos combinando

dos tipos de tratamiento, se puede resaltar aquel que combina quimio y radioterapia planteado por Ghaffari et al. (2016) donde después de un exhaustivo análisis de los sistemas de ODEs concluyen en que un tratamiento adecuado cambia la dinámica del cáncer y no solamente reduce las poblaciones de células cancerosas.

Una amplia revisión de diferentes modelos concernientes a cáncer y su tratamiento puede encontrarse en el libro editado por Preziosi (2003) y también en los artículos de revisión de Araujo & McElwain (2004) y Bellomo et al. (2008). El libro editado por Tan & Hanin (2008) contiene vasta información acerca de modelos de cáncer y sus aplicaciones.

El artículo está estructurado de la siguiente manera: En la Sec. 2, se plantea un modelo describiendo la dinámica poblacional de células malignas, normales y efectoras, del cual se tienen dos variantes, una de las cuales tiene en cuenta la acción de la radiación solo en las células cancerosas, en tanto que la otra considera además que las células normales sufren también esta influencia. El análisis de estabilidad lineal para cada uno de los modelos es expuesto en la Sec. 3. Las implicaciones de los resultados se discuten en la Sec. 4 y finalmente en la Sec. 5 se dan las conclusiones y perspectivas de esta investigación.

2. MODELOS

Los modelos a ser considerados se basan en la evolución de las poblaciones de células cancerosas o malignas $M(t)$, normales o sanas $N(t)$ y a las denominadas efectoras inmunes $E(t)$. La base del modelo considera una competición de tipo Lotka-Volterra entre las células cancerosas y normales, además de una competición inhibitoria entre las malignas y efectoras; además, teniendo en cuenta que las efectoras inmunes no se ven afectadas por las sanas. Con el fin de facilitar la comprensión del modelo, se asume que para la situación en la cual no interviene la radiación se tiene el modelo normalizado propuesto por Itik & Banks (2010) que para el caso de la notación adoptada en este trabajo es:

$$\frac{dM}{dt} = M(1 - M) - \sigma_{MN}MN - \sigma_{ME}ME \quad (1)$$

$$\frac{dN}{dt} = \nu N(1 - N) - \sigma_{NM}MN \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\varepsilon ME}{M + k_E} - \sigma_{EM}ME - d_E E. \quad (3)$$

Para obtener el sistema de ODEs anterior, se hizo un rescalamiento de las variables que representan el número de células de cada tipo en términos de sus capacidades de persistencia k_i , en la forma:

$$M = \frac{\tilde{M}}{k_M}, \quad N = \frac{\tilde{N}}{k_N}, \quad E = \frac{\tilde{E}}{k_E}; \quad (4)$$

similarmente, el tiempo se rescala como $t = \tilde{\mu}\tilde{t}$, siendo $\tilde{\mu}$, la tasa de crecimiento de las células malignas \tilde{M} , del mismo modo, $\tilde{\nu}$ y $\tilde{\varepsilon}$ son las correspon-

dientes a las células normales \tilde{N} y \tilde{E} y donde los coeficientes se consideran constantes. El rescalamiento de las tasas de crecimiento de cada uno de los tipos de células viene dado por:

$$\nu = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\mu}}. \quad (5)$$

Los coeficientes σ_{XY} representan las tasas de inactivación de las células X debidas a las Y y también son rescaladas como:

$$\sigma_{MN} = \frac{\tilde{\sigma}_{MN}k_N}{\tilde{\mu}}, \quad \sigma_{ME} = \frac{\tilde{\sigma}_{ME}k_E}{\tilde{\mu}}, \quad (6)$$

$$\sigma_{NM} = \frac{\tilde{\sigma}_{NM}k_M}{\tilde{\nu}}, \quad \sigma_{EM} = \frac{\tilde{\sigma}_{EM}k_M}{\tilde{\varepsilon}}. \quad (7)$$

En tanto que los coeficientes restantes tienen como rescalamiento:

$$k_E = \frac{\tilde{k}_E}{k_M}, \quad d_E = \frac{\tilde{d}_E}{\tilde{\mu}}. \quad (8)$$

En las anteriores Ecs. (4)–(8), las variables con tilde no son rescaladas. El significado del modelo es el siguiente:

- La Ec. (1) indica que las células cancerosas crecen logísticamente, siendo inhibidas tanto por las células sanas y efectoras a través de σ_{MN} y σ_{ME} respectivamente.
- La población de células normales también crece según una distribución logística con una tasa de crecimiento ν y donde la población es inhibida por las células cancerosas mediante el factor σ_{NM} como lo muestra la Ec. (2).
- En la Ec. (3), se tiene que el primer término representa la activación que producen las células malignas en el sistema inmune y por consiguiente en las células efectoras caracterizadas por una tasa de crecimiento ε , ligada con el reconocimiento inmune y una capacidad de persistencia k_E . Aunque las células cancerosas estimulan a las efectoras, también las inhiben mediante el factor σ_{EM} y finalmente, las células efectoras tienen una tasa de mortalidad dada por d_E . Este tipo de modelo fue ampliamente estudiado como se indicó en la Sec. 1.

Si ahora, se tiene en cuenta el efecto de radiaciones de dos maneras: (i) solo sobre las células cancerosas y (ii) tanto sobre las células cancerosas como sobre las sanas, el modelo para cada caso debe completarse considerando la respectiva situación.

2.1. Radiación actuando solamente sobre las células cancerosas

Primeramente, se considerará un modelo similar al descrito por medio de las Ecs. (1)–(3) pero incluyendo un término en la dinámica de las células malignas que está en relación con los efectos de la radiación sobre estas y denotado por r que tiene como

resultado el de reducir la población de estas células. Por lo tanto, la Ec. (1) para este caso toma la forma

$$\frac{dM}{dt} = M(1 - M) - \sigma_{MN}MN - \sigma_{ME}ME - rM, \quad (9)$$

completándose el modelo para este caso con las Ecs. (2) y (3). Aunque en los inicios de la radioterapia, se consideraba que las células cancerosas eran más radiosensibles que las normales como lo señalan Bergonié & Tribondeau (1906), lo que se constituía en una excelente justificación para la utilización -en ese entonces- de Rx para tratamientos de radioterapia, tres décadas después, Wintz (1938) cuestionó dicha aseveración, quien además profundizó en detalles para un buen tratamiento y señaló errores típicos en los mismos.

2.2. Radiación actuando sobre las células cancerosas y normales

Aunque en el modelo descrito en la Sec. 2.1 se consideró la hipótesis que las células cancerosas presentan mayor radiosensibilidad que las normales y que por ende la radioterapia constituía una excelente alternativa. Actualmente, se sabe pertinentemente que la radiación provoca también daños colaterales, entre ellos el que pueden experimentar las células normales adyacentes a las cancerosas. Por lo anterior, un modelo más completo vinculado al efecto de la radiación debe incluir también un término que dé cuenta del mismo en las células normales. Así, en la Ec. (2), se introduce el término relacionado con la radiación r , acompañado de un factor p que distingue el efecto sobre las células malignas y normales. Por lo tanto, para el modelo de acción de la radiación sobre células normales, se modifica la Ec. (2) por

$$\frac{dN}{dt} = \nu N(1 - N) - \sigma_{NM}MN - prN. \quad (10)$$

Es decir, el modelo completo para este caso estará constituido por el conjunto de Ecs. (9), (10) y (3).

3. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD LINEAL

Considerando los modelos presentados en la Sec. 2 se realizó el análisis de estabilidad lineal para los mismos siguiendo la teoría expuesta en Nicolis (1995) y una metodología similar a la seguida por Ramírez-Ávila & Cabrera Lafuente (2001). Es decir, se comienza por denotar el sistema de ODEs por

$$\frac{d\underline{X}}{dt} = \underline{F}(\underline{X}, \lambda), \quad (11)$$

siendo \underline{X} el vector que contiene a las variables dinámicas, en este caso: M , N y E ; en tanto que λ representa a los parámetros de control. Para comenzar con el análisis de estabilidad lineal, se considera la existencia de un estado de referencia dado por \underline{X}_r , que será el punto fijo, de manera que para la determinación de las características de estabilidad del sistema, se procede a aplicar una perturbación \underline{x} , por lo que el estado del sistema en un instante de tiempo t estará dado por:

$$\underline{X}(t) = \underline{X}_r + \underline{x}(t). \quad (12)$$

TABLA 1

CARACTERÍSTICAS DEL ANÁLISIS NO LINEAL PARA EL MODELO SIN RADIACIÓN

Punto fijo	Autovalores	Estabilidad
$\underline{X}_r^{(1)} = (0, 0, 0)$	$\{1, \nu, -d_E\}$	inestable
$\underline{X}_r^{(2)} = (0, 1, 0)$	$\{-\nu, -d_E, 1 - \sigma_{MN}\}$	Ver Fig. 1(a)
$\underline{X}_r^{(3)} = (1, 0, 0)$	$\{-1, \frac{\alpha}{\beta}, \nu - \sigma_{NM}\}$	Ver Fig. 1(b)

Derivando con respecto del tiempo la Ec. (12), teniendo en cuenta la Ec. (11) y haciendo un desarrollo en serie de Taylor de \underline{F} alrededor de \underline{X}_r , se encuentra una forma homogénea para la evolución del vector de perturbación dada por:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\mathcal{L}}(\lambda) \cdot \underline{x} + \underline{h}(\underline{x}, \lambda), \quad (13)$$

siendo \mathcal{L} la parte lineal o matriz jacobiana de \underline{F} evaluada en \underline{X}_r , en tanto que $\underline{h}(\underline{x}, \lambda)$ es el vector que incluye a las contribuciones no lineales, tales como al diádico $\underline{x}\underline{x}$. La nulidad de la Ec. (11) permite hallar los puntos fijos o singulares que en los casos de las diferentes variantes del modelo son 6, de los cuales los más sencillos se muestran en las Tablas 1 (modelo sin radiación), 2 (radiación actuando solo sobre las células cancerosas) y 3 (cuando la radiación actúa sobre ambos tipos de células: cancerosa y normales) junto a los valores propios de la correspondiente ecuación característica de la matriz linealizada y a la caracterización de la estabilidad del sistema considerando que los parámetros varían en el intervalo $[0, 5]$. Para simplificar la notación de las expresiones, se han definido: $\alpha = \varepsilon - \beta(\sigma_{EM} + d_E)$, $\beta = k_E + 1$ y $\gamma = \frac{pr - \nu}{\nu}$. Con base en las ecuaciones características y sus correspondientes puntos fijos, se determinan las regiones de estabilidad utilizando el método de Routh-Hurwitz, correspondientes a las regiones coloreadas en las Figs. 1, 2 y 3.

La información obtenida del análisis de estabilidad lineal permite saber qué valores de los parámetros son permitidos y adecuados para realizar los experimentos numéricos que permitan obtener las evoluciones de las poblaciones de cada tipo de células. Como se puede notar, las figuras obtenidas en esta sección no representan todas las posibilidades para el estudio completo del sistema. Como se señaló, solamente se consideraron los tres primeros puntos fijos (los más sencillos en cuanto a las expresiones de los mismos así como de los autovalores y ecuaciones características). Los comentarios de cada una de las figuras se dejan para la siguiente sección, donde se utilizarán las mismas para la selección de valores de parámetros a ser utilizados en la integración numérica de los sistemas de ecuaciones diferenciales correspondientes a cada caso: (i) sin acción de la radiación; radiación actuando sobre las células (ii) solamente cancerosas, y (iii) cancerosas y normales.

