

ISSN - 1562 - 3823

# REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

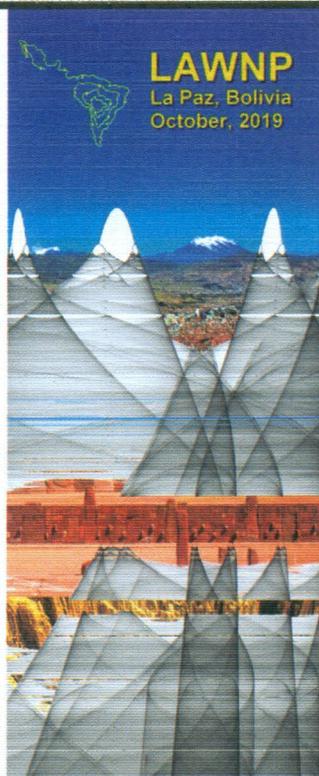
NÚMERO 33

DICIEMBRE 2018 • LA PAZ - BOLIVIA

**LATIN AMERICAN WORKSHOP  
ON NONLINEAR PHENOMENA**



**LAWNP  
2019  
Bolivia**



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS  
CARRERA DE FÍSICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

---

**REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA**  
**Ésta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física**

**COMITÉ EDITORIAL**

**Sociedad Boliviana de Física**

**Lic. Alfonso Velarde Chávez**

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

**Instituto de Investigaciones Físicas**

**Dr. Marcelo Ramírez Ávila**

Email: mravila@fiumsa.edu.bo

**Carrera de Física**

**Dr. Armando R. Ticona Bustillos**

Email: aticona@fiumsa.edu.bo

**M.Sc. Elba J. Colque Zacarías**

Email: jhabaelba@gmail.com

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

---

**CONSEJO EDITORIAL**

**Dr. Oscar Antonio Rondón**

Institute of Nuclear and Particle Physics  
University of Virginia  
McCormick Road, Charlottesville, VA 22901  
804 924-6787, USA  
Email: or@virginia.edu

**Dr. Carlos Navia**

Instituto de Física  
Universidade Federal Fluminense  
Av. Gen. Milton Tavares de Souza  
24210-340, Niterói, RJ-Brasil  
Email: gfcnoj@if.uff.br

**Dr. André Nepomuceno**

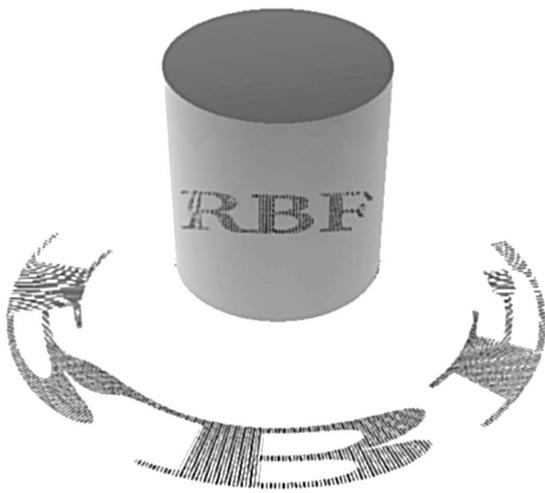
Polo Universitario Rio das Ostras  
Universidade Federal Fluminense  
Rua Recife, Jardim Bela Vista  
28890-000, RJ-Brasil  
Email: anepomuceno@uff.br

**Dr. Paulo Murilho Castro de Oliveira**

Instituto de Física  
Universidade Federal Fluminense  
Av. Gen. Milton Tavares de Souza  
24210-340, Niterói, RJ-Brasil  
Email: jstilck@if.uff.br

---

ISSN 1562-3823



# Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS  
CARRERA DE FÍSICA  
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS  
Y  
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 33  
DICIEMBRE DE 2018

## **Revista Boliviana de Física**

**ISSN 1562-3823**

**Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica**

<http://www.scielo.org.bo>

<http://www.latindex.unam.mx>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.  
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

*Diseño:* A. Ticona

*Dirección:* Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.

Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

*Portada:* Anuncio del XVI Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena (LAWNP 2019). Del 22 al 26 de octubre, La Paz, será la sede de este evento que dará la oportunidad a los científicos locales de interactuar y de establecer colaboraciones con científicos de reconocida fama mundial. (Créditos: Lic. Sorge Oporto Almaraz).

*Formato*  $\LaTeX 2_{\epsilon}$ . *Tipo de fuente utilizada:* newcentury

IMPRESO EN BOLIVIA — PRINTED IN BOLIVIA

## CONTENIDO

EDITORIAL	<i>Editor</i>	1
-----------	---------------	---

### A. ARTÍCULOS

ESTUDIO ANALÍTICO-SIMULADO DE LA EFICIENCIA DE DISPARO DEL ARREGLO SUPERFICIAL DE DETECTORES DEL EXPERIMENTO ALPACA	<i>Calle C. &amp; Rivera H.</i>	3
---	---------------------------------	---

A MINIMAL MODEL FOR ELECTRICAL AND GRAVITATIONAL INTERACTIONS IN A CONFINED SYSTEM OF CHARGED SPHERES	<i>Sanjines D. &amp; Ghezzi F.</i>	13
---	------------------------------------	----

SACCHAROMYCES CEREVISIAE COMO BIOCATALIZADOR EN CELDAS DE COMBUSTIBLE MICROBIANAS CON FERRICIANURO DE POTASIO	<i>Vargas B., Álvarez Aliaga M. T., Ghezzi F. &amp; Ticona-Bustillos A.</i>	21
---	---	----

### D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

EL TELESCOPIO: UNA PRIMERA VENTANA AL UNIVERSO	<i>Conde G.</i>	27
--	-----------------	----

# EDITORIAL

En esta segunda entrega correspondiente a la gestión 2018 de la Revista Boliviana de Física (RBF) se plasma uno de los cambios introducidos en este año, a saber, la posibilidad que tienen los autores de enviar sus trabajos en inglés. Esperamos que este cambio se traduzca en la recepción de un número mayor de artículos y que los mismos tengan mayor llegada al público científico que utiliza preponderantemente la lengua inglesa como idioma común de la ciencia.

La RBF, ya en su número 33 muestra que el grupo de investigación de física de altas energías (rayos cósmicos) va consolidando ALPACA (Andes Large area PArticle detector for Cosmic ray physics and Astronomy) uno de sus proyectos de mayor envergadura que va consolidándose con el apoyo decisivo de la cooperación japonesa. Por otra parte, el grupo de investigación del área de física de materiales mesoscópicos, debido a su carácter fuertemente interdisciplinario, es artífice de dos artículos, uno en colaboración con el grupo de física teórica y otro con el Instituto de Investigaciones Farmaco-Bioquímicas. Finalmente, destacamos las permanentes actividades del Planetario Dr. Max Schreier, institución que hace enormes esfuerzos por divulgar la física y la astronomía.

En este número de la RBF, se presentan tres artículos científicos sometidos a proceso de arbitraje internacional. En el primer artículo, Calle-García & Rivera-Bretel (2018) hacen un estudio analítico de la eficiencia de disparo del arreglo de superficie utilizando chubascos atmosféricos generados con simulaciones de Monte Carlo para tres tipos de partículas primarias: protones, núcleos de hierro y rayos gamma, lo que permitirá realizar una mejor reconstrucción de los eventos registrados; por otra parte, los autores encuentran también que el tamaño de la muestra juega un rol importante para los cálculos realizados, debiendo ser estas, grandes para evitar las extremas fluctuaciones que se presentan en muestras pequeñas. Trabajando con un sistema confinado de esferas cargadas, Ghezzi & Sanjinés (2018) implementan el método de relajación para la ecuación de Laplace para una grilla tridimensional; sus resultados muestran una buena concordancia con la hipótesis de interacción culombiana. Finalmente, Vargas-Arce *et al.* (2018) determinan la cinética de *Saccharomyces Cerevisiae*, mostrando además que el crecimiento de esta levadura produce un cambio en el voltaje.

Finalmente, como parte de su trabajo de interacción social en el Planetario Dr. Max Schreier, presenta de manera detallada y didáctica al telescopio y a todos los conceptos físicos involucrados en el funcionamiento del mismo. Numerosos ejemplos y problemas hacen que la guía presentada sea de mucho interés en lo concerniente a aspectos relacionados a la enseñanza de la física y astronomía.

Esperamos que el contenido de este ejemplar de la RBF sea de su agrado y pueda motivar al lector en la profundización de los trabajos expuestos a través de estas páginas. También invitamos a la comunidad científica a enviar sus trabajos para ser publicados en la RBF.

## REFERENCIAS

- Calle-García, C.A., & Rivera-Bretel, H.M. 2018, Revista Boliviana de Física, **33**, ?.
- Ghezzi, F., & Sanjinés, D. 2018, Revista Boliviana de Física, **33**, ?.
- Vargas-Arce, B.A., Alvarez-Aliaga, M.T., C., Ghezzi-Moris, F.G. & Ticona-Bustillos, A.R. 2018, Revista Boliviana de Física, **33**, 1.
- Conde-Saavedra, G. 2018, Revista Boliviana de Física, **32**, ?.

# EDITORIAL

In this second issue of 2018 the Bolivian Physics Review (RBF) takes the opportunity to inform readers and contributors that the RBF accepts articles in English. We hope that this change brings a greater number of submitted articles and a wider public.

The RBF in its issue 33 shows the progress made by the High Energy Physics Research Group in collaboration with Japanese scientists to consolidate the ALPACA Project (Andes Large area Particle detector for Cosmic ray physics and Astronomy) . Also, in this issue the mesoscopic materials research group demonstrate their interdisciplinary nature with two articles: the first in collaboration with the Theoretical Physics Group and the second with the Institute Pharmacy and Biochemistry. Finally we highlight the activity of the Dr Max Schreier Planetarium and their efforts to promote and disseminate themes of physics and astronomy.

In this issue of the RBF there are three internationally refereed articles. In the first article Calle-García & Rivera-Bretel (2018) analyse the trigger efficiency using Monte Carlo simulation techniques for three types of cosmic ray particles protons, iron nucleons and gamma rays in a surface array. The authors found that sample size is important for the calculations carried out and that big samples are necessary to avoid large fluctuations. Working with a confined system of charged spheres, Ghezzi & Sanjinés (2018) use the relaxation method for the Laplace equations for a 3-dimensional grid. Their results agree with the Coulomb interaction hypothesis. Finally, Vargas-Arce *et al.* (2018) determine the kinetics of *Saccharomyces Cerevisiae* using potassium ferricyanide, and reveal that yeast growth produces a change in voltage.

Finally, as part of the social interaction of the Dr Max Schreier Planetarium, a detailed and didactic description of the telescope and the physical concepts related to its workings, is presented. This is accompanied by numerous examples and frequently asked questions answered making the guide a useful resource for the teaching of physics and astronomy.

We hope that this issue of the RBF is of interest to the scientific community and that at the same time it motivates scientists to send their intellectual work for publication. We are grateful for the SciELO platform which is freely accessible to the entire scientific community and the general public.

## REFERENCIAS

- Calle-García, C.A., & Rivera-Bretel, H.M. 2018, Revista Boliviana de Física, **33**, ?.
- Ghezzi, F., & Sanjinés, D. 2018, Revista Boliviana de Física, **33**, ?.
- Vargas-Arce, B.A., Alvarez-Aliaga, M.T., C., Ghezzi-Moris, F.G. & Ticona-Bustillos, A.R. 2018, Revista Boliviana de Física, **33**, 1.
- Conde-Saavedra, G. 2018, Revista Boliviana de Física, **32**, ?.

## ESTUDIO ANALÍTICO-SIMULADO DE LA EFICIENCIA DE DISPARO DEL ARREGLO SUPERFICIAL DE DETECTORES DEL EXPERIMENTO ALPACA

### STUDY OF THE TRIGGER EFFICIENCY OF A SURFACE ARRANGEMENT OF DETECTORS FOR THE ALPACA PROJECT USING SIMULATIONS AND ANALYTICAL METHODS

CARLA A. CALLE GARCÍA & HUGO M. RIVERA BRETEL

Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635  
La Paz - Bolivia

(Recibido 22 de mayo de 2018; aceptado 5 de octubre de 2018)

#### RESUMEN

El experimento ALPACA (Andes Large area Particle detector for Cosmic ray physics and Astronomy) es un proyecto científico cuyo objetivo principal es la determinación del origen de los rayos cósmicos galácticos. El arreglo experimental consistirá de 401 detectores de centelleo a nivel de superficie y 8 piscinas de agua subterráneas que actuarán como detectores de muones tipo Cherenkov. El proyecto será puesto en marcha cerca del monte Chacaltaya, en el Cerro Estuquería a 4740 m sobre el nivel del mar (m s.n.m). En este trabajo se hizo un estudio analítico de la eficiencia de disparo del arreglo de superficie utilizando chubascos atmosféricos generados con simulaciones de Monte Carlo para tres tipos de partículas primarias: protones, núcleos de hierro y rayos gamma. Se consideraron energías entre  $10^{12,00}$  y  $10^{15,25}$  eV con ángulos cenitales entre 0 y 47 grados. Se encontró que el arreglo de superficie es 100% eficiente para la detección de los tres tipos de partículas primarias consideradas con energías superiores a la energía de saturación  $E_{sat} = 10^{14,25}$  eV, independientemente de su dirección de llegada, energía y posición del centro del chubasco sobre el arreglo de los detectores.

Código(s) PACS: 96.40.z — 96.40.Pq — 95.55.Vj

*Descriptores:* Rayos cósmicos — chubascos atmosféricos — detectores de partículas

#### ABSTRACT

The ALPACA (Andes Large area Particle detector for Cosmic ray physics and Astronomy) experiment is a scientific project whose main objective is the determination of the origin of galactic cosmic rays. The project is in the planning stage and its experimental array will consist of 401 surface level scintillation detectors and 8 underground water pools that will act as Cherenkov muon detectors. The experiment will be set up near the mountain Chacaltaya, on Cerro Estuquería at 4740 m above sea level (m a.s.l). We have studied the trigger efficiency of the surface detector array using extensive air showers generated with Monte Carlo simulations for three types of primary cosmic rays: protons, iron nuclei and gamma rays. Energies between  $10^{12,00}$  and  $10^{15,25}$  eV were considered and zenith angles between 0 and 47 degrees. We found that the surface array is 100% efficient for the detection of the three types of primary particles considered with energies greater than the saturation energy  $E_{sat} = 10^{14,25}$  eV, regardless of its arrival direction, energy and shower core position over the array of detectors.

*Subject headings:* Cosmics rays — atmospheric showers — particle detectors

#### 1. INTRODUCCIÓN

##### 1.1. *Los rayos cósmicos*

El estudio de la radiación cósmica tiene su origen en el siglo XX, un poco después de que Becquerel descubriera la radiactividad. En ese entonces los científicos que se encontraban estudiando la conductividad remanente del aire expuesto a fuentes radiactivas, atribuían el origen de dichas fuentes a los elementos presentes en el suelo terrestre. Sin em-

bargo, entre 1911 y 1912, el austriaco Victor Hess hizo una serie de viajes en globo (alcanzando una altura máxima de 5 km) y demostró que la ionización del aire aumentaba con la altura a partir de un cierto punto. Con esto concluyó que debería existir una fuente extraterrestre de radiación ionizante Grupen (2005).

Posteriormente, se descubrió que la ionización en la atmósfera se debía a radiación secundaria producida por radiación primaria aún más alto en

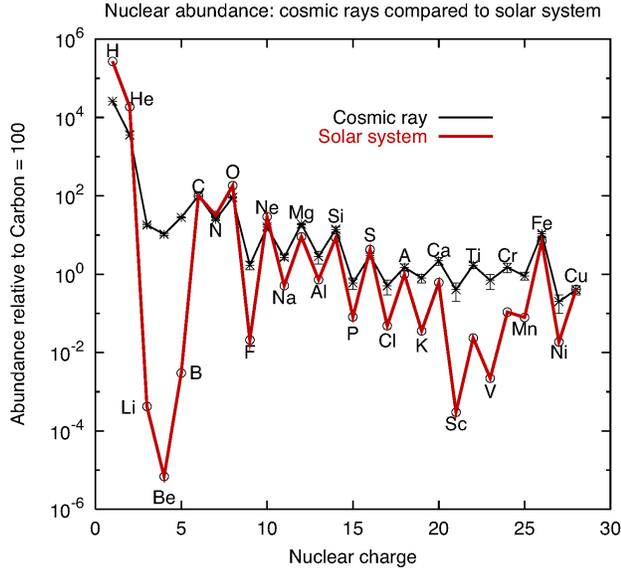


FIG. 1.— Abundancia nuclear de los rayos cósmicos galácticos (negro) comparada con la del sistema solar (rojo), relativa al carbono. Se observa una mayor abundancia de Li, Be, B y los elementos que se encuentran por debajo del hierro, debido a una fragmentación de los núcleos más pesados. La imagen fue obtenida de la referencia Université Libre de Bruxelles (2018).

la atmósfera, compuesta sobre todo por partículas cargadas, que fueron denominadas rayos cósmicos (RC) Blackett & Occhialini (1993). Los RC primarios son radiación cósmica que incluye partículas subatómicas y núcleos atómicos. Las trayectorias de las partículas cargadas son modificadas durante su propagación por el espacio intergaláctico, debido sobre todo a su interacción con los campos magnéticos presentes. Es interesante estudiarlos ya que sus mecanismos de producción y aceleración son diversos y no se han podido reproducir condiciones experimentales como esas en laboratorios terrestres Grupen (2005).

En la figura 1 se muestra la abundancia elemental de los RC galácticos comparada con la composición del sistema solar, relativa al carbono. Los protones son las partículas dominantes (89%), seguidas por las partículas  $\alpha$  (9%), electrones (1%), elementos livianos y pesados. Se puede observar que existen diferencias marcadas para elementos como el litio, berilio y boro ( $Z = 3 - 5$ ) y para los elementos que se encuentran debajo del grupo del hierro ( $Z < 26$ ). La mayor abundancia de Li, Be y B en los rayos cósmicos puede entenderse como una fragmentación del carbono y del oxígeno; y de la misma forma la fragmentación del hierro incrementa la población de los elementos que se encuentran debajo de él. Hasta el momento todos los elementos de la tabla periódica han sido encontrados en los RC Grupen (2005).

El flujo de los RC disminuye drásticamente a medida que su energía aumenta, como se observa en el espectro total reconstruido por diferentes experimentos en la figura 2 y se extiende en un rango de energía de más de diez ordenes de magnitud Grieder (2001). Sigue una ley de potencias como se muestra en la

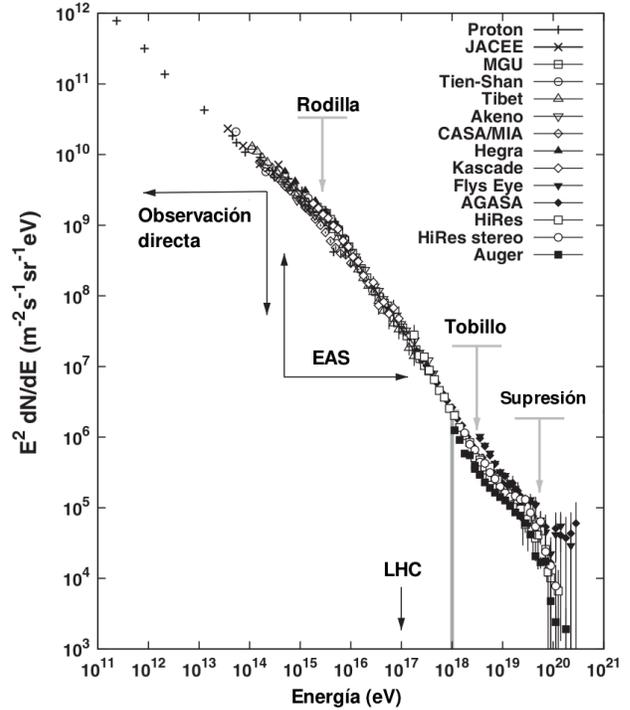


FIG. 2.— Espectro total de energía de los rayos cósmicos primarios medido por diferentes experimentos. El flujo fue multiplicado por  $E^2$  para resaltar las estructuras del espectro como la rodilla y el tobillo. La figura fue obtenida de la referencia Lettesier-Selvon & Stanev (2011).

ecuación 1, donde el valor de  $\alpha$  es aproximadamente 3:

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-\alpha}. \quad (1)$$

Se hace una división aproximada del espectro en tres regiones que clasifica a los RC según su origen dependiendo de su energía: solares ( $E < 10^{10}$  eV), galácticos ( $10^{10} < E < 10^{18}$  eV) y extragalácticos ( $10^{18} < E < 10^{21}$  eV). Sin embargo, los límites de energía continúan siendo un tema de estudio.

Estos límites de energía se deben a que los mecanismos que aceleran los RC son diferentes, por ejemplo el candidato para acelerador de los RC galácticos son los remanentes de supernova. En general, los objetos galácticos no tienen el tamaño ni los campos magnéticos para acelerar los RC más energéticos Grieder (2001).

También se observan dos estructuras que representan cambios en la pendiente, la rodilla en aproximadamente  $10^{15}$  eV y el tobillo alrededor de  $10^{18}$  eV. Por otro lado, existe una región de supresión del flujo debido al límite GZK (Greisen-Zatsepin-Kuzmin) en el que los RC con energías mayores a  $3 \cdot 10^{19}$  eV interactúan con la radiación cósmica de fondo y pierden energía, es por eso que se detectan muy pocos RC con energías superiores a este límite. A pesar de que los RC fueron descubiertos hace mucho tiempo, su origen continúa siendo un misterio Grieder (2001).

