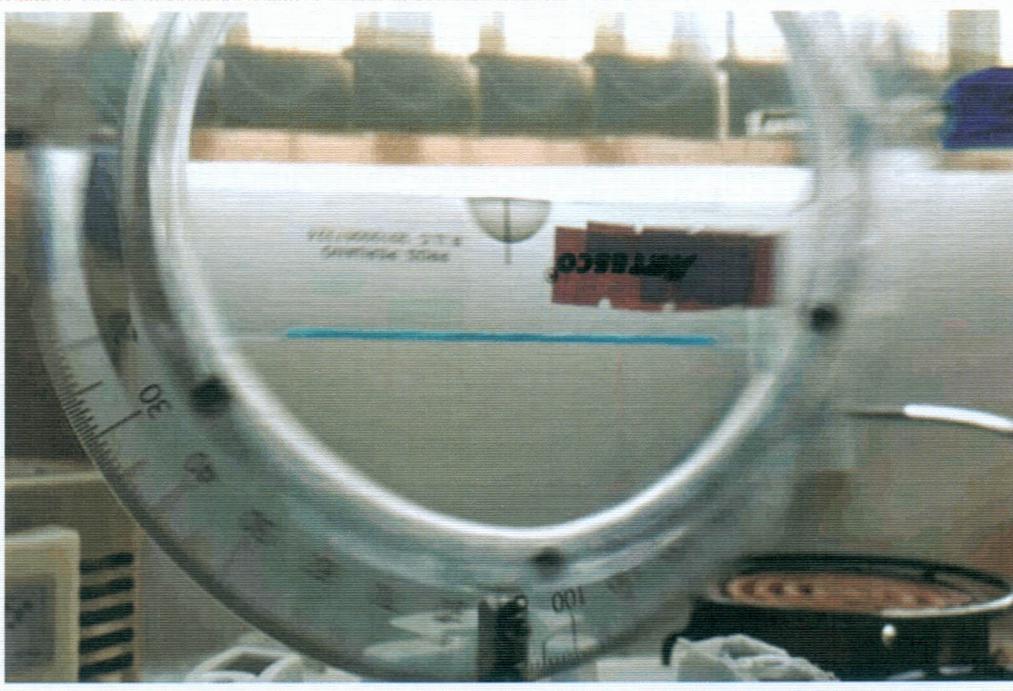


ISSN - 1562 - 3823

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 35

DICIEMBRE 2019 • LA PAZ - BOLIVIA



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA
Ésta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Dr. Flavio Ghezzi Moris

Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos

Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

CONSEJO EDITORIAL

Dr. Oscar Antonio Rondón

Institute of Nuclear and Particle Physics
University of Virginia
McCormick Road, Charlottesville, VA 22901
804 924-6787, USA
Email: or@virginia.edu

Dr. Carlos Navia

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense
Av. Gen. Milton Tavares de Souza
24210-340, Niterói, RJ-Brasil
Email: gfcnoj@if.uff.br

Dr. Jason Alfredo Carlson Gallas

Departamento de Física
Universidade Federal da Paraíba
- 58051-970, João Pessoa
Brasil
Email: jgallas@fisica.ufpb.br

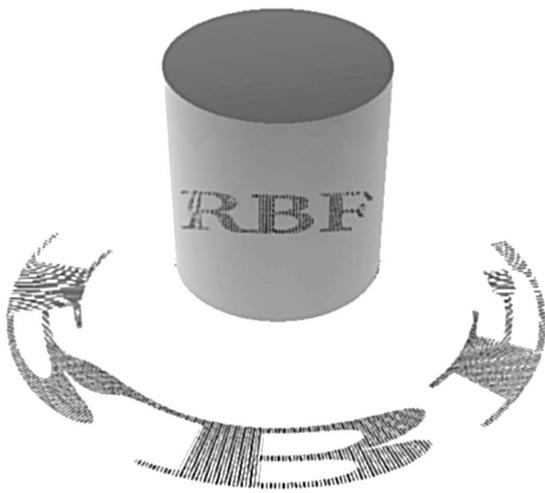
Dr. Paulo Murilho Castro de Oliveira

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense
Av. Gen. Milton Tavares de Souza
24210-340, Niterói, RJ-Brasil
Email: pmco@if.uff.br

Dr. Thadeu Penna

Instituto de Ciências Exatas - Volta Redonda
Universidade Federal Fluminense
INCT - Sistemas Complexos
Av. Gen. Milton Tavares de Souza
24210-340, Niterói, RJ-Brasil
Email: tjpp@if.uff.br

ISSN 1562-3823



Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
Y
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 35
DICIEMBRE DE 2019

Revista Boliviana de Física

ISSN 1562-3823

Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica

<http://www.scielo.org.bo>

<http://www.latindex.unam.mx>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

Diseño: A. Ticona

Dirección: Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.

Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

Portada: Situación atípica de “multiestabilidad” con tres esferas.

Formato $\text{L}^{\text{T}}\text{E}^{\text{X}}2_{\epsilon}$. *Tipo de fuente utilizada:* newcentury

IMPRESO EN BOLIVIA — PRINTED IN BOLIVIA

CONTENIDO

EDITORIAL	<i>Editor</i>	1
-----------	---------------	---

A. ARTÍCULOS

ANÁLISIS DE LA DINÁMICA POBLACIONAL DE CÉLULAS CANCEROSAS, MEDIANTE UN MODELO DE RADIOSENSIBILIDAD <i>Winder A. Canezo-Gómez, Gloria Rodrigo & Gonzalo Marcelo Ramírez-Ávila</i>	5
ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL ARO ROTANTE: NUEVAS EVIDENCIAS DE LA INDEPENDENCIA DE LA MASA Y DE LA EQUIPROBABILIDAD DEL PUNTO DE EQUILIBRIO <i>Lucas Blitz Lozada Gobillard & Gonzalo Marcelo Ramírez-Ávila</i>	15
ESTUDIO CIENCIOMÉTRICO DE LA REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA CON ELEMENTOS DE ANÁLISIS DE REDES COMPLEJAS <i>Verónica Subieta-Frías & Gonzalo Marcelo Ramírez-Ávila</i>	24

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

DEL MOVIMIENTO BROWNIANO A LOS MOTORES BROWNIANOS <i>L. A. Manzaneda Osorio G.</i>	37
---	----

EDITORIAL

Al finalizar 2019 y luego de momentos dramáticos que vivió el país y que sin duda repercutieron en la sociedad pero también en el ámbito académico y científico, tenemos el agrado de presentar otro número de la Revista Boliviana de Física (RBF) que pese a la conflictividad política mencionada anteriormente, puede ver la luz gracias al entusiasmo de los científicos que contribuyen generosamente y que confían los resultados de sus investigaciones a la RBF.

El año 2019, nos deja varios logros a nivel científico en lo que concierne a la física del país. Primeramente, se debe mencionar que los diferentes grupos de investigación en física de las universidades del país van consolidándose y como resultado de ello, la producción científica es cada vez más importante. Por otra parte, la colaboración del grupo de Física Cósmica del Instituto de Investigaciones Físicas (IIF) de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) avanza a paso firme en el montaje correspondiente al proyecto ALPACA con la colaboración de grupos japoneses trabajando en la interesante temática de los rayos cósmicos. También, el grupo de Física de la Atmósfera destaca en los logros a nivel de equipamiento y publicaciones fruto de las importantes colaboraciones con grupos internacionales de renombre. No es menos loable la actividad del grupo de Física de la Materia Condensada que se ha constituido en un referente en cuanto a investigaciones multidisciplinarias y que son de interés para problemas de la realidad boliviana. El grupo de Física Aplicada, se constituye en una ventana de interacción con la sociedad a través de la prestación de servicios. El grupo de Física Teórica destaca por su prolífica producción científica y dentro de este grupo, se debe destacar el entusiasmo del grupo de Dinámica No Lineal y Sistemas Complejos que convirtió al Curso Boliviano de Sistemas Complejos (CBSC) en un evento ya tradicional que alcanzó su XVII versión. Finalmente, este mismo grupo, tuvo el gran desafío de organizar un evento de gran relevancia a nivel latinoamericano y mundial: el Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena (LAWNP) en su XVI versión. El LAWNP tuvo lugar del 22 al 26 de octubre y, a pesar de los momentos de conflictividad política que se vivieron esos días, el evento se desarrolló con normalidad y se cumplieron con todas las actividades previstas. Los participantes provenientes de más de 20 países quedaron muy satisfechos del LAWNP tanto por el nivel científico como organizacional, lo que constituye un gran logro no sólo para el grupo organizador sino para la UMSA como anfitriona de este gran evento en colaboración estrecha con la Escuela Militar de Ingeniería (EMI) en cuyas instalaciones se realizaron la mayoría de las actividades. Al interior de la UMSA, se destaca la participación de la Carrera de Física, el IIF, el Instituto de Investigación Matemática (IIMAT), el Planetario Max Schreier, la Facultad de Ciencias Puras y Naturales tanto a nivel de decanato como centro de estudiantes y el invaluable apoyo del Departamento de Investigación Post-gradó e Interacción Social (DIPGIS). Otras instituciones también prestaron una colaboración decidida para el éxito del LAWNP, entre las cuales se debe mencionar a FUN-DECO, la Asociación Boliviana para el Avance de la Ciencia (ABAC), Artes Gráficas Sagitario, Mi Teleférico, la Agencia Boliviana Espacial (ABE), la Universidad Técnica de Oruro, la Universidad Simón I. Patiño, las Embajadas de Uruguay y Reino Unido, la Fundación Hans Seidel, el Museo Nacional de Etnografía y Folklore (MUSEF), Terratec s.r.l., el Centro Arqueológico Tiwanaku y el Gobierno Autónomo Municipal de La Paz que promovió además la publicación de un artículo en la Revista Municipal de Culturas Khana escrito por Ramírez-Ávila, Oporto-Almaraz *et al.* (2019), todos miembros del grupo de Dinámica No Lineal y Sistemas Complejos.

La entrega número 35 de la RBF contiene tres artículos de investigación científica y una contribución/revisión. El primer trabajo corresponde a una investigación debida a Canezo-Gómez *et al.* (2017) quienes abordan los aspectos relacionados a la acción de las radiaciones ionizantes en poblaciones de células cancerosas, normales y efectoras, situación que ocurre típicamente en tratamientos oncológicos de radioterapia; para este trabajo, los autores consideraron como un aspecto esencial la radiosensibilidad característica de cada tipo de célula. El anterior trabajo es una continuación de los modelos analizados por Ramírez-Ávila (2017) y es el resultado de una colaboración interdisciplinaria entre las Carreras de Física y Biología de la UMSA.

El presente número de la RBF continúa con los resultados de la descripción detallada del aro rotante, un modelo básico de la Dinámica No Lineal debida a Lozada-Gobilard & Ramírez-Ávila (2019). A pesar de su simplicidad, el sistema mencionado en el párrafo anterior, exhibe una gran riqueza dinámica, la cual fue explorada con mucho detalle desde una perspectiva experimental, no solamente considerando una esfera en el aro rotante, sino considerando diferentes números de esferas que permiten corroborar la equiprobabilidad de que las mismas elijan una rama u otra del aro. Además, se reportan también resultados trabajando con diferentes tipos de fluidos lo que le da el carácter de originalidad a esta investigación que vale la pena mencionar, obtuvo el segundo lugar en el concurso de pósteres del LAWNP.

La parte de artículos científicos cierra con un análisis cuantitativo de la RBF durante todos los años de

su historia realizado por Subieta-Frías, & Ramírez-Ávila (2019), para lo cual utilizaron redes complejas para introducir índices que permiten dar cuenta de la diversidad, la colaboración, la productividad e influencia de los países de los autores de la RBF. Este trabajo es una extensión más de las aplicaciones del análisis de redes complejas en sistemas sociales que fue iniciado por Subieta-Frías, & Ramírez-Ávila (2017).

Finalmente, Manzaneda (2019) hace una revisión de cómo generar movimiento en una dirección preferencial a partir del movimiento browniano, implementando potenciales tipo ratchet (matraca) que constituye la base de los motores brownianos de amplia aplicación en problemas biológicos y bioquímicos. El autor da explicaciones del formalismo de ecuaciones diferenciales estocásticas y finaliza describiendo ejemplos de motores moleculares. Se resalta el hecho de que el autor es un excelente estudiante de la Carrera de Física de la UMSA.

Esperamos que el contenido de este ejemplar de la RBF sea de su agrado y pueda motivar al lector en la profundización de los trabajos expuestos a través de estas páginas. También invitamos a la comunidad científica a enviar sus trabajos para ser publicados en la RBF.

REFERENCIAS

- Ramírez-Ávila, G.M., Oporto-Almaraz, S.A., Conde-Saavedra, G., Depickère, S. Bustos-Espinoza, R.O.E., Subieta-Frías, V., Oporto-Almaraz, Z.A., Vera-Hurtado, F., & Santamaría, J. (2019), *Revista Municipal de Culturas Khana*, **60**, 401.
- Canezo-Gómez, W.A., Rodrigo, G., & Ramírez-Ávila, G.M. (2019), *Revista Boliviana de Física*, **35**, 5.
- Ramírez-Ávila, G.M. (2017), *Revista Boliviana de Física*, **31**, 25
- Lozada-Gobilard, L.B., & Ramírez-Ávila, G.M. 2019, *Revista Boliviana de Física*, **35**, 15.
- Subieta-Frías, V., & Ramírez-Ávila, G.M. 2019, *Revista Boliviana de Física*, **35**, 24.
- Subieta-Frías, V., & Ramírez-Ávila, G.M. 2017, *Revista Boliviana de Física*, **31**, 3.
- Manzaneda-Osorio, L.A.(2019), *Revista Boliviana de Física*, **35**, 37.

EDITORIAL

Bringing a close to 2019, and after the dramatic moments of unrest experienced by the country which had repercussions for society including our academic and scientific community, we are pleased to present another issue of the Bolivian Journal of Physics (RBF). This edition is thanks to the enthusiasm of the scientists who have generously contributed and who have entrusted the results of their research to the RBF.

In 2019, there were important national scientific achievements for physics. The increase in scientific production in Bolivia is in great part due to the continued consolidation of research groups in the country's universities. Furthermore, work has started on the set up of the ALPACA project which involves a collaboration between the Cosmic Physics Group of the Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) and Japanese scientific groups. This project is set to generate advances in Cosmic Ray research at an international level. Also, the Atmospheric Physics group stands out for its achievements in building up an impressive range of equipment and for its publications fruit of collaborations with renowned international groups. No less praiseworthy is the activity of the Condensed Matter Physics Group which has established itself as a reference for multidisciplinary research of interest to current Bolivian opportunities and problems. The Applied Physics Group continues as an example for its interaction with society through the provision of services. While, the Theoretical Physics Group is noted for its prolific scientific production and the enthusiasm of its Non Linear Dynamics and Complex Systems Group who have converted the Bolivian Course of Complex Systems (CBSC) in a regular event now in its XVII version. The complex systems group had the challenge of organizing an event of great relevance at a Latin American and global level: The Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena (LAWNP) in its XVI version. LAWNP took place from October 22nd to 26th, during a period of civil unrest and tension. The participants from more than 20 countries were very satisfied with the scientific and organizational skills of LAWNP organizing committee. The event constitutes a great achievement not only for the organizing group but also for UMSA as host in close collaboration with the Military School of Engineering (EMI) in whose facilities most of the activities took place. Within UMSA, of note are the participation of the Physics Department, the IIF, the Institute of Mathematics Research (IIMAT), the Max Schreier Planetarium, the Faculty of Pure and Natural Sciences both at the deanery and student level. The support of the Department of Postgraduate Research and Social Interaction (DIPGIS) was invaluable for the event. Other institutions also provided a strong collaboration for the success of the LAWNP, among which should be mentioned FUNDECO, the Bolivian Association for the Advancement of Science (ABAC), Sagittarius Graphic Arts, Mi Teleférico, the Bolivian Space Agency (ABE), the Technical University of Oruro, the Simón Patiño, University. As well as the Embassies of Uruguay and United Kingdom, Hans Seidel Foundation, the National Museum of Ethnography and Folklore (MUSEF), Terratec s.r.l., the Centro Arqueológico Tiwanaku and the "Gobierno Autonomo Municipal de La Paz" which promoted the publication of an article in the "Revista Municipal de Culturas Khana" written by Ramírez-Ávila, Oporto-Almaraz *et al.* (2019).