4. RESULTADOS

Con base en las figuras halladas en la Sec. 3, se escogen valores de los parámetros que garanticen re-

TABLA 2

CARACTERÍSTICAS DEL ANÁLISIS NO LINEAL PARA EL MODELO CON RADIACIÓN SÓLO PARA LAS CÉLULAS CANCEROSAS.

Punto fijo	Autovalores	Estabilidad
$\underline{X}_r^{(1)} = (0, 0, 0)$	$\{1 - r, \nu, -d_E\}$	inestable
$\underline{X}_r^{(2)} = (0, 1, 0)$	$\{-\nu, -d_E, 1 - r - \sigma_{MN}\}$	Ver Figs. 2(a)–(c)
$\underline{X}_r^{(3)} = (1 - r, 0, 0)$	$\{-(1 - r), \frac{\alpha(1-r)-r[d_E(\beta-r)-\sigma_{EM}(1-r)]}{\beta-r}, \nu - \sigma_{NM}(1 - r)\}$	Ver Figs. 2(d)–(f)

TABLA 3

CARACTERÍSTICAS DEL ANÁLISIS NO LINEAL PARA EL MODELO CON RADIACIÓN TANTO PARA LAS CÉLULAS CANCEROSAS COMO NORMALES.

Punto fijo	Autovalores	Estabilidad
$\underline{X}_r^{(1)} = (0, 0, 0)$	$\{1 - r, -d_E, -\gamma\}$	Ver Figs. 3(a)–(c)
$\underline{X}_r^{(2)} = (0, -\gamma, 0)$	$\{1 - r + \sigma_{MN}\gamma, -d_E, \nu\gamma\}$	Ver Figs. 3(d)–(f)
$\underline{X}_r^{(3)} = (1 - r, 0, 0)$	$\{-(1 - r), \frac{(1-r)[\varepsilon - \sigma_{EM}(\beta-r) + \sigma_{EM}]}{\beta-r} - \sigma_{EM} - d_E, -\nu\gamma - \sigma_{NM}(1 - r)\}$	Ver Figs. 3(g)–(i)

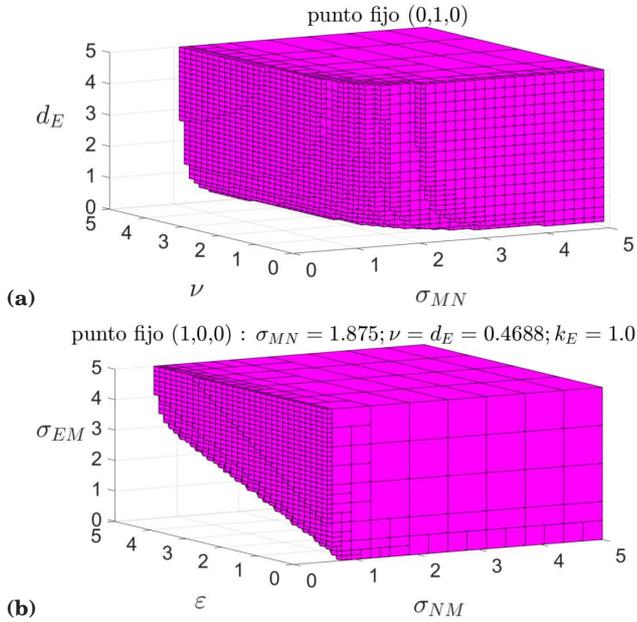


FIG. 1.— Regiones de estabilidad para el modelo sin radiación cuando los puntos fijos (a) $\underline{X}_r^{(2)} = (0, 1, 0)$ y (b) $\underline{X}_r^{(3)} = (1, 0, 0)$, considerándose fijos los parámetros σ_{MN} , ν , d_E y k_E que toman valores correspondientes a situaciones de estabilidad.

giones de estabilidad y con los mismos se obtiene la evolución de las poblaciones de cada tipo de células.

4.1. Modelo sin radiación

Para el caso del modelo donde no actúa la radiación se tiene de la Tabla 1 que el primer punto fijo: $\underline{X}_r^{(1)} = (0, 0, 0)$ es inestable puesto que se tienen siempre dos autovalores positivos; en tanto que para el segundo punto fijo: $\underline{X}_r^{(2)} = (0, 1, 0)$ se tiene una región de estabilidad que se muestra en la Fig. 1(a). Como ejemplo de los comportamientos que pueden tenerse en las regiones de estabilidad, se muestran las series temporales para dos condiciones iniciales diferentes, una en la cual, la fracción de células cancerosas es más importante que la de las normales (Fig. 4(a)) y la situación opuesta (Fig. 4(b)). Variando el parámetro σ_{MN} se observa que a medida que este

umenta, existe una tendencia a la sobrevivencia de las células normales en detrimento de las cancerosas.

Cuando se considera el punto fijo $\underline{X}_r^{(3)} = (1, 0, 0)$, se pueden encontrar comportamientos oscilatorios regulares (Fig. 5(a)) o caóticos (Fig. 5(b)).

4.2. Modelo con radiación actuando solo sobre células cancerosas

Como se puede ver de la Fig. 2, se tienen múltiples regiones de estabilidad y podrían analizarse cada una de ellas. Sin embargo, aquí se limita el estudio a los efectos del parámetro r en los casos observados en la Fig. 5. Así, el comportamiento periódico reportado en la Fig. 5(a), se transforma a uno caótico (Fig. 6(a)) y a uno estacionario (Fig. 6(b)) donde la población de células normales se impone por efecto de la acción de la radiación a través del parámetro r . La determinación de si se trata de un comportamiento caótico o no, se la hace a través del cálculo del máximo exponente de Lyapunov (λ_{\max}) del sistema con base en el algoritmo desarrollado por Benettin et al. (1976). Los valores de λ_{\max} en función de r se muestran en la Fig. 6(c), donde se verifica el carácter caótico ($\lambda_{\max} > 0$) y estacionario ($\lambda_{\max} < 0$) de las situaciones mostradas en la Fig. 6(a)-(b).

4.3. Modelo con radiación actuando sobre células cancerosas y normales

Para el modelo en el que la radiación actúa tanto sobre células cancerosas como normales, se tienen aún más regiones de estabilidad como se muestra en la Fig. 3. Solo se analizarán los comportamientos oscilatorios obtenidos en las Figs. 5 y 6 para ver las principales características de la acción del parámetro p que se añade al parámetro de radiación r en la acción sobre las células normales. En la Fig. 7 se ve justamente cómo se modifica la evolución de las poblaciones celulares a medida que se cambia p . En la Fig. 7(a) se calcula λ_{\max} en función de p , notándose que existen intervalos con $\lambda_{\max} > 0$ (comportamiento caótico, mostrado en la Fig. 7(b)); con $\lambda_{\max} \approx 0$ (comportamiento con tendencia a ser periódico, mostrado

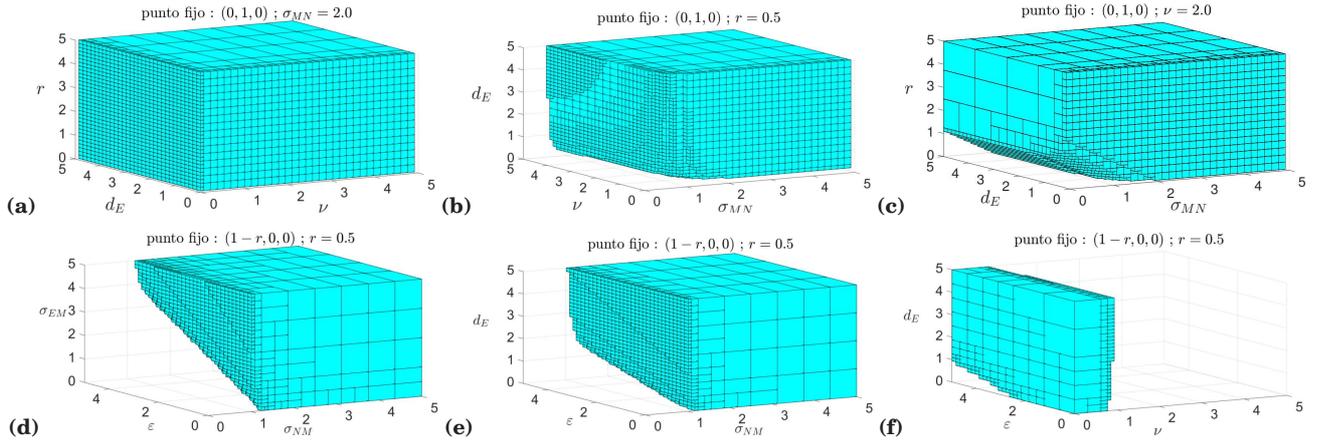


FIG. 2.— Regiones de estabilidad para el modelo con radiación actuando solamente sobre las células cancerosas, para los puntos fijos $\underline{X}_r^{(2)} = (0, 1, 0)$ (fila superior) y $\underline{X}_r^{(3)} = (1 - r, 0, 0)$ (fila inferior); considerándose fijos los parámetros (a) $\sigma_{MN} = 2.0$, (b) $r = 0.5$, (c) $\nu = 2.0$. Para $r = 0.5$ y $k_E = 1.0$: (d) $\nu = 2.0$ y $d_E = 0.4688$, (e) $\nu = 2.0$ y $\sigma_{EM} = 2.0$, y (f) $\sigma_{NM} = 2.0$ y $\sigma_{EM} = 2.0$. Los valores anteriores corresponden a situaciones de estabilidad.