Cuando los RC primarios interactúan con los núcleos de la atmósfera producen cascadas extensas de partículas (EAS por su sigla en inglés). Estas

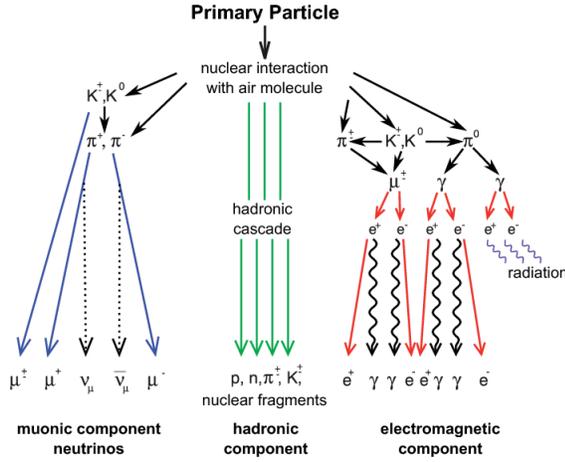


FIG. 3.— Componentes de una cascada de partículas secundarias generadas por un rayo cósmico primario, muónica, hadrónica, electromagnética y de neutrinos. La imagen fue obtenida de la referencia Haungs *et al.* (2015)

partículas secundarias se mueven prácticamente en la misma dirección que el primario, pero durante el desarrollo de la cascada son dispersadas alrededor de su eje. La región central de la cascada conocida como núcleo, tiene un máximo de densidad de partículas y es más compacta que los bordes. La extensión lateral del chubasco es causada esencialmente por los momentos transversales transferidos en las interacciones hadrónicas y por la dispersión múltiple de partículas de baja energía Flugge (1961).

Haciendo una descripción simplificada de las EAS, se toma en cuenta que tienen cuatro componentes: electromagnética, muónica, hadrónica y de neutrinos, como se muestra en la figura 3. El núcleo está compuesto por hadrones energéticos que constantemente inyectan energía a las demás componentes mediante decaimientos e interacciones. La componente electromagnética es generada principalmente por el decaimiento de  $\pi^0$  en rayos gamma, que a su vez producen pares  $e^\pm$ ; en su desarrollo van alternando los procesos de producción de pares, bremsstrahlung y dispersión de Coulomb. Esta componente lleva aproximadamente el 90 % de la energía del chubasco. Las componentes de muones y de neutrinos se forman por el decaimiento de piones cargados y kaones. El número de partículas producidas crece a medida que aumenta la profundidad atmosférica, hasta que los procesos de absorción como la ionización, dispersión de Compton y efecto fotoeléctrico dominan y provocan que la cascada se extinga gradualmente después de alcanzar su máximo. Debido a la incerteza en la profundidad atmosférica de la primera interacción y a fluctuaciones en el desarrollo del chubasco, el número total de partículas generadas varía significativamente Grupen (2005).

El tipo de partícula primaria determina la evolución del chubasco respecto al contenido y la distribución de energía a medida que la cascada se desarrolla en la atmósfera. Las EAS producidas por rayos gamma producen sobre todo fotones muy energéticos,  $e^-$  y  $e^+$  y sus características se ilustran con el modelo de Heitler que asume la generación

de nuevas partículas en intervalos definidos por una longitud de interacción  $\lambda$ . En cada nivel la energía de las partículas padre es distribuida igualmente. La cascada continúa desarrollándose hasta que la energía de las partículas alcanza un valor crítico, para los electrones es 84 MeV en el aire Matthews (2015). Por otro lado, la teoría del desarrollo lateral de las partículas electromagnéticas que fue desarrollada por Nishimura, Katamata y Greisen (NKG) hace una aproximación de la densidad de electrones a una distancia dada del eje del chubasco. La densidad de partículas decrece rápidamente a medida que aumenta la distancia al núcleo Kamata, & Nishimura (1958).

Por otro lado, las EAS generadas por hadrones involucran reacciones nucleares que dan origen a las cuatro componentes. Para estudiar el desarrollo de un chubasco producido por núcleos más pesados, se asume que la cascada producida por un núcleo primario de masa atómica  $A$  se desarrolla como lo harían  $A$  chubascos producidos por protones. Por lo general, los núcleos más pesados interactúan más alto en la atmósfera Matthews (2015).

Los RC con energías menores a  $10^{14}$  eV pueden ser detectados de manera directa por satélites y detectores enviados en globos, pero los que tienen energías mayores deben ser estudiados indirectamente con arreglos de detectores en tierra ya que el flujo es muy bajo Grieder (2001). Por ejemplo, para RC con energías de  $10^{11}$  eV, el flujo es de 1 partícula/m<sup>2</sup> s, para los que tienen energías alrededor de  $10^{15,5}$  el flujo es de 1 partícula/m<sup>2</sup> año y para los RC con energías de  $10^{20}$  el flujo es de 1 partícula/km<sup>2</sup> siglo. Existen diferentes experimentos en el mundo que detectan las partículas secundarias para estudiar los RC primarios. Es el caso del experimento ALPACA que gracias a su amplio campo de visión y gran sensibilidad, pretende estudiar fuentes denominadas Pevatrons que aceleran los RC hasta energías del orden de PeV Asaba *et al.* (2017).

## 1.2. El experimento ALPACA

El experimento ALPACA (Andes Large-area Particle detector for Cosmic-ray physics and Astronomy) es un proyecto científico desarrollado por Bolivia y Japón, cuyo objetivo principal es la determinación del origen de los RC galácticos. Se construirá en el Cerro Estuquería a 4740 m s.n.m. cerca del monte Chacaltaya, Bolivia (16°23' S, 68°08' O) Asaba *et al.* (2017).

El arreglo superficial (AS) ocupará un área de ~83000 m<sup>2</sup> y estará compuesto por 401 detectores de centelleo plásticos separados uno del otro sobre una cuadrícula de 15 m de espaciamiento. El detector de muones (DM) subterráneo tipo Cherenkov ocupará un área de ~5400 m<sup>2</sup> y estará compuesto por 8 piscinas. El objetivo del DM es discriminar el tipo de RC primario usando el número de muones que llegan al nivel de detección. El campo de visión del AS es de aproximadamente 2 estereorradianes, la resolución angular esperada es de aproximadamente 1 grado a 5 TeV y 0,2 grados alrededor de 100 TeV. Para rayos

gamma de 100 TeV, la resolución de energía está estimada en  $\sim 25\%$  y el poder de rechazo de hadrones es mayor a 99.9% para 100 TeV, de manera que se rechacen la mayor cantidad de eventos producidos por hadrones. En la figura 4 se muestra el AS y el DM del experimento ALPACA Asaba *et al.* (2017).

Los objetivos científicos del experimento son:

- Estudiar el origen de los RC galácticos observando rayos gamma muy energéticos (5 TeV - 1 PeV) producidos por interacciones cercanas a las fuentes de RC.
- Medida de la anisotropía de los RC en el hemisferio sur celeste.
- Estudio detallado del campo magnético de la corona solar.
- Medida del espectro de energía de los RC alrededor de la región de la rodilla (100 TeV - 100 PeV).

Actualmente el experimento se encuentra en una etapa de construcción del primer grupo de 100 detectores que se denominará ALPAQUITA. Posteriormente se acoplarán los demás detectores de superficie y las piscinas de muones.

En este trabajo se caracterizó la eficiencia de disparo del arreglo superficial de detectores de ALPACA empleando los datos generados con simulaciones de Monte Carlo, para tres partículas primarias (protones, núcleos de hierro y rayos gamma) en función de su energía, para ángulos cenitales entre 0 y 47 grados.

## 2. DATOS Y METODOLOGÍA

La eficiencia de disparo (ED) del arreglo superficial muestra su capacidad de detección en un rango de energía. Por encima de una determinada energía ( $E_{sat}$ ) del RC primario, la eficiencia de detección será del 100% independientemente de su dirección de llegada, energía, tipo y posición de impacto sobre el AS. La determinación de  $E_{sat}$  es muy importante para el experimento ya que a partir de esa energía, el área geométrica coincide con el área efectiva del arreglo de detectores y los datos obtenidos por el arreglo superficial serán empleados para la reconstrucción de las cascadas atmosféricas Abraham *et al.* (2010).

Con el objetivo de caracterizar la ED del arreglo de superficie del experimento ALPACA y determinar  $E_{sat}$ , se realizaron simulaciones de cascadas atmosféricas extensas en el programa CORSIKA Heck *et al.* (1998), tomando en cuenta las condiciones que se detallan en la subsección 2.1.

### 2.1. Simulaciones en CORSIKA

CORSIKA (COsmic Ray SIMulation for KAskade) es un programa que simula la evolución y las propiedades de las EAS de partículas en la atmósfera basado en el método de Monte Carlo. Fue desarrollado en el Instituto de Tecnología de Karlsruhe,

Alemania, para realizar las simulaciones del experimento KASCADE (KARlsruhe Shower Core and Array DEtector). Actualmente es muy usado en el área de rayos cósmicos y se encuentra en constante actualización con los datos obtenidos en aceleradores de partículas. El programa consiste de cuatro partes, la primera parte simula los decaimientos de partículas inestables y hace un seguimiento de las partículas tomando en cuenta las pérdidas de energía por ionización y la deflexión por dispersión múltiple en el campo magnético terrestre. La segunda parte trata las interacciones de núcleos y hadrones con los núcleos del aire a altas energías, la tercera parte simula las interacciones hadrónicas a bajas energías; la cuarta parte describe el transporte e interacción de  $e^-$ ,  $e^+$  y fotones energéticos Heck & Pierog (2017).

Las interacciones hadrónicas son simuladas por diferentes modelos, dependiendo de la energía. Si la energía es lo suficientemente alta, se emplean los modelos de interacciones hadrónicas DPMJET, EPOS, HDPM, QGSJET y QGSJET-II, SIBYLL y VENUS. Si la interacción corresponde a bajas energías, puede ser tratado con los modelos de interacciones hadrónicas FLUKA, GHEISHA y URQMD. Cada modelo viene acompañado de sus secciones eficaces y toma en cuenta una atmósfera compuesta por  $N_2$ ,  $O_2$  y  $Ar$  Heck & Pierog (2017).

En este trabajo se usó la versión 75700 de CORSIKA, el modelo de interacciones hadrónicas de alta energía QGSJET-II Ostapchenko (2013) (Quark Gluon String model with JETS). Hay mucha experiencia en la validación de este modelo y es bastante utilizado en diferentes experimentos. Las secciones eficaces que emplea para las interacciones se ajustan bien a datos experimentales en el rango de energía que se trabajará y no precisa de un tiempo de cómputo muy elevado Knapp *et al.* (2011). Para las interacciones hadrónicas de bajas energías se utilizó el modelo GHEISHA Fesefeldt (1985) que también se ajusta bien a datos experimentales.

Se realizaron las simulaciones en la súpercomputadora Cuertlaxcoapan del Laboratorio Nacional de Supercómputo del Sureste de México, tomando en cuenta el nivel de observación de ALPACA. Se tomaron en cuenta tres partículas primarias: protones, núcleos de hierro y rayos gamma, con ángulos cenitales  $0^\circ < \theta < 47^\circ$ , en un rango de energía de  $10^{12,00} - 10^{15,25}$  eV en pasos de 0,25 en  $\log(E)$  con una muestra de 600 chubascos atmosféricos para cada paso de energía. El tamaño de la muestra fue calculado tomando en cuenta la aproximación de Wald para intervalos de confianza de una distribución binomial, como se muestra en la ecuación 2, para garantizar una precisión de por lo menos 0,1:

$$n = \frac{4\hat{p}(1-\hat{p})Z_{1-\alpha/2}^2}{a^2}, \quad (2)$$

donde  $n$  es el tamaño de la muestra,  $\hat{p}$  es el estimador de ED,  $Z_{1-\alpha/2} = 1,96$  es el valor de la variable estandarizada de la distribución normal para el cuantil  $1 - \alpha/2$  para un 95 % de confianza y  $a = 0,1$  es el an-

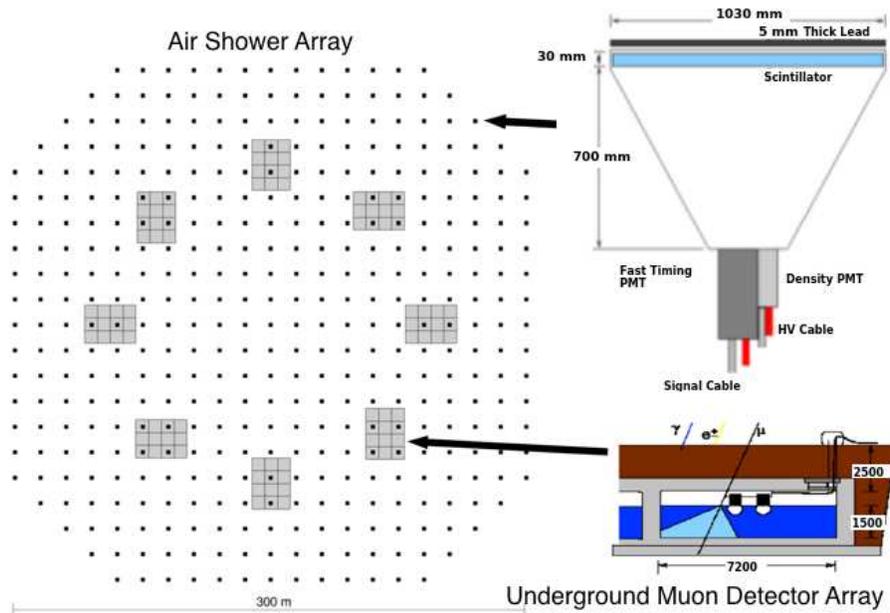
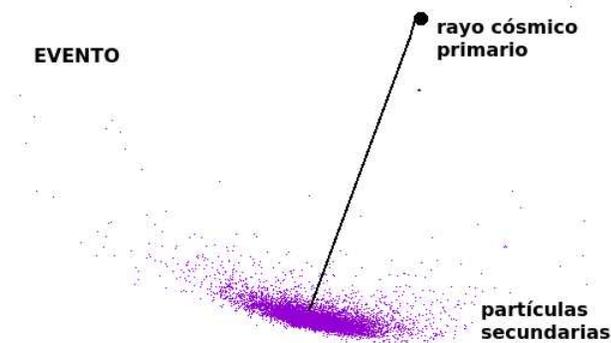


FIG. 4.— Vista esquemática del experimento ALPACA. Los cuadrados negros pequeños representan los 401 detectores de centelleo plásticos de  $1 \text{ m}^2$  separados por  $15 \text{ m}$ , que conforman el arreglo superficial. El arreglo superficial ocupará un área aproximada de  $83000 \text{ m}^2$ . Los rectángulos plomos muestran las 8 piscinas subterráneas que servirán como detectores de muones, cada una contiene 12 unidades de detectores de muones de  $56 \text{ m}^2$ . El área total del arreglo de detectores subterráneos será de  $5400 \text{ m}^2$ . En la figura superior derecha se muestra el detector de centelleo más detalladamente, y en la inferior derecha el detector de muones. La figura fue obtenida de la referencia ALPACA (2018).



#### detectores

FIG. 5.— Definición de evento, es un rayo cósmico primario que al interactuar con la atmósfera genera una cascada de partículas secundarias que llegan a los detectores.

cho del intervalo de confianza o precisión. El archivo de entrada (input) utilizado para realizar las simulaciones se encuentra detallado en los anexos.

El resultado de las simulaciones que se utilizó para este trabajo son las partículas secundarias generadas por los RC primarios que llegan al nivel de detección. Cada RC primario que produce una cascada de partículas secundarias es considerado como un evento, como se muestra en la figura 5.

En la figura 6 se muestra un histograma en dos dimensiones del número de partículas secundarias que llegaron al nivel de detección, en función a su distancia al centro del chubasco. La partícula primaria fue

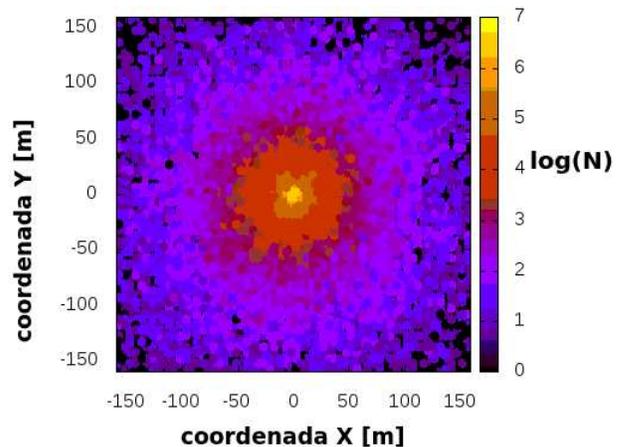


FIG. 6.— Histograma en dos dimensiones que muestra la densidad de partículas ( $N$ ) respecto a su distancia al núcleo del chubasco, para un protón de  $10^{14} \text{ eV}$ .

un protón de  $10^{14} \text{ eV}$  y se puede observar que existe una mayor cantidad de partículas en el centro del chubasco que en los extremos.

#### 2.2. Caracterización de la eficiencia de disparo del AS de ALPACA

Con las partículas secundarias obtenidas de cada evento se seleccionaron aquellas que cayeron en los detectores del AS de ALPACA, que se muestra en la figura 4, tomando en cuenta una distancia de separación entre los detectores de  $15 \text{ m}$ , su tamaño ( $1 \text{ m}^2$ ) y su ubicación en el plano de detección.

Para determinar si un evento es detectado, se impuso la siguiente condición de disparo: un detec-

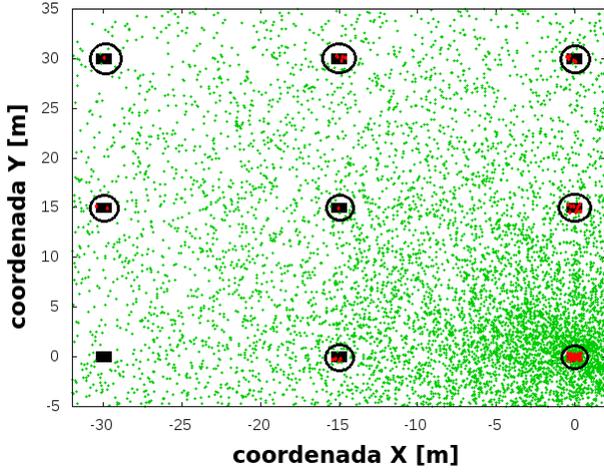


FIG. 7.— Condición de disparo, para determinar si un evento es detectado por el arreglo de superficie de ALPACA. Un detector activado (central) debe encontrarse rodeado por lo menos por otros 4 detectores activados. En rojo se muestran las partículas detectadas y en verde las no detectadas.

tor activado debe encontrarse rodeado al menos por otros 4 detectores activados. En la figura 7 se ilustra esta situación, en verde se encuentran las partículas no detectadas y en rojo las partículas que caen en los detectores del arreglo. Para el detector activado que se encuentra en el centro de la figura, deben existir por lo menos 4 detectores activados alrededor de él. Esta condición permite tomar en cuenta los eventos que sean compactos dentro de la geometría del experimento y rechazar partículas que llegan casualmente a los detectores.

Por defecto, el centro de un EAS generado por CORSIKA se encuentra en el origen de coordenadas, como se muestra en la figura 6. Es por esto que se generaron nuevas posiciones para el centro de cada EAS, distribuidas uniformemente dentro de la región de confianza mostrada en la figura 8. Esta región considera una fila menos de detectores en cada arista del octógono que forma todo el AS. Fue definida de tal forma que no se tomen en cuenta los eventos que caen en los bordes del AS. De esta forma, los resultados obtenidos para la eficiencia de disparo serán independientes de la posición del centro del chubasco sobre el AS de ALPACA.

La eficiencia de disparo del AS fue calculada como el número de eventos detectados entre el número total de eventos simulados, para cada tipo de partícula primaria en el intervalo de energías mencionado anteriormente:

$$ED = \frac{\text{\#eventos detectados}}{\text{\#eventos simulados}} \quad (3)$$

### 3. RESULTADOS

#### 3.1. Distribución de los ángulos cenitales para RC primarios generados por CORSIKA

Los ángulos cenitales de los RC primarios generados por CORSIKA se relacionan con la intensidad primaria como  $I \propto \text{sen}\theta \cos\theta$ . El término  $\text{sen}\theta$  toma en cuenta el elemento de ángulo sólido del cielo y

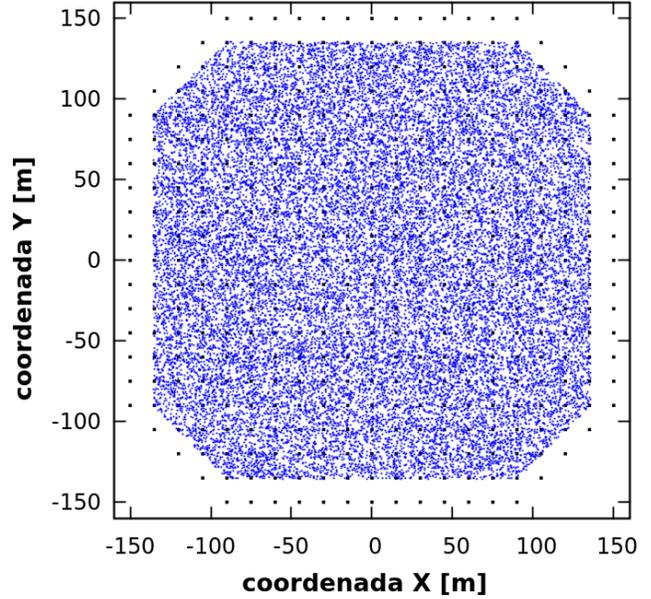


FIG. 8.— Región de confianza definida sobre el AS de ALPACA que considera una fila menos de detectores en cada arista. Los puntos azules representan las nuevas posiciones del núcleo de cada EAS, que se encuentran distribuidas uniformemente sobre la región de confianza.

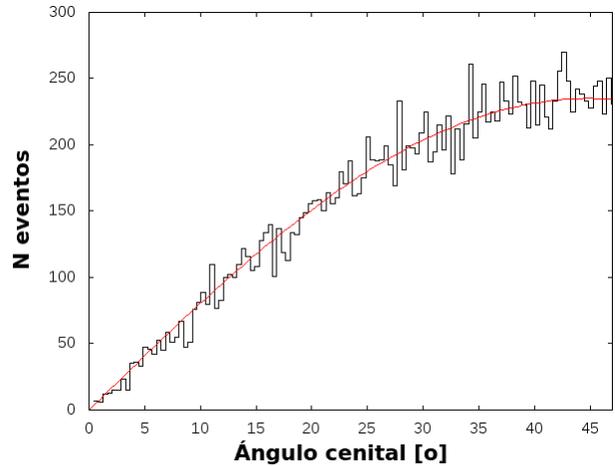


FIG. 9.— Distribución de los ángulos cenitales generados por CORSIKA, que toma en cuenta un flujo constante para cada elemento de ángulo sólido del cielo. En rojo se muestra la función de distribución con la que se relaciona  $f(\theta) \propto \text{sen}(\theta)\cos(\theta)$ .