The 35th issue of the RBF contains three scientific research articles and a teaching section contribution. The first paper corresponds to research by Canezo-Gómez *et al.* (2017) which addresses aspects related to the action of ionising radiation on normal and effector cells in cancer cell populations, a situation that occurs in oncological radiation therapy treatments. For this paper, the authors considered the characteristic radio sensitivity of each cell type to be an essential aspect. This work is a continuation of the models analysed by Ramírez-Ávila (2017) and is the result of an interdisciplinary collaboration between UMSA's Physics and Biology Departments.

The present issue of the RBF continues with the results of the detailed description of a rotating ring, a basic model of the non-linear dynamics due to Lozada-Gobilard & Ramírez-Ávila (2019). In spite of its simplicity, the mentioned system shows a great richness of dynamics, which was explored in detail from an experimental perspective. Not only was a sphere in the rotating ring considered, but also different numbers of spheres which allowed for corroborating the equi-probability that the spheres chose one branch or the other. In addition, results are also reported in terms of working with different types of fluids, which gives an original perspective to this research. It is also worth mentioning that this work won second place in the LAWNP poster competition.

The scientific articles section closes with a bibliometric analysis of the Bolivian Journal of Physics (RBF) by Subieta-Frías, & Ramírez-Ávila (2019), for which they used complex networks that account for the diversity, the collaboration, the productivity and country of influence of the RBF authors. This paper is a further extension of the applications of the analysis of complex networks in social systems that were initiated by Subieta-Frías, & Ramírez-Ávila (2017).

Finally, Manzaneda (2019), in the physics teaching section, explains how to generate movement in a pref-

erential direction from the Brownian movement, implementing ratchet potentials that constitute the basis of Brownian engines of wide application in biological and biochemical problems. The author explains the formalism of stochastic differential equations and concludes by describing examples of molecular engines. The author is an excellent student of the UMSA's Physics Department.

We hope that the content of this issue of the RBF will be to your liking and that it will motivate the reader to study the works presented on these pages in greater depth. We also invite the scientific community to send their work to be published in the RBF.

REFERENCIAS

- Ramírez-Ávila, G.M., Oporto-Almaraz, S.A., Conde-Saavedra, G., Depickère, S. Bustos-Espinoza, R.O.E., Subieta-Frías, V., Oporto-Almaraz, Z.A., Vera-Hurtado, F., & Santamaría, J. (2019), *Revista Municipal de Culturas Khana*, **60**, 401.
- Canezo-Gómez, W.A., Rodrigo, G., & Ramírez-Ávila, G.M. (2019), *Revista Boliviana de Física*, **35**, 5.
- Ramírez-Ávila, G.M. (2017), *Revista Boliviana de Física*, **31**, 25
- Lozada-Gobilard, L.B., & Ramírez-Ávila, G.M. 2019, *Revista Boliviana de Física*, **35**, 15.
- Subieta-Frías, V., & Ramírez-Ávila, G.M. 2019, *Revista Boliviana de Física*, **35**, 24.
- Subieta-Frías, V., & Ramírez-Ávila, G.M. 2017, *Revista Boliviana de Física*, **31**, 3.
- Manzaneda-Osorio, L.A.(2019), *Revista Boliviana de Física*, **35**, 37.

ANÁLISIS DE LA DINÁMICA POBLACIONAL DE CÉLULAS CANCEROSAS, MEDIANTE UN MODELO DE RADIOSENSIBILIDAD
ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF CANCEROUS CELL POPULATIONS USING A RADIOSENSITIVITY MODEL

WINDER A. CANEZO-GÓMEZ¹, GLORIA RODRIGO², & GONZALO MARCELO RAMÍREZ-ÁVILA³

¹Carrera de Biología, Universidad Mayor de San Andrés.

²Instituto de Biología Molecular y Biotecnología, Universidad Mayor de San Andrés. &

³Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés.

Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota. La Paz - Bolivia

(Recibido 5 de septiembre de 2019; aceptado 27 de noviembre de 2019)

RESUMEN

Este trabajo describe la dinámica poblacional de células cancerosas en interacción con células normales, así como con células efectoras que están relacionadas con la respuesta inmunológica. El modelo se basa en ecuaciones logísticas que describen el crecimiento de las poblaciones de células cancerosas y normales, en las ecuaciones de Lotka Volterra para especies en competencia, incluyendo los efectos de la radiación en ambos tipos de células; finalmente, se utiliza la ecuación de Michaelis-Menten que da cuenta de la interacción entre células cancerosas y efectoras. Los parámetros del modelo están en relación con las interacciones entre los diferentes tipos de células y en particular, sobre los efectos de inactivación de células cancerosas debido a la acción de las normales, además de la transformación de células normales causada por la presencia de las tumorales. En el presente trabajo también consideramos la radiosensibilidad de cada tipo de células. Realizamos un análisis de estabilidad lineal del modelo, determinando proyecciones en tres dimensiones de hiper volúmenes de estabilidad en el espacio de parámetros. El modelo exhibe una gran riqueza dinámica que va desde puntos fijos a comportamientos caóticos. Consideramos varias regiones del espacio de parámetros buscando situaciones que conduzcan a la eliminación de células tumorales por efecto de la radiación, sin modificar o disminuyendo ligeramente la población de células normales. Esta última situación podría constituir una aplicación importante del trabajo, relacionado con un tratamiento eficaz de la radioterapia en pacientes con cáncer.

Código(s) PACS: 87.19.xj – 87.55.Qr – 05.45.Ac

Descriptores: Cáncer – radioterapia – caos de pocas dimensiones.

ABSTRACT

This work describes the population dynamics of cancerous cells when they interact with healthy cells, as well as, effector cells that defend the body in an immune response. The model is based on logistic equations that describe the growth cancerous and healthy cell population. The Lotka-Volterra equation for competitive species includes the radiation effects on both cells and the Michaelis-Menten equation considers the interaction between cancerous and effector cells. The parameters of the model are related to the interactions between the different types of cells. It is crucial to take into account the inactivation of the cancerous cells produced by the action of the other types of cells. On the other hand, it is also essential to consider the transformation of the healthy cells caused by the presence of tumor cells. We also discuss the radiosensitivity of each type of cell. We performed the linear stability analysis of our model, determining stability volumes in several projections of the hypervolume of the parameter space. The model exhibits a great dynamical richness going from fixed points to chaotic behaviors. We took into consideration several regions of the parameter space looking for parameter values leading to the situation in which the radiation tends to eliminate the tumor cells with no or slight modifications on the healthy cells populations. The latter could constitute an essential application for effective radiotherapy treatment.

Subject headings: Cancer – radiotherapy — low-dimensional chaos.

¹wcanezo@fiumsa.edu.bo

²gloriarodrigo@gmail.com

³<http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/>

1. INTRODUCCIÓN

El cáncer refleja alteraciones genéticas de una célula, cuyo crecimiento es diferente a las células vecinas, donde las células cancerosas se multiplican de manera descontrolada como lo señala Menchón (2007), entre otros. El sistema inmunológico, al detectar la proliferación descontrolada de las células cancerosas, segrega sustancias tóxicas para eliminarlas; sin embargo, algunas células del sistema inmunológico mueren en este proceso tal como lo apunta Galach (2003). Así, estas células son reemplazadas por otro lote de células efectoras, que repiten el proceso de manera cíclica como lo mencionan Valle *et al.* (2014). Por otro lado, las células normales interactúan con las células cancerosas y su presencia permite que se inhiban mutuamente, aspecto indicado por de Pillis & Radunskaya (2003) y Kuznetsov *et al.* (1994).

En este caso, es más probable que las células normales imiten la capacidad de multiplicación de las células cancerosas por lo que las células normales vecinas se transforman en cancerosas, como lo establece Menchón (2007). Román (2007) afirma que los diferentes tipos de cáncer, en general son atacados por una combinación de tratamientos como la radioterapia y la quimioterapia. Según Rizo-Potau (2016), la radioterapia afecta el sistema de replicación de las células malignas y según Pinar-Sedeño *et al.* (2004) es utilizada para combatir linfomas y cánceres sólidos, mientras que la quimioterapia utiliza fármacos para eliminar las células cancerosas como lo mencionan Menchón (2007), enfocándose al tratamiento de leucemias y mielomas, según afirman Gómez-Almaguer *et al.* (2010). Por otro lado, según Román (2007), los procedimientos quirúrgicos tienen por objeto extraer las células tumorales.

La radiación actúa de modo que, a mayor dosis, una cantidad más elevada de células cancerosas es atacada. Este tratamiento puede generar complicaciones cuando se irradia una proporción significativa de células sanas como lo indican Calvo & Escude (1985) y Belostotski & Freedman (2005), quienes concluyen que se debe hacer un análisis costo-beneficio en estos casos.

Liu & Yang (2014) presentan un modelo matemático concerniente al tratamiento del cáncer con radioterapia, en el que se analiza la coexistencia de células sanas y cancerosas. Por otra parte, Isea & Lonngren (2015), también estudian un modelo competitivo en el cual se considera la acción de la radiación en el sistema. Asimismo, Itik & Banks (2010) utilizan un modelo dinámico de expansión del cáncer, que incluyen a células de tejido sano, canceroso y células del sistema inmunitario, que conlleva a un comportamiento estrictamente caótico. Por otro lado, Gallas *et al.* (2014) estudian el modelo de crecimiento de cáncer planteado por de Pillis & Radunskaya (2003), clasificando los estados oscilatorios que presenta fases de regularidad y caos.

Por último, se puede mencionar a Ghaffari *et al.*

(2016), que utilizan un sistema de ecuaciones diferenciales para describir la acción de la radioterapia y quimioterapia, examinando la interacción entre células del sistema inmunológico, cancerosas y el agente quimioterapéutico que juega el rol de depredador, sus resultados proponen que el tratamiento debería cambiar la dinámica del cáncer y no solo reducir la población de células cancerosas optimizando el tratamiento tradicional. Existen otros tratamientos como la inmunoterapia y las combinaciones de los diversos tratamientos como lo especifican Castorina *et al.* (2007). Por ejemplo, si la cirugía extirpa el cúmulo de células cancerosas, puede optimizarse sus resultados eliminando su propagación a células sanas utilizando la radioterapia para controlar el crecimiento de las células cancerosas que quedaron en el sistema del individuo, aspectos estos mencionados por Castorina *et al.* (2007).

Luego, para el análisis de este artículo se pretende, describir el comportamiento poblacional de células cancerosas irradiadas, mediante una simulación computacional, de acuerdo a las radiosensibilidades de los órganos afectados. En ese sentido, el trabajo se estructura de la siguiente manera: en la Sec. 2, se explica el estado del arte del problema y los modelos a ser utilizados para el análisis. Las cuencas de atracción obtenidas utilizando el modelo más general se muestran en la Sec. 3, donde también se ilustran series temporales correspondientes a situaciones interesantes provenientes de la inspección de las diferentes cuencas de atracción. Finalmente, en la Sec. 4 se resaltan los resultados más importantes del trabajo y sus implicaciones, así como las perspectivas que se traducirán en la continuación de la investigación teniendo como meta el acercarnos a situaciones más realistas que conduzcan a mejoras en los tratamientos de radioterapia.

2. MÉTODOS

Los modelos que involucran la acción de la radiación sobre conjuntos de células cancerosas y normales deben considerar que el parámetro relacionado con la radiación esté íntimamente ligado con la dosis absorbida y/o con la equivalente, Las ideas iniciales del presente trabajo surgen de los resultados obtenidos por Ramírez-Ávila (2017) donde se plantea el modelo poblacional de células cancerosas, normales y efectoras con base en ideas típicas utilizadas en este tipo de modelos, tales como las ecuaciones logística, de Lotka-Volterra y de Michaelis-Menten, además de introducir un parámetro relacionado con la radiación que afecta, en su forma general, tanto a las células cancerosas como a las vecinas normales. Para poner en contexto el significado de las ecuaciones y los parámetros presentes en las mismas, se describen a continuación los modelos sin y con el término correspondiente a la radiación.

2.1. Modelo sin radiación

Se plantea un modelo de competición de Lotka-Volterra, que permite encontrar un mecanismo de in-

teracción entre dos especies diferentes; en este caso, se tendrá las células malignas o cancerosas $M(t)$, las células sanas o normales $N(t)$ y las células efectoras o pertenecientes al sistema inmunológico $E(t)$. Inicialmente se utilizará el modelo normalizado de Itik & Banks (2010), que presenta la siguiente estructura:

$$\frac{dM}{dt} = c_1 M \left(1 - \frac{M}{k_1}\right) - a_{12}MN - a_{13}ME \quad (1)$$

$$\frac{dN}{dt} = c_2 N \left(1 - \frac{N}{k_2}\right) - a_{21}MN \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c_3 ME}{M + k_3} - a_{31}ME - d_3 E. \quad (3)$$

El primer término de la Ec. (1) está relacionado con el crecimiento logístico de las células cancerosas en ausencia de otras poblaciones celulares. En este caso, la capacidad de carga es k_1 y la tasa de crecimiento es c_1 . La competición entre las células sanas $N(t)$ y las cancerosas $M(t)$, disminuye la tasa de crecimiento de estas últimas. Finalmente, la eliminación de células cancerosas, debida a la acción de las células del sistema inmunológico $E(t)$ es descrita por el término caracterizado por a_{13} .

La Ec. (2) describe la tasa de crecimiento de población de células sanas o normales, donde el primer término está relacionado con el crecimiento logístico, con una capacidad de carga k_2 y tasa de crecimiento c_2 . Se asume que la proliferación de células cancerosas es más rápida que la correspondiente a las células sanas, de modo que $c_1 > c_2$. Además, las células cancerosas inactivan a las células sanas a una tasa a_{21} .

La Ec. (3) da cuenta de la tasa de variación de las células del sistema inmunológico o células efectoras. El primer término describe la estimulación de las células cancerosas sobre el sistema inmunológico, en tanto que el segundo está relacionado con la inactivación de las células del sistema inmunológico por acción de las células cancerosas a una tasa a_{31} . Por último, las células del sistema inmunológico pueden desaparecer de manera natural a una tasa d_E .

Desde el punto de vista biológico existe una variedad de células del sistema inmunológico que se activan ante la presencia de diversos agentes que pretenden afectar a un organismo, si bien su presencia y actividad biológica son diferentes, acá se las considera como si fuesen de un solo tipo, cuya acción es únicamente inactivar las células cancerosas y evitar su proliferación. Por otro lado, se espera que en una situación hipotética en la que las células cancerosas hubiesen sido eliminadas, las células del sistema inmunológico dejarían de actuar en el organismo.

El modelo propuesto considera a las células del sistema inmunológico como linfocitos T citotóxicos (CTL), las Natural Killer NK y se producen como células vírgenes que no muestran respuesta alguna a las células cancerosas; a menos que, se activen por las células portadoras de antígenos (APC) a través de proteínas especializadas llamadas moléculas del complejo principal de histocompatibilidad (MHC) en

presencia de antígenos específicos de tumor, como lo mencionan Abbas *et al.* (2015).

Por simplicidad consideraremos el modelo original obtenido por de Pillis & Radunskaya (2003) que implica un reajuste y adimensionalización del sistema de ecuaciones:

$$\frac{dM}{dt} = M(1 - M) - \sigma_{MN}MN - \sigma_{ME}ME \quad (4)$$

$$\frac{dN}{dt} = \nu N(1 - N) - \sigma_{NM}MN \quad (5)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\varepsilon ME}{M + k_E} - \sigma_{EM}ME - d_E E. \quad (6)$$

Es importante hacer notar que los factores σ , responden a la siguiente interpretación: σ_{xy} = tasa de inactivación de las células x , debidas a las células y . En nuestro caso, σ_{MN} está en relación a la inactivación de las células cancerosas debido a la presencia de las normales; mientras que σ_{NM} está relacionada a la transformación de las células normales en malignas.

2.2. Modelo con radiación

La radioterapia tiene su origen en el concepto de que las células tumorales son más sensibles a la radiación que las normales Bergonié & Tribondeau (1906) y complementada con otras investigaciones como las de Wintz (1938). Así, cuando se quiere emplear un modelo que sea útil en radioterapia, se debe considerar la aplicación de cierta dosis de radiación sobre el sistema, por lo que toma la forma:

$$\frac{dM}{dt} = M(1 - M) - \sigma_{MN}MN - \sigma_{ME}ME - rM \quad (7)$$

$$\frac{dN}{dt} = \nu N(1 - N) - \sigma_{NM}MN - r p N \quad (8)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\varepsilon ME}{M + k_E} - \sigma_{EM}ME - d_E E, \quad (9)$$

donde el factor p , está en relación con la radiosensibilidad normalizada de las células sanas comparada a aquella de las cancerosas $0 < p \leq 1$; en tanto que el coeficiente r , está ligado con la intensidad de radiación recibida por el sistema y por ende con la dosis. Es importante señalar que los parámetros r y p son experimentalmente estimables mediante la determinación de la dosis equivalente (H). Como ya se mencionó anteriormente, las características dinámicas de las células del sistema inmunológico juegan un papel importante para la lucha contra los agentes externos que pudiesen afectar a las células normales, tal como lo señalan de Pillis & Radunskaya (2003).