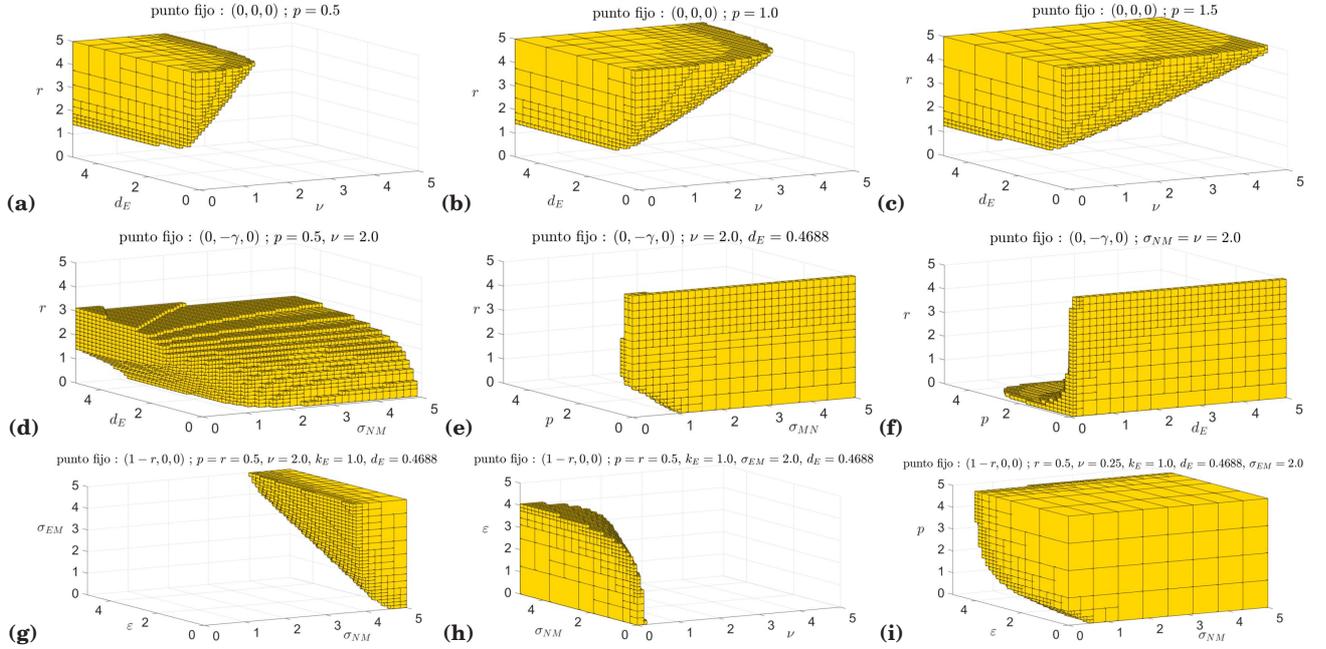


FIG. 3.— Regiones de estabilidad para el modelo con radiación actuando sobre ambos tipos de células (cancerosas y normales), para los puntos fijos $\underline{X}_r^{(1)} = (0, 0, 0)$ (fila superior), $\underline{X}_r^{(2)} = (0, -\gamma, 0)$ (fila central) y $\underline{X}_r^{(3)} = (1 - r, 0, 0)$ (fila inferior); considerándose fijos los parámetros (a) $p = 0.5$, (b) $p = 1.0$, (c) $p = 1.5$. Para $\nu = 2.0$: (d) $p = 0.5$, (e) $d_E = 0.4688$, y (f) $\sigma_{NM} = 2.0$. Finalmente, para $r = 0.5$, $d_E = 0.4688$ y $k_E = 1.0$: (g) $p = 0.5$ y $\nu = 2.0$, (h) $p = 0.5$ y $\sigma_{EM} = 2.0$, e (i) $\sigma_{EM} = 2.0$ y $\nu = 0.25$. Los valores anteriores corresponden a situaciones de estabilidad.

en la Fig. 7(c)); y con $\lambda_{\max} < 0$ (comportamiento estacionario mostrado en la Fig. 7(d)–(f)). En la última de las situaciones, se ve que a medida que aumenta p , la población de células normales disminuye. Así, en la Fig. 7(d) para un valor de $p < 1$, se tiene predominancia de células normales sobre las cancerosas y efectoras; en tanto que para $p = 1.300$ (Fig. 7(e)), la prevalencia de las células normales disminuye y su fracción es ligeramente superior a la de las cancerosas y efectoras que presentan valores similares; mientras que para $p = 1.900$ (Fig. 7(f)), las células cancerosas y efectoras se tornan más importantes que las normales.

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se utilizó un modelo para la descripción de la dinámica poblacional de células cancerosas, normales y efectoras cuya base radica en considerar crecimientos de tipo logístico para las cancerosas y normales, acompañados de competiciones de tipo Lotka-Volterra; en tanto que para las efectoras se tiene una competición de tipo inhibitoria con las células malignas. Se varió el modelo para incluir el efecto de radiaciones ionizantes sobre las poblaciones celulares, primero considerando que la radiación actúa solamente sobre las células malignas y posteriormente bajo la hipótesis de que la radiación

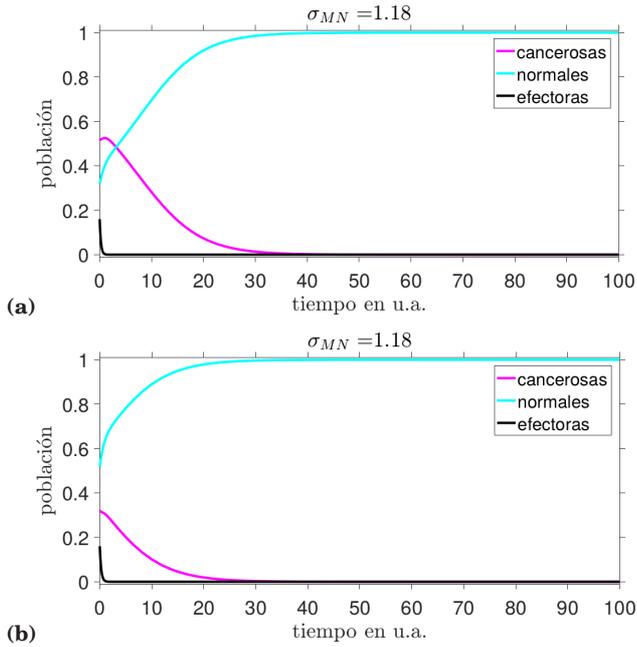


FIG. 4.— Evolución temporal de las poblaciones de los tres tipos de células para el modelo en el cual no se considera la acción de la radiación, se tiene el punto fijo $X_r^{(2)} = (0, 1, 0)$ y cuando los valores de los parámetros son: $\sigma_{MN} = 1.18$, $\sigma_{ME} = 1.0$, $\nu = 2.0$, $\sigma_{NM} = 2.0$, $\varepsilon = 1.0$, $k_E = 1.0$, $\sigma_{EM} = 3.0$ y $d_E = 3.0$, cuando las condiciones iniciales son: (a) $X_0 = (0.52, 0.32, 0.16)$ y (b) $X_0 = (0.32, 0.52, 0.16)$.

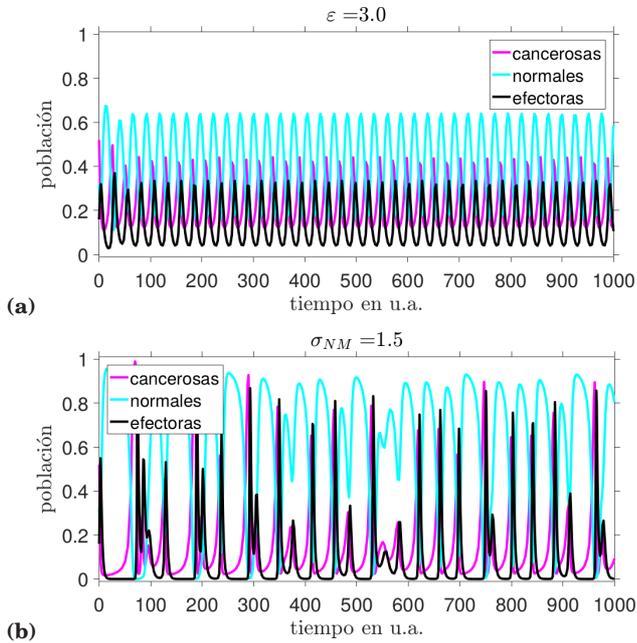


FIG. 5.— Comportamiento dinámico de las poblaciones de los tres tipos de células para el modelo en el cual no se considera la acción de la radiación, cuando se tiene el punto fijo $X_r^{(3)} = (1, 0, 0)$, con condiciones iniciales $X_0 = (0.52, 0.32, 0.16)$ y teniendo valores para los parámetros: $\sigma_{MN} = 1.0$, $\sigma_{ME} = 2.5$, $\nu = 0.6$, $\sigma_{NM} = 1.5$, $k_E = 1.0$, $\sigma_{EM} = 0.2$ y $d_E = 0.5$, teniéndose comportamientos: (a) regular con $\varepsilon = 3.0$ y (b) caótico con $\varepsilon = 4.5$.

también actúa sobre las células normales. Se realizó el análisis de estabilidad lineal para las tres varian-

tes del modelo, encontrándose los puntos fijos, las ecuaciones características y los autovalores, información con la cual se determinaron las diferentes regiones de estabilidad de acuerdo con los valores de los parámetros. Debido a la gran diversidad de estas regiones, se trabajó con las situaciones más sencillas, teniendo como premisa el enfocarse en los efectos de la radiación en las diferentes poblaciones celulares, a través de los parámetros ligados a la radiación.

El análisis anterior nos indica que la radiación a través de los parámetros r y p juega un rol importante en la dinámica poblacional de los tres tipos de células y que un estudio detallado del espacio de parámetros mediante, por ejemplo, exponentes de Lyapunov, podría dar indicaciones importantes acerca de qué valores deberían considerarse para lograr la disminución de las células cancerosas sin detrimento de las normales cuando la radiación actúa sobre las mismas. La conexión del modelo, en el cual la acción de la radiación es tanto sobre las células cancerosas como las normales, con los aspectos ligados a los tratamientos de radioterapia se puede efectuar mediante el conocimiento de las radiosensibilidades de los diferentes órganos, y a los denominados factores de calidad del tipo de radiación sobre estos órganos; información que es accesible. Las radiosensibilidades y factores de calidad tienen una relación estrecha con el parámetro p , en tanto que el parámetro r está más bien ligado con la dosis de radiación empleada.

Si bien los modelos juegan un rol muy importante en lo que a mejoramiento de tratamientos radioterapéuticos se refiere, se deben también incorporar en los mismos, situaciones fácticas tales como la necesidad del fraccionamiento de las dosis debidas a las denominadas 4 Rs propuestas por Withers (1975): *Reparación* del daño subletal en células normales y neoplásicas, *Reoxigenación* del tumor, *Redistribución* a través del ciclo de división, y *Regeneración* de las células normales y malignas que sobrevivieron entre las dosis fraccionadas que se suministraron. Una quinta R es mencionada por Bentzen (2010), la *Radiosensibilidad* que es un factor importante en los resultados de la radioterapia pero que no juega ningún rol en el intervalo de interfaccionamiento de dosis, por lo que tiene un carácter diferente de las otras R. También se puede considerar el denominado efecto espectador inducido por la radiación (RIBE, por su sigla en inglés) que básicamente consiste, como lo señala Baskar et al. (2014), en el daño de órganos distantes a los blancos de radioterapia y no sólo a células adyacentes como se creía. Todos estos aspectos podrían ser considerados en ulteriores usos del modelo propuesto y así tener como perspectiva, la obtención de resultados más reales que coadyuvan en un mejor y eficaz tratamiento.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Instituto de Investigaciones Físicas y a la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés por facilitar la realización de este trabajo. También a la agencia de cooperación alemana

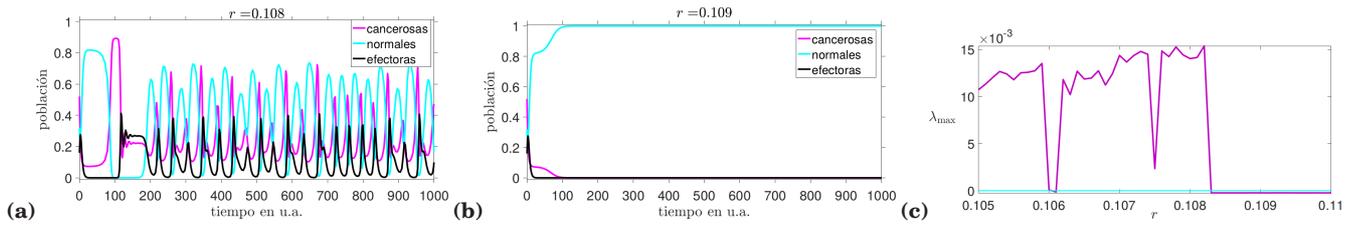


FIG. 6.— Evolución de las poblaciones de los tres tipos de células para el modelo en el cual se considera la acción de la radiación sobre las células cancerosas solamente; tomando los mismos valores de parámetros y condiciones iniciales que en la Fig. 5(a) y valores del parámetro ligado a la radiación: (a) $r = 0.108$ (caótico) y (b) $r = 0.109$ (estacionario con únicamente presencia de células normales). (c) Máximo exponente de Lyapunov en función del parámetro r . Se hace notar que el cálculo de λ_{\max} se hicieron sobre un tido 15000 y transitorio de 10000, usando para la integración numérica de las ODEs se realizó con el método de Runge-Kutta 5/6 con paso adaptativo e interpolación de sexto orden. La línea que pasa por $\lambda_{\max} = 0$ sirve de indicación para determinar el valor positivo o negativo de λ_{\max} .