$\cos\theta$  respeta la geometría de un detector plano. En la figura 9 se muestra la distribución de  $\theta$  de todos los eventos simulados.

#### 3.2. Número y tipo de partículas generadas por las EAS en función de la energía del RC primario

Dependiendo del RC primario, las partículas generadas que llegan al nivel de detección son diferentes, tanto en cantidad como en tipo de partícula. En la figura 10 se muestra el número total de partículas promedio que llegan al nivel de detección, para las tres partículas primarias en función de su energía. A medida que la energía del primario au-

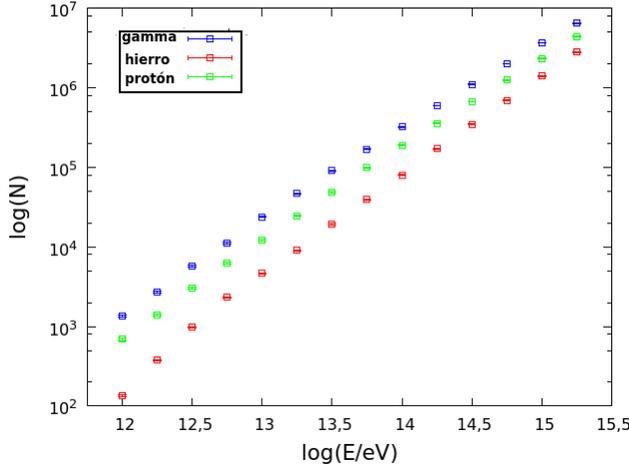


FIG. 10.— Número total promedio de partículas secundarias ( $N$ ) que llegan al nivel de detección en función de la energía de la partícula primaria. En azul se muestra el resultado para rayos gamma primarios, verde para protones y rojo para núcleos de hierro.

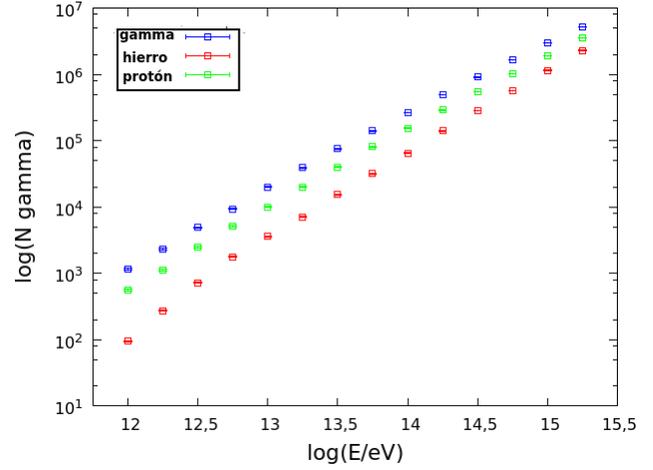


FIG. 12.— Número promedio de rayos gamma secundarios que llegan al nivel de detección en función de la energía de la partícula primaria. En azul se muestra el resultado para rayos gamma primarios, verde para protones y rojo para núcleos de hierro.

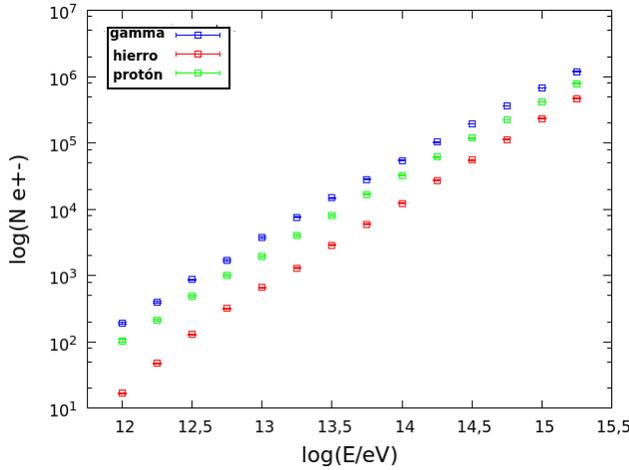


FIG. 11.— Número promedio de  $e^\pm$  secundarios que llegan al nivel de detección en función de la energía de la partícula primaria. En azul se muestra el resultado para rayos gamma primarios, verde para protones y rojo para núcleos de hierro.

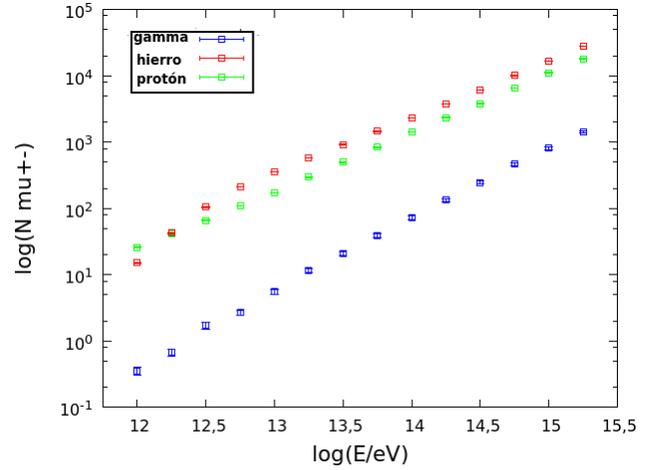


FIG. 13.— Número promedio de  $\mu^\pm$  secundarios que llegan al nivel de detección en función de la energía de la partícula primaria. En azul se muestra el resultado para rayos gamma primarios, verde para protones y rojo para núcleos de hierro. Nótese que son muchos menos que los rayos gamma y  $e^\pm$ .

menta, también lo hace la cantidad de partículas secundarias. Para una misma energía, se observó que llegan muchas más partículas secundarias de rayos gamma primarios, que de protones o núcleos de hierro.

Por otro lado, se calculó el número promedio de  $e^\pm$  como se muestra en la figura 11, rayos gamma (Figura 12) y  $\mu^\pm$  (Figura 13), para las tres partículas primarias, en función de su energía. En las figuras 11 y 12 el número de partículas secundarias de la componente electromagnética es mayor para los rayos gamma (azul) como primarios, comparados con los producidos en un EAS de protón (verde) o de núcleos de hierro (rojo).

### 3.3. Eficiencia de disparo del AS de ALPACA y energía de saturación

En la figura 14 se muestra la eficiencia de disparo del AS de ALPACA en función de la energía de la partícula primaria, los puntos en rojo corresponden a núcleos de hierro, los verdes a protones y los azules a rayos gamma. Para una misma energía, el AS de ALPACA es más eficiente en la detección de rayos gamma que de los otros primarios. Esto se debe principalmente a que los rayos gamma producen una mayor cantidad de partículas secundarias que permiten que los eventos cumplan con la condición de disparo y sean detectados. También se calculó que la eficiencia de disparo es  $> 95\%$  para energías mayores a  $10^{14}$  eV y que la energía de saturación es  $E_{sat} = 10^{14,25}$  eV donde el AS del experimento es prácticamente  $100\%$  eficiente en la detección de estos tres tipos de primarios, independiente de su dirección de llegada, energía y punto de impacto sobre el arreglo de detectores.

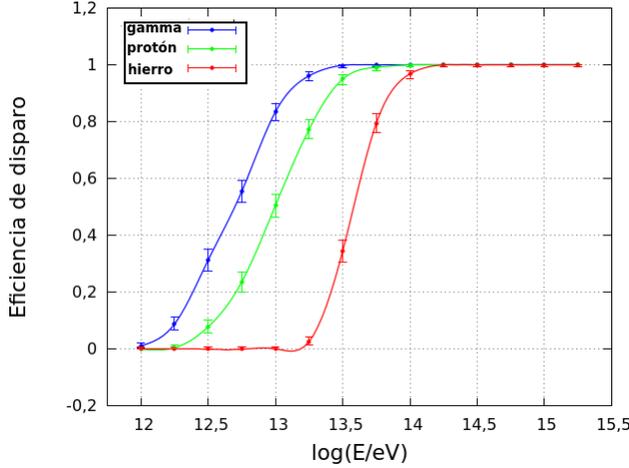


FIG. 14.— Eficiencia de disparo del arreglo de superficie de ALPACA en función de la energía del rayo cósmico primario: protones (verde), rayos gamma (azul) y núcleos de hierro (rojo). Las líneas fueron puestas solamente para guiar al lector.

Los datos siguen una distribución binomial ya que sólo existen dos posibles resultados para los eventos, que sea detectado o no. De esta forma, los errores de los estimadores de la eficiencia de disparo fueron calculados con intervalos de confianza del 95%. Para valores de ED cercanos a 0,5 se empleó la aproximación de Wald, donde el intervalo de confianza está dado por:

$$IC = \left[ \hat{p} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right], \quad (4)$$

donde  $n$  es el tamaño de la muestra,  $\hat{p}$  es el estimador de ED,  $\hat{q} = 1 - \hat{p}$  y  $Z_{1-\alpha/2} = 1,96$  es el valor de la variable estandarizada de la distribución normal para el cuantil  $1 - \alpha/2$  para un 95% de confianza. Para el caso de probabilidades en los extremos se empleó la aproximación de Wilson score Newcombe (1998), tanto para el límite inferior (LI) si  $\hat{p} = 1$  y para el superior (LS) si  $\hat{p}=0$ , como se muestra a continuación:

$$LI = \frac{(2n\hat{p} + Z_{1-\alpha/2}^2 - 1) -}{2(n + Z_{1-\alpha/2}^2)} \quad (5)$$

$$\frac{Z_{1-\alpha/2} \sqrt{Z_{1-\alpha/2}^2 - 2 - 1/n + 4\hat{p}[n\hat{q} + 1]}}{2(n + Z_{1-\alpha/2}^2)} \quad (6)$$

$$LS = \frac{(2n\hat{p} + Z_{1-\alpha/2}^2 + 1) +}{2(n + Z_{1-\alpha/2}^2)} \quad (7)$$

$$\frac{Z_{1-\alpha/2} \sqrt{Z_{1-\alpha/2}^2 + 2 + 1/n + 4\hat{p}[n\hat{q} - 1]}}{2(n + Z_{1-\alpha/2}^2)}. \quad (8)$$

Para valores de  $0 < \hat{p} \leq 0,2$  y  $0,85 \leq \hat{p} < 1$ , los intervalos de confianza se calcularon con el método exacto de Clopper-Pearson, asociado a la distribución Beta Newcombe (1998):

$$IC = [B(\alpha/2; x, n-x+1), B(1-\alpha/2; x+1, n-x)], \quad (9)$$

donde  $x$  es el número de éxitos,  $n$  el tamaño de la muestra y  $B$  la función cuantil-Beta.

#### 4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo se muestran las características de tres tipos de partículas primarias, rayos gamma, protones y núcleos de hierro al nivel de detección del experimento ALPACA y se realizó un estudio analítico de la eficiencia de disparo utilizando las partículas secundarias generadas con simulaciones de Monte Carlo.

La caracterización de la eficiencia de disparo del arreglo de superficie del experimento ALPACA es muy importante, ya que muestra su capacidad de detección para las tres partículas primarias usadas en un rango de energías de  $10^{12.00} - 10^{15.25}$  eV, con ángulos cenitales entre 0 y 47 grados.

La ED calculada en este rango de energía se encuentra directamente relacionada con la geometría del experimento (tamaño y distribución de los detectores) y con la condición de disparo establecida. Esta condición garantizará que los chubascos detectados sean compactos en la región que cubre el AS y que no se tomen en cuenta partículas que llegan a los detectores casualmente. Con la región de confianza establecida en la figura 8 se descartan aquellos eventos cuyos núcleos se encuentran en los bordes del arreglo.

Como se mostró en la figura 14, la ED aumenta a medida que la energía de la partícula primaria es mayor. Para una misma energía de la partícula primaria, la eficiencia de disparo es mayor para los rayos gamma que para protones y núcleos de hierro, esto debido principalmente a que al nivel de observación del experimento (4740 m s.n.m), las EAS iniciadas por rayos gamma primarios generan mayor cantidad de partículas secundarias que las iniciadas por los otros dos primarios estudiados, como se mostró en la figura 10. En consecuencia, existe un mayor número de eventos que cumplen con la condición de disparo. Las figuras 11 y 12 muestran que las partículas correspondientes a la componente electromagnética (rayos gamma,  $e^+$  y  $e^-$ ) son mayores en EAS generadas por rayos gamma primarios que para protones y núcleos de hierro, debido a las interacciones que se dan durante el desarrollo de estas EAS en la atmósfera. Por otro lado, en la figura 13 se observó que la cantidad de muones presentes en las EAS iniciadas por rayos gamma es mucho menor que aquellas iniciadas por protones y núcleos de hierro. Esta diferencia se debe a que generalmente los rayos gamma producen EAS más profundas y pobres en muones, que los núcleos y hadrones que las generan más alto en la atmósfera. Precisamente este criterio es el que se utilizará para determinar el tipo de partícula primaria, a partir de los datos obtenidos en el experimento.

Se determinó que el AS de ALPACA tiene una eficiencia mayor al 95% para partículas primarias con

energías mayores a  $10^{14}$  eV y que se alcanza una eficiencia del 100% a partir de la energía de saturación que corresponde a  $E_{sat}=10^{14,25}$  eV. Esto muestra que el AS es completamente eficiente en la detección de partículas primarias con energías mayores a  $E_{sat}$ , independientemente de su dirección de llegada, energía y posición del centro del chubasco sobre el plano de detección.

La determinación de la eficiencia de disparo y de criterios de selección de eventos son muy importantes para el experimento, ya que permitirán realizar una mejor reconstrucción de los eventos registrados. El tamaño de la muestra es importante para los cálculos realizados, ya que con muestras pequeñas, se observan fluctuaciones muy grandes en los resultados. Se espera continuar con este trabajo e incluir otras variables como las diferencias de tiempos de llegada de las partículas secundarias y la respuesta de un detector individual basados en la señal que se genera.

En el futuro se espera comparar los resultados obtenidos en este trabajo con aquellos que serán obtenidos por los detectores una vez que sean instalados y puestos en funcionamiento.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a los docentes del laboratorio de rayos cósmicos de la Universidad Mayor de San Andrés: Dr. Martin Subieta, Dr. Hugo Rivera, Ing. Pedro Miranda, Msc. Mirko Rajjevic, Dr. Rolando Ticona, Lic. Carlos Nina y estudiantes por apoyarme durante el desarrollo de este trabajo. A la Dra. Karen Salomé Caballero Mora de la Universidad Autónoma de Chiapas y al Laboratorio Nacional de Supercómputo del Sureste de México por permitirme realizar las simulaciones y el análisis de los datos en la supercomputadora Cuetlaxcoapan.

### Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

## APÉNDICE

### A. ARCHIVO DE ENTRADA PARA SIMULACIONES EN CORSIKA

En el siguiente cuadro se muestra el input utilizado para realizar las simulaciones de chubascos atmosféricos en CORSIKA. RUNNR es el número de la corrida de la simulación, EVTNR indica el número del primer evento de la corrida, NSHOW muestra el número de EAS generadas en cada simulación.

Los parámetros en los que se puso información del RC primario son PRMPAR que indica el tipo de RC primario utilizado, ESLOPE es la potencia del espectro de RC, ERANGE es el rango de energías de la partícula primaria (en GeV), THETAP es el ángulo cenital del primario y PHIP es el ángulo azimutal del primario.

Los parámetros para los modelos hadrónicos empleados fueron QGSJET indica el modelo de interacción de alta energía, QGSSIG toma en cuenta las sec-

ciones eficaces del modelo de interacción QGSJET, HILOW muestra el límite de energía entre el modelo de interacción hadrónica de alta energía y el de baja energía y SEED son las semillas de números aleatorios empleados en la simulación.

Por otro lado, los parámetros con información sobre el lugar de observación fueron OBSLEV que es el nivel de observación de los detectores (en cm), FIXHEI indica la altura de la primera interacción (en este caso será aleatoria), MAGNET muestra la componente X y Z del campo magnético terrestre para la locación del experimento (en  $\mu$ T), ATMOSPHERE muestra el modelo de atmósfera empleado y TSTART indica que el tiempo registrado para la partícula es a partir de la primera interacción.

También se encuentran los parámetros que permitieron limitar la información de salida de la simulación, ECUTS son las energías cinéticas mínimas (en GeV) que deben tener los hadrones, muones, electrones y fotones para ser registrados, MUADDI proporciona información adicional de los muones, MUMULT toma en cuenta la dispersión múltiple de muones según la teoría de Molière, ELMFLG activa el tratamiento de la componente electromagnética del chubasco, STEPFC permite definir pasos más grandes al registrar las partículas secundarias cuando las simulaciones son muy largas, RADNKG define el radio (en cm) en el tratamiento NKG, LONGI activa el seguimiento del desarrollo longitudinal del chubasco, ECTMAP define un corte en el factor de Lorentz para registrar las partículas secundarias, MAXPRT indica el máximo número de eventos que se registran detalladamente, DIRECT muestra el directorio en el que se guardan los resultados y USER indica el usuario en la computadora.

RUNNR	1		
EVTNR	1		
NSHOW	5		
PRMPAR	1		
ESLOPE	-2.7		
ERANGE	1E3	1E3	
THETAP	0.	47.	
PHIP	-180.	180.	
QGSJET	T	0	
QGSSIG	T		
HILOW	80		
SEED1	2331	0	0
SEED2	2332	0	0
OBSLEV	4740.E2		
FIXHEI	0.	0	
MAGNET	22.595	-4.379	
ATMOSPHERE	3	F	
TSTART	F		
ECUTS	0.3	0.3	0.003 0.003
MUADDI	F		
MUMULT	T		
ELMFLG	T	T	
STEPFC	1.0		
RADNKG	200.E2		
LONGI	F	10.	F F
ECTMAP	1.E4		
MAXPRT	1		
DIRECT	/scratch	/201801092c	/corsikaout/
USER		carla	
DEBUG	F	6	F 100000
EXIT			

## REFERENCIAS

- Grupen, C. 2005. *Astroparticle Physics* (Berlin: Springer)
- Blackett, P.M.S., & Occhialini G.P.S. 1933, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, **139**, 699
- Université Libre de Bruxelles, 2018, PHYS-467, disponible en <<http://w3.ihe.ac.be/aguilar/PHYS-467/PA3.html>> [Consulta: 16 de mayo de 2018]
- Grieder, P. 2001. *Cosmic Rays at Earth* (Berna: Instituto de Física de la Universidad de Berna)
- Lettesier-Selvon, A., & Stanev, T. 2011, *Reviews of Modern Physics*, **83**, 907
- Flugge, S. 1961, *Cosmic Rays I* (Heidelberg: Springer)
- Haungs, A., Blumer, J., Fuchs, B., Kang, D., Schoo, S., Wochele, D., Wochele, J., Apel, W D., Arteaga-Velázquez, J.C., Bekk, K., Bertaina, M., Bozdog, H., Brancus, I.M., Cantoni, E., Chiavassa, A., Cossavella, F., Daumiller, K., de Souza, V., Di Piero, F., Doll, P., Engel, R., Fuhrmann, D., Gherghel-Lascu, A., Gils, H.J., Glasstetter, R., Grupen, C., Heck, D., Hörandel, J.R., Huber, D., Huege, T., Kampert, K.H., Klages, H.O., Link, K., Luczak, P., Mathes, H.J., Mayer, H.J., Milke, J., Mitrica, B., Morello, C. Oehlschläger, J., Ostapchenko, S., Palmieri, N., Petcu, M., Pierog, T., Rebel, H., Roth, M., Schieler, H., Schröder, F.G., Sima, O., Toma, G., Trinchero, G.C., Ulrich, H., Weindl, A., & Zabierowski, J. 2015, *Journal of Physics: Conference Series*, **632**, 012011
- Matthews, J. 2005. *Astroparticle Physics*, **22**, 387
- Kamata, K., & Nishimura, J. 1958. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, **6**, 93
- Asaba, T. et al. 2017. “The overview of the ALPACA Experiment” en *35th International Cosmic Ray Conference — ICRC2017. Japón*. Disponible en <<http://www.icrc2017.org/>> [Consulta: 23 de Marzo de 2017].
- ALPACA Experiment. Air Shower Array. 2018 <<http://www.alpaca-experiment.org/>> [Consulta: 13 de mayo de 2018]
- Abraham, J. et al. (2010). *Nuclear Instruments & Methods in Physics Research, A* **613**, 29
- Heck, D., Knapp J., Capdevielle J.N., Schatz G., & Thouw T. 1998, “CORSIKA: A Monte Carlo Code to Simulate Extensive Air Showers”. Report FZKA 6019. Forschungszentrum Karlsruhe. Disponible en <<http://www.ikp.kit.edu/corsika/70.php>> [Consulta: 14 de mayo de 2018]
- Heck D., & Pierog T. 2017. “Extensive Air Shower Simulation with CORSIKA: A User’s Guide (Version 7.5700 from June 2, 2017)”. KIT - Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
- Ostapchenko, S. 2013, “QGSJET-II: physics, recent improvements, and results for air showers” en *EPJ Web of Conferences*, vol 52. Disponible en <[https://www.epj-conferences.org/articles/epjconf/abs/2013/13/epjconf\\_isvh2012\\_02001/epjconf\\_isvh2012\\_02001.html](https://www.epj-conferences.org/articles/epjconf/abs/2013/13/epjconf_isvh2012_02001/epjconf_isvh2012_02001.html)> [Consulta: 16 de Marzo de 2018]
- Knapp J., Heck D. & Schatz G. 1996, “Comparison of Hadronic Interaction Models Used in Air Shower Simulations and of Their Influence on Shower Development and Observables”. Report FZKA 5828. Forschungszentrum Karlsruhe. Disponible en <<https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0103073.pdf>> [Consulta: 20 de Marzo de 2018]
- Fesefeldt, H. 1985, Report PITHA 85/02, RWTH Aachen. Disponible en <<http://cds.cern.ch/record/162911/files/CM-P00055931.pdf>> [Consulta: 13 de mayo de 2018]
- Newcombe, R. 1998, *Statistics in Medicine*, **17**, 857

MODELO MÍNIMO PARA LA INTERACCIÓN ELÉCTRICA Y GRAVITACIONAL, EN UN SISTEMA  
CONFINADO DE ESFERAS CARGADAS  
A MINIMAL MODEL FOR ELECTRICAL AND GRAVITATIONAL INTERACTIONS IN A CONFINED  
SYSTEM OF CHARGED SPHERES

D. SANJINES & F. GHEZZI  
Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635  
La Paz - Bolivia

RESUMEN

Desarrollamos un arreglo experimental y una simulación numérica para calcular la interacción Coulombiana entre partículas cargadas confinadas. En este trabajo se ha elaborado un sistema de validación, para establecer la interacción entre estas partículas y el contorno de confinamiento. Mediante la implementación de un método de relajación para la ecuación de Laplace, usando una red 3D, podemos simular la configuración de equilibrio para un sistema con pocas partículas. Además, se hace una comparación con el arreglo experimental con muchas partículas. Nuestra simulación está, razonablemente de acuerdo, con la suposición de la interacción Coulombiana.