El análisis del modelo con radiación está sujeto a los coeficientes de las ecuaciones diferenciales que permiten la construcción del espacio de parámetros y sus correspondientes proyecciones que permiten establecer la dinámica del sistema. Los valores apropiados a ser utilizados como valores de los parámetros fueron obtenidos a través de un análisis de estabilidad del modelo, mismo que fue obtenido

por Ramírez-Ávila (2017), donde además se muestran las diferencias entre los modelos con y sin radiación.

Otra forma de estudiar sistemas dinámicos es a través de las denominadas cuencas de atracción que se las define como conjuntos de condiciones iniciales que conducen a un determinado atractor como lo señala Ott (1993) o en situaciones a multiestabilidad, situación referida por Pisarchik & Feudel (2014); es decir, a posibles estados finales diferentes que dependen de las condiciones iniciales. Nos valdremos de esta técnica para explorar condiciones iniciales que conduzcan a situaciones en las que la aplicación de la radiación tenga como resultado la eliminación de las células cancerosas (ver Sec. 3.1). Es así que a partir de las cuencas de atracción obtenidas, se hace un análisis del comportamiento de las poblaciones celulares, variando los parámetros, dentro de las regiones de estabilidad, que permitirá hacer algunas interpretaciones biológicas, referentes al comportamiento de las células cancerosas y las células normales. Por consiguiente, se describirá el comportamiento poblacional de células cancerosas irradiadas, así como los efectos que pueden darse en células vecinas normales, para encontrar la solución óptima, que maximice el efecto nocivo de la radiación sobre las células cancerosas, y minimice su efecto sobre las células normales.

3. RESULTADOS

El análisis de estabilidad realizado por Ramírez-Ávila (2017), permitió determinar las regiones de estabilidad para situaciones en las que se tiene radiación actuando sobre células cancerosas y normales, considerando además que cada uno de estos tipos de células tienen radiosensibilidades diferentes. En este caso, cuando la radiación actúa sobre el sistema (células cancerosas y normales), se obtuvieron cuencas de atracción bajo diferentes criterios: poblaciones finales de células después de un tiempo t (a) cancerosas M , (b) normales N , (c) efectoras E y (d) razón de células cancerosas a normales M/N , como las que se muestran en la Fig. 1.

Obsérvese que la distribución de valores iniciales para las células cancerosas y normales van de cero a uno, mientras que la población inicial correspondiente a las células del sistema inmunológico es de 0.01 y se activa con la presencia de las células cancerosas en el organismo.

Según las gráficas mostradas, los estados finales encontrados en todos los tipos de células están representados por un color determinado de una barra de colores con la escala correspondiente. En el caso particular de la Fig. 1 donde la desaparición de algún tipo de célula es reflejada con el color extremo de valor inferior en la barra de colores (Figs. 1(a), (c) y (d)). El hecho anterior se refleja también por la escala de valores extremadamente pequeña que muestran para estos casos las barras de colores. En otros términos, sin importar las poblaciones iniciales de células normales y cancerosas, se llega al mismo comportamiento poblacional final. Se hace

notar que la resolución de todas las cuencas de atracción mostradas en este trabajo es de 100×100 píxeles.

En los gráficos posteriores solamente se mostrarán las cuencas de atracción correspondientes a una de las poblaciones celulares o en su defecto, a la razón de las poblaciones de células cancerosas y normales. En todos los casos, se considerará un tiempo de 1000 unidades arbitrarias (u.a.) con un paso máximo de 10^{-3} utilizando por simplicidad como método de integración el de Runge-Kutta (4,5) al ser una librería de Octave. El tiempo de integración está en relación con el tiempo de irradiación, el cual a su vez estará en función de la dosis planificada, la cual, dependerá del equipo con el que se esté trabajando. En otras palabras, se llegará a la dosis en el tiempo que dure la sesión de radioterapia. Así por ejemplo, si la sesión dura cinco minutos, este tiempo corresponde a las 1000 u.a. mencionadas anteriormente. Los resultados obtenidos analizando las regiones de estabilidad se describen a continuación.

3.1. Eliminación de células cancerosas

En el entendido que el modelo está pensado en que puede ser generalizado para su uso en situaciones que impliquen irradiar células cancerosas y normales, como ocurre cuando se realiza un tratamiento de radioterapia; el análisis de las cuencas de atracción estará orientado bajo ese enfoque. Así, se puede observar situaciones en las que es conveniente aplicar radioterapia. Los parámetros establecidos dentro de las regiones de estabilidad que conducen a la eliminación de las células cancerosas y que son considerados fijos para obtener las cuencas de atracción son: $\sigma_{ME} = 2.50$, $\nu = 0.60$, $\varepsilon = 3.00$, $k_E = 1.00$, $\sigma_{EM} = 0.20$, $d_E = 0.50$; en tanto los que pueden variar son: σ_{MN} , σ_{NM} , r y p .

De donde la cuenca obtenida está representada en la Fig. 2; en la cual, se puede ver que no importa la población inicial de las células cancerosas, el paciente puede encontrarse en un estado inicial de cáncer o en una fase final, luego del tratamiento, la población final de las células cancerosas es cercana a cero. Sin embargo, la población de células normales sobrevive. Además se observa que la población de células efectoras al final del proceso también se reduce hasta eliminarse, pues su presencia ya no es necesaria al haber desaparecido las células cancerosas. Asimismo, se nota la presencia de puntos de distinto color al azul; esto se debe a que las cuencas de atracción fueron obtenidas integrando hasta 1000 u.a. de tiempo, siendo que los píxeles representando colores diferentes al azul dan cuenta de condiciones iniciales que conducen a la casi eliminación de las células cancerosas para tiempos mayores a 1000 u.a. Así por ejemplo, para la condición inicial $(M_0, N_0) = (0.16, 0.42)$, la casi eliminación de las células cancerosas ocurre luego de 1154 u.a. de tiempo. Para los otros píxeles de colores, se verifica que las condiciones iniciales asociadas a los mismos, también conducen a la casi eliminación de las células cancerosas sin afectar a las células normales.

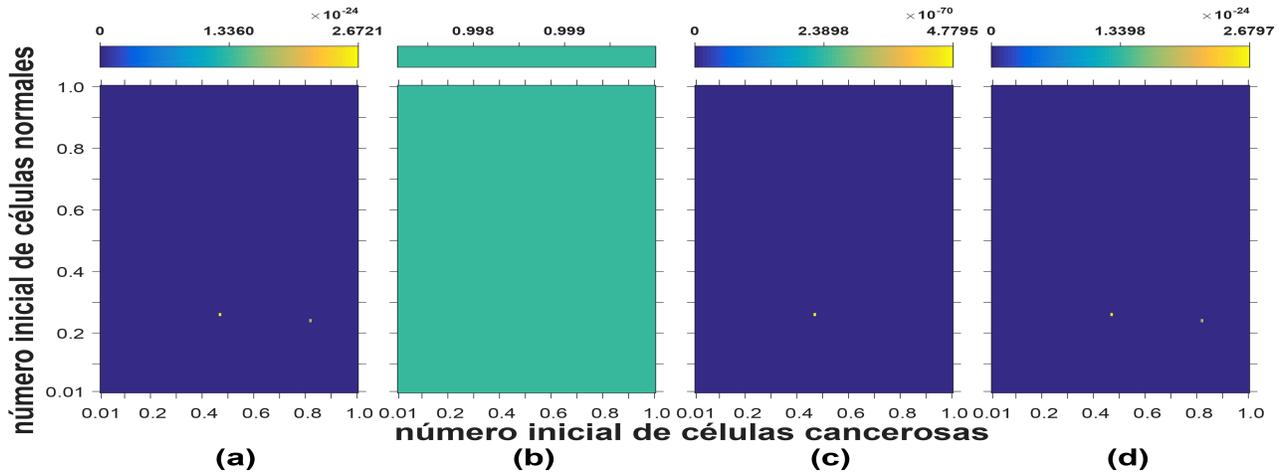


FIG. 1.— (Color online) Cuencas de atracción donde los ejes de abscisas y ordenadas corresponden a las poblaciones iniciales de células cancerosas y normales respectivamente. Las imágenes corresponden a los estados poblacionales finales, después de un tiempo en unidades arbitrarias (u.a.) $t = 1000$ u.a. para las células (a) cancerosas M , (b) normales N , (c) del sistema inmunológico E y (d) del cociente de los estados finales entre la cantidad de células cancerosas sobre las normales M/N . Con valores de los parámetros: $\sigma_{MN} = 1$, $\sigma_{ME} = 2.50$, $\nu = 0.60$, $\sigma_{NM} = 1.50$, $r = 0.17$, $p = 0.01$, $\varepsilon = 3.00$, $k_E = 1.00$, $\sigma_{EM} = 0.20$, $d_E = 0.50$.

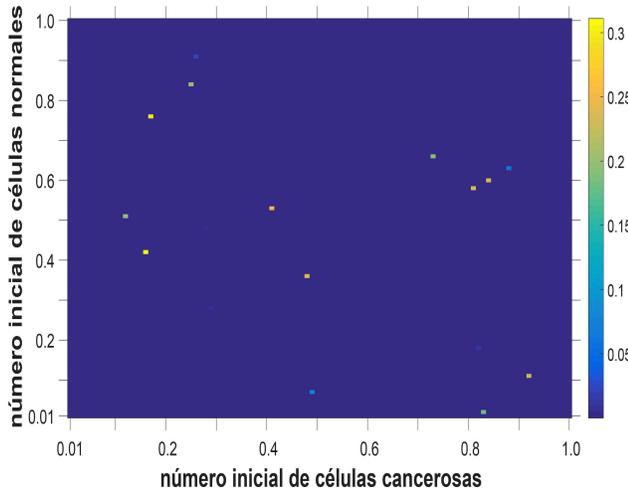


FIG. 2.— (Color online) Situación final (finalizada la irradiación) de la población de células cancerosas; nótese que, al ser la gráfica casi completamente azul, puede afirmarse que la población final de células cancerosas tiende a cero con el tiempo, pero la población de células normales no desaparece. Los valores utilizados para los parámetros: $\sigma_{MN} = 0.96$, $\sigma_{NM} = 1.50$, $r = 0.17$, $p = 0.01$.

En la Fig. 3 se muestra la gráfica correspondiente a las series temporales de los tres tipos de células con diferentes poblaciones iniciales. En las mencionadas series de tiempo, se verifica que al margen de las condiciones iniciales de las poblaciones celulares, el tratamiento logra reducir la población de las células cancerosas, tendiendo su valor a cero. Lo mismo ocurre con las células del sistema inmunológico que se inactivan al eliminarse las células malignas, acompañando el comportamiento de estas; es decir, si las células tumorales se eliminan, también lo harán las efectoras. Por otro lado, la cantidad de células normales tiende a ser predominante, no viéndose afectada por la acción de la radiación. En estas series de tiempo, hay una clara tendencia hacia

un punto fijo (constancia de las poblaciones), donde los transitorios pueden jugar un rol importante en el sentido de que permitirán la planificación de la irradiación, de manera tal que se garantice el objetivo de la eliminación de células cancerosas. Como se mencionó anteriormente, existen varias regiones con diversos parámetros en las que el comportamiento poblacional de las células cancerosas disminuye por efectos de la radiación, sin afectar a la población de células normales, estos pueden resumirse en la Tabla 1. Los valores de los parámetros fueron elegidos barriendo toda la gama de valores dentro de las regiones de estabilidad y escogiendo aquellos que conducen a tener como resultado la eliminación de las células cancerosas. Si bien es cierto que los valores de p son esencialmente pequeños; esto está en relación con el hecho de que en tratamientos de radioterapia se utilizan blindajes para proteger las zonas adyacentes a las tumorales que reciben la radiación.

3.2. Regiones donde el tratamiento no es efectivo

Estas regiones se obtuvieron con algunos parámetros donde los resultados son aquellos que describen un comportamiento en el que la población de células cancerosas se impone sobre las células normales.

Con los siguientes parámetros: $\sigma_{MN} = 1.00$, $\sigma_{ME} = 2.50$, $\nu = 0.60$, $\sigma_{NM} = 1.50$, $r = 2.50$, $p = 0.644$, $\varepsilon = 3.00$, $k_E = 1.00$, $\sigma_{EM} = 0.20$, $d_E = 0.50$, se puede ver en la Fig. 4, la cuenca de atracción que indica cómo la aplicación de la radiación elimina casi por completo la población de células cancerosas sin importar las condiciones iniciales en lo que respecta a las poblaciones de células normales y cancerosas (M_0, N_0). Una situación similar (que no se muestra) se presenta para la población de células normales que también tiende a ser eliminada.

En la Fig. 5, se tienen las gráficas correspondientes a las series temporales que describen el com-

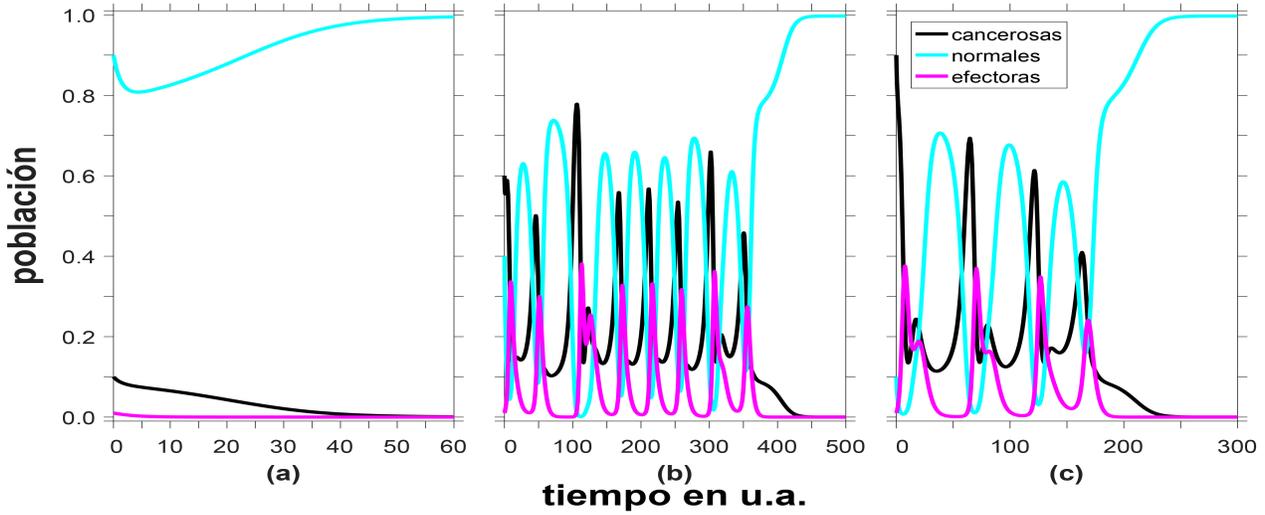


FIG. 3.— (Color online) Comportamiento poblacional de las células cancerosas, normales y efectoras, considerando los parámetros $\sigma_{MN} = 0.96$, $\sigma_{ME} = 2.50$, $\nu = 0.60$, $\sigma_{NM} = 1.50$, $r = 0.17$, $p = 0.01$, $\varepsilon = 3.00$, $k_E = 1.00$, $\sigma_{EM} = 0.20$, $d_E = 0.50$ (a) La gráfica corresponde a una población inicial de 0.1 de células cancerosas y 0.9 de células normales. (b) Se describe el comportamiento poblacional con 0.6 de células cancerosas y 0.4 de células normales. (c) La gráfica corresponde a una población inicial de 0.9 de células cancerosas y 0.1 de células normales.

TABLA 1
EJEMPLO DE VALORES DE PARÁMETROS CONDUCENTES AL EFECTO DE LA RADIACIÓN EN EL QUE SE ELIMINAN LAS CÉLULAS CANCEROSAS SIN AFECTAR A LAS CÉLULAS NORMALES.