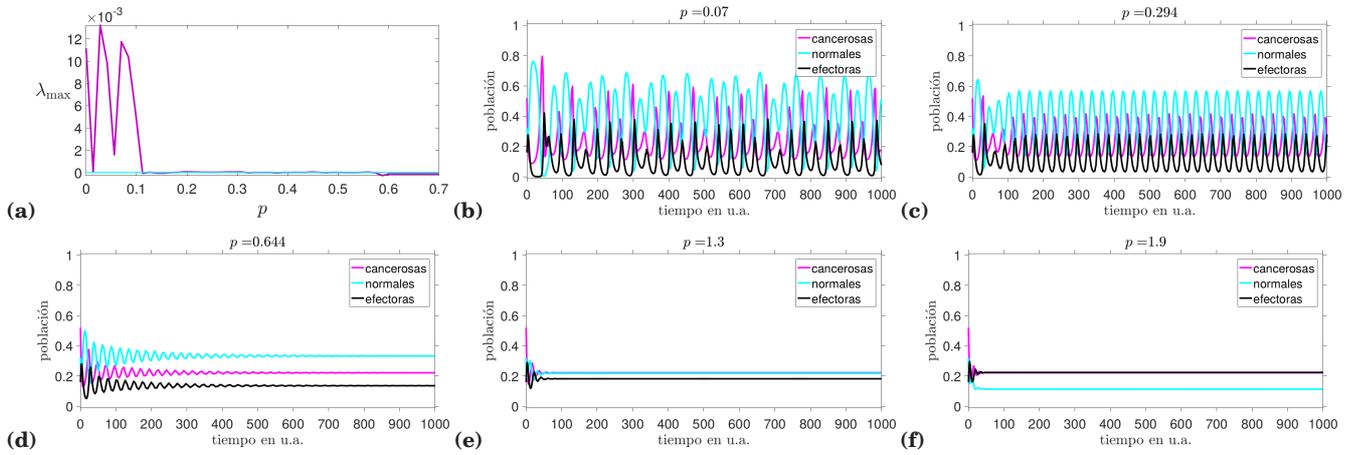


FIG. 7.— (a) Máximo exponente de Lyapunov en función del parámetro p para los mismos valores de parámetros considerados y condiciones iniciales que en la Fig. 5(a) y un valor para el parámetro de radiación $r = 0.105$. Evolución de las poblaciones de los tres tipos de células para el modelo en el cual se considera la acción de la radiación tanto sobre las células cancerosas, como las normales; (b) $p = 0.070$ (comportamiento oscilatorio caótico para las tres poblaciones $\lambda_{\max} = 1.12 \times 10^{-2}$). (c) $p = 0.294$ (comportamiento ligeramente caótico con una tendencia a ser periódico, $\lambda_{\max} = 4.09 \times 10^{-5}$). (d) $p = 0.644$ (comportamiento estacionario con predominancia de células normales, $\lambda_{\max} = -1.30 \times 10^{-5}$). (e) $p = 1.300$ (comportamiento estacionario con ligera predominancia de células normales y poblaciones similares de células cancerosas y efectoras, $\lambda_{\max} = -9.43 \times 10^{-5}$). (f) $p = 1.900$ (comportamiento estacionario con predominancia de células cancerosas y efectoras sobre las normales, $\lambda_{\max} = -9.19 \times 10^{-5}$).

DAAD por permitir mi estancia en el Instituto de Impacto Climático de Potsdam (PIK-Potsdam), donde parte de este trabajo fue realizado. Finalmente, al Dr. Paul Schulz por las interesantes discusiones so-

bre el tema.

Conflicto de intereses

El autor declara que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Araujo R. & McElwain D. (2004), *Bulletin of Mathematical Biology* **66**, 1039.
- Baskar R., Dai J., Wenlong N., Yeo R. & Yeoh K.-W. (2014), *Frontiers in Molecular Biosciences* **1**, 24.
- Bellomo N., Li N. & Maini P. (2008), *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **18**, 593.
- Belostotski G. & Freedman H. (2005), *International Journal of Pure and Applied Mathematics* **25**, 447.
- Benettin G., Galgani L. & Strelcyn J.-M., *Physical Review A* **14**(6), 2338.
- Bentzen S. (2010), *Fractionation effects in clinical practice, en Leibel and Phillips Textbook of Radiation Oncology*, Ed. R. Hoppe, T. Phillips & M. Roach (Philadelphia: Elsevier), 40–54.
- Bergonié J. & Tribondeau L. (1906), *Comptes-Rendus de Séances de l'Académie des Sciences* **143**, 983.
- Castorina P., Deisboeck T., Gabriele P. & Guiot C. (2007), *Radiation Research* **168**, 349.
- de Pillis L., Gu W. & Radunskaya A. (2006), *Journal Of Theoretical Biology* **238**, 841.
- de Pillis L. & Radunskaya A. (2003), *Mathematical and Computer Modelling* **37**, 1221.
- Delitala M., Lorenzi T. & Melensi M. (2015), *ITM Web of Conferences* **5**, 00005.
- Eftimie R., Macnamara C., Dushoff J., Bramson J. & Earn D. (2016), *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* **11**, 65.
- Ershov Y. & Kotin V. (2005), *Mathematical models of tumor processes and strategies of chemotherapy* Vol. 1 (Boca Raton: CRC Press), 302–321.
- Frascoli F., Kim P., Hughes B. & Landman K. (2014), *Mathematical Biosciences* **253**, 50.
- Freedman H. & Belostotski G. (2009), *Differential Equations and Dynamical Systems* **17**, 115.
- Galach M. (2003), *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **13**, 395.
- Galindo M., Nespoli C. & Messias M. (2015), *Abstract and Applied Analysis* **2015**, 11.
- Gallas M., Gallas M. & Gallas J. (2014), *The European Physical Journal Special Topics* **223**, 2131.
- Ghaffari A., Bahmaie B. & Nazari M. (2016), *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **39**, 4603.

- Isea R. & Lonngren K. (2015), *International Journal of Public Health Research* **3**, 340.
- Itik M. & Banks S. (2010), *International Journal of Bifurcation and Chaos* **20**, 71.
- Jiménez R. & Hernandez E. (2011), *Chaos, Solitons & Fractals* **44**, 685.
- Kirschner D. & Panetta J. (1998), *Journal of Mathematical Biology* **37**, 235.
- Kuznetsov V., Makalkin I., Taylor M. & Perelson A. (1994), *Bulletin of Mathematical Biology* **56**, 295.
- Letellier C., Denis F. & Aguirre L. (2013), *Journal Of Theoretical Biology* **322**, 7.
- Liu Z. & Yang C. (2014), *Computational and Mathematical Methods in Medicine* 172923.
- Liu Z., Zhong S., Yin C. & Chen W. (2011), *Applied Mathematics Letters* **24**, 1745.
- López A., Seoane J. & Sanjuán M. (2014), *Bulletin of Mathematical Biology* **76**, 2884.
- Nani F. & Freedman H. (2000), *Mathematical Biosciences* **163**, 159.
- Nicolis G. (1995), *Introduction to Nonlinear Science* (Cambridge: Cambridge University Press).
- Norton L. (1988), *Cancer Research* **48**, 7067.
- Organización Mundial de la Salud (2017), Cáncer, disponible en <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs297/es/>
- Pinho S., Freedman H. & Nani F. (2002), *Mathematical and Computer Modelling* **36**, 773.
- Preziosi L. (2003), *Cancer modelling and simulation* (Boca Raton: CRC Press).
- Ramírez-Ávila G. M. & Cabrera Lafuente R. (2001), *Revista Boliviana de Física* **7**, 115.
- Ribba B., Colin T. & Schnell S. (2006), *Theoretical Biology and Medical Modelling* **3**, 7.
- Tan W.-Y. & Hanin L. (2008), *Handbook of cancer models with applications* Vol. 9 (Singapore: World Scientific).
- Wintz H. (1938), *Radiology* **30**, 35.
- Withers H. (1975), *Advances in Radiation Biology* **5**, 241.
- Zhong W.-R., Shao Y.-Z. & He Z.-H. (2006), *Physical Review E* **73**, 060902.

CALIBRACIÓN DE SOLMÁFOROS PARA SU INSTALACIÓN EN LA CIUDAD DE LA PAZ

CALIBRATION OF SOLMÁFOROS FOR THEIR INSTALLATION IN THE CITY OF LA PAZ

RENÉ GUTIERREZ COLQUE[†]

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c.27 Cota Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

RESUMEN

Se describe el proceso de intercomparación y calibración realizado en noviembre de 2014 y julio de 2015 a dos solmáforos^a (con números de serie 334 y 373). El objeto del procedimiento fue garantizar que las medidas de índice ultravioleta realizadas por los solmáforos fuesen exactas bajo condiciones atmosféricas de la ciudad de La Paz. Como resultado de la intercomparación de 2014 se tuvo que realizar ajustes de calibración a ambos solmáforos; dicha calibración resultó exitosa en el solmáforo 373, pero no así en el solmáforo 334, debiendo éste regresar a fábrica para corregir esa deficiencia y otras encontradas. Al retorno desde fábrica, la intercomparación del 334 nuevamente mostró inexactitud por lo que se sometió a otro a ajuste de calibración, lográndose medidas suficientemente exactas del índice ultravioleta para el propósito de alertar y prevenir a la población sobre los riesgos de una excesiva exposición al Sol.

Código(s) PACS: 85.60.q — 92.70.Cp — 01.40.d

Descriptor: Sensores opto electrónicos — Atmósfera — Educación

ABSTRACT

The process of calibration and comparison of two “solmáforos”, ultraviolet index (UV Index) warning signals designed to provide a real-time indication of the sun’s UV intensity in an easy to read traffic light design, (serial numbers 334 and 373) carried out in November 2014 and July 2015 is described. The purpose of the procedure was to ensure that the UV index measurements made by the “solmáforos” were accurate under the specific atmospheric conditions of the city of La Paz, Bolivia. In 2014 results indicated that calibration adjustments were necessary for both “solmáforos”. Recalibration was successful for the 373 equipment however the 334 series had to be returned to the factory to be reset. Upon return from factory, the inter-comparison of the 334 again showed inaccuracy and it was submitted to another calibration adjustment. Finally, sufficiently accurate measurements of the ultraviolet index were obtained for the purpose of alerting and preventing the population about the risks of excessive sun exposure.