Código(s) PACS: 41.20.Cv — 02.60.Cb

*Descriptores:* Problemas con condiciones de contorno en electrostática, Ecuación de Laplace, Ley de Coulomb — Modelos de simulación

ABSTRACT

We have developed an experimental set up and a numerical simulation to calculate the Coulomb interaction between confined charged particles. In this work we have elaborated a validation system to establish the interactions among these particles and the confining boundary. By implementing the relaxation method for the Laplace equation using a 3D grid, we can simulate the equilibrium configuration for a system with few particles. Also, a comparison is made with an experimental set up with many particles. Our simulation yields a reasonable agreement with the assumption of a Coulombian interaction.

*Subject headings:* Boundary value problems in electrostatic, Laplace equation, Coulomb's law — Model simulation

1. INTRODUCTION

The physics of few-particle mesoscopic systems is an active and growing field of research. The scale of these systems is small enough for quantum effects to be considered, and yet of sufficient scale that classical macroscopic laws still govern their behavior. Both experimental and theoretical approaches appear to support the assumption of an interparticle Coulomb interaction from which relatively simple macroscopic models emerge for several different systems, from nanotechnology to plasma research (Bonitz et al. 2008). However, crucial to research in this field is the determination and validation of the Coulomb interaction encouraging the development of new and interesting experiments at the macroscopic level and improving our understanding of phase transitions, packing of charged particles and other phenomena (Blonder 1985; Zheng & Grieve 2006). While at the mesoscopic level, light is being shed on the role

of quantum effects in the critical behavior of the Coulomb system (Clark et al. 2009).

Over the years a number of theoretical models have been proposed with different repelling interactions, which include for example Coulomb, screened Coulomb, Lennard-Jones, dipole, logarithmic and hard sphere potentials (Jean et al. 2001; Schweigert et al. 1999). A recent experiment aimed at the determination and validation of the Coulomb interaction is that reported by (Zheng & Grieve (2006); Ghezzi et al. (2008)) (and references therein) consisting of several millimeter-sized metallic spheres lying on the lower plate of a parallel plate square capacitor. The spheres are laterally confined by a square metallic electrically charged boundary which prevents their dispersion in 2 D. One of the conclusions reached is that no dipole interaction is observed and hence the remaining reasonable option is the Coulomb interaction. Furthermore the deforma-

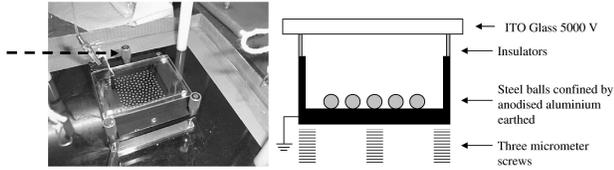


FIG. 1.— The goniometer: 3 mm non-magnetic steel particles are confined by a rectangular anodised case,  $5 \times 5$  cm which is earthed. A voltage of approximately 5000 V is applied to the ITO glass cover. Once the system is leveled the micrometer screw (dashed arrow) is moved tilting the system to introduce the effect of gravity.

tion of the ensemble of balls<sup>1</sup> due to a gravitational gradient is measured inferring the nature of the repelling interaction aided by a computational method. This experiment belongs to a class of systems that are governed by the same physics, i.e., an interparticle interaction, a confining potential and an external potential (not to mention an eventual thermal activation). In the case that all of the above interactions have potentials that obey the Laplace equation with specific boundary conditions, we could then aim at numerically solving the equation of motion for the confined particles by means of the relaxation method where the physical interactions are incorporated via the corresponding boundary conditions in the confining border. In this work we take the experimental array referred to above (Zheng & Grieve 2006; Ghezzi et al. 2008) and apply the Laplace equation to construct a minimal model. We understand by a “minimal model” one which contains just the sufficient number of essential features that would characterize the relevant physical phenomena in the system. In our case these features are: the Coulombian repulsion field among the particles (millimeter-sized metallic spheres), the confining field between the square metallic border and the particles, and the gravitational field acting upon the system when this is tilted at a certain angle.

## 2. THE MODEL

The model which corresponds to the square parallel plate capacitor (figure 1) is a rectangular parallelepiped divided into 10 horizontal layers each containing  $20 \times 20$  identical square boxes. When the tilting angle is zero the layers are perpendicular to the gravitational force, i.e., the system is level. The bottom and upper layers correspond to each of the parallel plates of the capacitor which have a definite electrical potential. The second layer from the bottom corresponds to the substrate in which the array of particles is located; only within this layer do the particles move according to the forces that yield the array to an equilibrium condition.

By assigning a definite electrical potential value to the box occupied by any particle at a certain instant, we can reproduce the physical condition that all particles are equally charged; since the particles move, the box with this definite potential will also move while its neighboring boxes have a potential that is to be determined numerically by solving the Laplace equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

in a 3D lattice. For our purposes, one of the most important properties of the solution of (1) is that the potential  $V(x, y, z)$  at some point (or box) is equal to the arithmetic mean of its six nearest neighbors in 3D,

$$V(x, y, z) = \frac{1}{6}(V_{x+} + V_{x-} + V_{y+} + V_{y-} + V_{z+} + V_{z-}), \quad (2)$$

where  $V_{x+} \equiv V(x + \Delta x, y, z)$  and similarly for  $y$  and  $z$ . The iterative numerical procedure by which (2) converges to a definite value of the potential at every point of the lattice is the well known relaxation method [17]. For simplicity we will take hereafter adimensional units for the potential  $V(x, y, z)$  and for the coordinates  $x, y, z$  with unit increments  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$  in a square lattice.

## 3. ELECTRICAL PLUS GRAVITATIONAL POTENTIAL LANDSCAPES

In order to avoid the dispersion of the particles due to the Coulombian repulsion, the square boundary has a definite potential which could be different from that of the particles but which we have considered as having the same potential in this work. This potential will be referred to as the “confining potential”. Thus, we construct a model where each particle is found in a “potential landscape” created by the parallel plates and the square boundary. Such potential landscape is calculated by implementing recursively (2) through the whole parallelepiped divided in a grid of  $10 \times 20 \times 20$  boxes, although the relevant physics occurs in 2 D, that is, in the substrate where the particles would be allowed to move (figure 2). Therefore, the potential landscape results from evaluating  $V(x, y, z)$  vs.  $(x, y)$  keeping  $z = 2$  constant (i.e., second layer from bottom to top). In figure 2 we have arbitrarily chosen the following boundary (non dimensional) values for the confining potential:  $V(x, y, 1) = 99$  for the bottom layer,  $V(x, y, 10) = 0$  for the top layer,  $V(\pm 10, \pm 10, z) = 99$  for the square boundary in each layer ( $2 < z < 9$ ). The origin of the  $XY$  coordinate system of the layer where the particles are located is its geometrical center. In this landscape a single particle will move to the position with the minimum potential value, i.e., to the center of symmetry. When identical particles are included in the landscape, they will repel each other until all forces counterbalance and an equilibrium configuration is reached. Such a configuration is not so trivial to anticipate and a numerical evaluation of (2) through the relaxation method is necessary even for a system with few particles.

In figure 3 the potential landscape corresponds to a tilted substrate. In this case, the gravitational force manifests itself by means of a corresponding potential which increases uniformly in the positive  $Y$  direction, i.e.,  $V(\pm 10, y, 2) = y + 109$ . Interestingly, this gravitational potential is considered only as an

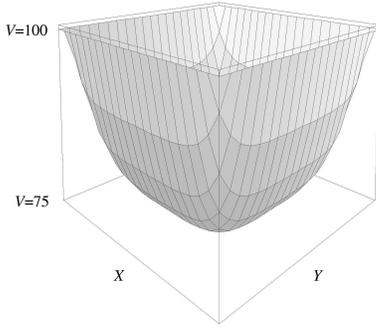


FIG. 2.— Numerical simulation of the 3D profile of the confining potential for the physical system described in figure 1 (without the spheres), i.e. the potential landscape. The  $XY$  plane corresponds to the horizontal substrate (bottom plate of the condenser) where the spheres are deposited. The square confining boundary is given a non dimensional value  $V = 100$ . The well of the potential is at  $V = 70$  in the centre of the substrate. The system space is segmented into 4000 boxes: squares for the substrate and 10 levels between the condenser plates.

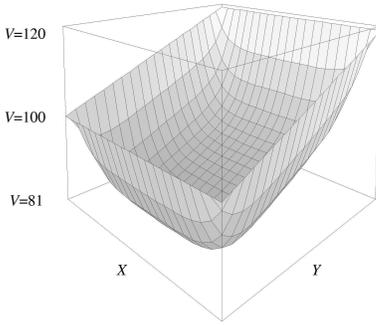


FIG. 3.— Numerical simulation of the 3D profile of the confining potential for the case of figure 2, where the substrate is tilted along the  $Y$  axis in the presence of a uniform gravitational field whose potential increases along the vertical axis from  $V = 100$  to  $V = 120$ .

additional boundary condition for the Laplace equation (1) which is added to the existing electrical potential due to both the confining boundary and to the charged particles. Furthermore, the particles will move in the resulting potential landscape calculated using (2) that contains *simultaneously* both the electric and gravitational interactions. As can be seen in figure 3, the particles will tend to move towards a different bottom position in this new potential landscape while repelling each other. This means that when compared to the level case, a different configuration of the particles will be reached.

#### 4. DYNAMICS OF PARTICLES

We chose the array of particles shown in figure 4 which is the equilibrium configuration when the substrate is level. In this symmetrical configuration of nine particles each particle produces a constant potential  $V_0 = 99$  in the box that it occupies. This potential  $V_0 = 99$  is also a boundary condition for the Laplace equation when solved numerically by (2). If this substrate is tilted the configuration in figure 4 is no longer in equilibrium and the particles will reach another final equilibrium configuration, i.e., each particle in figure 4 will start moving according

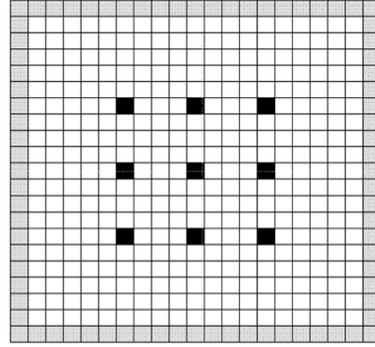


FIG. 4.— Equilibrium configuration for  $N = 9$  charged spheres (black boxes) on a horizontal substrate. The boxes in grey relate to the confining boundary.

91.10	90.64	90.42
89.64	89.17	88.94
88.44	87.95	87.73

FIG. 5.— Potential values around the position occupied by the sphere in the extreme upper left of the configuration at figure 4, calculated using the relaxation algorithm (2). The sphere moves to the nearest box so that the relative potential variation is at a maximum in relation to its original position (thick margin). In this case, the sphere moves to the box directly below. The same algorithm is then applied to all the other boxes occupied by spheres, until a new configuration is reached.

to a dynamical rule that will be described below.

Take for example the particle located at the point  $(-4, 4)$ , i.e., the particle at the upper left corner of the array in figure 4. Since this particle is considered as a “test charge”, its dynamical state can not be affected by its own potential but rather by the rest of the charges in the space. We therefore substitute the value of  $V_0$  at  $(-4, 4)$  by the algorithm (2) and wait until the iterative routine stops. Then, we look at the potential values at  $(-4, 4)$  and its neighborhood. The result is shown in figure 5 where the heavy line border indicates the point  $(-4, 4)$ .

We notice by simple inspection that the potential at the point  $(-4, 3)$ , just below the position of the particle, is the least of the potential values of its four nearest boxes. Consequently, the particle will move to this new position and its corresponding box will be assigned the potential value  $V_0$  because the new test charge will be in another position, say at  $(0, 4)$ . The process is repeated for the nine particles; the new resulting configuration will most probably be different from the original one.

How can we be sure that these dynamics make physical sense? The total energy of the new configuration has to be less than that of the preceding configuration. When the particles in a configuration have nowhere else to move (because they are localized in the bottom of a local potential valley found around each particle) and the energy of such a configuration is at a minimum, we can assume that we have reached the final equilibrium configuration. However, realizing that such an energy is

actually the minimum might not be an easy task, since it may correspond to a *metastable* configuration which has less energy than its “neighbor” (or alike) configurations but has more energy than the real *stable* equilibrium configuration. We can test, with some degree of reliability, if a configuration is stable or metastable by “kicking” the configuration, i.e., moving the particles to a neighboring position, not necessarily the nearest, and comparing the energy changes. If the energy always grows after a few kicks, the configuration is most probably stable; if the energy diminishes after a few kicks, the configuration is metastable. Of course it is not guaranteed that the new configuration will be a stable one, because there could exist many metastable configurations, and the kicks may simply take the system from one configuration to another.

Another word of caution: the dynamical process leading to a final equilibrium configuration, although it might have physical sense, need not be the *real* dynamical process observed in an actual experiment. This is because in our model the allowed displacement of the particles is one box, either in the  $X$  or  $Y$  direction, per configuration. In a real experiment, each new configuration is defined by the instant positions of the particles, i.e., if  $T$  is the total time elapsed from the initial to the final configurations and we want to have  $N$  configurations, then one particular configuration corresponds to the positions of the particles at the time  $t = nT/N$ , with the integer  $n$  in the interval  $0 < n < N$ . Therefore, in a real experiment, the particles’ displacements could all be different, both in magnitude and direction. Nevertheless, and being conscious that the modeled dynamics can be different from the real one, we claim that the final equilibrium configuration characterized by a unique minimum of the total energy, *isthesameinanycase*. Differences will arise depending on how gross is the lattice’s grid segmentation of the lattice’s, i.e., the size of the box, which in turn will cause the equilibrium configuration to be reached in a longer time than the real one. Another possible difference is that in the model dynamics, a coarse grid segmentation will yield a final stationary oscillating state in which two different configurations (with a negligible energy difference) alternate, such that the real final configuration, having the minimum energy, can never be reached. The claim mentioned above is the matter of our current research and lies beyond the scope of this work.

In figure 6 we have the final equilibrium configuration corresponding to the initial state depicted in figure 4 (in both cases we observe only the layer where the particles move). The black boxes represent the positions of the particles and the grey boxes determine the square confining boundary. The corresponding energy evolution is depicted in figure 7 (with energy values in the vertical axis and configuration index in the horizontal axis) where there are 13 different configurations including the initial and the final ones. The difference among configurations is not deduced from their energies; it was observed while

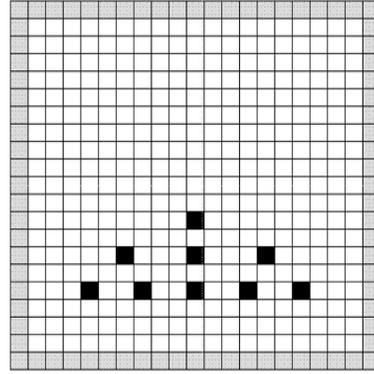


FIG. 6.— This figure shows the equilibrium configuration for  $N=9$  charged spheres (black boxes) on a tilted substrate. The initial configuration which has the substrate in a horizontal position is shown in figure 4.

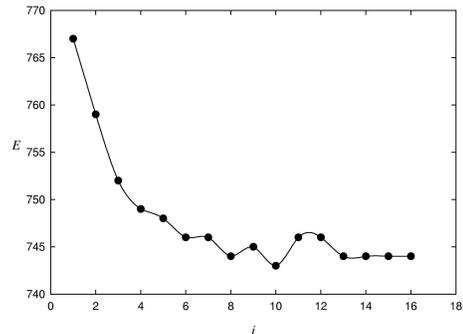


FIG. 7.— The electrostatic  $E$  (non dimensional) energy variation of each configuration of  $N=9$  charged particles for a tilted substrate. The horizontal axis corresponds to the configuration index  $i$ . The initial unstable configuration ( $i=1$ ) is seen in figure 4 and the final stable configuration ( $i=13-16$ ) is shown in figure 6. The figure shows the tendency for the energy to diminish as the system reaches the stable equilibrium configuration. Also we can see that the fluctuations of  $E$  are due to the discrete division of the system.

the model dynamics were in course. Notice one interesting thing: the eighth and tenth configurations have less energy than the -supposedly- final configuration (the thirteenth) but in those configurations the particles had other allowed positions to move to, so we preferred to continue the model dynamics until it stopped or until it reached a stationary oscillating state. The former occurred first.

## 5. CONFINING AND REPULSIVE FORCE FIELDS

Next, once we achieve the potential energy field corresponding to figure 6, we can deduce its vector force field. This is done by implementing

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j}, \quad (3)$$

for each particle in the 2D substrate lattice. We are purportedly ignoring the forces that are perpendicular to the substrate because they will cancel out with the corresponding normal forces. The derivative of  $V(x, y)$  with respect to  $x$  is (recall that we have set

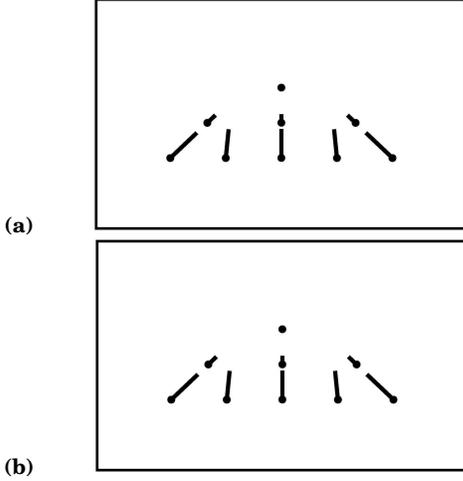


FIG. 8.— In (a) we have the confining force field  $F_c$  and in (b) we have the Coulomb  $F_q$  repulsion force field of the stable equilibrium configuration shown in figure 6, calculated using (6).

$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$  in this work)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_{x^+} - V = V_{x^-}, \quad (4)$$

from which one can write

$$V = V(x, y) = \frac{1}{2} = (V_{x^+} + V_{x^-}); \quad (5)$$

thus (3) results in

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}(V_{x^-} - V_{x^+})\mathbf{i} + \frac{1}{2}(V_{y^-} - V_{y^+})\mathbf{j}. \quad (6)$$

The confining force field in figure 8a was obtained by applying (6) to each of the equilibrium positions in figure 6 once the gravitational potential was set to zero (level substrate) and the  $V_0$  potential of each charge was substituted by the relaxation algorithm (2). Therefore, the resulting potential landscape  $V_c$  corresponds *only* to the confining interaction due to the charged boundary (lateral, top and bottom plates). In a similar way, we have obtained the repulsive force field among particles (figure 8b) by applying (6) to the potential field  $V_{cq}$ ? $V_c$  resulting in the subtraction of the confining potential field ( $V_c$ ) from the potential field due to both the confining and Coulomb interactions among particles ( $V_{cq}$ ).

We now recall that the equilibrium condition taking into account all the interactions is

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}_i) + \mathbf{F}_q(\mathbf{r}_i) + m\mathbf{g}\sin\theta = 0, \quad (7)$$

where  $\mathbf{F}_c(\mathbf{r}_i)$  and  $\mathbf{F}_q(\mathbf{r}_i)$  are the vector fields corresponding to the confining and repulsive forces respectively (figure 8) and  $\mathbf{r}_i$  is the respective position of the nine particle array;  $m\mathbf{g}\sin\theta$  is the field of “residua” forces corresponding to the gravitational interaction. Then, should the whole method applied in this work be consistent, it is expected that the gravitational force field can be obtained from the  $\mathbf{F}_c$  and  $\mathbf{F}_q$  fields according to (7).

Figure 9 shows the corresponding confining (a) and repulsive (b) force fields for an actual experiment

with a system of 169 particles [16]. A distinctive feature that can be observed when one compares this latter figure with the simulated experiment in figure 8 is that in both cases there appears a kind of “equilibrium center” where the force is null, being the equilibrium center of the confining field in an upper position with respect to the center of the repulsive field. We can show that in the case of a level substrate these two equilibrium centers coincide; for a tilted substrate (as in figure 9) the distance between equilibrium centers will be proportional to some monotonous function of the angle of inclination.

Knowing the particles configuration in equilibrium, it follows that we can obtain the residual gravitational force value  $\mathbf{F}_g$ . To this end (7) is written as

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_q(\mathbf{r}) + \mathbf{F}_g(\mathbf{r}) = 0, \quad (8)$$

and the expression is applied to the centres of equilibrium of charge  $\mathbf{r}_q$  and confinement  $\mathbf{r}_c$  that are assumed to be known through the configuration of the particles:

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}_c) + \mathbf{F}_q(\mathbf{r}_c) + \mathbf{F}_g(\mathbf{r}_c) = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_c(\mathbf{r}_q) + \mathbf{F}_q(\mathbf{r}_q) + \mathbf{F}_g(\mathbf{r}_q) = 0.$$

According to the hypothesis  $\mathbf{F}_q(\mathbf{r}_q) = \mathbf{F}_c(\mathbf{r}_c) = 0$  and  $\mathbf{F}_g(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_g = \text{const.}$  (for any  $\mathbf{r}$ ), it follows  $\mathbf{F}_g = -\mathbf{F}_q(\mathbf{r}_c) = -\mathbf{F}_c(\mathbf{r}_q)$ . In view of the symmetry of the confinement field  $\mathbf{F}_c$  as a consequence of the form (square) of the confinement border and the independent nature of the field in relation to the configuration of the particles in equilibrium, it is deemed better to evaluate the residual gravitational field in agreement with

$$\mathbf{F}_g = -\mathbf{F}_c(\mathbf{r}_q) \quad (10)$$

Given that the confinement and gravitational fields are unique (for certain gradients of a tilted substrate) for the earlier expression (10) it is suggested that the centre of equilibrium of charge  $\mathbf{r}_q$  is the same *irrespective of the number of particles*. This speculation and also the efficient use of (10) to calculate the residual gravitational force field are interesting areas for further investigation.