σ_{MN}	σ_{NM}	r	p
1.00	1.50	0.17	0.08
0.96	1.50	0.17	0.01
1.00	1.50	0.17	0.01
1.04	1.50	0.17	0.01
1.08	1.50	0.17	0.01
1.12	1.50	0.17	0.01
1.16	1.50	0.17	0.01
1.20	1.50	0.17	0.01
1.24	1.50	0.17	0.01
1.28	1.50	0.17	0.01
1.32	1.50	0.17	0.01
1.36	1.50	0.17	0.01
1.40	1.50	0.17	0.01
1.44	1.50	0.17	0.01
1.48	1.50	0.17	0.01
1.52	1.50	0.17	0.01
1.56	1.50	0.17	0.01
1.60	1.50	0.17	0.01
1.64	1.50	0.17	0.01
1.68	1.50	0.17	0.01
1.00	1.50	0.33	0.01
1.00	1.50	0.33	0.08
1.00	1.50	0.33	0.16
1.00	1.50	0.41	0.01
1.00	1.50	0.41	0.16
1.00	1.50	0.25	0.01
1.00	1.80	0.25	0.01
1.00	1.50	0.25	0.08
1.00	1.50	0.25	0.16

portamiento poblacional mencionado anteriormente (eliminación de todas las poblaciones celulares), estas gráficas fueron generadas para diferentes condi-

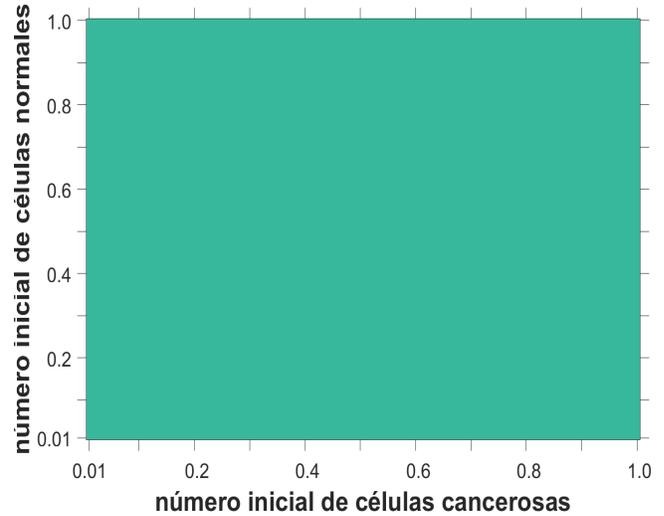


FIG. 4.— (Color online) Situación final a nivel poblacional de las células normales. Obsérvese que el color es prácticamente uniforme y muy próximo a cero, por lo que puede afirmarse que la población final de células normales tiende a desaparecer y lo propio ocurre con las cancerosas.

ciones iniciales en las poblaciones de células. Esta situación si bien es interesante desde el punto de vista de comportamiento dinámico del sistema, debe evitarse en un tratamiento de radioterapia.

Muchas regiones con un comportamiento similar pueden ser encontradas realizando variaciones en sus condiciones, obsérvese la Tabla 2.

En la Tabla 2 se tiene un conjunto de valores de parámetros para los cuales se observa un efecto adverso en las células normales que son eliminadas junto con las cancerosas, en contraposición al objetivo de optimizar un tratamiento por radioterapia, que elimine las células cancerosas y causando efectos mínimos en la población de células normales. Sin embargo, la información obtenida puede utilizarse para

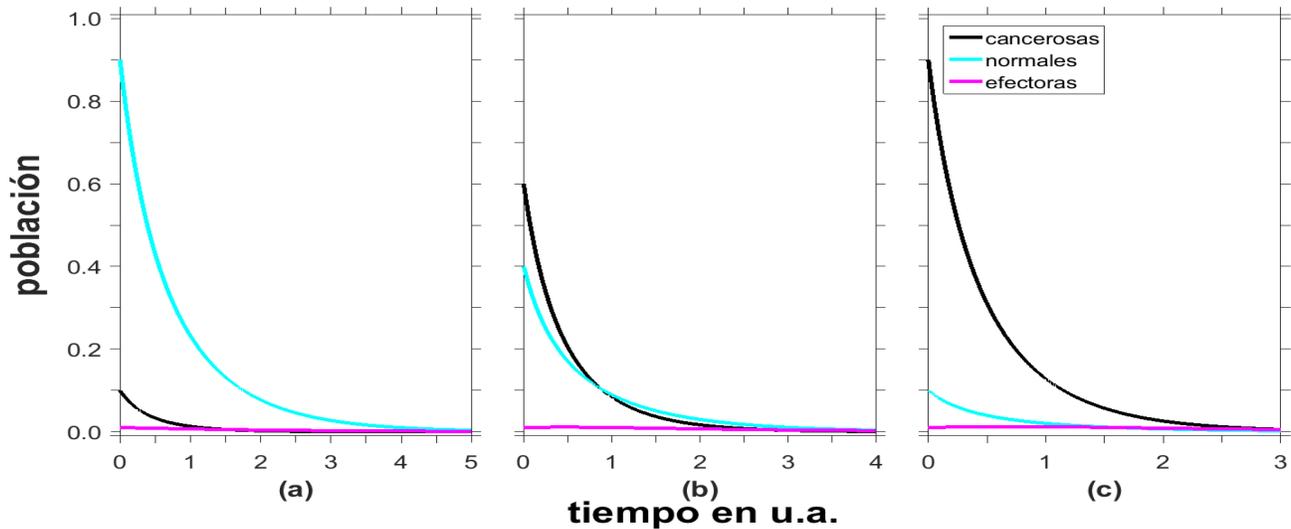


FIG. 5.— (Color online) Comportamiento poblacional de las células cancerosas, normales y efectoras, considerándose los siguientes valores de parámetros $\sigma_{MN} = 1.00$, $\sigma_{ME} = 2.50$, $\nu = 0.60$, $\sigma_{NM} = 1.50$, $r = 2.50$, $p = 0.644$, $\varepsilon = 3.00$, $k_E = 1.00$, $\sigma_{EM} = 0.20$, $d_E = 0.50$. Considerándose las condiciones iniciales para células cancerosas y normales (M_0, N_0): (a) (0.1, 0.9), (b) (0.6, 0.4) y (c) (0.9, 0.1). Nótese que en todos los casos, las poblaciones celulares tienden a desaparecer.

TABLA 2

EJEMPLOS DE VALORES DE PARÁMETROS QUE CONDUCEN A QUE LAS CÉLULAS CANCEROSAS Y NORMALES TIENDAN A DESAPARECER POR EFECTO DE LA ACCIÓN DE LA RADIACIÓN.

σ_{MN}	σ_{NM}	r	p
1.00	1.50	2.50	0.644
1.00	1.50	4.00	0.644
1.00	1.50	0.09	0.880
1.00	1.50	0.09	0.960
1.00	1.50	0.17	0.640

buscar nuevas alternativas para el paciente ya sea modificando los valores de parámetros o los de las condiciones iniciales.

3.3. Regiones con un comportamiento oscilatorio

Este tipo de regiones muestra un comportamiento con diferentes valores de los promedios de la razón entre la población de células cancerosas a la de normales; en otras palabras, existen oscilaciones de estas poblaciones que se reflejan en una distribución de valores que forman una suerte de patrón en la cuenca de atracción como se ve en la Fig. 6. La mencionada cuenca fue obtenida considerando los valores de parámetros: $\sigma_{MN} = 0.84$, $\sigma_{ME} = 2.50$, $\nu = 0.60$, $\sigma_{NM} = 1.50$, $r = 0.17$, $p = 0.01$, $\varepsilon = 3$, $k_E = 1.00$, $\sigma_{EM} = 0.20$ y $d_E = 0.50$.

La barra de colores en la Fig. 6 muestra las tendencias para las cuales se tiene ligera preponderancia de células normales y casi eliminación de células cancerosas (región azul); en contraposición, ocurre una predominancia de las células cancerosas sobre las normales en la región amarilla.

Para las condiciones mencionadas, las series temporales se muestran en la Fig. 7, donde se observa que para los ejemplos elegidos, las poblaciones celulares oscilan periódicamente y con valores mayores para las poblaciones de células normales. Este com-

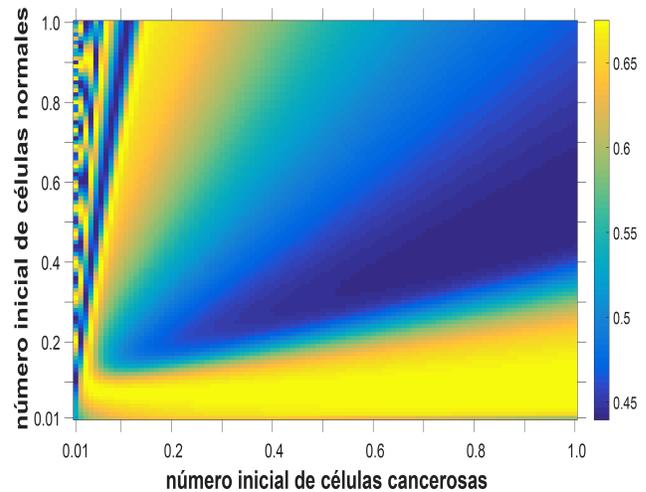


FIG. 6.— (Color online) Cuenca de atracción considerando la razón de las poblaciones de células cancerosas a normales (M/N), correspondiente a los parámetros mencionados en la Sec. 3.3. Esta imagen muestra regiones en las cuales la población de células cancerosas, en promedio es predominante o minoritaria de acuerdo con las condiciones iniciales de las poblaciones celulares malignas y normales. La distribución de colores nos da la pauta de que las poblaciones celulares están oscilando periódicamente.

portamiento puede deberse a que los valores de r son pequeños como para producir la eliminación total de las células. Si bien este comportamiento no cumple el requisito de nuestro objetivo (eliminación de las células cancerosas sin afectar a las sanas); sin embargo, el conocimiento de estos comportamientos periódicos puede ser de utilidad al encarar un tratamiento con radiación. Por ejemplo, si se conoce las características de estas oscilaciones, para una irradiación posterior, podría escogerse el inicio de la misma cuando el número de células cancerosas esté en un mínimo; así, se podría evitar que vuelva a crecer esta población, con el consecuente aumento de la

TABLA 3

EJEMPLOS DE VALORES DE PARÁMETROS CORRESPONDIENTES A UNA SITUACIÓN DE IRRADIACIÓN EN LA QUE FINAL DE LA MISMA, LAS POBLACIONES CELULARES PRESENTAN UN COMPORTAMIENTO DE OSCILACIÓN PERIÓDICA.

σ_{MN}	σ_{NM}	r	p
1.00	1.50	0.01	0.644
1.00	1.50	0.01	0.08
1.00	1.50	0.01	0.32
1.00	1.50	0.01	0.64
1.00	1.50	0.09	0.64
0.80	1.50	0.17	0.01
0.84	1.50	0.17	0.01

probabilidad de eliminarla.

La Tabla 3, muestra algunos ejemplos de valores de parámetros que permiten obtener comportamientos similares; es decir, oscilaciones periódicas de las poblaciones celulares.

3.4. Regiones con un comportamiento caótico

Estas son regiones cuyos resultados no están claramente delimitados, las cuencas de atracción presentan saltos aparentemente discretos en los resultados finales, una de las cuencas con estas características fue obtenida con las siguientes condiciones: $\sigma_{MN} = 1.00$, $\sigma_{ME} = 2.50$, $\nu = 0.60$, $\sigma_{NM} = 1.70$, $r = 0.17$, $p = 0.01$, $\varepsilon = 3.00$, $k_E = 1.00$, $\sigma_{EM} = 0.20$, $d_E = 0.50$.

La cuenca de atracción que representa los valores del promedio de la razón M/N según las condiciones iniciales elegidas se muestra en la Fig. 8. En ella puede apreciarse que el cociente de la población final de células cancerosas sobre las células normales toma valores que no generan una gráfica uniforme, observándose regiones granuladas; es decir, se tiene en casi toda la cuenca, píxeles de diferentes colores que parece representar la rúbrica del comportamiento caótico de las variaciones experimentadas por las poblaciones celulares.

Como puede verse en la Fig. 8, el resultado final para una población alta de células cancerosas, no se muestra una regularidad aceptable, es decir para cada punto de la distribución, los resultados finales presentan saltos discretos. Sin embargo, también se puede mencionar que para bajas cantidades de población inicial de células normales la población de células cancerosas se elimina y la población de células normales sobrevive.

Las series temporales correspondientes a las condiciones mencionadas, pueden observarse en la Fig. 9, en ellas se verifica que no existe regularidad en los resultados finales luego del tratamiento. Por consiguiente, desde un punto de vista clínico, esta situación de comportamiento caótico de las poblaciones debería evitarse. Una forma es aumentando la dosis, pero teniendo la precaución de que esto no ocasione daños en las células normales.

La Tabla 4 muestra algunos valores de parámetros para los cuales se tienen comportamientos conducentes a variaciones caóticas, en promedio, de las

TABLA 4

EJEMPLOS DE VALORES DE PARÁMETROS CORRESPONDIENTES A UNA SITUACIÓN DE IRRADIACIÓN DURANTE 1000 U.A. DONDE AL FINAL DE LA MISMA, SE TIENE UN COMPORTAMIENTO DE VARIACIÓN CAÓTICA DE LAS POBLACIONES CELULARES.

σ_{MN}	σ_{NM}	r	p
1.00	1.50	0.17	0.16
1.00	1.70	0.17	0.01
1.00	3.90	0.17	0.01
0.92	0.50	0.17	0.01

poblaciones celulares.

4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Considerando los resultados del presente estudio, se pudo ver la evolución del comportamiento poblacional de los tres tipos de células bajo ciertas condiciones, sobre todo dándole importancia predominante a los aspectos relativos a la irradiación. Se comenzó tomando como punto de partida los resultados del análisis de estabilidad obtenidos por Ramírez-Ávila (2017). Es decir, se tomaron valores de los parámetros de las regiones de estabilidad que permitieron obtener la eliminación de las células cancerosas afectando mínimamente a las células normales. Además, en varias de las situaciones analizadas también se observaron comportamientos periódicos y caóticos de las poblaciones celulares como en los trabajos de Galindo *et al.* (2015) y Gallas *et al.* (2014). Este aspecto se debe a que el comportamiento poblacional depende de las condiciones iniciales en concordancia con el análisis de Branco (2014). Consecuentemente, se puede inferir que si un paciente comienza con un tratamiento de radioterapia, cuando el cáncer es detectado en un estadio temprano, los efectos de la radiación sumados al efecto del sistema inmunológico, serán diferentes a otro paciente cuya detección de la patología se realizó, por ejemplo, en un cáncer terminal.

Si la radiación solamente actúa en las células cancerosas y no así en las normales y considerando una población inicial de células cancerosas alta (0.7), con un factor ligado a la radiación de 0.12, aún se inducen comportamientos caóticos. Pero si la radiación se va incrementando, el sistema se estabiliza y la población de células cancerosas se ve afectada por el efecto de la radiación, haciendo que dicha población tienda a desaparecer. Este resultado implica que, a mayor radiación, el sistema llega a una situación más estable en menos tiempo.