Subject headings: Optoelectronic devices — Atmosphere — Education

1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Desde 1996 el Laboratorio de Física de la Atmósfera (LFA), en ese entonces llamado Laboratorio de Ozono y Radiación Ultravioleta (LORUV) realiza mediciones tanto la radiación ultravioleta (RUV) así como la capa de ozono desde el campus universitario de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), ubicado en la zona de Cota Cota de la ciu-

dad de La Paz, Bolivia. Debido a los elevados índices de RUV medidos en La Paz, así como mediciones de la RUV en otros lugares de Bolivia, como las realizadas por Marcos F. Andrade (2007) en el Salar de Uyuni, por F. Zaratti (2003) en la montaña de Chacaltaya y por L.K Fanola (2012) en Sica Sica, el LFA viene desarrollando anualmente la Campaña de la RUV, que es una actividad universitaria de Interacción Social que tiene por objetivo informar, educar y prevenir a la población sobre los riesgos que conlleva una excesiva exposición a la RUV.

En el marco de la mencionada Campaña, en julio de 2014, por iniciativa del LFA del Instituto de In-

[†]Email: rene.gutierrez@chacaltaya.edu.bo

^a Equipo que mide la radiación ultravioleta y despliega el valor de índice ultravioleta en una escala de cinco colores que tiene apariencia de semáforo



FIG. 1.— Sensores y domo del Brewer en Cota Cota (La Paz) 3430 msnm.

vestigaciones Físicas (IIF) de la UMSA, se firmó un convenio entre el Gobierno Autónomo Municipal de La Paz (GAMLP), la UMSA y el Banco Solidario S.A., para la implementación del proyecto denominado “Solmáforos”.

Entre las responsabilidades asumidas por las instituciones participantes del proyecto se hallan esencialmente: por parte de la UMSA, a través del LFA, garantizar la fiabilidad de la información científica que se difundirá a la población por medio de los solmáforos; por parte del GAMLP, proporcionar los espacios físicos públicos en la ciudad de La Paz y los medios para el funcionamiento de los solmáforos; y por parte del Banco Solidario, la compra de los solmáforos.

En ese contexto el proyecto logró la compra de dos solmáforos, fabricados en Chile por *OptoElectronica Icalma*(OEI), con números de serie 334 y 373.

2. DESCRIPCIÓN EXPERIMENTAL

2.1. Instrumentos

El procedimiento de intercomparación y calibración de los solmáforos empleó como patrón el espectrofotómetro Brewer # 56 (Fig. 1), que mide la intensidad espectral y total de la UV cada 30 min, en la banda que va desde 290 nm hasta 325 nm, con intervalos de 0.5 nm; calculando con esas medidas el IUV; adicionalmente proporciona datos extrapolados hasta 400nm, el ángulo cenital respectivo para cada dato de UV. Además, examinando la absorción de la radiación solar en ciertas longitudes de onda de UV, determina la columna total de ozono.

De acuerdo al fabricante OEI (2014) el solmáforo está construido en base a un sensor ultravioleta, de material semiconductor (AlGaInN) de banda ancha que incluye un filtro que reproduce el espectro de acción de eritema definido por A. McKinley (1987), por lo que mide la irradiancia ultravioleta (UV) eritémicamente efectiva y estaría catalogado por la WMO (2005) como un instrumento tipo “B-1”. Según lo expresa OEI, el sensor GUVB-T11GD incorporado estaría certificado por el fabricante (Genicom) y las medidas del solmáforo estarían certificadas por el Departamento de Física de la Universidad de Santiago de Chile. Según el fabricante OEI (2014) dicho Departamento de Física realiza una medición comparativa de la radiación UV-B entre el solmáforo y un

TABLA 1
CATEGORÍAS DE EXPOSICIÓN A LA RADIACIÓN UV

Categoría de exposición	Valores del IUV	Color
Baja	< 2	Verde
Moderada	3 a 5	Amarillo
Alta	6 a 7	Naranja
MuyAlta	8 a 10	Rojo
Extremadamente alta	> 11	Violeta



FIG. 2.— Solmáforos 334 y 373 adquiridos para el proyecto

detector “Solar Light” PMA1101 calibrado en fábrica, empleando una lámpara de luz UV. Adicionalmente el fabricante detalla que el proceso de comparación consiste en realizar mediciones de la radiación UV-B con uno de los sensores, colocado a cierta distancia de la fuente y luego al doble de distancia; para finalmente repetir el procedimiento con el otro sensor y comparar los resultados de las mediciones para evidenciar que no exista una discrepancia mayor al 5%.

Como se aprecia en la Fig. 2 los resultados de la medición del sensor son desplegados para el público utilizando un panel de LEDs de colores que tiene apariencia de semáforo. Siguiendo las recomendaciones de la OMS (2003), el despliegue de la información del IUV (índice ultravioleta) a través del solmáforo debe utilizar cinco colores, que se detallan en la Tabla 1.

2.2. Intercomparación cualitativa

El 12 de noviembre de 2014 se realizó una intercomparación cualitativa, en el sentido que sólo se emplearía el panel de colores del solmáforo como medida del IUV, mientras que utilizamos una interpolación para el IUV de referencia obtenido del Brewer. Los tres instrumentos se ubicaron en la terraza del LFA en el Campus Universitario de Cota Cota (Fig. 1).

El procedimiento desarrollado consistió en regis-

TABLA 2
IUV MEDIDO POR BREWER 12 DE NOVIEMBRE DE 2014

Hora Local	IUV
7:02	0.40
7:31	0.98
8:01	1.58
8:31	3.29
9:01	4.99
9:31	6.83
10:01	8.71
10:31	10.75
11:01	12.16
11:31	13.22
12:01	13.80
12:31	13.84
13:01	13.44
13:31	12.35
14:01	10.90
14:31	9.17
15:01	7.33
15:31	5.37
16:01	3.27
16:31	1.45
17:01	1.11

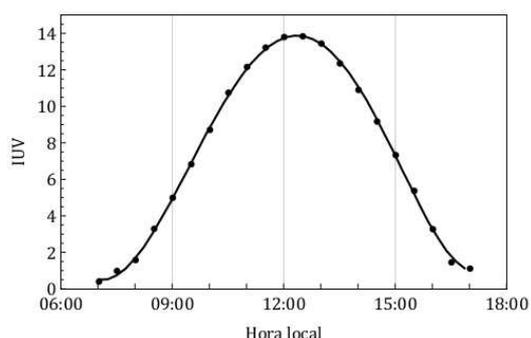


FIG. 3.— IUV medido por Brewer y polinomio de mejor correlación de ajuste a los datos: $192.967 - 1594.09x + 3895.38x^2 - 933.927x^3 - 6483.44x^4 + 5309.67x^5$.

trar el color desplegado por los solmáforos aproximadamente cada 30 minutos o cuando el solmáforo cambia a otro color, esto se muestra en las primeras dos columnas de la Tabla 3. Paralelamente se deja que el Brewer realice su rutina normal, medición del IUV aproximadamente cada 30 minutos, ver Tabla 2.

A fin de conocer el IUV de referencia en el instante que se registran los colores o cambios de colores en los solmáforos, se realiza un ajuste polinomial a los datos de la Tabla 2. Como resultado se halló que el mejor ajuste es logrado con un polinomio de quinto grado (Fig. 3).

Con el polinomio hallado se calcula el IUV de referencia para la hora local de la Tabla 3 y se analiza la coherencia de la respuesta del solmáforo considerando los rangos de IUV establecidos en la Tabla 1; los resultados se muestran en las últimas dos columnas de la Tabla 3.

De modo similar se procede con el solmáforo 334, cuyos resultados se muestran en la Tabla 4.

De las Tablas 3 y 4 se evidencia que la respuesta

TABLA 3
REGISTROS PARA EL SOLMÁFORO 373

Hora local	SOL 373	IUV(ref)	Respuesta
13:04	Violeta	13.4	Coherente
13:38	Violeta	12.2	Coherente
14:04	Violeta	10.9	Coherente
14:32	Violeta	9.3	Discrepa
15:02	Violeta	7.2	Discrepa
15:13	Violeta+Rojo	6.5	Discrepa
15:18	Rojo	6.1	Discrepa
15:37	Rojo+Naranja	4.8	Discrepa
15:42	Rojo+Naranja	4.5	Discrepa
15:47	Naranja	4.2	Discrepa
16:00	Naranja+Amarillo	3.4	Discrepa
16:32	Amarillo	1.8	Discrepa
17:13	Amarillo	1.0	Discrepa
17:30	Amarillo+Verde	1.3	Discrepa

TABLA 4
REGISTROS PARA EL SOLMÁFORO 334

Hora Local	SOL 334	IUV(ref)	Respuesta
13:04	Violeta	13.4	Coherente
13:38	Violeta	12.2	Coherente
14:04	Violeta	10.9	Coherente
14:32	Violeta	9.3	Discrepa
15:02	Violeta	7.2	Discrepa
15:13	Violeta	6.5	Discrepa
15:18	Violeta	6.1	Discrepa
15:37	Violeta	4.8	Discrepa
15:42	Rojo	4.5	Discrepa
15:47	Rojo	4.2	Discrepa
16:00	Naranja	3.4	Discrepa
16:32	Amarillo	1.8	Discrepa
17:13	Sin color	1.0	No responde
17:30	Sin color	1.3	No responde

TABLA 5
REGISTROS DEL IUV PARA EL BREWER Y SOLMÁFOROS 373, 334

Hora Local	Brewer	SOL 373	SOL 334
8:01	1.77	4.20	4.20
8:31	2.75	5.35	5.97
9:01	5.34	7.74	10.53
9:31	7.40	10.26	15.78
10:01	9.64	14.74	23.80
10:31	10.87	13.29	20.9
11:01	10.48	18.67	30.2
11:31	13.85	18.97	30.3
12:01	13.51	23.85	38.5

de ambos solmáforos no es satisfactoria, debido a que el umbral para encender el violeta está muy por debajo de las definiciones de la OMS (2003) ($IUV > 11$). El solmáforo 373 tiene por umbral un IUV 6.5, el solmáforo 334 tiene un umbral de 4.5. Consecuentemente ninguno de los otros colores responde a dichas definiciones.

2.3. Intercomparación cuantitativa

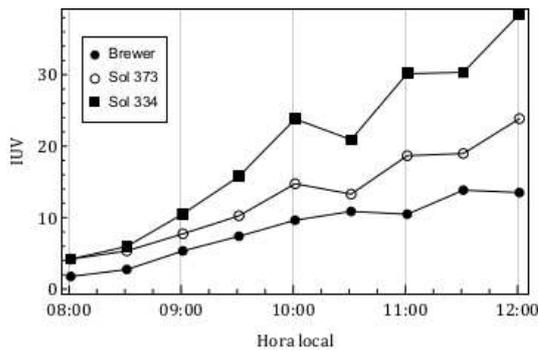


FIG. 4.— Intercomparación IUV solmáforos y Brewer (referencia).