## 6. ERROR ESTIMATION

A state of equilibrium (7) is equivalent to having a minimum energy in each site containing a particle. However, given that the error estimation in the 2D lattice is due to the finite size of a cell, then (4) shows a minimum energy potential error of  $\Delta V_x = V_{x^+} - V = V - V_{x^-}$  along the  $X$  axis and an error of  $\Delta V_y = V_{y^+} - V = V - V_{y^-}$  along the  $Y$  axis. The corresponding errors in the force components acting on each particle are

$$\Delta F_x = -\frac{\partial \Delta V_x}{\partial x} = -(V_{x^+} + V_{x^-} - 2V), \quad (11)$$

$$\Delta F_y = -\frac{\partial \Delta V_y}{\partial x} = -(V_{y^+} + V_{y^-} - 2V)$$

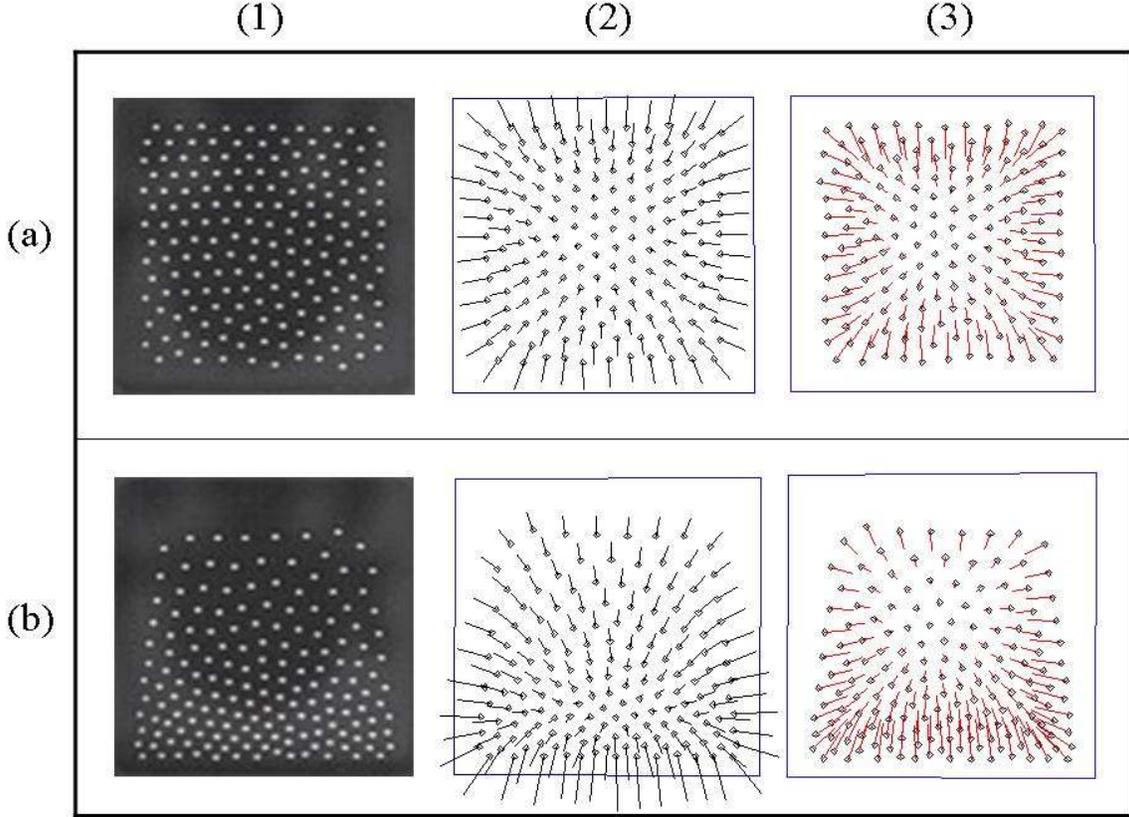


FIG. 9.— (a) corresponds to a level substrate and row (b) corresponds to a tilted substrate. The figures in column (1) are photographs of the experiment; the figures in column (2) and column (3) show the corresponding confining force field  $\mathbf{F}_c$  and the Coulomb repulsion force field  $\mathbf{F}_q$  respectively.

this would lead to the rewriting of (6) to include the following error:

$$\mathbf{F} \rightarrow (F_x \pm |\Delta F_x|)\mathbf{i} + (F_y \pm |\Delta F_y|)\mathbf{j} \equiv \mathbf{F}^0 + \Delta \mathbf{F} \quad (12)$$

$F$  is the net force on each particle, where  $\mathbf{F}^0$  is the computed force and its corresponding error  $\Delta \mathbf{F}$  is due to the cell dimensions. Now we demonstrate that  $|\Delta F_x| = |\Delta F_y|$  in (12). Taking into account that the particles only move within the  $XY$  plane of the substrate, there should not exist a net force along the  $Z$  axis perpendicular to the substrate. This translates into the condition  $V_{z+} = V_{z-} = V$  in expression (2), where we obtain

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4}(V_{x+} + V_{x-} + V_{y+} + V_{y-}). \quad (13)$$

Substituting this in (11) instead of  $V$  and readjusting terms we obtain the desired result

$$-\Delta F_x = \Delta F_x = \frac{1}{2}(V_{x+} + V_{x-}) - \frac{1}{2}(V_{y+} + V_{y-}). \quad (14)$$

If we consider  $\mathbf{F}^0 = F^0 \mathbf{f}$ , defining  $\alpha \equiv |\Delta F_x| = |\Delta F_y|$  from (14), then the error of  $\mathbf{F}^0$  in (12) should be

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta F \mathbf{f} + F \Delta \mathbf{f}, \quad (15)$$

where  $f$  is unitary in the direction of  $\mathbf{F}^0$ . It can be seen in (15) that the error  $\Delta \mathbf{F}$  affects as much the magnitude as it does the direction of  $\mathbf{F}^0$ . We can reasonably assume that both magnitude and directional

errors are of the order  $\alpha$  and as such (12) is written as

$$\mathbf{F} \cong \mathbf{F}^0 + \xi \mathbf{f} + \eta \mathbf{k} \times \mathbf{f}, \quad (16)$$

where  $|\xi| < \alpha$  and  $|\eta| < \alpha$  (note that  $\alpha, \xi$  and  $\eta$  have units of force). Developing (16) we arrive at the expression

$$\mathbf{F} = (F_x + \xi F_x/F - \eta F_y/F)\mathbf{i} + (F_y + \xi F_x/F + \eta F_y/F)\mathbf{j}, \quad (17)$$

where  $F$  is the magnitude of  $\mathbf{F}^0$  and  $F_x, F_y$  are its respective components. When necessary hereafter we will distinguish the magnitude and components of  $\mathbf{F}$  from those of  $\mathbf{F}^0$  by adding the superscript for this last case.

When  $\xi$  y  $\eta$  are simultaneously zero in (17), then  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^0$ , as expected. However, we know that for physical reasons if  $\mathbf{F}$  represents the residual force field corresponding to the gravity component along the inclined substrate in the direction of axis  $Y$  (figure 3), then from (7) we have that the sum of the confining force  $\mathbf{F}_c$  and the Coulombian repulsion  $\mathbf{F}_q$  should only contain components along the  $Y$  axis. As such, the  $\mathbf{F}$  components along the  $X$  axis in (17) should be null for all particles. As we can see in graphs (a) and (b) of figure 8,  $\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_q$  do not have null components along the  $X$  axis, we suppose that this is due to the errors discussed. Hence, equation (17) is subject to the following restriction

$$F_x + \xi F_x/F - \eta F_y/F = 0, \quad (18)$$

which results in  $F$  components only along the  $Y$  axis in (17). Substituting the  $\eta$  value of (18) in (17) we obtain

$$\mathbf{F} = (F + \xi)F/F_y \mathbf{j}, \quad (19)$$

or equivalently

$$F_{y,i} = (\sqrt{F_{x,i}^{02} + F_{y,i}^{02}} + \xi_i) \sqrt{F_{x,i}^{02} + F_{y,i}^{02}}/F_{y,i}^{02}, \quad (20)$$

where the subscript  $i$  represents each one of the particles. So the  $F$  field in (19) is seen as a set of aligned vectors along the  $Y$  axis with different magnitudes. According to (7) these magnitudes should be equal. For this to happen we should apply the appropriate values of  $\xi_i$  for each particle. This is a time consuming and cumbersome process and we have therefore chosen the following criteria. We consider a unique value of  $\xi$  in (20) for all the particles and define the deviation as  $d_i = F_{y,i} - F_{y,i}^0$  so that  $S(\xi) = \sum_i d_i^2$  has a minimum value, i.e.,  $\partial_\xi S = 0$  and we obtain

$$\xi = \frac{\sum_i (F_{x,i}^0/F_{y,i}^0)^2 F_i^0}{\sum_i (F_i^0/F_y^0)^2}, \quad (21)$$

where  $\xi$  only guarantees a minimum value of  $F_{y,i}$  in (20) with respect to an average value of  $F_{y,i}$  over all the particles  $N$  defined as

$$\langle F_y \rangle = \frac{1}{N} \sum_i (F_i^{0,2}/F_{y,i}^0) + \frac{\sum_i [(F_{x,i}^0/F_{y,i}^0)^2 F_i^0] \sum_i (F_i^0/F_{y,i}^0)}{N \sum_i (F_i^0/F_{y,i}^0)^2}, \quad (22)$$

This expression provides a useful numerical estimation of the residual gravitational force that is obtained in the experimental set up when the plane is inclined. Thus, there must be a linear relationship between  $\langle F_y \rangle$  the values and sine of the inclination angle.

Note that when a substrate is horizontal it is likely that some or all of the  $F_{y,i}^0$  values will be zero. In these cases (18) is used instead of (22) where  $\xi = -F_x = -F$  is obtained. In this case we need to define  $\mathbf{F} = 0\mathbf{j}$  to avoid an undetermined result in (19).

We apply (22) for a substrate at 4 different gradients such that  $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > \theta_4 >$ . Since the gravitational field is homogeneous, the energy potential variation along the  $Z$  axis (figure 3) is  $\Delta V = mg\Delta z$ , where  $m$  is the mass of each particle. So, the substrate slope is  $\Delta z/\Delta x = \tan = \Delta V/(mg\Delta x)$ . Since in this study the value of  $\Delta V$  is not given in physical units but is non dimensional, and the mass of the spheres is an unknown parameter, we can only compare the different gradients among them and draw conclusions. The  $\theta$  angles are unknown but their ratios are known. The selected values are

$$\tan \theta_1 = 2 \tan \theta_2 = 4 \tan \theta_3 = 8 \tan \theta_4; \quad (23)$$

where the configuration of figure 6 corresponds to  $\theta_3$ . For the configurations corresponding to the gradients given in (23), the non dimensional residual force values  $F_i \langle F_y \rangle$  shown in (22) are  $F_i = 1.360$ ,  $F_2 = 0.839$ ,  $F_3 = 0.725$ ,  $F_4 = 0.225$ , and from which

the relevant quotients  $F_{i,j} \equiv F_i/F_j$  are constructed:

$$\begin{aligned} F_{43} &= 0.360, F_{42} = 0.265, F_{41} = 0.173, \\ F_{32} &= 0.866, F_{31} = 0.529, F_{21} = 0.616. \end{aligned} \quad (24)$$

Additionally, defining  $\xi_{i,j} \equiv (\sin \theta_i / \sin \theta_j)^2$ , the relations in (23) are expressed as

$$4\xi_{2,1} + \xi_{2,3} = 5, 4\xi_{3,2} + \xi_{2,1} = 5, \quad (25)$$

and combine together with  $\xi_{i,j}\xi_{j,k} = \xi_{i,k}$  and  $\xi_{i,j} = \xi_{j,i}^{-1}$  (according to the definition of  $\xi_{i,j}$ ) to obtain all of the relevant combinations:  $\xi_{4,3}, \xi_{4,2}, \xi_{4,1}, \xi_{3,2}, \xi_{3,1}, \xi_{2,1}$ . These values together with those of (24) serve to construct the points  $P(F_{i,j}, \sqrt{\xi_{i,j}})$ . These are used to verify if  $F_i \propto \sin \theta_i$ , where the gradient  $m$  of a linear adjustment of the points  $P$  should be close to 1. These points, ordered in ascending value of the abscissa, are

$$\begin{aligned} P_1(0.17, \sqrt{\xi(24 - 20\xi) - 1}), \\ P_2(0.26, \sqrt{(24 - 20\xi) - 1}), \\ P_3(0.32, \sqrt{(24 - 4\xi)(24 - 20\xi) - 1}), \\ P_4(0.53, \sqrt{\xi(5 - 4\xi) - 1}), \\ P_5(0.62, \sqrt{\xi}), \\ P_6(0.87, \sqrt{(5 - 4\xi) - 1}). \end{aligned} \quad (26)$$

We define  $\xi \equiv \xi_{2,1}$  as a variable parameter of which the gradient  $m(\xi)$  is dependent. The validity interval of  $\xi$  is calculated from the first relation in (23) obtaining:

$$\begin{aligned} 4\xi - 3\xi \sin^2 \theta_1 - 1 &= 0, \\ 4\xi - 3\xi \sin^2 \theta_2 - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Given that in (27) the minimum value of  $\theta_2$  is  $0^\circ$  and the maximum value of  $\theta_2$  is  $90^\circ$ , we obtain  $0.25 \leq \xi \leq 1$ , then the slope  $m(\xi)$  for the 6 points in (26) is calculated using a linear fitting leading to an ascending monotonous function with extreme values  $m(0.25) \cong 0.46$ ,  $m(1) \cong 0.9$  and mean values  $\langle m \rangle \cong 0.67$ . Since we have

$$\frac{F_i}{F_j} = m \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_j}, \quad (28)$$

then the numerical results for  $m$  indicate that the relation  $F_i \propto \sin \theta_i$  is reasonably satisfactory ( $m \cong 0.93$ ) when the gradients are big ( $\theta_1 \cong 90^\circ$ ). The discrepancies resulting from smaller gradients are attributed in this work to the coarse segmentation of the substrate ( $20 \times 20$  boxes) and the small number of particles ( $N = 9$ ) involved which do no result in reliable residual force values in (22).

## 7. CONCLUSIONS

We have constructed a ‘‘minimal’’ model to reproduce relevant features of a system of several electrically charged particles confined in a square parallel plate capacitor. Our approach embraces the theory of  $r^{-2}$  type interactions as well as data from actual experiments and numerical simulation.

The method employed for such a purpose is the solution of the Laplace equation in 3D by means of the relaxation method. The main results in this work are: (i) the final equilibrium configuration of a

system of 9 particles, (ii) the corresponding energy evolution through the intermediate non-equilibrium configurations, and (iii) the vector force fields for the confining and repulsive interactions. These results are compared with those of the actual experimental set up with many particles (e.g., figure 9 with 169 particles) and a qualitative good agreement is found.

In this work, the solution of the Laplace equation is a scalar field of potential which can incorporate *simultaneously* all the different physical interactions (e.g., electrical and gravitational) as boundary conditions for the solution of the Laplace equation. The resulting vector force field deduced from the total potential field thus determines the dynamical behavior of the particles and the stable equilibrium configuration of the system.

Emerging from this work was the concept of an “equilibrium center” for the force fields (confining and repulsive) which may provide an alternative way for determining global characteristics of the particle system. Such an equilibrium center could move in an analogous way as does the center of mass of a particle system when acted upon by external forces.

Furthermore, we modeled the dynamics of the particles using a specific algorithm which results in a final equilibrium configuration exhibiting a minimum of the total energy. We suggest that although the actual dynamics of the particles may be different from the modeled dynamics, the final equilibrium configuration characterized by a unique minimum of the total energy *is the same*. The possible numerical differences arising between the model and the experiment

is a consequence of the lattice’s grid segmentation. We are pursuing further research so that our minimal model might eventually allow us to follow the true path of the particles towards their final equilibrium configuration. It is worth noting that within the goal of the model considered in this work, and in contrast with the experimental set up (Ghezzi et al. 2008), we use the minimum amount of relevant physical parameters to draw conclusions. Thus, we do not need to know explicitly the mass  $m$  of the particles, the gravity acceleration  $g$  nor the angle  $\theta$  of inclination of the substrate. Instead, we use the ratios of the angles as in (23) and the ratios of the forces as in (24). We do not need either the physical values of the potential gradient  $\Delta V$  and the dimensions of the substrate; it suffices to assign them non dimensional numerical values.

Finally, the implementation of our minimal model in this work suggests some interesting areas of research and as an educational aid for gaining insight and practice into these kinds of phenomena.

## 8. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors appreciate the help and collaboration of Grieve R and Zheng X, Queen’s University Belfast and acknowledge support from Grant Project IDH, Universidad Mayor de San Andrés (La Paz, Bolivia).

### Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

## REFERENCIAS

- Blonder, G. E. 1985, Phys. Soc., 30, 403  
 Bonitz, M., Ludwig, P., Baumgartner, H., Henning, C., Filinov, A., Block, D., Arp, O., Piel, A., Kading, S., Ivanov, Y., Melzer, A., Fehske, H., & Filinov, V. 2008, Physics of Plasmas, 15, 55  
 Clark, B. K., Casula, M., & Ceperley, D. M. 2009, Phys. Rev. Lett., 103, 55701  
 Frenkel, D. & McTague, J. P. 1979, Phys. Rev. Lett., 42, 1632  
 Ghezzi, F., Grieve, R., Sanjines, D., & Zheng, X. H. 2008, Revista Boliviana de Física, 14, 50  
 Iwamatsu, M. 2003, Colloid Interf. Sci., 260, 305  
 Jean, M., Even, C., & Guthmann, C. 2001, Europhys. Lett., 84, 3626  
 Kong, M., Partoens, B., & Peeters, F. M. 2003, New Journal of Physics, 5, 23  
 Nurmela, K. J. 1998, Phys., 31, 1035  
 Press, W. H., Flannery, B., Teukolsky, S. A., & Vetterling, W. T. 1992, Numerical recipes: The art of scientific computing . (Cambridge University Press)  
 Ryzhov, V. N. & E.Tareyeva, E. 2002, Physica, 314, 396  
 Schweigert, I. V., Schweigert, V. A., & Peeters, F. M. 1999, Phys. Rev. Lett., 82, 5293  
 S.Toxvaerd. 1980, Phys. Rev Lett., 44, 1001  
 Tata, B. V. R., Rajamani, P. V., Chakrabarti, J., Nikolov, A., & Wasan, D. 2000, Phys. Rev. Lett., 84, 3626  
 Zahn, K. & Maret, G. 2000, Phys. Rev. Lett., 85, 3654  
 Zheng, X. & Earnshaw, J. C. 1998, Europhys. Lett., 41, 635  
 Zheng, X. H. & Grieve, R. 2006, Phys. Rev., 73, 64205

## SACCHAROMYCES CEREVISIAE COMO BIOCATALIZADOR EN CELDAS DE COMBUSTIBLE MICROBIANAS CON FERRICIANURO DE POTASIO

### SACCHAROMYCES CEREVISIAE: A BIOCATALYST IN BIOLOGICAL FUEL CELLS WITH POTASSIUM FERRICYANIDE

†BRYAN ALEJANDRO VARGAS ARCE<sup>1</sup>, MARÍA TERESA ÁLVAREZ ALIAGA<sup>2</sup>, FLAVIO GHEZZI<sup>1</sup>, & ARMANDO R. TICONA-BUSTILLOS<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635  
La Paz - Bolivia

<sup>2</sup>Instituto de Investigaciones Fármaco Bioquímicas  
Facultad de Ciencias Farmacéuticas y Bioquímicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
Av. Saavedra 2224  
La Paz - Bolivia

(Recibido 22 de mayo de 2018; aceptado 5 de octubre de 2018)

#### RESUMEN

La levadura *Saccharomyces Cerevisiae* fue utilizada como biocatalizador dentro del ánodo microaerofílico de dos celdas de combustible microbianas. Se halló que usando ferricianuro de potasio como aceptor final de electrones en el cátodo, las levaduras producen un voltaje de  $\approx 100$  mV mayor a las celdas de combustible sin levaduras luego de 1.5 días de funcionamiento, con un voltaje a circuito abierto de  $\approx 150$  mV. La cinética del microorganismo fue medida fuera de las celdas de combustible y comparada con el desarrollo de voltaje a través del tiempo, indicando que el crecimiento de las levaduras ayuda al incremento de voltaje.

Código(s) PACS: 82.47.Gh — 87.15.v — 87.17.Ee

*Descriptores:* Celdas de combustible PEM — biomoléculas — crecimiento y división celular

#### ABSTRACT

The yeast *Saccharomyces Cerevisiae* was used as a biocatalyst within a microaerophilic two-compartment microbial fuel cell anode. It was found that by using potassium ferricyanide as an electron acceptor the yeasts produce 100 mV voltage more than cells without yeast after 1.5 days of operation with a 150 mV voltage open circuit. The kinetics of the microorganism was measured outside the fuel cells and compared to the development of voltage over time, indicating that the growth of the yeasts helps increase the voltage.

*Subject headings:* PEM fuel cells — Biomolecules — Growth and division of cells

#### 1. INTRODUCCIÓN

Las necesidades energéticas de la población mundial son cada año mayores y los combustibles fósiles como un recurso no renovable, no podrán abastecer durante mucho tiempo esa demanda energética Mustakeem (2015). En las últimas décadas una gran variedad de fuentes de energía alternativas se están estudiando y están siendo aplicadas. Entre ellas, las celdas de combustible microbianas ofrecen una excelente opción debido que pueden usar aguas residuales de alto contenido orgánico como combustible para generar energía eléctrica Hubenova & Mitov (2015).