Una de las situaciones analizadas considera el hecho de que, si la población de células cancerosas es alta al inicio del tratamiento, el efecto de la radiación toma mayor tiempo en manifestarse. Una situación similar fue encontrada por Valle (2016), donde se consideró la quimioterapia en lugar de la radiación y pudo evidenciar que las poblaciones grandes de células cancerosas requieren mayor cantidad de dosis suministrada. Sin embargo, la dosis utilizada también tiene un efecto sobre las células

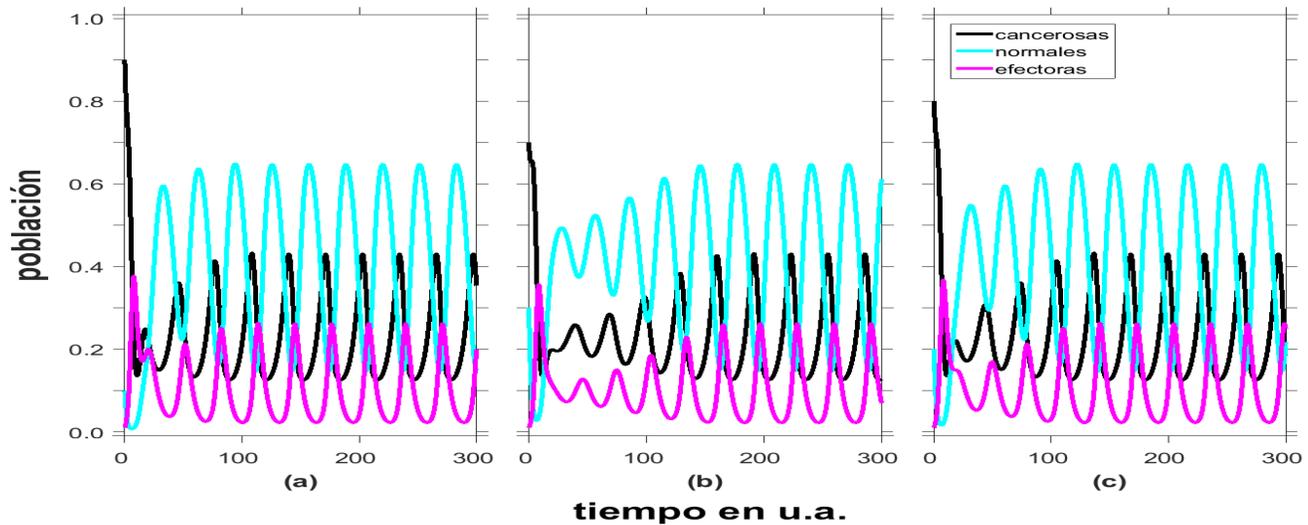


FIG. 7.— (Color online) Comportamiento poblacional de las células cancerosas, normales y efectoras, considerando los siguientes parámetros $\sigma_{MN} = 0.84$, $\sigma_{ME} = 2.50$, $\nu = 0.60$, $\sigma_{NM} = 1.50$, $r = 0.17$, $p = 0.01$, $\varepsilon = 3.00$, $k_E = 1.00$, $\sigma_{EM} = 0.20$, $d_E = 0.50$. Estando dadas las condiciones iniciales de células cancerosas y normales (M_0, N_0) como: (a) (0.1, 0.9), (b) (0.7, 0.3) y (c) (0.8, 0.2).

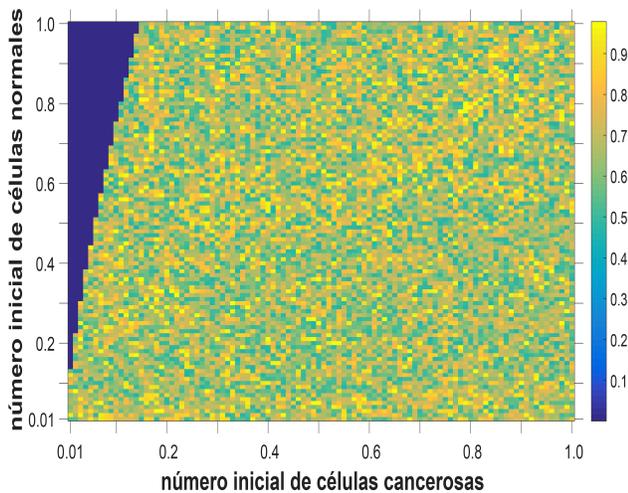


FIG. 8.— (Color online) Cuenca de atracción correspondiente a los parámetros mencionados en esta sección. Esta imagen muestra las regiones en las cuales el cociente de la población de células cancerosas sobre las normales al final de la irradiación (después de 1000 u.a.) tiene un comportamiento de oscilaciones caóticas que se refleja en el aspecto granulado de la cuenca de atracción.

normales. En ese sentido, es importante considerar la aplicación de dosis más bajas, pero aplicadas durante una mayor cantidad de tiempo, este tipo de tratamiento tendría un menor efecto sobre las células del sistema inmunológico situación afirmada por de Pillis *et al.* (2006). El resultado más relevante obtenido es haber determinado los valores de parámetros de control (mostrados en la Tabla 1) que conducen a la eliminación de las células cancerosas sin afectar mayormente a las normales. Lo anterior puede ser un aspecto importante para la planificación de los tratamientos por radioterapia, para que los mismos sean efectivos al margen de las condiciones iniciales en las poblaciones celulares. Este resultado permite vislumbrar un panorama alentador del uso del modelo.

La información analizada en el párrafo anterior, fue corroborada con las gráficas de las series temporales elegidas (ver Fig. 3), donde pudo verificarse que, en cada situación es posible eliminar las células cancerosas sin alterar o hacerlo mínimamente en la población de células normales. Es importante mencionar que la población de células del sistema inmunológico desaparece al final del tratamiento, cuando la población de células tumorales es muy pequeña, lo que se traduce en una inactivación de las células efectoras.

Dentro de los numerosos resultados que se obtuvieron, se pudo identificar condiciones en las que las células cancerosas se imponen sobre las células normales, bajo ciertos valores de parámetros, las poblaciones iniciales de las células normales y cancerosas, no juegan ningún papel importante. En este punto aparentemente los resultados no son relevantes para el objetivo del trabajo de investigación, pero en la práctica pueden ser utilizados para de-sestimar un tratamiento por radioterapia y utilizar otro que pueda ser más efectivo para el paciente. Por otro lado, los resultados obtenidos mostrando comportamientos periódico y caótico, indican que la aplicación de la radiación no permite que las poblaciones celulares logren una estabilización, esto nos hace pensar que fraccionar la dosis de radiación y aplicarla en situaciones en las que la población de células cancerosas alcance un mínimo relativo o cuando la población de células del sistema inmunológico se halle en un máximo relativo, pueden mejorar también el tratamiento tendiente a hacer desaparecer las células cancerosas.

Finalmente, es conveniente mencionar que como proyección se pretende analizar este sistema dinámico bajo la acción de otro tipo de tratamientos como la inmunoterapia. Aspectos relacionados con cronobiología pueden resultar interesantes dada la dependencia que se tiene con las condiciones iniciales. Considerar en el trabajo la posibilidad de hal-

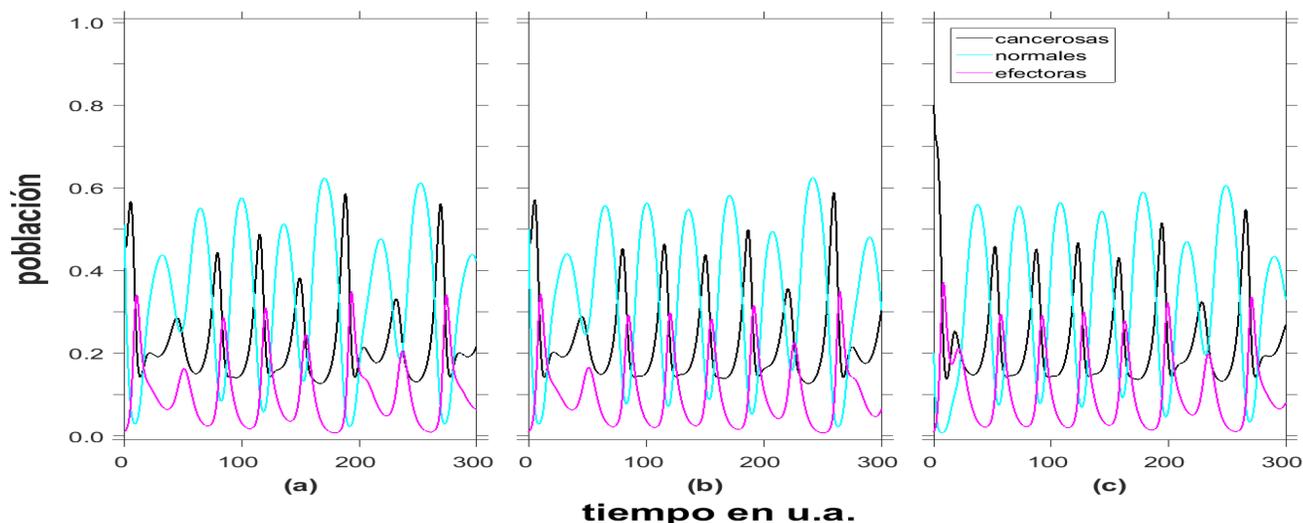


FIG. 9.— Comportamiento poblacional de las células cancerosas, normales y efectoras, considerándose los siguientes parámetros $\sigma_{MN} = 1.00$, $\sigma_{ME} = 2.50$, $\nu = 0.60$, $\sigma_{NM} = 1.70$, $r = 0.17$, $p = 0.01$, $\varepsilon = 3.00$, $k_E = 1.00$, $\sigma_{EM} = 0.20$, $d_E = 0.50$. Los valores de las condiciones iniciales (M_0, N_0) con las que se trabajó para las células cancerosas y normales, respectivamente fueron (a) (0.49, 0.51), (b) (0.50, 0.50) y (c) (0.80, 0.20).

lar las condiciones en las que la radiación actúe en las células cancerosas y estas se eliminen en el menor tiempo posible, es otra de las perspectivas que pueden ser explotadas como continuación de este trabajo de investigación.

AGRADECIMIENTOS

Es importante el reconocimiento al Instituto de Investigaciones Físicas de la UMSA por haber facilitado

el desarrollo de este proyecto. También agradecemos a Paul Schultz del PIK-Potsdam por sus consejos y colaboración en algunos de los aspectos computacionales del trabajo.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Abbas, A., Lichtman, A.H. & Pillai, S. 2015, *Cellular and molecular immunology* (Philadelphia: Saunders).
- Belostotski, G. & Freedman, H. 2005, *The European Physical Journal B* **25**, 447.
- Bergonié, J. & Tribondeau, L. 1906, *Comptes-Rendus de Séances de l'Académie des Sciences*, **143**, 983
- Branco, P. 2014, *Comportamento Caótico em Modelos Matemáticos de Câncer*. Tesis de Maestría en Matemática Aplicada y Computacional, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, Brasil. 78p.
- Calvo, F. & Escude L. 1985, *Revista Médica Universitaria Navarra* **29**, 110.
- Castorina, P., Deisboeck, T., Gabriele, P. & Guiot, C. 2007, *Radiation Research* **168**, 349.
- de Pillis, L. & Radunskaya, A. 2003, *Mathematical and Computer Modelling* (**37**), 1221.
- de Pillis, L., Gu, W. & Radunskaya, A. 2006, *Journal of Theoretical Biology* **238**, 841.
- Galindo, M. C., Nespoli, C. & Messias, M. 2015, *Abstract and Applied Analysis* Article ID 354918.
- Galach, M. 2003, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **13**(3): 395-406.
- Gallas, M., Gallas, M. & Gallas, J. 2014, *The European Physical Journal: Special Topics* (**223**): 2131-2144.
- Ghaffari, A., Bahmaie, B. & Nazari, M. 2016, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **39**, 4603.
- Gómez-Almaguer, D., et al. 2010, *Revista de Hematología* **11**(1): 40-62.
- Isea, R. & K. Lonngren. 2015, *International Journal of Public Health Research* **3**(6): 340-344.
- Itik, M. & Banks, S. 2010, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **20**(1): 71-79.
- Kuznetsov, V., Makalkin, I., Taylor, M. & Perelson, A. 1994, *Bulletin of Mathematical Biology* **56**(2): 295-321.
- Liu, Z. & Yang, C., 2014, *Computational and Mathematical Methods in Medicine* **12**: 1-12.
- Menchón, S. 2007, *Modelado de las diversas etapas del crecimiento del cáncer y de algunas terapias antitumorales*. Tesis doctoral en Física, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba. 114 p.
- Ott, E. 1993, *Chaos in dynamical systems* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Pisarchik, A.N. & Feudel, U. 2014, *Physics Reports* **540**: 167.
- Ramírez-ávila, G.M. 2017, *Revista Boliviana de Física* **31**, 25.
- Rizo-Potau, D., Nájera-López, A. & Arenas-Prat M. 2016, *Conocimientos básicos de oncología radioterápica para la enseñanza Pre-grado* (Cuenca: Ediciones de la Universidad de Castilla La Mancha) (**9**).
- Román, J. M. 2007, *Psicooncología* **4**(2), 301-310.
- Pinar-Sedeño, B., Aguiar-Bujanda, D., Saez-Bravo, M. L., Ruiz-Alonso, A., & Lara-Jiménez, P. C. 2004, *Biocáncer*(**1**).
- Valle, P. 2016, *Estudio de la dinámica global de modelos matemáticos que describan la evolución de un modelo cancerígeno y sus mecanismos de evasión del sistema inmunológico*. Tesis Doctoral en Ciencias, Instituto Politécnico Nacional, Tijuana. 118 p.
- Valle, P., Coria, L. & Starkov, K. 2014, *Computación y Sistemas* **18**(4): 773.
- Wintz, H. 1938, *Radiology*, **30**, 35.

ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL ARO ROTANTE: NUEVAS EVIDENCIAS DE LA INDEPENDENCIA DE LA MASA Y DE LA EQUIPROBABILIDAD DEL PUNTO DE EQUILIBRIO
EXPERIMENTAL STUDY OF A ROTATING HOOP: NEW EVIDENCE OF MASS INDEPENDENCE AND EQUI-PROBABILITY OF THE EQUILIBRIUM POINT

LUCAS BLITZ LOZADA GOBILARD [†] & GONZALO MARCELO RAMÍREZ-ÁVILA [‡]

[†]Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639
La Paz- Bolivia

(Recibido 12 de noviembre de 2019; aceptado 17 de diciembre de 2019)

RESUMEN

El presente trabajo expone los resultados y análisis de un montaje experimental ideado por los autores con el propósito de crear un sistema mecánico no lineal que permita obtener datos relevantes referidos al fenómeno de bifurcación. Los resultados del experimento permitieron generar diagramas de bifurcación del parámetro de control, ratificándose contenidos teóricos significativos. La base empírica permitió corroborar la independencia de la masa en las ecuaciones de movimiento y verificar el carácter equiprobable del sistema, en lo referido a la estabilidad en los nuevos puntos de equilibrio, refutando aseveraciones repetidas por manuales de texto de dinámica no lineal para el caso de una esfera. Los datos fueron sistematizados a partir de los siguientes experimentos: (i) una esfera en aire y (ii) sumergida en otros tres fluidos diferentes, (iii) varias esferas en aire y (iv) sumergidas en los mismos fluidos, (v) además de tres fluidos aislados: agua teñida, líquido de transmisión y aceite de motor.

Código(s) PACS: 05.45.-a — 02.30.Oz — 45.80.+r

Descriptor: Dinámica no lineal y caos — Teoría de bifurcaciones — Control de sistemas mecánicos.

ABSTRACT

This study presents the results and analysis of an experimental assembly devised by the authors to create a nonlinear mechanical system that obtains relevant data associated with the bifurcation phenomenon. The results of the experiment led to the generation of bifurcation diagrams related to the control parameter, and supports significant existing theoretical evidence. This empirical base permits us to corroborate the independence of the mass in the motion equations and verify the equi-probable nature of the system, in terms of stability at the new equilibrium points. These results refute repeated assertions by nonlinear dynamics textbooks for the case of one sphere. The data were obtained from the following experiments: (i) a sphere in air (ii) a sphere submerged in three other different fluids separately, (iii) several spheres in air and (iv) several spheres submerged in the same three different fluids, (v) in addition to the three isolated fluids: several spheres were submerged in stained water, transmission fluid and engine oil respectively.

Subject headings: Nonlinear dynamics and chaos — Bifurcation theory — Control of mechanical systems.

1. INTRODUCCIÓN

La dinámica no lineal es una disciplina que ha despertado interés en la ciencia moderna. Con el desarrollo de la tecnología y en particular de los ordenadores, actualmente se estudian sistemas cuya descripción era muy difícil hace poco más de medio siglo.

Según la teoría, explicada por Shivamoggi (1997), es posible que de manera espontánea, en los sistemas no lineales se rompan las restricciones de simetría dadas por el ambiente para ciertos rangos de valor de los parámetros de control. Dicha ruptura se evidencia en la bifurcación del estado del sistema no lineal dependiente de cierto parámetro. En cuanto el parámetro de control llega al valor crítico respectivo, el estado del sistema se bifurca generando un cambio cualitativo en el comportamiento del sistema.

[†]llozada@fiumsa.edu.bo

[‡]mravila@fiumsa.edu.bo

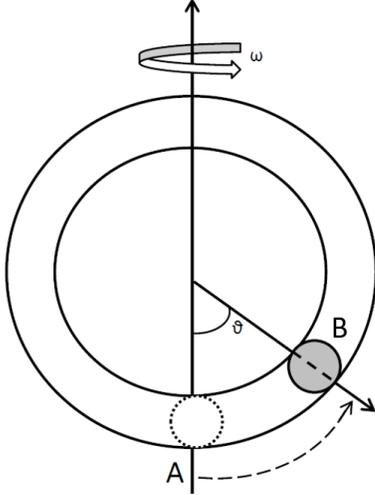


FIG. 1.— Sistema estudiado. La situación trivial de equilibrio corresponde a la esfera en la posición A y desplazamiento angular nulo $\vartheta_0 = 0$. El nuevo punto de equilibrio se da alrededor de la posición B y con desplazamiento angular distinto de cero. La coordenada generalizada es ϑ .