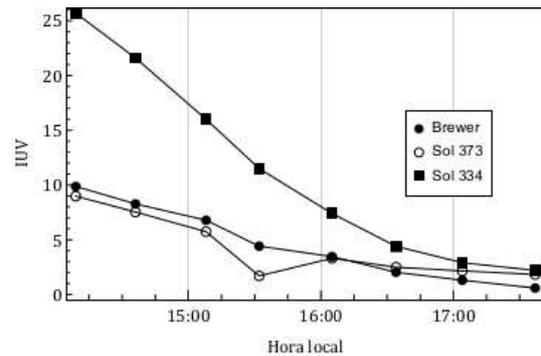


FIG. 6.— Intercomparación luego de la segunda calibración.

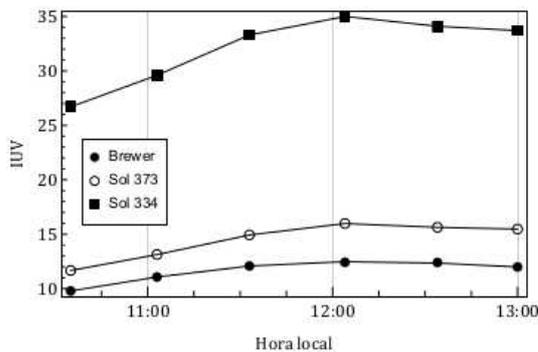


FIG. 5.— Intercomparación luego de la primera calibración.

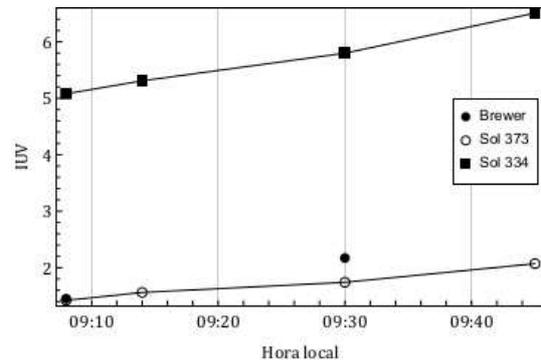


FIG. 7.— Intercomparación del 28 de julio, luego de ajustes en fábrica al solmáforo 334.

Debido a que la escala de cinco colores de la OMS (2003) presenta rangos del IUV inadecuados para una comparación precisa contra un instrumento que entrega valores numéricos, se optó por medir el IUV del solmáforo, esto se consiguió conectando un cable plug stereo al punto de conexión que posee el solmáforo en su base. En uno de los dos canales del plug stereo se tiene un voltaje diferente de cero y es en éste que se obtiene el IUV al multiplicar el voltaje por 10.

Nuevamente se ubican los sensores como en la Fig. 1 y se registran los valores de IUV de ambos solmáforos simultáneamente al registro del IUV de referencia (Brewer) desde las 8 hasta las 12 horas (Tabla 5).

Como se aprecia en la Fig. 4, el IUV de los solmáforos no es coherente entre ellos, y menos respecto del Brewer. Los IUV reportados a medio día son cercanos a 25 para el solmáforo 373 y 40 para el solmáforo 334, mientras el IUV de Brewer es 13.5.

La inexactitud de ambos solmáforos es muy notoria, sobre todo para índices mayores a 10, por lo que una calibración es requerida.

Se hizo una primera calibración a ambos solmáforos el día 25 de noviembre de 2014 a horas 10:00. Dicha calibración consistió en ajustar el potenciómetro al que se tiene acceso desde la parte inferior del solmáforo, hasta que el IUV del mismo sea igual al IUV del Brewer.

Durante el proceso de calibrado se advirtió que el IUV del solmáforo 334 no podía ser disminuido a valores menores de 20, mientras que el solmáforo 373

sí pudo ser calibrado al IUV de ese instante: 12.42.

Para verificar que la primera calibración hubiera sido satisfactoria se hicieron algunas mediciones con luz solar directa (Fig. 5). Sin embargo continúa existiendo una diferencia importante entre el solmáforo 373 y Brewer; y peor aún para el solmáforo 334. Por lo que se hizo una segunda calibración a ambos solmáforos, el 334 con la limitante ya señalada.

Después de la segunda calibración los valores de IUV del solmáforo 373 discrepan como mucho en una unidad (Fig. 6), excepto por el dato de las 15:30 en el que las nubes y la medida instantánea del solmáforo ocasionaron un desacuerdo mayor. El IUV del solmáforo 334 sigue siendo muy elevado respecto del Brewer cuando el IUV es mayor a 5, sin embargo para IUV menor a 2 existe mayor coherencia entre el solmáforo 334 y el Brewer.

Como consecuencia de estas dos calibraciones el solmáforo 373 quedó adecuado para su instalación y funcionamiento público, mientras que se devolvió a fábrica el solmáforo 334, para que se ajustaran las deficiencias encontradas.

2.4. Intercomparación luego de arreglos en fábrica

El solmáforo 334 retornó de fábrica en julio de 2015 y se realizaron nuevamente las tareas de intercomparación y calibración a ambos solmáforos.

El 28 de julio de 2015, luego de apenas dos mediciones de IUV, se evidenció que el solmáforo recién llegado de fábrica (el 334) estaba midiendo todavía un elevado IUV (Fig. 7); por lo que se realizó la calibración correspondiente tomando como referencia el

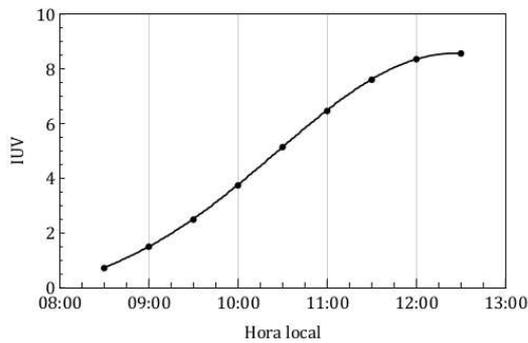


FIG. 8.— Datos del Brewer del 29 de julio y la curva interpolada: $189.809 - 1428.4x + 3485.35x^2 - 2708.94x^3$.

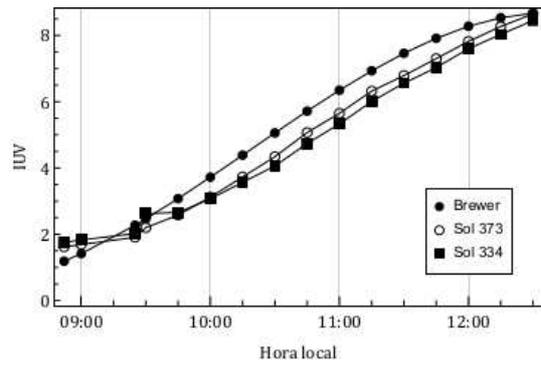


FIG. 10.— Intercomparación del 31 de julio.

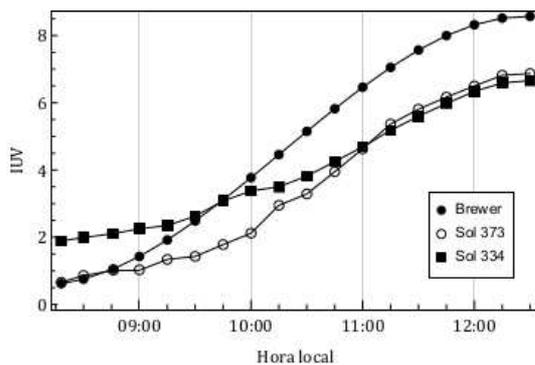


FIG. 9.— Intercomparación del 29 de julio.

dato del Brewer de las 10 de la mañana.

Una nueva intercomparación se realiza el 29 de julio de 2015; para ella se ajusta un polinomio a los datos de Brewer a fin de poder interpolar el IUV para cualquier instante, con la diferencia que en este caso el polinomio adecuado apenas es de tercer grado (Fig. 8).

La intercomparación del 29 de julio (Fig. 9) muestra que aún existe una discrepancia de ambos solmáforos en relación al IUV de referencia, que se incrementa para índices altos (medio día), por tal razón se realizó una nueva calibración de los dos solmáforos el día 30 de julio a las 12:30. Así se garantizaría una buena calibración para valores elevados de IUV, que son los que interesa medir con mejor exactitud, debido a que son los valores de mayor importancia para el propósito de alerta y prevención que tiene el solmáforo.

Finalmente luego de la calibración de medio día del 30 de julio se tiene la última y definitiva intercomparación (Fig. 10).

Conflicto de intereses

El autor declara que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

A. McKinley B. D. (1987), *CIE Journal* **6**, 17.
 F. Zaratti, R. N. Forno, J. García Fuentes & M. F. Andrade (2003), *J. Geophys. Res.* **108(D9)**, 5.
 L. K. Fanola, D. Guzmán, M. Peñaloza & F. Zaratti (2012), *Revista Boliviana de Física* **21**, 1.
 M. F. Andrade & F. Zaratti (2007), *Revista Boliviana de Física* **13**, 11.
 OEI (2014), Documentación Técnica Solmáforo.
 OMS,OMM, PNUMA, ICNIRP (2003), Índice UV solar mundial: Guía práctica (OMS).
 WMO (1997), Report of the WMO-WHO meeting of experts on standardization of UV indices.
 —. (2005), Instruments to Measure Solar Ultraviolet Radiation. Part 2: Broadband Instruments Measuring Erythemally Weighted Solar Irradiance.

TELETRANSPORTACIÓN DE FOTONES

PHOTON TELEPORTATION

GABRIEL ALEJANDRO AGUILAR & MICHELLE BALDERRAMA

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c.27 Cota Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

RESUMEN

El argumento Einstein-Podolsky-Rosen estableció las bases para discernir entre Teorías de Variables Ocultas y mecánica cuántica así como para desarrollar conceptos, tales como la teletransportación de partículas. El planteamiento de la paradoja ha evolucionado, simplificándose en algunos aspectos y llegando a ser formulado matemáticamente por John Bell; lo que permitió la realización de experimentos que determinen la validez de la mecánica cuántica e incursionar en la teletransportación de fotones. Los experimentos de Aspect mostraron que una de las desigualdades de Bell era quebrantada, con lo que las Teorías de Variables Ocultas no son correctas. Adicionalmente, la experiencia de Zeilinger tuvo éxito en la transportación de información mediante el uso de fotones anticorrelacionados.

Descriptores: Entrelazamiento cuántico - paradoja EPR - desigualdades de Bell - teletransportación

Código(s) PACS: 03.65.-w — 03.65.Ca — 03.67.-a

Descriptores: Mecánica cuántica — Formalismo mecánico cuántico — Información cuántica

ABSTRACT

The Einstein-Podolsky-Rosen argument established the basis for distinguishing between Hidden Variable Theories and Quantum Mechanics, as well as, developing concepts such as particle teleportation. The approach of the paradox has evolved and has been simplified to the point that it was formulated mathematically by John Bell. This made possible experiments that determined the validity of quantum mechanics and made way for the exploration of photon teleportation. The experiments carried out by Aspect have shown that one of Bell's inequalities was violated and, therefore, Hidden Variable Theories are incorrect. Moreover, the experience of Zeilinger has had success in teleporting information through the usage of anti-correlated photons.