Las celdas de combustible microbianas (MFC's por sus siglas en ingles) son dispositivos bio-

electroquímicos que pueden transducir la energía química en energía eléctrica gracias a la oxidación de substratos orgánicos en el metabolismo microbiano Hubenova & Mitov (2015). Se hallan compuestas por dos cámaras: i) **ánodo** donde microorganismos son empleados para extraer electrones de sustancias orgánicas como glucosa, fructosa, y otros, ii) **cátodo** donde un compuesto como peróxido de hidrógeno, oxígeno molecular o ferricianuro de potasio aceptan los electrones y moléculas de hidronio provenientes del ánodo Hubenova & Mitov (2015). Para conectar ambas cámaras eléctricamente y separar las sustancias presentes en cada una, membranas de intercambio de protones o puentes de sal usados Rahimnejad et al. (2014). Usualmente bacterias prokariotas como *Geobacter Metallireducens*, *Geobacter Sulfurreducens* Malvankar et al. (2011)

†bryan.vargasarce@yahoo.com

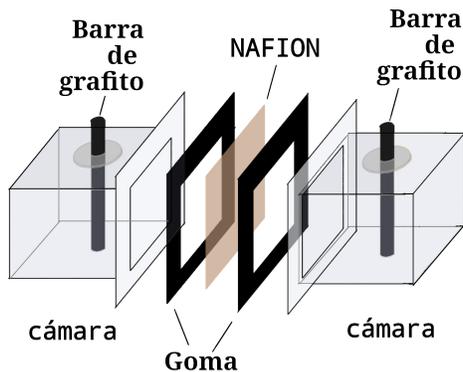


FIG. 1.— Esquema de las celdas de combustible microbianas construidas, la distancia aproximada entre los electrodos de grafito es de 5 cm.

son usadas como biocatalizador anódico en las MFC's sin embargo el uso de levaduras como *Saccharomyces Cerevisiae* Raghavulu et al. (2010) Rossi (2017) Wilkinson et al. (2006), *Candida Melibiosica 2419* Gunawardena et al. (2008) se han estudiado con el fin de usarlos en la purificación de aguas residuales producidas por la industria de comida que aplica levaduras en sus procesos biotecnológicos Hubenova & Mitov (2015). *Saccharomyces Cerevisiae* como biocatalizador ha sido estudiada en diferentes condiciones durante la última década. Se mostró que estas pueden transducir energía en condiciones anaeróbicas junto a un cátodo de aire Raghavulu et al. (2010). El uso de una concentración de 5 mM de azul de metileno en la cámara anódica, junto a un cátodo con una concentración 4.4 M de peróxido de hidrógeno, incrementa el voltaje a circuito abierto de la MFC de  $\approx 100$  hasta  $\approx 500$  mV Rossi (2017). El azul de metileno junto al rojo neutro incrementa la densidad de potencia de las MFC's desde 0.08 hasta  $0.46 \text{ W/m}^2$  junto a un cátodo de ferricianuro de potasio Wilkinson et al. (2006). El efecto del crecimiento de las poblaciones microbianas en las MFC's fue recientemente 'estudiado' (2019), estableciendo que la resistencia de transferencia de carga esta directamente relacionado con las diferentes fases de crecimiento del cultivo microbiano Arkatkar et al. (2019).

En el presente estudio, la cinética de la levadura *Saccharomyces Cerevisiae* fue medida en el medio de cultivo DSW bajo condiciones microaerofílicas para relacionarla con el voltaje a circuito abierto de las MFC's con la levadura bajo estudio como biocatalizador anódico y ferricianuro de potasio como aceptor final de electrones en la cámara catódica.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

**Construcción de celdas de combustible**— Se construyeron 3 celdas de combustible de dos cámaras, ambas de material acrílico de volumen total de 63 ml con un volumen efectivo de 60 ml FIG.1.

**Pretratamiento de electrodos**— Barras de grafito fueron empleadas en las MFC's como electrodos. El pretratamiento de las mismas, fue someterlas a calor

TABLA 1  
Composición del agua residual sintética DSW, como es mostrada por Raghavulu y colaboradores (2010) Raghavulu et al. (2010).

Compuestos	Concentraciones
Glucosa	3 [g/l]
$\text{NH}_4\text{Cl}$	0.5 [g/l]
$\text{KH}_2\text{PO}_4$	0.25 [g/l]
$\text{K}_2\text{HPO}_4$	0.25 [g/l]
$\text{MgCl}_2$	0.3 [g/l]
$\text{CoCl}_2$	25 [mg/l]
$\text{ZnCl}_2$	11.5[mg/l]
$\text{CuCl}_2$	10.5[mg/l]
$\text{CaCl}_2$	5 [mg/l]
$\text{MnCl}_2$	15 [mg/l]

de llama entre los 500 y 1000 °C, raspar la superficie con lija fina para aumentar su área efectiva Mustakeem (2015), se lavaron con agua destilada para quitar residuos del raspado. Se procedió a esterilizarlas por calor una vez más bajo el mismo procedimiento anterior y finalmente fueron almacenadas en agua destilada estéril, hasta el momento de usarlas.

**Pretratamiento de membranas de intercambio de protones**— Se cortaron cuadrados de 3.95 cm de la membrana NAFION 117, estos trozos fueron almacenados en agua desionizada durante un día para que alcancen su tamaño máximo al hidratarse. El incremento consiste en la dilatación del 12% en longitud de los cuadrados. Posteriormente las membranas fueron sometidas al pretratamiento estándar Babanova S1 (2011), mismo que consiste en mantenerla a 80 °C en los siguientes procesos: i) 1 h en peróxido de hidrógeno al 3%, ii) 2 h a en agua desionizada y iii) 1 h en ácido sulfúrico 0.1 M.

**Activación de levadura**— Se utilizó levadura de panificación *Saccharomyces Cerevisiae* en forma liofilizada. Para activarlas se inoculó 0.3 g de levadura en 30 ml de medio de cultivo DSW (agua residual sintética) TABLE 1 previamente calentado a 40 °C, temperatura que fue mantenida durante 30 min.

**Preparación del cátodo**— Se preparó una solución de concentración 1 mM de ferricianuro de potasio  $\text{K}_3\text{F}(\text{CN})_6$ , que fue esterilizada a 121 °C durante 15 min. Una vez preparadas las celdas de combustible, se introdujeron 60 ml de la solución en la cámara catódica y fue cerrada herméticamente con silicona.

**Preparación del ánodo**— Se preparó el medio DSW que fué esterilizado a 121 °C durante 15 min, una vez enfriado, se introdujeron 59 ml a la cámara anódica de las celdas de combustible en las cuales se inocularían levaduras y 60 ml en las que funcionarían como un control abiótico. Una vez selladas, las celdas de combustible fueron incubadas a 35 °C durante un día, luego de esto se inoculó 1 ml de la solución de levaduras activadas mencionado anteriormente.

*Medición del voltaje*— La diferencia de potencial entre ánodo y cátodo fue medida con el convertidor analógico digital (ADC) de 10 bits del circuito integrado ATmega328p (Arduino UNO R3) con un voltaje de referencia de 1.1 V así la medida más pequeña posible es de aproximadamente 1.1 mV, para estabilizar la señal adquirida por el ADC se usó una resistencia de 220  $\Omega$  en serie con un capacitor electrolítico de 1  $\mu\text{F}$  los cuales se hallaban en paralelo con la MFC. Se tomaron 10 datos cada minuto durante 5 días, desde que el ánodo y el cátodo fueron sellados.

*Medición de la cinética pH, densidad óptica y concentración de glucosa* — Con el fin de conocer la cinética de las levaduras *Saccharomyces Cerevisiae* en las condiciones a las que se hallaban sometidas en las MFC's, el pH, densidad óptica y concentración de glucosa fueron medidos en frascos de cultivo de condiciones similares a las MFC's. Sólo los parámetros finales fueron medidos de muestras extraídas de las celdas de combustible microbianas.

Se prepararon 3 viales esterilizados en los cuales se introdujeron 60 ml de medio DSW, en dos de ellos se inoculó 1 ml de la solución con levaduras activadas cuya preparación se menciona previamente. Se tomaron muestras de 1.5 ml de cada frasco determinándose el pH, densidad óptica ( $\lambda_{600\text{ nm}}$ ) y la concentración de glucosa a través del método DNS.

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

#### 3.1. Celdas de combustible

Las fotografías en la FIG.2. muestran la celda de combustible una vez montada antes y luego de realizar las medidas. Después de 4 días el color de la solución de ferricianuro de potasio cambia de amarillo a verde, indicando la reducción de pH y la ganancia de electrones del mismo.

#### 3.2. Diferencia de potencial

##### 3.2.1. Celdas de combustible abióticas

Con la finalidad de comprobar la funcionalidad de las celdas de combustible construidas, se midió la diferencia de potencial entre ánodo y cátodo en la ausencia de levaduras (control abiótico) FIG.3, durante un día antes de la inoculación de levaduras al ánodo de las celdas. Se observa de la gráfica que el comportamiento durante el primer medio día de funcionamiento se tienen ciertas variaciones de voltaje, luego se muestra tendencia a un voltaje fijo.

##### 3.2.2. Celdas de combustible microbianas

Se inocularon levaduras, en dos de las tres celdas de combustible en funcionamiento, las celdas con microorganismos comenzaron un incremento en voltaje similar a una curva de crecimiento sigmoïdal FIG.4.

Desde los 0.41 hasta los 1.47 días con voltajes desde 85.66 hasta 170 mV para la celda 1, desde los 0.43 hasta los 2 días con voltajes desde 89.12 hasta 157.6 mV para la celda 2.

La variación de voltaje registrada hasta aproximadamente el segundo día de experimento TABLA

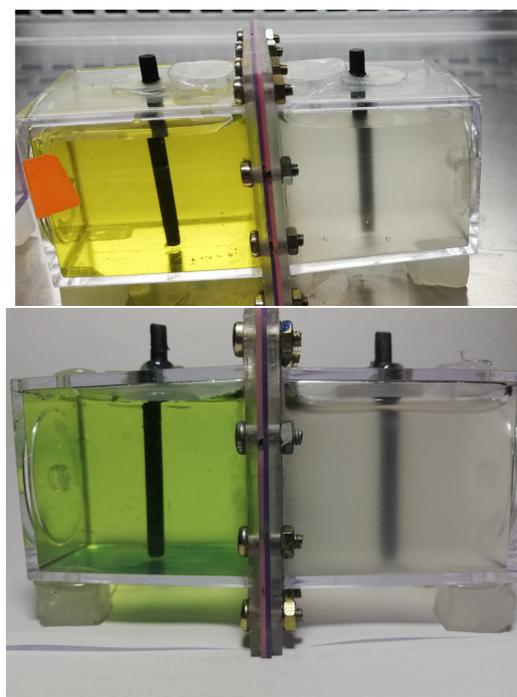


FIG. 2.— Fotografías de las celdas de combustible construidas, la sustancia amarilla es el ferricianuro de potasio que cambió a verde luego de las medidas.

TABLA 2  
Voltajes iniciales y máximos de las celdas con levaduras

Celda	Voltaje inicial [mV]	Voltaje máximo [mV] (Días)
1	68.53 $\pm$ 0.02	170.00 $\pm$ 0.02 (1.47)
2	75.79 $\pm$ 0.02	157.60 $\pm$ 0.02 (2.00)

2. es menor a la descrita por otros estudios Rossi (2017)Raghavulu et al. (2010) donde el voltaje a circuito abierto en ausencia de azul de metileno se incremento hasta alcanzar un voltaje de 0.26 0.04 V luego de 30 h de funcionamiento, con oxígeno molecular disuelto como aceptor final de electrones, esta diferencia puede darse por diversos motivos como la

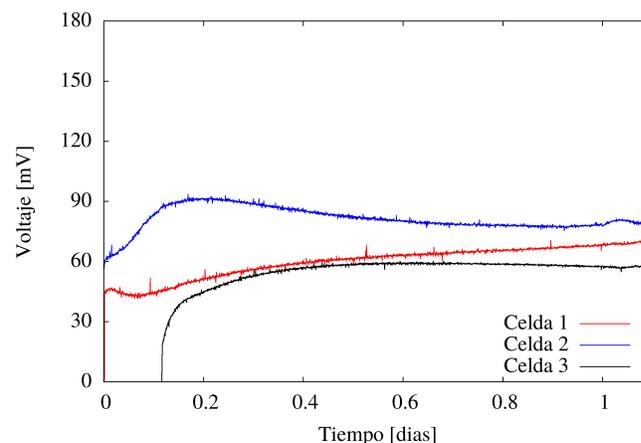


FIG. 3.— Perfiles de voltaje de celdas de combustible en la ausencia de levaduras, surge una tendencia asintótica hacia voltajes cercanos a 80 mV

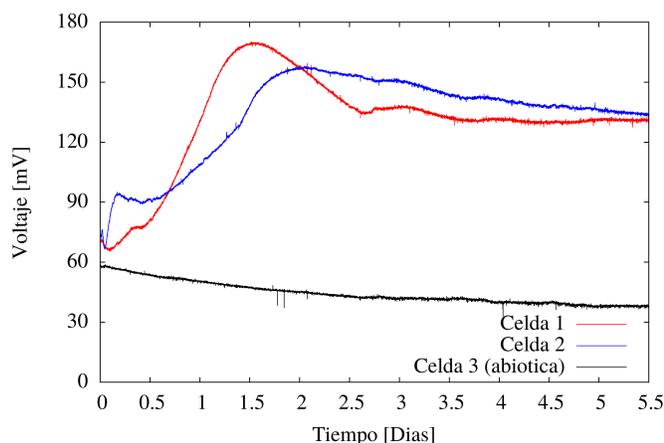


FIG. 4.— Gráficas de voltaje contra tiempo de tres celdas de combustible microbianas, el control abiótico mostró aproximadamente lineal con una pendiente promedio de  $3.96 \text{ mV/día}$ , notese que la diferencia de potencial entre el desarrollo temporal de las celdas 1 y 2 respecto de la celda de control 3 es casi constante  $\approx 95 \text{ mV}$ .

geometría de la MFC, la geometría del electrodo, sin embargo el factor que diferencia el presente estudio con la mencionada tesis Rossi (2017) es la condición anaeróbica de ánodo, dado que el oxígeno presente en nuestros ánodos puede extraer los electrones generados en la MFC Hubenova & Mitov (2015).

### 3.3. Cinética de crecimiento y consumo de sustrato de *Saccharomyces cerevisiae*

La densidad óptica, pH y concentración de glucosa fueron medidos una vez por día. A los 4.5 días, una medida de densidad óptica, pH y concentración de glucosa fué realizada a una muestra extraída de la celda de combustible abiótica y las MFC's respectivamente. La medición de densidad óptica FIG.5(a) indica que las levaduras dentro de la cámara anódica no pudieron multiplicarse de la misma forma que lo hacen dentro un frasco de cultivo. El pH medido en el ánodo a los 4.5 días posee un valor de  $2.41 \pm 0.02$ , este es considerado no apto para la supervivencia de *Saccharomyces cerevisiae*, la medición de pH en la celda de combustible abiótica posee un valor similar  $2.35 \pm 0.02$ , indicando que a diferencia del frasco del cultivo, la disminución de pH en la celda de combustible es un proceso poco relacionado al metabolismo del microorganismo. El valor de la concentración de glucosa medida en la MFC  $0.00 \pm 0.22 \text{ [g/L]}$  indica que la glucosa fue consumida en su totalidad, además el valor obtenido para la celda de combustible abiótica  $2.36 \pm 0.18 \text{ [g/L]}$  indica que la reducción de concentración de glucosa en el ánodo fue un proceso mayormente debido al microorganismo.

### 3.4. Comparación del desarrollo temporal del voltaje con la cinética de la levadura

Al comparar los desarrollos temporales de cada parámetro FIG.6 es observable que la población de levaduras crece a medida que la concentración de glucosa se reduce, sin embargo al compararlos con la evolución temporal del voltaje vemos que el valor

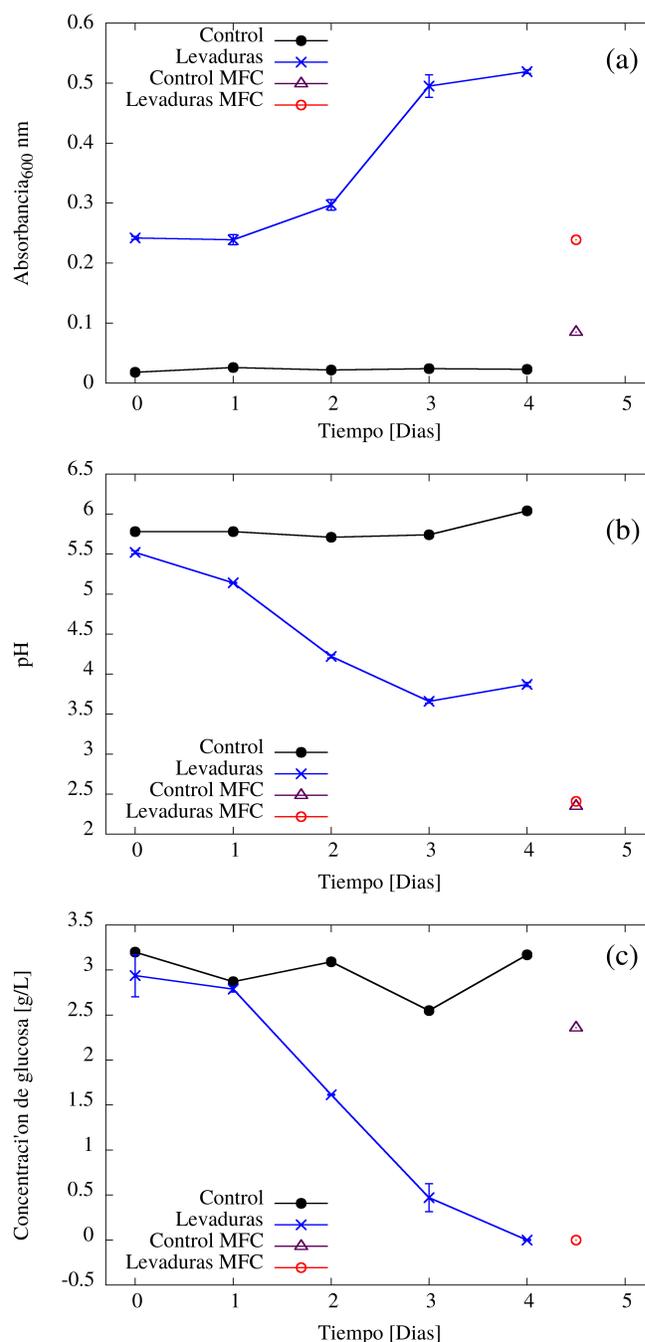


FIG. 5.— a) Densidad óptica ( $\lambda_{600 \text{ nm}}$ ) de la biomasa de levaduras de *Saccharomyces cerevisiae* de las muestras extraídas de los frascos de cultivo, la línea azul representa el promedio de las absorbancias de la biomasa y la línea negra la absorbancia solo del medio. b) Medición del pH como parámetro refleja el metabolismo y la cinética de crecimiento. c) Disminución en la concentración de glucosa que determina un consumo por parte de la biomasa de levaduras. En todas las gráficas se encuentran las medidas tomadas para las celdas de combustible en los 4.5 días.

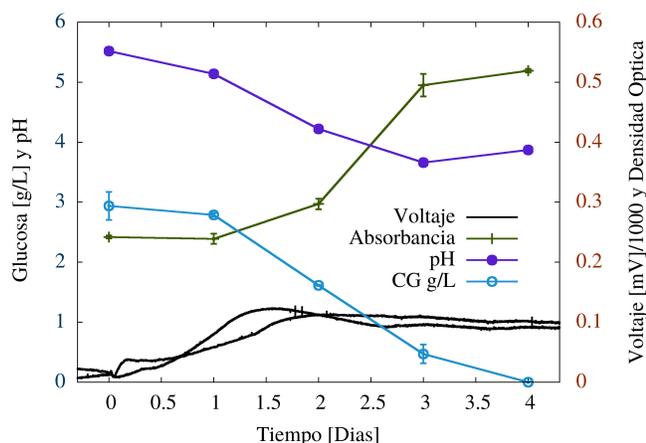


FIG. 6.— Comparación entre los parámetros medidos, como es una gráfica con ejes, es necesario indicar que las curvas de absorbancia y las dos curvas de voltaje pertenecen al eje derecho, la curva de pH y concentración de glucosa pertenecen al eje izquierdo. Además es importante mencionar que acá se usó la resta de las curvas de voltaje de las MFC's con levaduras menos la MFC de control abiótico. .

máximo de voltaje (a los 1.6 y 2 días) se alcanza durante el inicio de la fase exponencial del crecimiento de las levaduras en los frascos de cultivo (entre el primer y tercer día) FIG.6(absorbancia).

Es conocido que las diferentes fases de crecimiento microbiano puede afectar en el voltaje a circuito abierto Arkatkar et al. (2019) así estos resultados podrían indicar que la resistencia de transferencia de carga en las levaduras *Saccharomices Cerevisiae* es menor al inicio de la fase exponencial. Sin embargo un estudio electroquímico con espectroscopia por impedancia electroquímica es necesario para confirmar esta afirmación.

#### 4. CONCLUSIONES

Se utilizó la levadura *Saccharomices Cerevisiae* en condiciones microaerofílicas como biocatalizador anódico para MFC's exitosamente, logrando una diferencia de 100 mV respecto del control abiótico. Sin embargo el voltaje a circuito abierto ( $\approx 150$  mV en su fase estable) fue bajo comparado al obtenido por otros estudios Raghavulu et al. (2010) Rossi (2017) que reportaron hasta 260 mV, posiblemente debido al oxígeno presente en las condiciones microaerofílicas usadas en nuestro estudio. La comparación entre la cinética de la levadura y el desarrollo temporal del voltaje de las MFC's muestra que el incremento de voltaje es causado por el crecimiento de la levadura además el máximo de voltaje ubicado durante el inicio de la fase exponencial indica que posiblemente la levadura posee un comportamiento electroquímico diferente desde el inicio de la fase exponencial.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece el apoyo y financiamiento de la Cooperación Sueca ASDI.

### APÉNDICE

#### A. ADQUISICIÓN DE DATOS DEL VOLTAJE

Las medidas hechas en la celda de combustible se hicieron con un arduino, para evitar que las celdas estén en contacto directo con los canales de entrada de arduino cuya impedancia de entrada con tierra está entre los 150K $\Omega$  y los 500K $\Omega$  se usaron unos interruptores que pueden ser controlados por arduino, estos son conocidos como relays magnéticos cuyo voltaje de trabajo es de 5V.

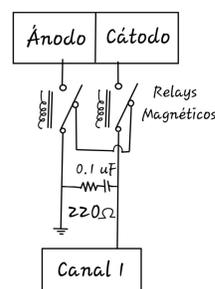


FIG. A1.— Esquema de la toma de datos de voltaje hecha con arduino, el canal 1 pertenece a la entrada de datos A1, los relays magnéticos usados fueron controlados con el mismo arduino.