Cuando existen múltiples soluciones al sistema, desde el punto de vista experimental se deben considerar solamente aquellas que son estables. La teoría de bifurcaciones, como explica Strogatz (1994), establece tipos y formas de estabilidad que se alcanza en función de la variación del parámetro de control y según las condiciones de estabilidad.

Los sistemas no lineales, matemática y físicamente más interesantes, actualmente son los sistemas caóticos por su riqueza dinámica. Sin embargo, dadas las exigencias y limitaciones, el objeto de estudio de la presente investigación es un sistema no caótico, caracterizando experimentalmente al aro rotante como un sistema dinámico no lineal; tal caracterización se ha realizado gracias a las facilidades para efectuar el montaje de los experimentos de este tipo.

1.1. Fundamento teórico

El sistema estudiado es una esfera de masa m contenida en un anillo rígido de radio a en el campo gravitatorio. La esfera está dispuesta inicialmente en un ángulo ϑ_0 en el extremo inferior del diámetro vertical y se considera que tiene libertad de movimiento sin fricción a través del anillo. La Fig. 1 muestra el movimiento oscilatorio de la esfera alrededor del punto de equilibrio en las siguientes situaciones: (A) cuando el aro está inmóvil y (B) cuando el aro está rotando.

Si el aro rota alrededor de su diámetro vertical con velocidad angular constante ω , se verifica experimentalmente que la masa m mantiene una oscilación alrededor de la posición de equilibrio A.

Más allá del valor crítico ω_c , se observa que la situación cambia y la masa oscila alrededor de un nuevo punto de equilibrio B, correspondiente a un valor no nulo del ángulo ϑ (ver Fig. 1). De hecho, existen dos puntos de equilibrio ubicados simétricamente respecto al diámetro vertical. En

principio, no existe factor de preferencia alguno para la nueva situación de equilibrio: la posición final está dada por las condiciones iniciales (generalmente aleatorias) y por la velocidad de la masa. Esta explicación del sistema se basa en la dada por Nicolis (1995).

Para estudiar la dinámica del sistema, es conveniente simplificar el problema, con coordenadas polares y despreciando la fricción de la esfera con el anillo. De este modo, el lagrangiano del sistema es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ma^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2a^2\sin^2\vartheta + mga\cos\vartheta, \quad (1)$$

lo que se puede escribir como:

$$\frac{\mathcal{L}}{ma^2} = \frac{1}{2}\omega^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{g}{a}\cos\vartheta. \quad (2)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$L = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} = 0,$$

se obtiene que la ecuación diferencial que describe el movimiento del sistema está dada por:

$$\ddot{\vartheta} - \omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{g}{a}\sin\vartheta = 0. \quad (3)$$

En el equilibrio, ϑ es una constante, llámese ϑ_0 . Entonces, $\dot{\vartheta} = 0$, $\ddot{\vartheta} = 0$, etc, como lo explica Masoller (2011). Así, la condición de equilibrio es:

$$\left(-\omega^2\cos\vartheta_0 + \frac{g}{a}\right)\sin\vartheta_0 = 0. \quad (4)$$

Las soluciones son $\sin\vartheta_0 = 0$ o bien $\cos\vartheta_0 = \frac{g}{a\omega^2}$.

La primera posibilidad permite dos puntos de equilibrio: $\vartheta_0 = 0$, correspondiente al fondo del aro, y $\vartheta = \pi$; el tope del aro. La justificación de la imposibilidad física del segundo punto se halla en Marion (1998). La ubicación de estos puntos es independiente de ω . La segunda posibilidad permite un punto de equilibrio con ϑ menor a $\pi/2$, dado que $g/a\omega^2 > 0$. Como $\cos\vartheta_0 \leq 1$, este punto de equilibrio existe solo a velocidades de giro correspondientes a $\omega \geq \sqrt{g/a}$.

La esfera desplazada encontrará un nuevo punto de equilibrio tal que $\ddot{\vartheta} = 0$. Esta consideración lleva a una expresión del valor crítico o umbral de la velocidad angular:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{a}}. \quad (5)$$

De esta forma, la velocidad angular de giro del aro ω constituye el parámetro de control que va a determinar las regiones de estabilidad del sistema.

Es conveniente expresar la información mediante un diagrama de bifurcación (ver Fig. 2), en el cual la posición de equilibrio ϑ , que caracteriza el estado del sistema, se grafica en función de la velocidad angular ω , que representa la restricción del sistema. Por debajo del valor crítico ω_c solo es posible una posición,

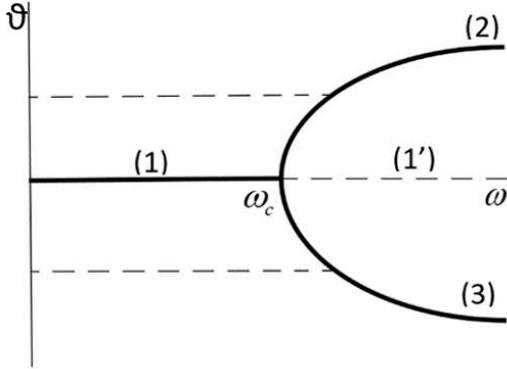


FIG. 2.— Bifurcación tipo *Supercritical Pitchfork* (tenedor supercrítico). La Rama 1 corresponde a la situación estable $\omega < \omega_c$, mientras que la rama discontinua 1' denota la situación de inestabilidad. Las ramas 2 y 3 corresponden a la estabilidad, cuando $\omega > \omega_c$, siendo en principio equiprobables.

correspondiente a $\vartheta = 0$ (Rama 1 en la Fig. 2). Nicolis (1995) dicta que por encima de ω_c este estado no puede mantenerse. Esto se expresa en la Fig. 2 con una línea segmentada correspondiente a la Rama 1'. Para cada $\omega > \omega_c$ dos nuevas posiciones de equilibrio se hallan disponibles. Junto a los valores correspondientes de ángulo, se obtienen dos ramas (2 y 3) que emergen de 1 en $\omega = \omega_c$.

En este caso particular, la bifurcación recibe el nombre de *Pitchfork* o “tenedor” por su forma.

Es significativo que el mismo sistema físico-bastante simple- puede presentar diferentes tipos de comportamiento a medida que cambia el valor de un parámetro de control establecido.

Dado que el aro rotante es un sistema continuo con un solo grado de libertad, no puede dar lugar a comportamiento caótico. No obstante, da lugar al fenómeno de inestabilidad y bifurcación. Para más detalle de la imposibilidad del caos en este sistema, ver Nicolis (1995).

El diagrama de la Fig. 2 describe los puntos en los cuales el sistema se encuentra en un estado de equilibrio. Para valores de ω más bajos que ω_c , existen dos puntos de equilibrio: $\vartheta_0 = 0$ y $\vartheta_0 = \pi$. Para valores de ω mayores a ω_c , existen tres puntos de equilibrio:

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_1 = \pi \quad \text{y} \quad \vartheta_2 = \cos^{-1}(\omega_c/\omega)^2 .$$

Dada la forma de los posibles puntos de equilibrio, también resulta ilustrativo representar el diagrama de bifurcación como la razón de las velocidades angulares ω/ω_c en función del ángulo desplazado ϑ , como hace Moisy (2003).

De este modo, en términos de la razón de rotación crítica, la ecuación de movimiento es:

$$\ddot{\vartheta} - \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + \omega_c^2 \sin \vartheta = 0 . \quad (6)$$

El comportamiento dinámico de este sistema, de acuerdo con la teoría del análisis de bifurcación (*Supercritical Pitchfork*) presenta la simetría $x \rightarrow -x$ y tiene la forma normal:

$$\dot{x} = \mu x - x^3 . \quad (7)$$

Como se explica en Strogatz (1994), es posible hallar uno o tres puntos fijos, dependiendo del signo del parámetro μ : el punto fijo $x^* = 0$ existe para todos los valores de μ , mientras que los dos puntos fijos simétricos $\pm\sqrt{\mu}$ existen solo para $\mu > 0$. Si el sistema sobrepasa el valor crítico cuando $\mu < 0$, se da una de las dos posibles ramas estables de la bifurcación. En tal situación, debido a que las ecuaciones dejan de ser invariantes frente a la transformación $x \rightarrow -x$, se rompe la simetría del sistema.

Este sistema es un ejemplo típico de mecánica clásica, como lo muestran Goldstein, Poole & Safko (2001) y en el que se resaltan los aspectos no lineales en Nicolis (1995). De hecho, algunos trabajos que han tratado este sistema realizaron diferentes modificaciones: tomando en cuenta efectos que son normalmente despreciados, como lo hacen Raviola *et al* (2017); aumentando el número de grados de libertad, como exponen Burov & Yakushev (2014); variando el eje de rotación, planteado por Johnson & Rabchuk (2009); o involucrando aspectos mecánicos adicionales, sugerido por Wellstead (1983). Sin embargo, es frecuente que el análisis se limite a la teoría o al cálculo numérico. La riqueza dinámica de este sistema amerita un montaje experimental que permita comprobar las predicciones de la teoría (obtener explícitamente diagramas de bifurcación) y eventualmente hallar nuevos fenómenos físicos que puedan resultar interesantes.

Es ilustrativo hasta qué punto es válida experimentalmente la independencia de la masa en la Ec. (3); además, es recomendable estudiar los límites del carácter equiprobable del sistema, referido a los estados de estabilidad posibles.

En este trabajo se muestra los resultados de un montaje de sencilla construcción, que permitió verificar experimentalmente la bifurcación predicha por la teoría de este sistema no lineal. Particularmente, se estudió la situación más sencilla de una esfera en un anillo (Fig. 1) y se extendió el análisis a varias esferas. Posteriormente, se trabajó con diferentes fluidos (siguiendo los lineamientos de la independencia de la masa) y finalmente con esferas sumergidas en los fluidos.

2. METODOLOGÍA

El montaje experimental consiste en una pequeña manguera de plástico flexible de (10.0 ± 0.1) mm de diámetro externo y (1.0 ± 0.1) mm de grosor, flexionada en forma semicircular y unida a un transportador circular de 360° y (12.0 ± 0.1) cm de diámetro, para que adopte su curvatura. La masa utilizada consiste en un perdigón esférico de estaño de (6.0 ± 0.1) mm de diámetro y de (1.02 ± 0.01) g. La Fig. 3 muestra una fotografía del montaje.

Se realizaron pruebas de velocidad de la esfera en la manguera para comprobar que el rozamiento es despreciable. Se ensambló el sistema a un motor eléctrico de licuadora de 10 velocidades (BLSTEP-

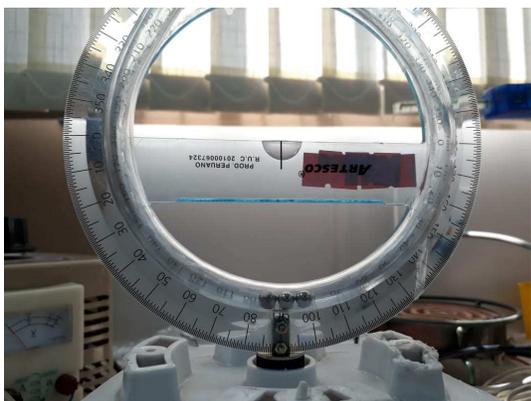


FIG. 3.— (Color online) Fotografía del montaje experimental, correspondiente al caso de tres esferas.

7808W) adecuando el eje de conexión de la carcasa plástica para que gire alrededor del eje deseado, como muestra la Fig. 1. El motor fue modificado, añadiéndosele una conexión con regulador de voltaje *householdsingle* monofásico variac de 1000 W y rango de voltaje de cero a 250 V, conectado a un potenciómetro de dos terminales (B10K OHM 3). La modificación dio lugar a que el motor funcionara con voltaje continuo sin exceder el límite establecido, regulado por el potenciómetro. Sobre el dispositivo montado hubo control suficiente de la velocidad de giro del motor (y por lo tanto del sistema), reduciéndola al rango deseado.

Se alineó el sistema de tal manera que, al encontrarse en equilibrio, la esfera permanezca en la posición de ángulo inicial nulo ϑ_0 . Adicionalmente, al extremo opuesto de la posición de equilibrio inicial, se instaló un pequeño imán de disco de neodimio de dimensiones $(10.0 \pm 0.1 \times 1.0 \pm 0.1)$ mm, unido al transportador para que giren en conjunto. Alineado al eje magnético del imán, se instaló un detector de campo magnético de un eje (Línea PasPort Pasco PS-2162) conectado a un registrador de datos gráficos universal (Pasco PS-2002) que posibilitó, por una parte, medir la intensidad del campo magnético, y por otra, almacenar y graficar los datos obtenidos en tiempo real.

Los datos graficados permitieron constatar dos picos de campo magnético por cada giro del sistema. Los picos corresponden a la lectura del detector cada vez que el imán pase por su eje. Este sencillo, eficiente y preciso montaje, permitió conocer la frecuencia de giro, siendo posible calcular la velocidad angular del sistema.

En congruencia con la teoría, el experimento comprobó que suministrándose un voltaje fijo, el motor giraba a velocidad constante. Se ubicó el detector de campo magnético en cuatro diferentes posiciones, todas radiales respecto del eje de giro. Se tomaron muestras de medidas para tres velocidades en cada caso. La obtención de las medidas de la intensidad de campo magnético fue comparada con la distribución ideal de valores según el comportamiento de tipo gaussiano en el tiempo (así lo señala el manual de uso PASCO (2000)), correspondiendo el pico

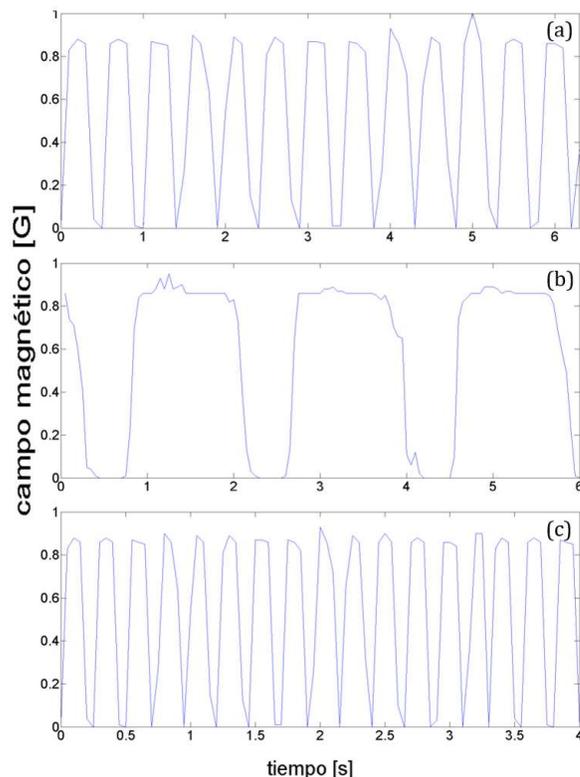


FIG. 4.— Datos obtenidos de intensidad de campo magnético en función del tiempo para la determinación de las velocidades angulares de rotación del sistema, obteniéndose: (a) 66.67 rpm, (b) 16.67 rpm y (c) 149.25 rpm. Estos resultados fueron obtenidos utilizando la consideración estadística explicada más arriba.

al punto en que el imán pasa por el detector. La Fig. 4 es un ejemplo de resultados obtenidos desde una de las posiciones del detector para la determinación de tres velocidades angulares diferentes. Para el mencionado cálculo, se considera que en la serie de tiempo del campo magnético el intervalo de tiempo transcurrido en dos oscilaciones corresponde a una revolución del aro. Nótese que las oscilaciones no son perfectamente regulares, por lo que se hace un análisis estadístico del tiempo transcurrido correspondiente a cada revolución y con ello se obtiene un valor medio de la velocidad angular de rotación del aro.

Las medidas previas mostraron que para calibrar el experimento se requería un tiempo estimado de 0.5 s, como tiempo de estabilización del motor para todas las velocidades, por lo que no se consideraron las medidas registradas de ese lapso. Pasado el tiempo de estabilización, se mantuvieron las medidas de intensidad de campo magnético según un comportamiento uniforme en las tres velocidades del motor indicadas en la Fig. 4. La diferencia relativa de campo magnético en los picos no fue mayor al 9% y la diferencia en anchura a media altura fue menor al 3% por lo que se consideró la velocidad angular suficientemente constante para el voltaje determinado.