Subject headings: Quantum mechanics — Quantum mechanics formalism — Quantum information

1. INTRODUCCIÓN

Durante el establecimiento de la mecánica cuántica como teoría, se hicieron cuestionamientos a la validez de sus predicciones. Tal es el caso del planteamiento de Einstein junto con sus entonces estudiantes Podolsky y Rosen, conocido como la paradoja Einstein-Podolsky-Rosen (EPR). Esta paradoja inicialmente pensada para refutar la teoría, sentó las bases para obtener la evidencia necesaria para sustentar la mecánica cuántica frente al punto de vista local y determinista.

La premisa inicial de la paradoja EPR consistía en un *gedankenexperiment*¹ que mostraba que la

mecánica cuántica era una teoría incompleta. Según la percepción de EPR, una teoría es completa si cada elemento de la realidad física tiene su contraparte en la teoría. Establecieron entonces un criterio para distinguir los elementos de la realidad: si se puede predecir con certeza el valor de una magnitud física sin perturbar al sistema, existe entonces algún elemento de la realidad física correspondiente a dicha magnitud.

El sistema del experimento planteado es un par de partículas entrelazadas alejadas entre sí a una distancia en la que no se puede comunicar información de una a la otra. Finalmente, se realiza una medición de un observable (que tenga su contraparte con la cual no conmuta, como son la posición y el momento) en una de las partículas; mientras que la otra adoptará un valor opuesto por el entrelazamiento. Según

¹ El término alemán *gedankenexperiment* se refiere al planteamiento pensado de algún experimento sin recurrir a la experimentación propiamente

el criterio adoptado, al poder predecir el observable de la segunda partícula, entonces deben existir elementos de la realidad anteriores a la observación que determinen los valores asumidos por las variables; dichos elementos no son incluidos en la mecánica cuántica y, por lo tanto, es una teoría incompleta. Los defensores de la teoría cuestionada argumentaron que los observables no tienen realidad simultánea hasta que cada uno es medido independientemente; por lo tanto, no puede concluirse nada determinante a partir del anterior criterio. En cambio, el hecho de que al medir una variable de una de las partículas, la otra adoptase un valor de manera instantánea era una *acción fantasmal a distancia* según Einstein y solo podía ser explicada si se introducían variables desconocidas que preserven los criterios de localidad y causalidad. A estas teorías se las denominó genéricamente Teorías de Variables Ocultas (TVO).

Años más tarde se planteó una versión simplificada de la paradoja por Bohm & Aharonov (1957). Bajo el nuevo análisis se consideró el espín de dos partículas entrelazadas, de manera que no solo se redujo el problema a una sola variable, sino que cuantizó los posibles valores de las variables; puesto que, en cualquier experimento realizable, el espín de una partícula solo adopta uno de dos valores en una dirección en particular.

1.1. Teorema de Bell

En medio de este panorama, John Bell planteó la paradoja de manera formal, tomando en cuenta una teoría genérica de variables ocultas, basada en las ideas de localidad y determinismo para así obtener la correlación de los espines de partículas entrelazadas en un experimento de tipo Bohm. El resultado de su razonamiento concluyó con una serie de desigualdades que dicho sistema debía cumplir bajo la explicación de cualquier TVO; sin embargo, de violarse alguna desigualdad, ninguna TVO puede explicar el comportamiento de dicho sistema.

El teorema de Bell se basa en dos hipótesis:

- **Determinismo.** Se refiere a la información suplementaria a la contenida en la función de estado para especificar completamente el valor de todos los observables de un sistema.
- **Localidad.** El producto de ambos observables dependerá, en general, del estado del par. A su vez toda información debe ser comunicada bajo los principios de la invarianza de la velocidad de la luz en el vacío.

Existen dos clases principales de TVO. Una recibe el nombre de no contextual, en la cual el estado completo del sistema determina el valor de una cantidad que se obtendrá mediante cualquier procedimiento de medición estándar de esa cantidad. La otra, que se suele llamar contextual, está definida como el valor obtenido que depende de qué cantidades se miden simultáneamente.

El teorema de Bell es el nombre colectivo de una familia de resultados, todos mostrando la imposibili-

dad de una interpretación local y determinista de la mecánica cuántica.

Estas desigualdades fueron reportadas y demostradas por Bell (1964), una de ellas representaba el mayor conflicto entre la mecánica cuántica y las TVO's:

$$1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \geq |P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \quad (1)$$

Sin embargo, por la dificultad de implementar las implicancias experimentales de la misma, se utiliza otra formulación de la desigualdad, reportada por Clauser, et. al. (1969).

$$|S| \leq 2 \quad (2)$$

donde:

$$S = E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}')$$

es la suma de las correlaciones de los 4 diferentes estados posibles de dos partículas A y B de un mismo par, denominados estados de Bell². Cada correlación se debe a las propiedades de ambas partículas de un mismo par. En tanto que la preservación de la igualdad requiere de la medición en 4 distintas orientaciones.

La importancia del resultado de Bell radica en colocar, por primera vez, la disyuntiva filosófica planteada por la paradoja EPR en términos cuantitativos susceptibles de verificación experimental. La conclusión inmediata fue que ninguna teoría realista y local puede estar de acuerdo con todas las implicaciones estadísticas de la mecánica cuántica.

Las cuestiones lógicas y metodológicas lidian con el problema de si se puede deducir legítimamente de estas investigaciones que la mecánica cuántica no es local, y si los datos experimentales prueban definitivamente que se han violado las desigualdades de Bell.

1.2. Teletransportación

El concepto de teletransportación subyace en la idea de que en experimentos como el planteado por Bohm-Aharonov, los espines de los electrones están anticorrelacionados, de manera que al medir uno de ellos el otro estará en dirección opuesta. Por lo tanto, si en el proceso de medición de la primera partícula se la entrelazara con otra cuyas propiedades quieren ser transportadas, entonces estas propiedades se transferirían a la segunda partícula debido al entrelazamiento inicial.

Estas ideas fueron fortalecidas con el desarrollo del formalismo cuántico³ y experimentalmente demostradas con un análogo luminoso. Para tratar con este problema es necesario definir el estado de un sistema (denotado por $|\psi\rangle$), si este consiste de los espines de 2 partículas, que pueden ser arriba (\uparrow) o abajo (\downarrow), el estado genérico del sistema será:

$$|\psi\rangle = z_1|\uparrow, \uparrow\rangle + z_2|\uparrow, \downarrow\rangle + z_3|\downarrow, \uparrow\rangle + z_4|\downarrow, \downarrow\rangle \quad (3)$$

² Los estados de Bell son detallados en Bell (1964)

³ La formulación matemática del procedimiento ideal para la teletransportación de partículas entrelazadas se encuentra de forma detallada en Bouwmeester et. al. (1997)

TABLA 1
INSTRUCCIONES PARA B TRAS RECIBIR LOS RESULTADOS DE A

Espín A	Espín X	Instrucciones para B
↓	→	Ninguna
↓	←	Rotación alrededor del eje Z
↑	→	Rotación alrededor del eje X
↑	←	Rotación alrededor del eje Y

donde los coeficientes z_i elevados al cuadrado son las probabilidades de que el estado sea el término al cual modulan; por lo tanto, debe cumplirse que $\sum z_i^2 = 1$.

En el caso particular de un estado entrelazado de dos partículas A y B (denominado estado singulete) se tiene que el sistema está definido por:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle] \quad (4)$$

que indica que las orientaciones de los espines están anticorrelacionadas y que cada uno de los posibles estados tiene 50% de probabilidad de ser medido. La partícula A actúa como un intermediario para transportar la información; mientras que la partícula B es modificada según la información que recibe de A.

Por otro lado, se cuenta con una partícula X, que es la que se quiere transportar y cuyo estado general es:

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle \quad (5)$$

Entonces el estado inicial de los tres espines es ⁴:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[a|\uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle + b|\downarrow, \uparrow, \downarrow\rangle - a|\uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle - b|\downarrow, \downarrow, \uparrow\rangle] \quad (6)$$

donde cada subestado describe el espín de las partículas X, A y B en ese orden.

A partir de este estado, se deben realizar una serie de operaciones para alterarlo de tal manera que se transfieran las propiedades de X hacia B, es decir, atribuir los coeficientes del estado X a la partícula B. La serie de operaciones a realizar son:

- Una operación C-X entre A y X, que es equivalente a cambiar la orientación del espín de A si y solo si el espín de X es *abajo* (↓)
- Medir el espín de A en una dirección (z).
- Rotar el eje del espín 90° ⁵ y medir el espín de X en esa dirección (x).

Una vez realizadas las mediciones, se deben enviar los resultados hechos por el manipulante de A y X al manipulante de B por cualquier otro medio, para que se realicen las operaciones finales descritas en la Tabla 1.

El resultado final es que, al haber medido el espín de las partículas A y X, ninguna conserva su estado inicial. Sin embargo, el estado final de la partícula B es una superposición de espín arriba (+) y abajo (-),

⁴ La demostración rigurosa se muestra en Premelec (2007)

⁵ La medición del espín tras una rotación de 90° es equivalente a la medición en la dirección izquierda (←) y derecha (→)

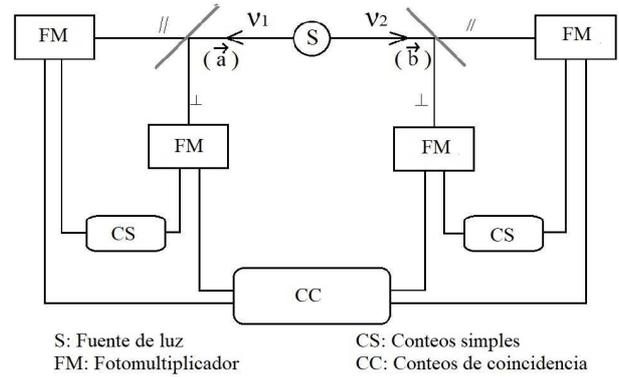


FIG. 1.— Esquema del segundo experimento de Aspect en el cual, los fotones con orientaciones \vec{a} y \vec{b} , en respuesta a los polarizadores, son detectados por fotomultiplicadores para realizar conteos simples y por coincidencia

con coeficientes a y b respectivamente, es decir, la información cuántica se ha transferido de la partícula X a la partícula B.

2. METODOLOGÍA

2.1. Experimentos de Aspect

El científico suizo Alain Aspect verificó que la segunda desigualdad de Bell no se cumple luego de haber realizado tres experimentos entre 1981 y 1982, dos de ellos (el primero y el tercero) utilizaron medidas de un canal; mientras que el segundo utilizó medidas de dos canales y es el que proporcionó evidencias contundentes en contra de las TVO.

El primer experimento se detalla en Aspect, Dabillard & Roger (1981) y consistió en la medición de la correlación de fotones polarizados en la región del visible. Los fotones de polarización correlacionada fueron obtenidos a través de decaimientos en cascada de átomos de calcio. El arreglo permitió obtener datos para diferentes distancias entre la fuente y los polarizadores, así como todo el rango de orientaciones relativas de los polarizadores (360°).