Cuando el sistema es ordenado a tomar datos, se activan estos relays, permitiendo el flujo de unos pocos microamperios al canal de medida del convertidor analógico digital del arduino. Para lograr que la señal sea medida sin ruidos significativos se usó un circuito RC en paralelo a las MFC's ver FIG.A1 Se hizo un cálculo aproximado para conocer en cuanto tiempo se cargaba el circuito RC para efectuar las medidas:

$$t = -RC \ln(V_c/V_{MFC})$$

con  $R = 220 \Omega$ ,  $C = 0.1 \mu F$ ,  $V_c/V_{MFC} = 90\%$

$$t = 2.3 \mu s$$

Considerando este tiempo arduino tomaba datos después de 10 ms de conectar las terminales de las MFC's al circuito, luego de eso se tomaban 10 medidas que luego eran promediadas para reportar los puntos de las gráficas FIG.3, FIG.4 y FIG.?? La cantidad de carga que era extraída del ánodo para efectuar la medida es  $Q = CV = 15 nC$  los cuales eran transferidos al cátodo en cada medida.

#### Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

#### REFERENCIAS

Alsuhaim, H., Vojisavljevic, V., & Pirogova, E. 2013, IFMBE Proceedings, 39, 48

Arkatkar, A., Mungray, A. K., & Sharma, P. Effect of Microbial Growth on Internal Resistances in MFC: A Case Study: Proceedings of ICIIF 2018, 469–479

- Babanova S1, Hubenova Y, M. M. 2011, *J Biosci Bioeng*
- Calabrese Barton, S., Gallaway, J., & Atanassov, P. 2004, *Chemical reviews*, 104, 4867
- Chen, C.-Y., Chen, T.-Y., & Chung, Y.-C. 2014, *Environmental Technology*, 35, 286, PMID: 24600867
- Gunawardena, D., Fernando, S., & To, F. 2008, *International journal of molecular sciences*, 9, 1893
- Hubenova, Y. & Mitov, M. 2015, *Bioelectrochemistry*, 106, 177 , special Issue on Biological fuel cells
- Kalantar, M. & Sedighizadeh, M. 2003, 38, 690
- Kumar, R., Singh, L., Wahid, Z., & Md Din, M. F. 2015, *International Journal of Energy Research*, 39
- Logan, B. E. 2007, *Microbial Fuel Cells* (John Wiley & Sons)
- Logan, B. E., Hamelers, B., Rozendal, R., Schrder, U., Keller, J., Freguia, S., Aelterman, P., Verstraete, W., & Rabaey, K. 2006, *Environmental Science & Technology*, 40, 5181, PMID: 16999087
- Malvankar, N., Vargas, M., P Nevin, K., Franks, A., Leang, C., Kim, B.-C., Inoue, K., Mester, T., Covalla, S., Johnson, J., Rotello, V., Tuominen, M., & R Lovley, D. 2011, *Nature nanotechnology*, 6, 573
- Mustakeem. 2015, *Materials for Renewable and Sustainable Energy*, 4
- Najafpour, G. 2010, Effect of glucose concentration on performance of microbial fuel cell
- OHayre, R. 2016, *Fuel Cell Fundamentals*, 3rd edn. (John Wiley & Sons)
- Raghavulu, S., Goud, R., Sarma, P., & Venkata Mohan, S. 2010, *Bioresour Technol*, 102, 2751
- Rahimnejad, M., Bakeri, G., Najafpour, G., Ghasemi, M., & Oh, S.-E. 2014, *Biofuel Research Journal*, 1, 7
- Rossi, R. 2017, PhD thesis, alma
- Tront, J., Fortner, J., Pltze, M., Hughes, J., & Puzrin, A. 2008, *Biosensors and Bioelectronics*, 24, 586
- Ucar, D., Zhang, Y., & Angelidaki, I. 2017
- Wei, L., Han, H., & Shen, J. 2012, *International Journal of Hydrogen Energy*, 37, 12980
- Wilkinson, S., Klar, J., & Applegarth, S. 2006, *Electroanalysis*, 18, 2001
- Yan, W., Guo, Y., Xiao, Y., Wang, S., Ding, R., Jiang, J., Gang, H., Wang, H., Yang, J., & Zhao, F. 2018, *Water Research*, 142
- Yang, H., Zhou, M., Liu, M., Yang, W., & Gu, T. 2015, *Biotechnology letters*, 37

## EL TELESCOPIO: UNA PRIMERA VENTANA AL UNIVERSO

### THE TELESCOPE: A FIRST WINDOW TO UNIVERSE

GABRIELA CONDE-SAAVEDRA<sup>†</sup>

Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés  
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635  
La Paz - Bolivia

#### RESUMEN

El telescopio es un instrumento que permite observar objetos muy lejanos. Si queremos comprender su funcionamiento necesitamos algunos conceptos básicos de óptica, pero antes vamos a clasificar los principales tipos de telescopios. Posteriormente, describiremos los conceptos de óptica más relevantes, presentaremos algunos ejemplos y dejaremos algunos problemas propuestos.

Código(s) PACS: 95.55.Cs — 42.00.00 — 01.65.+g

*Descriptores:* Telescopios — óptica — historia de la ciencia

#### ABSTRACT

The telescope is an instrument that allows for the observation of very far objects. To understand how they work we need to classify the main types of telescopes and to understand some basic optical concepts. Finally, we describe the most relevant optical principles with examples and answer some frequently asked questions.

*Subject headings:* Telescopes — optics — history of science

#### 1. INTRODUCCIÓN

Alrededor de 1608, Hans Lippershey, un inventor y fabricante de lentes holandés, construye lo que ahora conocemos como catalejo. Un instrumento compuesto por dos lentes, uno fijo y otro móvil, situados en un pequeño tubo que permiten observar objetos lejanos. Cuando este instrumento llega a manos de Galileo Galilei en 1609, él decide modificarlo mejorando el aumento y así observar el cielo. Con las observaciones de la Luna, de Júpiter, del Sol y de las estrellas, obtiene las pruebas irrefutables a favor de la teoría Copernicana, teoría que planteaba que el Sol era el centro del Universo, y no la Tierra como sugería Aristóteles y defendía ciegamente la Iglesia.

La evolución del telescopio es tan fascinante como la vida misma de Galileo Galilei. Desde entonces, este instrumento nos ha revelado las imágenes más sorprendentes del Universo.

#### 2. TIPOS DE TELESCOPIO

Existen tres tipos principales de telescopios: el refractor (galileano), el reflector (newtoniano) y el catadióptrico. El telescopio Galileano utiliza lentes, el telescopio Newtoniano se compone de espejos y el catadióptrico combina espejos y lentes. A continuación describiremos un poco más cada uno de estos telescopios.

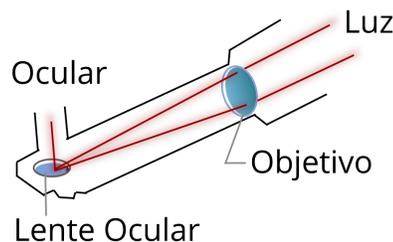


FIG. 1.— Partes generales de un telescopio refractor.

##### 2.1. El Refractor

Denominado también como telescopio Galileano, es un sistema óptico compuesto por dos lentes situados en los extremos de un tubo. En el extremo del frente está una lente convergente llamada objetivo, por la cual ingresa la luz del objeto celeste y se refracta hasta concentrarse en el foco, donde se forma la imagen. Situado en el extremo opuesto del tubo, se coloca una lente divergente, denominada ocular, a través del cual los rayos que pasan por él incrementan en ángulo. Esto implica que el tamaño angular aparente es incrementado y la imagen del objeto es ampliada.

Desde 1600 hasta 1900 se ha utilizado el telescopio refractor para observar el cielo. Las variaciones en su diseño están caracterizadas por el diámetro del objetivo; a mayor apertura, mayor luz captada y esto permite tener mayor aumento, o una distancia focal corta. Es decir, los telescopios refractores

<sup>†</sup>gabrielacondesaaavedra@gmail.com

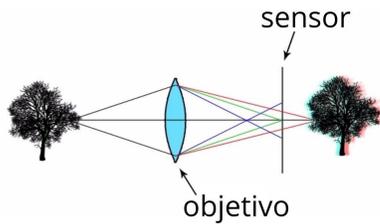


FIG. 2.— La aberración se presenta por la óptica de las lentes.

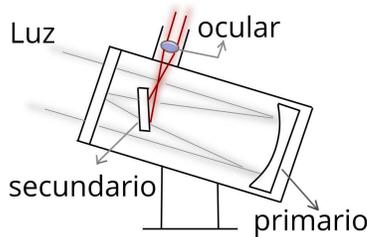


FIG. 3.— Partes generales de un telescopio reflector.

de poca abertura, necesitarán tubos largos y los de gran abertura necesitarán tubos cortos. Existe aquí un juego de costo y calidad en la imagen a observar. Fabricar lentes de grandes diámetros es costoso ya que estos lentes no deben tener ninguna irregularidad y por otro lado, construir tubos largos es también una tarea complicada.

Otro detalle importante en la observación a través de un telescopio refractor es el problema de la aberración cromática, causada por los rayos periféricos que ingresan por el objetivo y no llegan a concentrarse en el punto focal. Los rayos que llegan al foco son mayormente del centro del objeto, de modo que cuando observamos a través de un telescopio refractor, veremos que el borde del objeto no es nítido y presenta colores.

Los telescopios Galileanos son más apropiados para observación terrestre, o de la Luna, los planetas y algunas estrellas binarias. Son duraderos y casi no necesitan de mantenimiento porque las lentes están protegidas por el tubo.

### 2.2. El Reflector

Conocido también como telescopio Newtoniano, fue construido en 1668 por Isaac Newton. Está compuesto por un espejo primario (cóncavo) en el que la luz se refleja hacia el otro extremo del tubo, donde se sitúa un espejo secundario (plano) que direcciona los rayos hacia un lado del tubo, lugar del ocular. Como el objetivo (espejo primario) del reflector es parabólico, el problema de la aberración cromática se soluciona puesto que todos los rayos de luz se concentran en un solo punto del plano focal.

Isaac Newton sospechaba que la luz blanca se componía de un espectro de colores y que la aberración cromática era justamente resultado de esta sospecha. Las lentes de un telescopio refractor se comportan como un prisma que refracta la luz en diferentes longitudes de onda (colores). Así que, si en

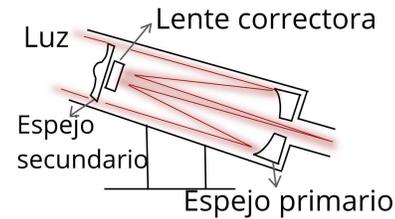


FIG. 4.— Partes generales de un telescopio catadióptrico.

vez de utilizar lentes se utiliza un espejo curvo, esta aberración cromática desaparece. Es de esta manera que Newton comprueba satisfactoriamente su idea. El telescopio Newtoniano le permitió observar las lunas Galileanas de Júpiter y la fase creciente de Venus.

Además de solucionar el problema de la aberración cromática, el telescopio Newtoniano es mucho más compacto y menos costoso. Se puede tener a la vez una abertura amplia y un tubo corto. Sin embargo, se presenta otro tipo de aberración que produce una imagen alargada, como un cometa, en los bordes del campo de visión. Además, debido al transporte del telescopio, los espejos puede quedar desalineados, por lo que conviene realizar una colimación cada vez que se lo monta. Por último, la posición del ocular puede no situarse en lugares cómodos para el observador, esto implicaría la necesidad de una escalera para observar a través del ocular.

Los telescopios Newtonianos son más apropiados para observar objetos de poca intensidad como galaxias, nebulosas y cúmulos estelares. Son instrumentos de mayor cuidado y mantenimiento.

### 2.3. El Catadióptrico

En un sistema catadióptrico, reflexión y refracción se combinan para formar una imagen con menos aberraciones. La luz ingresa a través de una lente correctora y se dirige hacia un espejo primario esférico, donde se refleja y llega a un espejo secundario. Por último, la luz o la imagen se refleja en el secundario y sale por el ocular, situado en la parte trasera del telescopio.

La ventaja de un catadióptrico es que permite observar planetas, así como objetos de cielo profundo e incluso realizar observación terrestre. A pesar de que su costo es mayor, el catadióptrico es más popular puesto que además de las ventajas en la observación, es un instrumento mucho más compacto y duradero.

## 3. ÓPTICA

La óptica es una rama de la física que estudia el comportamiento de la luz, sus características y manifestaciones como la reflexión, refracción, difracción, interferencias, la formación de imágenes y la interacción entre luz y materia. Al describir los telescopios hemos hablado de lentes cóncavas, aumento, plano focal o foco, espejos, reflexión y refracción. Vamos a describir brevemente cada uno de estos conceptos para entender mejor el funcionamiento del telescopio.

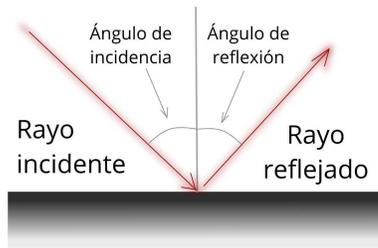


FIG. 5.— Reflexión de la luz.

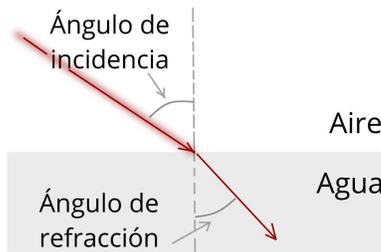


FIG. 6.— Refracción de la luz.

### 3.1. Manifestaciones

**Reflexión.** Cuando la luz llega a una superficie de un material, parte de la luz incidente se refleja y la otra parte se absorbe en el material. La Ley de Reflexión indica que el ángulo de incidencia de un rayo de luz es igual al ángulo de reflexión. Usualmente, el ángulo se mide respecto a una línea perpendicular a la superficie reflectora; como se observa en la figura 5. Si la superficie donde se refleja es opaca y está muy bien pulida, existe solamente reflexión y no absorción. Esta superficie es un **espejo**.

**Refracción.** Cuando un haz de luz incide sobre un material, puede pasar de un medio a otro desviándose con un ángulo dependiente de las propiedades de los medios y del ángulo incidente.

Se experimenta la refracción cuando observamos el lápiz torcido dentro de un vaso con agua, o cuando parece que un pez está más cerca de la superficie del agua e incluso, algo aumentado de tamaño.

Vamos a definir el índice de refracción de un medio como la razón entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio:

$$n = \frac{c}{v}$$

La Ley de Snell para la refracción entre dos medios en general tiene la siguiente expresión:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2,$$

donde los ángulos siempre se miden respecto a la vertical. El índice de refracción para el vacío es 1.

Los prismas o lentes refractan los rayos de luz que les llegan. Pueden tener diversas formas y hacer que los haces refractados converjan o diverjan en el nuevo medio.

### 3.2. Espejos

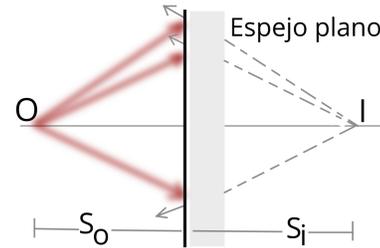


FIG. 7.— Espejo plano.

**Espejo plano.** Si extendemos los rayos reflejados hacia la parte posterior del espejo, todos coincidirán en un punto “detrás del espejo” donde se formará la imagen I. La distancia ( $S_i$ ) de la imagen I es la misma distancia ( $S_o$ ) del objeto O, que está delante del espejo.

Por la experiencia cotidiana sabemos que al mirarnos al espejo, nuestra imagen no se modifica en cuanto a altura. Esto quiere decir que el aumento del objeto es 1. Tenemos la ecuación general:

$$M \equiv \frac{\text{altura de la imagen}}{\text{altura del objeto}} = \frac{h'}{h}$$

Pero, lo que sí observamos es que si levantamos nuestro brazo derecho, la imagen levanta su brazo izquierdo, así que para espejos planos decimos que:

- la distancia de la imagen detrás del espejo es igual a la distancia del objeto delante del espejo.
- la imagen se forma detrás del espejo, es virtual y no se invierte.
- la imagen no se magnifica.
- la imagen se invierte de atrás hacia adelante.

*Ejemplo 1.* Se coloca un foco a 25 cm de un espejo plano. ¿A qué distancia del espejo se encuentra la imagen?

*Solución.* Como la condición es  $s_o = -s_i$ , la imagen se sitúa a  $s_i = -25$  cm. Interpretando, la imagen está detrás del espejo por el signo negativo y a la misma distancia del objeto.

*Magia en la clase 1.* ¿Puede el profesor levitar? ¿Qué está sucediendo? ¿Puede Ud. mejorar estos trucos de “magia” y sorprender a sus estudiantes? Consiga un espejo y colóquese como en las imágenes, dará la impresión de estar flotando.

*Magia en la clase 2.* ¿De dónde vienen las imágenes? Junte dos espejos planos de modo que formen un ángulo recto y observe su reflejo...o reflejos?

Cuando un objeto se coloca frente a dos espejos perpendiculares entre sí, se forman tres imágenes. Como son dos espejos, se forman dos imágenes ( $I_1, I_2$ ) detrás de cada uno, la tercera imagen  $I_3$  corresponde a la imagen  $I_1$ .

Los espejos pueden ser curvos también. Estos espejos se caracterizan por tener un radio de curvatura  $R$  y un centro de curvatura  $C$  situado en un punto sobre el eje principal que pasa perpendicular al espejo. En

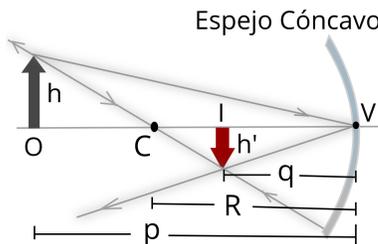


FIG. 8.— Espejo curvo cóncavo.

un espejo curvo, los tamaños y las distancias entre objeto e imagen ya no son iguales como en el espejo plano.

**Espejo curvo cóncavo.** Es un espejo donde la luz se refleja en la superficie cóncava interior. Cuando un objeto O de altura  $h$  está fuera del centro de curvatura C, la imagen I formada por el espejo cóncavo se ubica sobre el eje principal a distancia  $q$  del vértice V del espejo. Esta imagen puede tener una altura diferente  $h'$ . La magnificación está definida por la misma ecuación que presentamos en el espejo plano:

$$M \equiv \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p},$$

donde  $p$  es la distancia entre el vértice del espejo y la posición del objeto.

Si conocemos el radio de curvatura del espejo, podemos determinar el lugar donde se formará la imagen mediante la ecuación del espejo:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$

Los rayos luminosos provenientes de un objeto distante que se reflejan en un espejo cóncavo pasan por el punto focal  $F$ . La longitud focal de un espejo está dada por:  $f = R/2$ .

Así, la ecuación del espejo puede expresarse en función de la longitud focal:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

**Ejemplo 2.** Un objeto se coloca a 40 cm de un espejo esférico cóncavo de 30 cm de radio. ¿A qué distancia del espejo se forma la imagen?

**Solución.** Como datos tenemos  $p = 40$  cm,  $R = 30$  cm y queremos hallar  $q$ . De la ecuación del espejo, resolvemos para  $q$ .

$$q = \frac{120}{5} \text{ cm} = 24 \text{ cm}.$$

Interpretando, el signo positivo indica que la imagen es real, es decir está frente al espejo. Podemos obtener la magnificación mediante la ecuación:  $M = -q/p$ . Entonces,  $M = -0.6$ . El signo negativo indica que la imagen está invertida y el valor implica que la imagen se reduce al 60%.

**Problema 1.** Un objeto está a 25 cm de un espejo cóncavo. La imagen real está a 50 cm. ¿Qué radio tiene el espejo? **Resp.** 33.3 cm.

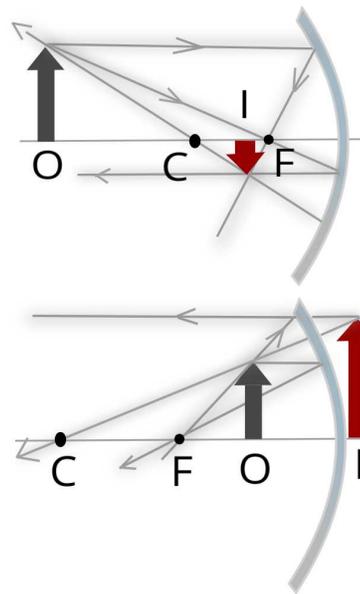


FIG. 9.— Rayos de luz que atraviesan un espejo cóncavo.

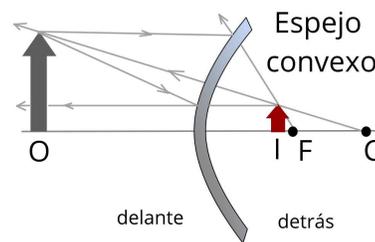


FIG. 10.— Rayos de luz que atraviesan un espejo convexo.

**Problema 2.** Suponga que un espejo cóncavo tiene una longitud focal de 10.0 cm. Encuentre la ubicación de la imagen para distancias al objeto de (a) 25.0 cm, (b) 10.0 cm y (c) 5.00 cm. Interprete el resultado calculando además el aumento. **Resp.** (a) 16.7 cm, (b)  $\infty$ , (c)  $-10.0$  cm.

**Espejo curvo convexo.** Es un espejo en el que la luz se refleja sobre la superficie convexa exterior. También se conoce como espejo divergente puesto que los rayos que inciden sobre él divergen después de la incidencia. Las ecuaciones son las mismas para el aumento, la longitud focal y la ecuación del espejo. La convención de signos es: negativa si la imagen está detrás del espejo, positiva si está delante, positivo el aumento para una imagen de pie y negativo el aumento para una imagen invertida. Además, la longitud focal de un espejo convexo es negativa.

**Ejemplo 3.** Un objeto se coloca a 35 cm de un espejo esférico convexo de 20 cm de radio. ¿A qué distancia se forma la imagen?

**Solución.** Si  $p = 35$  cm,  $R = -20$  cm, entonces resolvemos para  $q$ . Utilizando la ecuación del espejo, resolvemos para:

$$q = -\frac{70}{9} \text{ cm} = -7.7 \text{ cm}.$$

Interpretando, la imagen formada es virtual

porque está detrás del espejo y el aumento  $M = -q/p = 0.22$  nos dice que la imagen está de pie y se reduce al 22%.

**Problema 3.** Un objeto de 3.00 cm de altura se sitúa a 20.0 cm de un espejo convexo que tiene una longitud focal de 8.00 cm. Encuentre (a) la posición de la imagen final, y (b) el aumento. **Resp.** -5.71 cm, 0.286.