Además, el ajuste de datos se realizó tomando en cuenta las medidas de ruido en la intensidad de

campo magnético, establecidas por el sensor para cada caso particular.

Con la velocidad de giro caracterizada como constante, se registraron los datos de una esfera. En primer lugar, como prueba cualitativa, se advirtió que, aumentándose la velocidad de giro hasta exceder el valor crítico, se dieron cambios en el comportamiento del sistema, con una nueva posición de equilibrio de la esfera.

La notación fijada arbitrariamente diferenció que el lado derecho de la manguera correspondía a un ángulo ϑ_+ , en tanto que el lado izquierdo se denotó como ϑ_- ¹. Para estimar el nuevo punto de equilibrio alrededor del cual la esfera oscilaría y medir el ángulo desplazado por la esfera hasta este punto, se tomaron fotografías empleando dos medios: en primer lugar, una cámara Nikon® HB-45 a 60 fps (tomas por segundo) y, en segundo lugar, una aplicación gratuita para celular con 200 fps.

Para registrar cada nueva medida se hizo lo siguiente: se cortó el suministro de energía eléctrica al motor y se prepararon las cámaras fotográficas y los dispositivos de medida para otros registros digitales. Inmediatamente, se aumentó la velocidad angular respecto a la que dio lugar a los valores anteriores, creándose un registro progresivo, gracias a la repetición del proceso descrito.

Posteriormente, al montaje de base, se adicionaron esferas y fluidos para repetir el experimento. Se añadieron una a una esferas del mismo tipo de diámetro (6.1 ± 0.1) mm y masa (0.97 ± 0.07) g hasta un máximo de 20. Para cada cantidad de esferas, se registraron veinte medidas, explicitándose las posiciones de equilibrio. Esto fue posible gracias a cinco velocidades discretas del motor, mayores al valor crítico.

Seguidamente, se hicieron experimentos reemplazando las esferas por fluidos y empleando mangueras similares para cada fluido con velocidades mayores a la crítica. Se emplearon los siguientes fluidos: en primer lugar, agua destilada teñida con sulfato cúprico², en segundo lugar, aceite de transmisión automática 1QT y, en tercer lugar, aceite de motor SAE10w30.

La última parte del experimento consistió en adquirir datos de un número variable de esferas sumergidas en los tres fluidos mencionados. Esto permitió obtener diagramas de bifurcación para el caso de una esfera y señalar las posiciones de equilibrio en el caso de varias esferas. Al final, se observó cualitativamente la configuración del sistema juntando fluidos inmiscibles en la manguera.

3. RESULTADOS

Se obtuvo, como primer resultado, la bifurcación en términos del parámetro de control, como se estableció en la teoría y que se muestra en la Fig. 5, evidenciándose los datos de una esfera en el aire. La presente investigación ha contrastado contenidos

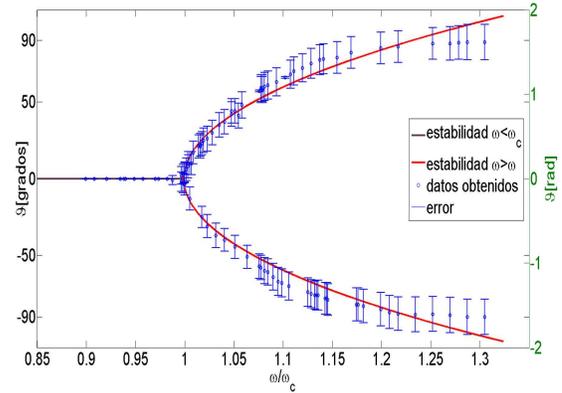


FIG. 5.— (Color online) Bifurcación obtenida experimentalmente para una esfera sumergida en aire. Las líneas continuas corresponden a la teoría dada por el análisis de estabilidad de la Ec. (4).

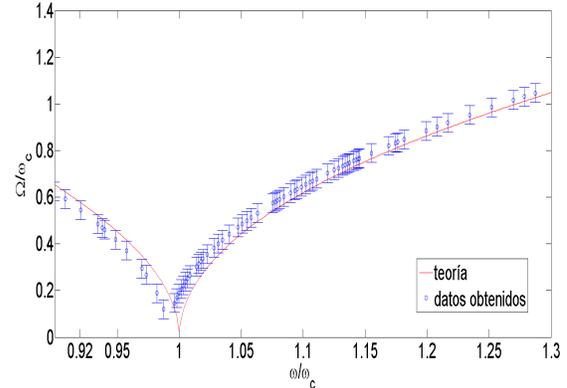


FIG. 6.— (Color online) Frecuencia natural característica del sistema estudiado. La línea continua roja corresponde al cálculo numérico efectuado con el valor teórico de la velocidad angular crítica y los puntos azules a los datos obtenidos experimentalmente.

de la teoría con datos experimentales, ratificando la verosimilitud de la Ec. (5). Esta predice, adecuadamente, el valor de la velocidad angular crítica en 56.71 rad/s, mientras que, ajustando la parábola formada por los datos obtenidos, el valor estimado de ω_c es de (56.2 ± 0.8) rad/s. Para fundamentar tales resultados, se sistematizaron 108 registros, de los que, en 57 casos, la esfera se encontró en un nuevo punto de equilibrio en la rama de ϑ_- ; mientras que, en los otros 51 casos se encontró en la rama de ϑ_+ .

La investigación ha confirmado que la ecuación referida a la frecuencia natural de oscilación Ω de la esfera alrededor de la nueva posición de equilibrio es válida. Dicha ecuación, establecida por Moisy (2003), se corrobora con la gráfica de la Fig. 6 y enuncia lo siguiente:

$$\Omega = (\omega_c^2 - \omega)^{1/2} .$$

Las simulaciones correspondientes a las líneas continuas de las Figs. 5 y 6 se realizaron con base en un código disponible gratuitamente en línea otorgado por Shan He (2006).

¹ Tal convención prevaleció en el registro de todos los datos.

² Para diferenciar los fluidos en las fotografías.

TABLA 1
CARACTERÍSTICAS DE LOS FLUIDOS CONSIDERADOS.
LOS DATOS DE DENSIDAD VOLUMÉTRICA Y VISCOSIDAD ESTÁN TOMADOS PARA 20°C.

Fluido	Densidad [g/cm ³]	Viscosidad [Pa·s]	Volumen tomado [ml]	Temp. medida [K]	Vel. Crítica[rad/s]
Agua destilada	1.07	1×10^{-3}	10 ± 1	290.65	56.5
Líquido de transmisión	0.8978	0.04	10 ± 1	290.15	63.4
Aceite para motor	0.859	0.03	10 ± 1	287.15	62.1

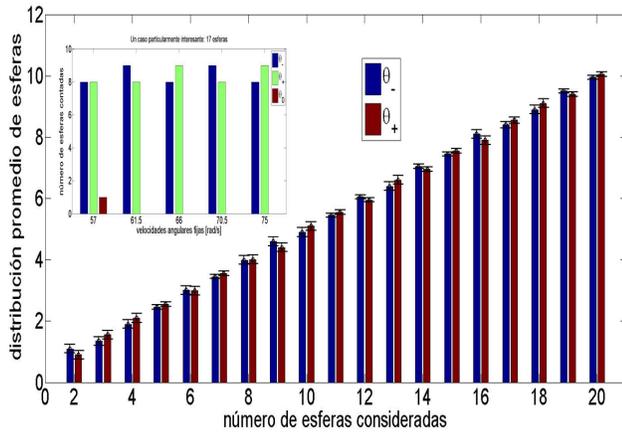


FIG. 7.— (Color online) Distribución promedio de esferas en función del número de esferas consideradas. Como subgráfico, se muestra un ejemplo atípico de una toma de datos con velocidades angulares fijas para 17 esferas.

Se efectuaron pruebas y se tomaron medidas aumentando el número de esferas progresivamente hasta llegar a 20. Para cada caso, hubo veinte repeticiones con cinco velocidades diferentes mayores a la crítica, según las características del motor y el rango de interés. Se establecieron las posiciones de equilibrio para cada esfera con valores positivos o negativos según el desplazamiento angular (ϑ_+ y ϑ_-). La Fig. 7 muestra los histogramas de los nuevos puntos de equilibrio para 20 casos con diferente número de esferas. Los casos 3, 17 y 19 son atípicos, porque en una de las veinte mediciones que hubo para cada uno, se encontraron resultados contrarios a la predicción teórica (con velocidades diferentes). En las mediciones mencionadas (60 en total) una esfera no cambió su posición inicial. Del caso número 17, la Fig. 7 muestra la posición atípica.

La Fig. 8 es una fotografía de la situación atípica con tres esferas. El estudio de las grabaciones respectivas muestra que la esfera que se mantenía en el punto inicial de equilibrio, oscilaba alrededor del mismo y, posteriormente, subía por uno de los brazos de la manguera, siguiendo una trayectoria de la bifurcación. Se trata de un estado de “multiestabilidad”³, porque la permanencia alrededor del punto inicial se dio por 1.4 segundos, en tanto la teoría establece que no debería permanecer oscilando alrede-

³ La denominación “multiestabilidad” se la utiliza para enfatizar que ha sido posible observar una situación que es típicamente de inestabilidad.

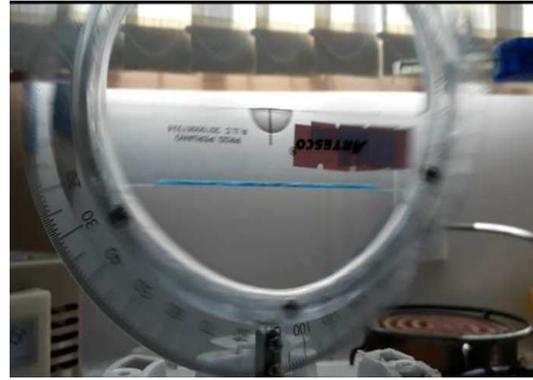


FIG. 8.— (Color online) Situación atípica de “multiestabilidad” con tres esferas y velocidad angular 58.3 rad/s.

dor del mismo.

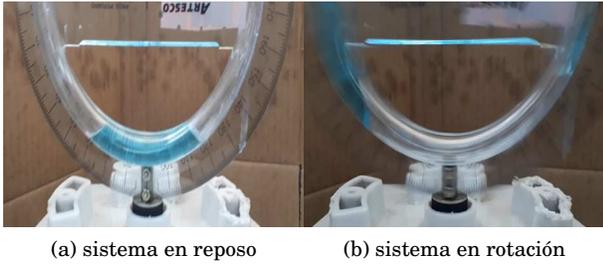
Al realizar el experimento con los tres fluidos indicados en la metodología, se constató la independencia de la masa en la ecuación de movimiento. Hubo 45 mediciones en total, 15 para cada fluido; de modo que, comparando los resultados, se tiene lo siguiente:

- En el caso del agua destilada la distribución de masa no fue simétrica, advirtiéndose en las 15 mediciones una distribución aleatoria, positiva o negativa, por cualquiera de las ramas del sistema. En todos los casos la aleatoriedad mostró una proporción aproximada de 1/3 a la derecha o a la izquierda y de 2/3 a la izquierda o a la derecha.
- En el caso del líquido de transmisión y del aceite para motor, la distribución del fluido fue, en las 30 mediciones, relativamente similar en ambas ramas. Aproximadamente, la mitad del fluido siguió la rama de la derecha y la otra mitad la de la izquierda.

Las propiedades de los fluidos y las velocidades críticas calculadas en cada caso se encuentran en la Tabla 1. Para los experimentos con los tres tipos de fluidos, se estableció la velocidad crítica respecto del momento en que se separan, como la media aritmética de 15 mediciones en cada caso.

La Fig. 9 muestra el comportamiento del agua teñida como caso diferente al comportamiento de los aceites, para los que la división en ambos brazos era altamente simétrica.

Se ha tomado el aire como otro caso del experimento (designado como el primero), diferente a las



(a) sistema en reposo (b) sistema en rotación

FIG. 9.— (Color online) Fotografías de disolución de sulfato cúprico en agua. En la manguera se advierte: (a) el agua en sistema inmóvil; (b) el agua en el sistema girando a velocidad angular mayor a la crítica. Nótese en (b) la distribución asimétrica del agua en ambos brazos de la manguera.

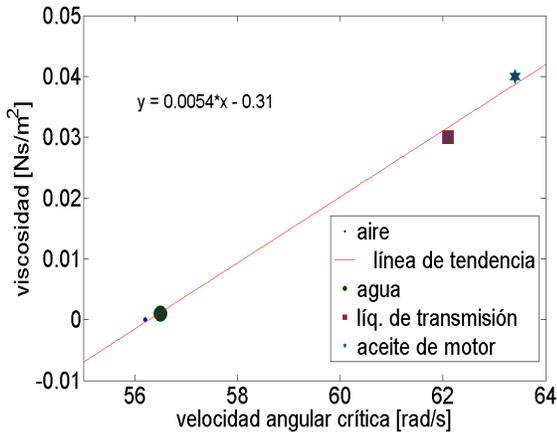


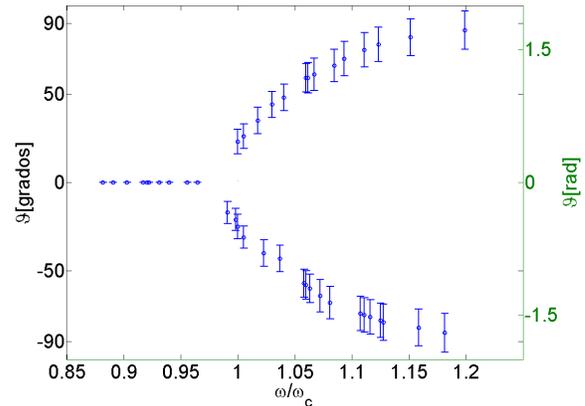
FIG. 10.— (Color online) Velocidad angular crítica estimada en función de la viscosidad de cada fluido. La línea de tendencia establece un coeficiente de correlación de Pearson de $R = 0.9963$.

esferas y a los fluidos, habiéndose advertido en el caso de los fluidos aislados un ligero desplazamiento de la velocidad angular crítica a ser traspasada para observar un cambio cualitativo en el sistema. La Fig. 10 muestra la correlación entre la velocidad angular crítica estimada y la viscosidad de los fluidos estudiados.

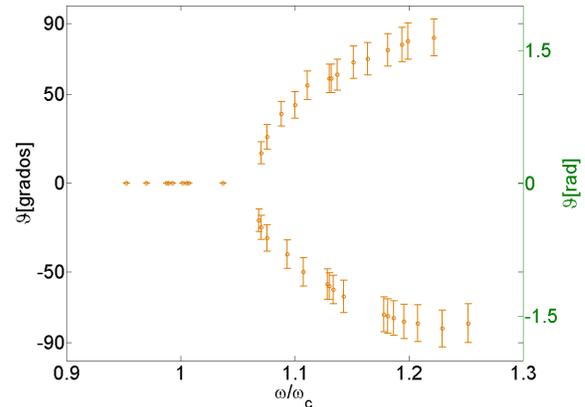
La continuación del experimento se dio sumergiendo una esfera en los tres fluidos. Esto permitió observar los nuevos puntos de equilibrio y elaborar diagramas de bifurcación, de manera análoga al caso de la esfera en aire, mostrado en la Fig. 5.

La Fig. 11 muestra las bifurcaciones obtenidas a partir de las mediciones de una esfera sumergida en los tres fluidos. Al rotar el sistema, la esfera y el fluido se movieron y ascendieron por una rama, de manera tal que la posición de la esfera en el fluido no fue alterada por la velocidad angular ni por la división en cualquiera de las ramas.