El segundo experimento fue, según Aspect, una *transposición directa del esquema ideal de Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm*, así lo dio a conocer en Aspect, Grangier & Roger (1982). El arreglo se muestra esquemáticamente en la Fig. 1 y fue optimizado de tal manera que se midieron todas las orientaciones posibles de los fotones y no solo aquellas que coincidían con la orientación de los polarizadores. En este sentido, se reemplazaron los polarizadores lineales por otros de canales y seguidos de dos fotomultiplicadores; estas modificaciones asemejaron la medición de la polarización de los fotones a una medición de Stern-Gerlach de espines $1/2$.

El tercer experimento hizo uso dos pares de polarizadores variables que poseían la propiedad de cambiar entre dos orientaciones en un tiempo corto (10 ns) comparado con el tránsito del fotón entre los polarizadores (40 ns). Las señales fueron captadas por un analizador de tiempo variable siguiendo el esquema de los anteriores experimentos. Este experimento se detalla en Aspect, Dalibard & Roger (1982).

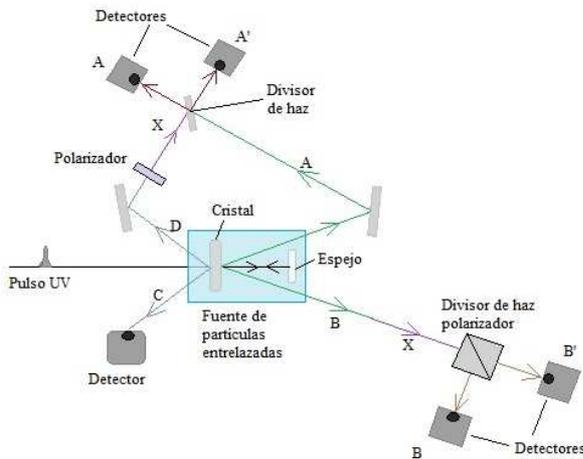


FIG. 2.— Arreglo experimental del experimento en Innsbruck

En su último experimento, Aspect utilizó polarizadores variables; sin embargo, la mayor dificultad, no resuelta en su experiencia, fue la aleatoriedad de la razón de cambio de orientación. Aspect trabajó con señales cuasiperiódicas que aún conservaban un carácter determinista. El problema surge a raíz de las condiciones de localidad al plantear el teorema de Bell, el cual impone que la elección de la dirección de medida debe ser aleatoria para asegurar que no haya comunicación física entre los polarizadores, a esta salvedad se la conoce como *loophole* de comunicación, que es un contrargumento de los defensores de las TVO.

2.2. Experimento de Zeilinger

En este contexto apareció Zeilinger (2000) que explica el experimento de Innsbruck sobre la teletransportación de fotones. A diferencia del experimento de Aspect, la distancia de separación entre las estaciones de medición fue de 400 m, lo cual permitió que las orientaciones de los analizadores fueran aleatorias; dado que el tiempo de viaje de los fotones era mayor. En cuanto a los fotones, éstos fueron obtenidos por pulsos de luz ultravioleta (UV) que atravesaban un cristal. Los fotones se dirigían hacia sus respectivos destinos A y B mientras que un espejo reflejaba el pulso UV y atravesaba el cristal nuevamente para formar los fotones entrelazados C y D (ver Fig. 2). El fotón C ingresaba a un detector; por otro lado, D atravesaba un polarizador en cualquier orientación y se convertía en el fotón X. De esta manera, A y X incidían en un semireflector que ofrecía a los fotones la posibilidad de ingresar en 1 de 2 detectores. Sin embargo, si A y X se hacían indistinguibles, entonces existía interferencia cuántica y los fotones tenían una probabilidad de 25% de ingresar en detectores separados. Esa probabilidad se correspondía con uno de los cuatro posibles estados de Bell.

Si se detectaban los fotones A y X simultáneamente en detectores distintos, entonces el fotón B era una réplica de X debido al entrelazamiento inicial de A y B.

3. RESULTADOS

El primer experimento de Aspect fue importante para determinar que la correlación de la polarización de los fotones entrelazados se asemeja más a aquella predicha por la mecánica cuántica que por las TVO. Sin embargo, las técnicas utilizadas para realizar las mediciones perdían información; puesto que los detectores tenían baja eficiencia; por lo tanto, era imposible saber si los fotones no detectados eran bloqueados por el polarizador o solo no eran registrados por el detector.

El segundo experimento mostró resultados contundentes puesto que se trataba de una reproducción semejante a la del planteamiento inicial de la paradoja EPR. Con los polarizadores de canales acoplados fue posible determinar la orientación de los fotones; ya sea que tuvieran la orientación fijada por el detector o no. En consecuencia, se obtuvieron los coeficientes correspondientes a los 4 estados posibles del sistema.

El tercer experimento consideró la variación en el tiempo de la orientación de los polarizadores. Según Aspect y Bell, si existiera alguna interacción con una velocidad igual o cercana a la de la luz los resultados obtenidos podrían explicarse también a través de teorías de variables ocultas (o de parámetros suplementarios); por lo tanto, las desigualdades de Bell no se aplicarían en dicha situación y no habría disyunción entre la mecánica cuántica y las TVO's. Sin embargo, el arreglo experimental aseguró que dicha interacción no existe; puesto que la razón de cambio de los polarizadores es mayor a L/c .

En el experimento de Zeilinger se verificó que la polarización del fotón B coincidía con la del fotón X en un 80% de las veces y para diferentes orientaciones de polarización X. El factor más limitante para realizar el experimento fue la medición del estado de Bell entre los fotones A y X; puesto que para realizar el transporte de información es necesario que A y X sean indistinguibles. El equipo de Zeilinger siguió la propuesta de Zukowski según la cual los fotones debían incidir sobre filtros de banda espectral extremadamente corta, de ese modo, los fotones tenían una energía bien definida; y, por el principio de Heisenberg, con gran incertidumbre en el tiempo.

Más allá de haber medido la polarización correcta la mayor parte de las veces, solo se logró el transporte para uno de los 4 estados de Bell posibles (estado en el cual los fotones A y X son detectados simultáneamente en detectores distintos). Por lo tanto, con este método es posible conseguir el transporte en un 25% de las veces como máximo.

4. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

A pesar de que la paradoja EPR fue planteada inicialmente con el propósito de cuestionar los resultados de la mecánica cuántica, estableció los fundamentos necesarios para determinar la validez de esta teoría frente a otras en las que subyace la idea de que se requieren de variables no definidas para completar la descripción de la misma.

La evidencia experimental basada en los

fenómenos de fotones anticorrelacionados favorece a las predicciones de la mecánica cuántica, en este sentido, los experimentos del equipo de Aspect fueron determinantes para eliminar la incertidumbre acerca de la vigencia de alguna TVO. Y bajo los mismos principios se erigen las experiencias de teletransportación cuántica. Las experiencias de Zeilinger utilizando fotones, muestran un avance revolucionario en la concepción de la teletransportación.

La teletransportación de partículas es, en realidad, la réplica de información cuántica de una partícula utilizando el fenómeno de entrelazamiento. Sin embargo, no es posible utilizar aquel principio para la

transportación a velocidades superlumínicas; puesto que, para reproducir la información cuántica de alguna partícula es necesaria la comunicación de mediciones y resultados intermedios por medios convencionales.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Marcelo Ramírez por su apoyo y paciencia durante la etapa de investigación; de la misma manera, agradecen a Eduardo Palenque por la asistencia, sugerencias y correcciones brindadas a lo largo del desarrollo del trabajo.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Aczel, A. (2001), *Entanglement The Greatest Mystery in Physics* (New York: Four Walls Eight Windows)
- Aspect, A., Grangier, P. & Roger, G. (1982), *Phys. Rev. Lett.*, **49** (2), 91
- Aspect, A., Dalibard, J. & Roger, G. (1982), *Phys. Rev. Lett.*, **49** (25), 1804
- Aspect, A., Dabilard, J. & Roger, G. (1981), *Phys. Rev. Lett.*, **47** (7), 460
- Bell, J. S. (1964), *Physics Physique Fizika*, **1** (3), 195
- Bohm, D. & Aharonov, Y. (1957), *Phys. Rev.*, **108** (4), 1070
- Bouwmeester, D. and Pan, J. and Mattle, K. and Eibl, M. and Weinfurter, H. & Zeilinger, A. (1997), *Nature*, **390**, 575
- Clauser, J. F., Horne, M.A., Shimony, A. & Holt, R. A. (1969), *Phys. Rev. Lett.*, **23** (15), 880
- Einstein, A., Podolsky, B. & Rosen, N. (1935), *Phys. Rev.*, **47** (10), 777
- Premelc, A. (2007), *Quantum Teleportation* (Ljubljana:University of Ljubljana)
- Zeilinger, A. (2000), *Scientific American* **282** (4), 50-59

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Dr. Flavio Ghezzi Moris

Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos

Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

Misión

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica semestralmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

Instrucciones para los autores

Los trabajos enviados para su publicación deberán estar escritos preferentemente en castellano. Trabajos escritos en inglés podrán ser aceptados por el Comité Editorial y, pasado el proceso de aceptación, serán traducidos al castellano para su publicación en la RBF.

Los autores deberán enviar sus trabajos preferentemente en los formatos $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, *MS Word*, o *sólo texto* (con extensiones *.tex*, *.doc* y *.txt*, respectivamente), ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. Las figuras deberán tener una resolución razonable a fin de que puedan ser vistas con suficiente claridad por el lector.

Los artículos científicos serán revisados por el Comité Editorial y posteriormente por un par de árbitros anónimos quienes dan el veredicto sobre si el artículo es aceptado o no.

La comunicación de los autores con los árbitros se realiza únicamente a través del editor encargado del área.

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

Conflicto de interés: Los autores que envíen artículos para su publicación en la RBF admiten que no tienen conflicto de interés en relación a los trabajos realizados y presentados.

CONTENIDO

EDITORIAL

Editor

A. ARTÍCULOS

CARACTERIZACIÓN DE UN MODELO SOCIAL DISCRETO DE TOMA DE DECISIÓN BASADO EN REDES COMPLEJAS

Verónica Subieta-Frías & Gonzalo Marcelo Ramírez-Ávila

FULGURACIONES SOLARES DE SEPTIEMBRE 2017 REGISTRADOS POR EL OBSERVATORIO GEOMAGNETICO DE VILLA REMEDIOS Y EL MONITOR DE NEUTRONES NM-64 DE CHACALTAYA COTEJADOS CON REGISTROS DE FLUJO DE RAYOS X SOLARES DEL SATELITE GOES

Ricaldi Y. E. L., Ticona P. R., Miranda L. P. & Quispe M. J.

ESTUDIO TEÓRICO DE LA ACCIÓN DE RADIACIONES IONIZANTES EN LA DINÁMICA POBLACIONAL DE CÉLULAS CANCEROSAS

Gonzalo Marcelo Ramírez-Ávila

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

CALIBRACIÓN DE SOLMÁFOROS PARA SU INSTALACIÓN EN LA CIUDAD DE LA PAZ

René Gutierrez Colque

E. HISTORIA

TELEPORTACIÓN DE FOTONES

Gabriel Alejandro Aguilar & Michelle Balderrama