### 3.3. Lentes

Una lente se puede considerar como un conjunto de bloques y prismas que refractan los rayos de luz. Claro que al fabricar una lente, no se utilizan diferentes piezas, sino que piezas de vidrio son talladas, generalmente de forma esférica.

Como una lente tiene dos superficies, tiene dos centros de curvatura, dos distancias focales o focos y un eje principal.

Se consideran dos tipos de lentes:

**Lentes convergentes.** Tienen dos superficies convexas y cuando los rayos paralelos de luz inciden sobre una lente convergente, los rayos refractados coinciden en un punto, denominado el punto focal o foco. Un telescopio refractor contiene estas lentes convergentes o biconvexas. Otro ejemplo es la lupa, con la que la imagen es aumentada, está derecha y se la ve más lejos que el objeto mismo, cuando éste está dentro del foco.

En cambio, si el objeto está muy lejos, mediante una lente convergente se observa una imagen invertida. Esto último puede aprovecharse para proyectar películas y transparencias en una pantalla o para observar objetos celestes mediante el telescopio.

**Lentes divergentes.** Tienen dos superficies cóncavas y cuando los rayos inciden sobre ella, se refractan sin coincidir en un punto, es decir, divergen. Una lente divergente forma una imagen virtual, derecha y más pequeña que el objeto real, por ejemplo las lentes “buscadoras” de las cámaras fotográficas. Otra aplicación se encuentra en las lentes para corregir la miopía. Las personas con miopía ven imágenes borrosas si los objetos están lejanos porque la imagen se forma antes de la retina, esto es corregido con las lentes divergentes.

Para lentes delgadas, la ecuación que se utiliza en lentes es la misma para espejos, de igual forma con el aumento. La convención de signos es que la distancia focal es negativa si se trata de una lente divergente y positiva para una lente convergente. La posición del objeto y de la imagen siguen la misma convención que de los espejos.

**Ejemplo 4.** Una lente convergente de 10.0 cm de longitud focal forma una imagen de un objeto situado a (a) 30.0 cm, (b) 20.0 cm, y (c) 5.00 cm de la lente. Encuentre la distancia a la imagen y su aumento.

**Solución.** Datos son: la distancia focal  $f = 10.0$  cm,  $p = 30.0$  cm,  $p = 20.0$  cm, y  $p = 5.00$  cm. Queremos calcular la posición de la imagen  $q$  y el aumento  $M$ . Aplicamos las ecuaciones de lentes delgadas y del aumento:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f},$$

$$M = -\frac{q}{p}.$$

(a) Resolviendo para  $q$  obtenemos:  $q = 15.0$  cm. Su aumento es de  $M = -0.5$ . Interpretamos que la imagen se forma delante de la lente, es real, está invertida y se reduce a la mitad.

(b) Obtenemos:  $q = \infty$  y un aumento de  $M = \infty$ . Interpretamos que como el objeto se sitúa en el foco de la lente convergente, entonces la imagen se forma en el infinito. No se ve.

(c) Obtenemos la distancia:  $q = -10.0$  cm y un aumento de  $M = 2.0$ . El signo negativo de  $q$  indica que la imagen es virtual y por el aumento decimos que incrementa su tamaño al doble, además el signo del aumento nos indica que la imagen está de pie.

**Ejemplo 5.** Una lente divergente tiene una longitud focal de -20.0 cm. Un objeto de 2.00 cm de altura se pone a 30.0 cm frente al lente. Localice la posición de la imagen, el aumento y la altura de la imagen.

**Solución.** Nuestros datos son:  $f = -20.0$  cm,  $h = 2.0$  cm y  $p = 30.0$  cm. Queremos calcular  $q$ ,  $M$  y  $h'$ . Por la ecuación de lentes delgadas resolvemos para la posición de la imagen, obteniendo  $q = -12.0$  cm, con un aumento de  $M = 0.4$  y la altura  $h' = 0.8$  cm. Interpretando los resultados, decimos que la imagen es virtual por  $q < 0$ , está invertida por  $M < 0$  y de 2.0 cm de altura se reduce a 0.8 cm.

**Problema 4.** Una lente convergente tiene una distancia focal de 20 cm. Se coloca un objeto a 11 cm, a 30 cm, y a unos 60 cm de la lente. ¿Qué amplificación lateral tiene la imagen, en cada caso? Interprete los resultados. **Resp.** 2.2, -2, -0.5.

**Problema 5.** Resolver el problema 4 para una lente divergente. **Resp.** 0.64, 0.4, 0.25.

## 4. RESOLUCIÓN

La resolución óptica o el poder de resolución se refiere a la capacidad del telescopio de mostrarnos una imagen nítida cuando se observan dos objetos muy cercanos. Por ejemplo, si de noche vemos un automóvil a lo lejos, veríamos que sus luces frontales forman una sola fuente de luz y pensaríamos que es más bien una motocicleta. Solo a medida que se acerca, podremos distinguir dos fuentes de luz y que se trata de un automóvil. Lo mismo sucede con las estrellas, especialmente, con aquellas que están muy cerca entre sí. Si nuestro telescopio no tiene una buena resolución, veremos a las dos estrellas como una sola.

Entonces, a la hora de adquirir un telescopio, lo que queremos es que tenga un poder de resolución aceptable. Para lograr esto, se incrementa la abertura de la lente. En astronomía, es importante tener imágenes de alta resolución para estudiar los detalles, por ejemplo, de la superficie de un planeta, o los detalles de una galaxia distante, o como se había mencionado antes, distinguir entre una estrella simple de un sistema binario de estrellas.

La resolución de un telescopio se puede calcular utilizando una expresión matemática que proviene

de una aproximación en lo que se llaman las “funciones de Bessel” del criterio de Rayleigh. Este criterio especifica la mínima separación entre dos fuentes de luz. En óptica, las fuentes de luz que atraviesan una lente circular, están limitadas por la difracción de la luz. La difracción se caracteriza por un patrón de regiones claras y oscuras. La parte clara y central de este patrón se denomina “disco de Airy”, cuyo diámetro está relacionado con la longitud de onda de la luz  $\lambda$  y el diámetro de la abertura de la lente  $D$ . Esta separación angular o poder de resolución está definida así,

$$\theta_{min} \cong 1.22 \frac{\lambda}{D},$$

De esta manera, observamos que a mayor diámetro, menor el ángulo, lo que implica una mejor resolución. Por otro lado, si la longitud de onda es corta como el azul, entonces tenemos mejor resolución.

El poder de resolución se mide en radianes. A continuación, algunas conversiones:

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.3^\circ$$

$$1^\circ = 60' = 60 \text{ min de arco}$$

$$1 \text{ min} = 60'' = 60 \text{ seg de arco}$$

*Ejemplo 6.* El Gran Telescopio Canarias de 10.4 m de diámetro, opera en longitudes de onda ópticas (0.00006 cm). ¿Cuál es la máxima resolución en microradianes y en milisegundos de arco?

*Solución.* Necesitamos que las unidades de medida sean las mismas. Así que el diámetro es  $D = 10.4 \text{ m} = 1040 \text{ cm}$ . Mediante la ecuación para la resolución, hallamos

$$\theta_{min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

$$\theta_{min} = 1.22 \frac{0.00006}{1040}$$

$$R = 0.00000007 \text{ rad}$$

Multiplicamos ( $\times 10^6$ ) para que esté en microrads:

$$R = 0.07 \text{ microrads}$$

Multiplicando R en rads por

$$\times 57.3^\circ \times 3600'' \times 1000$$

obtenemos el resultado en:

$$R = 14 \text{ miliseg de arco}$$

*Ejemplo 7.* Para una longitud de onda en el visible de  $\lambda = 530 \text{ nm}$ , compare la resolución de un par de binoculares ( $D = 50 \text{ mm}$ ) y de un telescopio pequeño ( $D = 200 \text{ mm}$ ). Los resultados expéselos en segundos de arco.

*Solución.* Vamos a uniformizar las unidades a mm. Entonces, la longitud de onda en el visible es  $\lambda =$

$530 \times 10^{-6} \text{ mm}$ . El poder de resolución de los binoculares es  $R = 2.7$  segundos de arco. Para el telescopio pequeño de  $D = 200 \text{ mm}$  de diámetro, su resolución es de  $R = 0.67$  segundos de arco. Se nota que el telescopio de mayor abertura ofrece mejor resolución.

*Ejemplo 8.* El telescopio espacial Hubble tiene un diámetro de 2.4 m. Para la misma longitud de onda del ejemplo anterior, ¿cuál es su máxima resolución?

*Solución.* Datos:  $D = 2400 \text{ mm}$ . Así, la resolución del telescopio espacial Hubble es  $R = 0.06$  segundos de arco.

*Problema 6.* Un astrónomo quiere diseñar un sistema que le permitirá estudiar los cráteres en la Luna que tienen alrededor de 0.1 segundos de arco de diámetro vistos desde la Tierra. ¿Cuál es el tamaño mínimo de la abertura que necesita para realizar su estudio, si la longitud de onda es 535 nm? **Resp.** 1346 mm

*Problema 7.* Una astrónoma quiere diseñar un telescopio infrarrojo con una resolución de 1 segundo de arco para una longitud de onda de 20  $\mu\text{m}$ . ¿Cuál debería ser el diámetro del espejo? **Resp.** 5.1 m

## 5. GANANCIA DE LUZ Y AUMENTO

Un telescopio suele estar equipado con un juego de lentes de aumento. Con estas lentes, el telescopio tiene mayor potencia, es decir, que nos acerca más al objeto. Por ejemplo, si queremos ver un objeto que está a 100 m como si estuviera a 10 m, utilizaríamos la lente de 10x de aumento. Lo que se hace es dividir la distancia del objeto entre el aumento de la lente (100/10). El aumento es el incremento aparente del tamaño angular. Está dado por

$$M = -\frac{q}{p},$$

ecuación que habíamos visto anteriormente en la Sec. 3.

Por otra parte, una característica del telescopio es la ganancia de luz. La ecuación de la ganancia de luz está dada por:

$$g.a. = \left( \frac{D_{\text{objetivo}}}{D_{\text{pupila}}} \right)^2$$

Por ejemplo, un telescopio con 70 mm de abertura sobre la abertura del ojo humano de más o menos 7 mm, ofrece una ganancia de 100. Esto permitiría observar estrellas que se ven muy tenues a simple vista. Evidentemente, existen otros factores que afectan a esta ganancia como los efectos de reflexión, de dispersión y de absorción de la luz. Además de la longitud de onda de la luz incidente. Normalmente, los telescopios tienen una transmisión de luz del 80%.

## 6. GALILEO

Galileo Galilei fue el primer científico italiano que desarrolló las bases del abordaje científico que se utiliza en cualquier proyecto de investigación actual. Mediante los experimentos que realizó y la aplicación de la matemática, estudió las leyes del movimiento y realizó varios descubrimientos que

pusieron en duda el dogma impuesto sobre la geocentricidad.

Galileo nació un 15 de febrero de 1564, en Pisa, Italia. Su padre, Vincenzo Galilei, fue músico y obligó a su hijo a estudiar medicina. Si bien Galileo, en realidad, quería ser sacerdote, ingresó a la Universidad de Pisa, en 1581, para estudiar medicina y matemáticas. Después de cuatro años de estudio en la universidad, Galileo, a sus 21 años, dejó la universidad y trabajó dando clases de matemática, de manera particular primero, y luego en la Universidad de Pisa. Cuando su padre falleció, en 1591, Galileo se convirtió en el principal proveedor de la familia.

Debido a su innata curiosidad como científico, realizó estudios sobre la balanza hidrostática, los planos inclinados, la caída libre, el movimiento parabólico y el péndulo para medir incrementos de tiempo. En 1609, Galileo se enteró de la invención de un instrumento que permitía observar objetos lejanos y en el transcurso de un mes, lo convirtió en un instrumento para observar los cielos. De esa manera, Galileo observó que Júpiter tenía lunas que giraban a su alrededor, que la Luna tenía montañas, que el Sol presentaba manchas y que Venus tenía fases como nuestra Luna. Incluso, observó que Saturno parecía ser un planeta con “orejas”.

1609 es el año en que Galileo revolucionó la astronomía, abriendo una nueva ventana hacia el estudio del Universo, mediante “dos pedacitos de vidrio” ajustados en un tubo. Posteriormente, el telescopio fue evolucionando. Al darle mayor longitud se obtenían mejores imágenes. Por ejemplo, Saturno ya no era un planeta con orejas, sino un planeta con anillos. Todas las observaciones iniciales de Galileo, sirvieron de sustento para el modelo heliocéntrico, ganándose enemistades en la Iglesia y finalmente, siendo víctima de las injusticias de los prejuicios santificados. Murió bajo arresto domiciliario en 1642, en Toscana.

Todos los estudios de Galileo, su producción bibliográfica y su actitud como científico son dignos de admiración. No por nada, es denominado como el “padre” del método científico.

## 7. CUESTIONARIO

### 1. ¿Cuáles son los principales tipos de telescopio?

El refractor, el reflector, y el catadióptrico.

### 2. ¿Cuál es la diferencia entre reflexión y refracción?

En la reflexión, el haz de luz incidente sobre una superficie es reflejado, como en un espejo.

En la refracción, el haz de luz pasa de un medio a otro sufriendo una desviación, como un lápiz que se ve aparentemente “torcido” en un vaso con agua.

### 3. ¿En qué se diferencia un telescopio refractor y reflector?

El telescopio refractor utiliza lentes, normalmente es largo y sirve para realizar observaciones terrestres, planetas, la Luna y algunas estrellas binarias.

El reflector utiliza espejos, es más compacto y sirve

para observar objetos de poca intensidad como galaxias, nebulosas y cúmulos estelares.

### 4. ¿En qué consiste el aumento en un telescopio?

El aumento del telescopio es una razón entre la altura de la imagen y la altura del objeto, o la razón entre la longitud focal de la imagen y la longitud focal del objeto. Las lentes adicionales que tiene un telescopio se caracterizan por su aumento, que está representado, por ejemplo, por 10x. Esto significa que si el objeto está a 100 m y utilizamos esta lente, observaríamos al objeto como si estuviera a 10 m.

### 5. ¿Qué es la resolución de un telescopio?

Es la capacidad de distinguir dos objetos muy cercanos. Si el telescopio no tiene un poder de resolución aceptable y apuntamos hacia una estrella binaria, la veríamos como una sola. Incrementando el poder de resolución podemos distinguir los detalles del objeto.

## 8. CONCLUSIONES

El telescopio permite observar los objetos celestes gracias a las leyes básicas de óptica. En esta rama de la física, se estudian las características de lentes y espejos. Las lentes refractan la luz así como un prisma lo hace y los espejos reflejan las imágenes. Dependiendo de la forma de las lentes y los espejos, las imágenes pueden aumentar de tamaño, reducirse, invertirse o formarse en el infinito.

En un telescopio, las dos lentes se sitúan de modo que se forma una imagen real e invertida cerca del punto focal del ocular. Las dos lentes, que normalmente son biconvexas, están separados por una distancia  $f_{obj} + f_{ocular}$  que corresponde a la longitud del tubo del telescopio. Luego, el ocular forma una imagen invertida y más grande que la primera imagen.

El aumento tiene importancia para observar objetos como el Sol, la Luna o planetas, pero las estrellas lejanas seguirán viéndose como simples puntos de luz. A menos que se construyan telescopios de gran apertura que permitan el ingreso de una mayor cantidad de luz. La desventaja es que construir espejos o lentes de diámetros grandes es muy costoso y complicado. Por lo tanto, la elección de un telescopio depende de lo que se quiere observar y el presupuesto con el que se cuenta.

Desde las observaciones de astrónomos aficionados hasta las obtenidas por los grandes telescopios del mundo, todas han resultado de estos conceptos de óptica. La necesidad de conocer aún más el Universo ha llevado incluso a posicionar telescopios fuera de la Tierra, como el Hubble, que en 1995 obtuvo por vez primera la imagen de un Universo joven de hace 1300 millones de años.

Nuestra fascinación por los cielos y nuestra curiosidad nos llevará a desarrollar la tecnología necesaria para colmar nuestras inquietudes sobre el Universo en el que vivimos. Es solamente cuestión de tiempo.

El contenido de esta revisión bibliográfica ha sido obtenida de las referencias que se citan a continuación. Se pueden revisar las páginas web: Gil (2016), Navarro (2016), Exploratorium (2018), Sci-

ence Facts (2018), Hernáez (2017), Berner (2015), School bag (2014), American Association of Physics Teachers (2012), Terratec S.R.L. (2018), Spacemath NASA: Equation (2018), Spacemath NASA: Resolution (2018), TelescopeOptics: Resolution (2018), TelescopeOptics: Functions (2018), Nagler (2018), PBS & WGBH Educational Foundation (2018).

Si desea un estudio más formal de la óptica referirse a Young & Freedman (2009), Serway (1997), Resnick (1994), Beltrán & Braun (1977).

Un excelente complemento conceptual es Hewitt (2007) y las guías de astronomía: Ridpath (2007),

Atlas de Astronomía (1994).

#### AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dr. Martín Subieta, Lic. Gonzalo Pereira, Daniela Ochoa, Dr. Santiago Conde, Lic. Rubber Muñoz y al Dr. Diego Sanjinés por la revisión detallada y las pertinentes observaciones para mejorar el texto.

Además, reconocer la colaboración y el auspicio de la empresa Terratec S.R.L.: Astronomía y Ciencia Experimental para concretar este proyecto.

#### Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

#### REFERENCIAS

- Gil Andani, I. (2016), *Astronomylab*. <http://www.astronomylab.net>.
- Navarro Díaz, I. (2016), *Tipos de telescopios, accesorios ópticos e instrumentación*. <https://neutron.blogspot.com>.
- Exploratorium. (2018), *Science Snacks*. <https://www.exploratorium.edu>.
- Science Facts. (2018), *Diverging Lens*. <https://www.sciencefacts.net>.
- Hernáez, S. (2017), *Cómo funciona un telescopio*. <https://www.aboutespañol.com>.
- Berner, B. (2015), *The Laboratory for Research on the Structure of Matter. It's all smoke and mirrors: The Physics of Images*. <https://www.lrsm.upenn.edu>.
- School Bag. Ministry of Education, Singapore. (2014), *Magic or Science? The classroom comes alive!*. <https://www.schoolbag.sg>.
- American Association of Physics Teachers. (2012), *High School Photo Contest Top 100 Gallery*. <https://www.aapt.org>.
- Terratec S.R.L. (2018), *Astronomía y Cs. Experimental*. <http://www.terratec.com.bo>.
- Spacemath NASA (2018), *The most important equation in astronomy*. <http://www.spacemath.gsfc.nasa.gov>.
- Spacemath NASA (2018), *Telescope Resolution*. <http://www.spacemath.gsfc.nasa.gov>.
- TelescopeOptics.net (2018), *Telescope Resolution*. [www.telescope-optics.net](http://www.telescope-optics.net).
- TelescopeOptics.net (2018), *Telescope Functions*. [www.telescope-optics.net](http://www.telescope-optics.net).
- Nagler, A. (2018), *How to choose your telescope magnification*. [www.skyandtelescope.com](http://www.skyandtelescope.com).
- PBS & WGBH Educational Foundation. (2018), *Galileo: Timeline of his life*. [www.pbslearningmedia.org](http://www.pbslearningmedia.org).
- Young, H. D. & Freedman R. A. (2009), *Física Universitaria, con física moderna 2*, Peason Educación.
- Serway, R. A. (1997), *Física Tomo II*, McGraw-Hill Interamerican Editores, S.A. de C.V.
- Resnick, R. Halliday, D. Kenneth, S. K. (1994), *Física Vol 2*, Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V.
- Beltrán, V. & Braun, E. (1977), *Principios de Física* Curso de Introducción, Editorial Trillas.
- Hewitt, P. G. (2007), *Física Conceptual*, Pearson Educación.
- Ridpath, I. (2007), *Guía Ilustrada: Astronomía*, Jorge Zahar Editor Ltda.
- V. V. A. A. (1994), *Atlas de Astronomía: Descubrir el Universo*, Cultural S.A. de Ediciones.





---

## REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

### COMITÉ EDITORIAL

#### Sociedad Boliviana de Física

**Lic. Alfonso Velarde Chávez**

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

#### Instituto de Investigaciones Físicas

**Dr. Marcelo Ramírez Ávila**

Email: mravila@fiumsa.edu.bo

#### Carrera de Física

**Dr. Armando R. Ticona Bustillos**

Email: aticona@fiumsa.edu.bo

**M.Sc. Elba J. Colque Zacarías**

Email: jhabaelba@gmail.com

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

---

#### Misión

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica semestralmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

#### Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

#### Instrucciones para los autores

La Revista Boliviana de Física recibe trabajos escritos en castellano, inglés o portugués y deben contar con un resumen en castellano y su correspondiente traducción en inglés.

Los autores deberán enviar sus trabajos preferentemente en los formatos  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$ , *MS Word*, o *sólo texto* (con extensiones *.tex*, *.doc* y *.txt*, respectivamente), ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. Las figuras deberán tener una resolución razonable a fin de que puedan ser vistas con suficiente claridad por el lector.

Los artículos científicos serán revisados por el Comité Editorial y posteriormente por un par de árbitros anónimos quienes dan el veredicto sobre si el artículo es aceptado o no.

La comunicación de los autores con los árbitros se realiza únicamente a través del editor encargado del área.

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

Conflicto de interés: Los autores que envíen artículos para su publicación en la RBF admiten que no tienen conflicto de interés en relación a los trabajos realizados y presentados.

## CONTENIDO

### A. ARTÍCULOS

ESTUDIO ANALÍTICO-SIMULADO DE LA EFICIENCIA DE DISPARO DEL ARREGLO SUPERFICIAL DE DETECTORES DEL EXPERIMENTO ALPACA  
*Calle C. & Rivera H.*

A MINIMAL MODEL FOR ELECTRICAL AND GRAVITATIONAL INTERACTIONS IN A CONFINED SYSTEM OF CHARGED SPHERES  
*Sanjines D. & Ghezzi F.*

SACCHAROMYCES CEREVISIAE COMO BIOCATALIZADOR EN CELDAS DE COMBUSTIBLE MICROBIANAS CON FERRICIANURO DE POTASIO  
*Vargas B., Álvarez Aliaga M. T., Ghezzi F. & Ticona-Bustillos A.*

### D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

EL TELESCOPIO: UNA PRIMERA VENTANA AL UNIVERSO