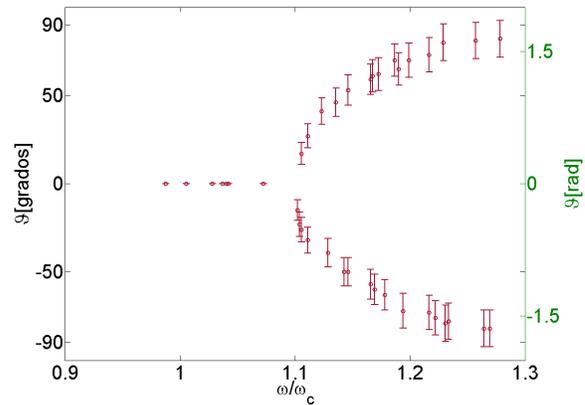
Como en el caso anterior, se aumentó progresivamente el número de esferas en el fluido para estudiar la distribución en ambas ramas de la manguera con el sistema en rotación. La Fig. 9 evidencia la ruptura asimétrica del agua. Los histogramas de la Fig. 12(a) -que muestran un ejemplo de un conjunto de datos- dan lugar a establecer los siguientes análisis:



(a) agua destilada



(b) aceite de motor



(c) líquido de transmisión

FIG. 11.— (Color online) Bifurcaciones de una esfera sumergida en los fluidos considerados. Elaboración a partir de datos experimentales.

- Los experimentos con pocas esferas evidencian la ruptura asimétrica del agua, de manera que existiría preferencia por la rama en la cual se halla mayor cantidad de agua.
- El incremento de esferas con mayor cantidad de agua que las cubra, dio lugar a la equiprobabilidad respecto de cualquier preferencia por

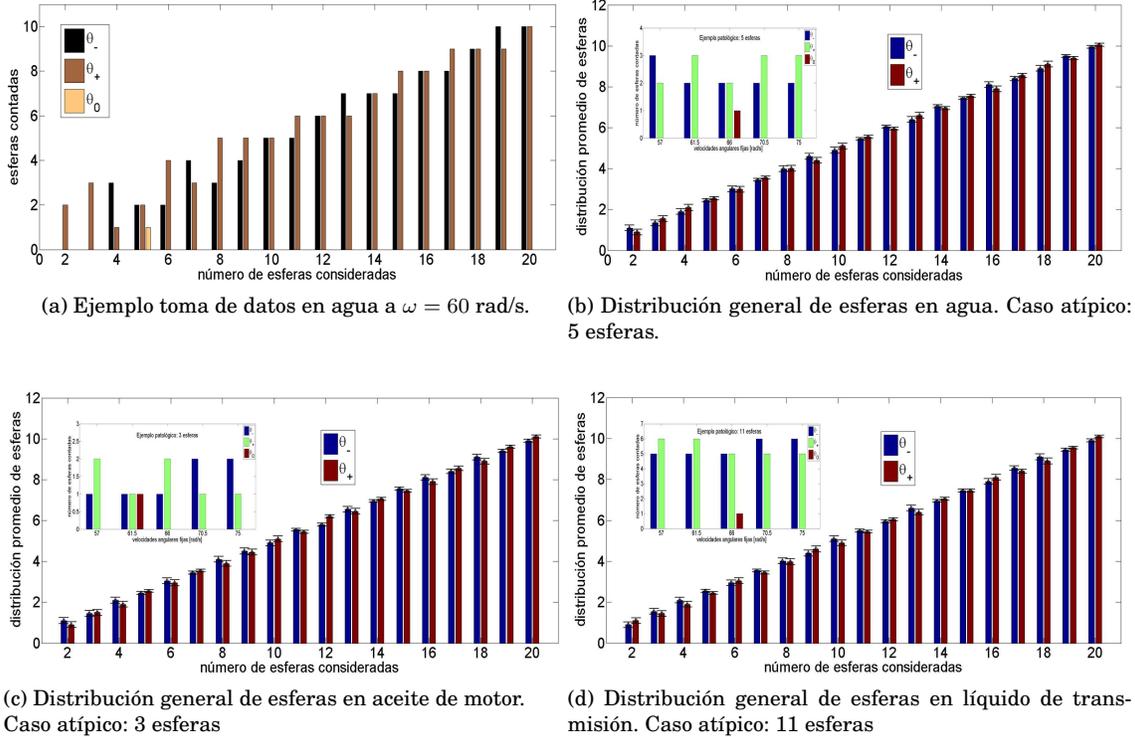


FIG. 12.— (Color online) Histogramas de distribución general de esferas. (a) Ejemplo de toma de datos de la distribución de esferas sumergidas en agua, advirtiéndose que si son pocas esferas hay predominancia de la ruptura asimétrica. Los gráficos (b), (c) y (d) muestran la distribución general de esferas en los tres fluidos considerados, incluyéndose en los subgráficos los casos atípicos de “multiestabilidad”. Un par de videos de las medidas se hallan disponibles en YouTube (2019).

alguna rama en el momento de separación del fluido.

Sin embargo, los histogramas de la Fig. 12(b) (que muestran la distribución promedio de esferas en el agua) absorben estadísticamente el ejemplo de la Fig. 12(a), corroborando que el promedio de 380 medidas no muestra preferencia alguna por cierta rama del sistema. Esta hipótesis nula respecto de la presunción de que existiría necesariamente una preferencia⁴, se corrobora con el promedio de la distribución de esferas en el aire, expresada en la Fig. 7 y con los datos de las figuras 12(b), 12(c) y 12(d) referidas a los fluidos.

Por otra parte, cabe remarcarse que los resultados de la presente investigación han confirmado la “multiestabilidad” para las esferas sumergidas en fluidos, corroborada también en los subgráficos de las figuras 12(b), 12(c) y 12(d).

La Fig. 13 muestra la distribución porcentual de esferas en cada rama para los fluidos considerados, incluyéndose el primer caso referido al aire.

Respecto de los resultados a partir de las observaciones cualitativas del comportamiento del sistema en rotación considerando combinaciones de fluidos inmiscibles, se tiene lo siguiente:

⁴ La hipótesis inicial de la presente investigación fue que existiría una preferencia en la distribución de pocas esferas en el sistema.

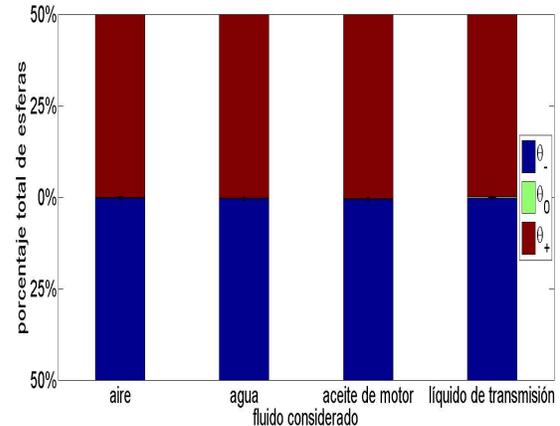


FIG. 13.— (Color online) Distribución porcentual general de esferas en las bifurcaciones de equilibrio. Nótese que las situaciones atípicas correspondientes a la posición ϑ_0 son indistinguibles, porque no representan un porcentaje mayor a 0,8%.

- Al ser sometidos a velocidades angulares mayores a la crítica, en condiciones iniciales parecidas, se registraron configuraciones del sistema muy diferentes.
- Las observaciones cualitativas denotan un espectro amplio de posibles configuraciones del sistema en comparación con la situación de un solo fluido, de una esfera o de varias (sea en aire o sea sumergidas en los tres fluidos estu-

diados); concluyéndose que existirían varias dificultades en los estudios cuantitativos respectivos.

4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

La distribución en las nuevas posiciones de equilibrio para el caso de una esfera en aire da la noción de un comportamiento equiprobable respecto al número de veces que la esfera va a cada rama, de tal forma que cuanto mayor sea el número de experimentos realizados, menor debiera ser la diferencia entre el número de casos correspondientes a ambas ramas de la bifurcación. De esta forma, el experimento con una esfera refuta los contenidos de los manuales de texto de dinámica no lineal, en lo referido a que solo pueden ser observadas determinadas situaciones de equilibrio con una notoria tendencia hacia una rama de bifurcación (ver Nicolis o Strogatz). Gracias a un montaje sencillo calibrado y a la considerable cantidad de datos registrada, la presente investigación ha permitido elaborar diagramas de bifurcación en los que no existe preferencia evidente por seguir alguna de las ramas.

La diversidad de experimentos con fluidos diferentes ha dado como resultado la obtención de diagramas de bifurcación sin tendencia por alguna rama, puesto que la diferencia porcentual en la distribución de los nuevos estados de equilibrio del sistema no supera el 5,6%. Cualitativamente, los fluidos inmiscibles permiten inferir que la sensibilidad a condiciones iniciales es mayor a la sensibilidad que se da en las situaciones correspondientes a una o varias esferas, o a un solo fluido.

La investigación concluye un comportamiento equiprobable del sistema (cumplimiento de la hipótesis ergódica), particularmente si se trata de un montaje con una cantidad variable de esferas (independientemente del fluido en el cual se hallan sumergidas), en lo concerniente a la nueva situación de equilibrio.

Los resultados de la investigación muestran que en las configuraciones estudiadas, independientemente del modelo que se construya con una o varias es-

feras, o con diferentes fluidos aislados, la masa en las ecuaciones de movimiento puede considerarse irrelevante. Sin embargo, el hecho que la disgregación en el caso del agua sea notoriamente asimétrica -lo que no sucede con los aceites- permite inferir que se deben considerar otras variables para un modelo más completo que tome en cuenta características del fluido considerado. Los resultados de la Fig. 10 complementan experimentalmente el modelo postulado por Wellstead (1983). En tal modelo se toma el sistema del aro rotante, analizando la dinámica de la esfera en analogía con un fluido que es transportado en un vehículo giratorio.

Finalmente, la investigación establece perspectivas de trabajo futuro tomando las velocidades angulares críticas de los fluidos para determinar la viscosidad u otras propiedades de los mismos, o estimar el valor de la aceleración debida a la gravedad. También se plantea como perspectiva trabajar únicamente en el rango de velocidades angulares críticas obtenidas, esperando encontrar configuraciones interesantes, como la posibilidad de la subida por una de las ramas del conjunto fluido y esfera, sin presentarse disgregación del fluido.

Naturalmente, queda abierta la posibilidad de nuevos montajes experimentales que permitan una mejor descripción cuantitativa de configuraciones más complicadas del sistema, como ser el caso de fluidos inmiscibles, o permitan la obtención de medidas precisas de variables de interés, como la distribución en masa de los fluidos al ser sometidos a velocidades mayores a la crítica.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Eduardo Palenque, Ph.D., por brindarnos acceso al Laboratorio de Materia Condensada y a Joaquín Roncal, por su invaluable ayuda para el montaje experimental.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Burov, A.A. & Yakushev, I.A. (2014). Bifurcations of the relative equilibria of a heavy bed on a rotating hoop with dry friction. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **78**, 460-467.
- Goldstein, H., Poole, C. & Safko, J. (2001) *Classical Mechanics*, 3^a edición. Ed. Addison-Wesley. ISBN 9780201657029.
- He, S. (2006). *Bifurcation and Chaos*. School for Computational Science, University of Birmingham. Web. 19 Septiembre 2019.
- Johnson, A.K. & Rabchuk, J. (2009). A bead on a hoop rotating about a horizontal axis: A one-dimensional ponderomotive trap. *American Journal of Physics*, **77**, 1039.
- Marion, J. (1998). *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 2^a edición. Ed. Reverté, S.A. ISBN 84-291-4094-8.
- Masoller, C. (2011). *One-dimensional nonlinear systems*. Nonlinear systems, chaos and control in Engineering, Universidad Politècnica de Catalunya. Web. 22 Septiembre 2019.
- Moisy, F. (2003). Supercritical bifurcation of a spinning hoop. *American Journal of Physics*, **71**, 999.
- Nicolis, G. (1995). *Introduction to nonlinear science*. Cambridge University Press. ISBN 0-521-46228-2.
- PASCO Magnetic Field Sensor. Instruction Sheet and First Measurements. CI-6520A. Web. 7 octubre 2019.
- Raviola, L., Véliz, M., Salomone, H., Olivieri, N. & Rodríguez, E. (2017). The bead on a rotating hoop revisited: an unexpected resonance. *European Journal of Physics*, **38**, 15005.
- Shivamoggi, B. (1997). *Nonlinear Dynamics and Chaotic Phenomena: An Introduction*. Ed. Springer Science, Dordrecht. ISBN 978-94-017-2442-5.
- Strogatz, S. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books Publishing, L.L.C. ISBN 0-201-54344-3.
- Wellstead, P. (1983). The Ball and Hoop system. *Automatica*, **19**(4), 401-406.
- YouTube. Rotating hoop with bead, part 1 and 2. LBLG. <https://www.youtube.com/channel/UCj2qCgbtmfm4FgtBR-zg0tw>

ESTUDIO CIENCIOMÉTRICO DE LA REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA CON ELEMENTOS DE ANÁLISIS DE REDES COMPLEJAS

SCIENTOMETRIC STUDY OF THE REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA WITH ELEMENTS OF COMPLEX NETWORKS ANALYSIS

VERÓNICA SUBIETA-FRÍAS[†] & GONZALO MARCELO RAMÍREZ-ÁVILA[‡]

Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés
Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

(Recibido 25 de noviembre de 2019; aceptado 29 de diciembre de 2019)

RESUMEN

Se llevó a cabo un análisis bibliométrico de la Revista Boliviana de Física (RBF) desde tres perspectivas: utilizando estadísticas descriptivas, clasificando variables con respecto al tamaño del rango y utilizando análisis de redes complejas. En el primer enfoque, se consideraron los aspectos relacionados con el número de artículos, autores, instituciones y países presentes en cada una de las ediciones de la RBF y su evolución. En el segundo, se buscaron variables ordenadas por rango con el fin de verificar el cumplimiento o no de leyes de potencia. Finalmente, se construyeron diferentes tipos de redes complejas concernientes a los países de las instituciones a las que están afiliados los autores con el fin de caracterizar aspectos tales como diversidad, colaboración, productividad e influencia.

Código(s) PACS: 85.75.-k – 02.10.Ox – 01.30.-y

Descriptores: Sistemas complejos – Teoría de grafos – Literatura y publicaciones de física.

ABSTRACT

A bibliometric analysis of the Revista Boliviana de Física (RBF) was carried out from three perspectives: using descriptive statistics, classifying variables concerning the size of the range and using complex network analysis. In the first approach, we considered aspects related to the number of articles, authors, institutions, and countries present in each of the editions of the RBF and its evolution. In the second, we searched variables ordered by rank to verify compliance or not of power laws. Finally, we built different types of complex networks related to the countries of the institutions to which the authors are affiliated with the aim of characterizing aspects such as diversity, collaboration, productivity, and influence.

Subject headings: Complex systems – Graph Theory – Physics literature and publications.

1. INTRODUCCIÓN

En los primeros cursos de física y estadística, a menudo se señala que se pueden distinguir las variables cuantitativas de las cualitativas, haciéndose énfasis en el hecho de que existen situaciones en las que no se puede hacer la cuantificación de ciertos fenómenos tales como los sentimientos y las relaciones sociales. Sin embargo, a medida que la ciencia avanza y se tienen nuevos conceptos y herramientas, fenómenos ligados a ciencias sociales y políticas que antes se consideraban como imposibles de cuantificar hoy en día son abordados usando indicadores que surgen del análisis de las posibles interacciones que pueden experimentar los elementos que forman parte de este tipo de sistemas (individuos e instituciones) y que permiten construir modelos basados en sistemas complejos. Por otra parte, la aplicación de la

dinámica no lineal es aún más evidente dado el crecimiento significativo de la literatura científica en los últimos años como es referido por Tabah (1992). Es así que surgen trabajos que analizan sistemas que usualmente no son susceptibles a la modelización tales como la estabilidad de las democracias que estudia Wiesner *et al.* (2019) y más aún, hay nuevos campos de la física como la sociofísica como lo explica de manera sencilla Schweitzer (2018). El análisis de este tipo de sistemas ha merecido también atención en la Revista Boliviana de Física (RBF), tal como se evidencia en el trabajo de Subieta-Vásquez & Ramírez-Ávila (2007) sobre la aplicación de procesos estocásticos en el crecimiento económico en sociedades sujetas a amenaza delincriminal, y en el de Subieta-Frías & Ramírez-Ávila (2017) en el que se caracteriza un modelo de toma de decisiones basado en redes complejas.

Cualquier tipo de evaluación y comparación tienen fuertes rasgos subjetivos principalmente cuando es-

[†]veronica.subieta.f@gmail.com

[‡]<http://www.fiums.a.edu.bo/docentes/mramirez/>

tos aspectos están en relación al rendimiento y calidad de seres humanos. Para disminuir la subjetividad se introducen métodos que permitan evaluar rasgos y comportamientos claves que posibiliten tener una mejor idea en cuanto a la calidad y clasificación. Uno de los aspectos importantes para medir la calidad y el impacto científico que tienen países, instituciones, publicaciones e individuos es el recurrir a la cienciometría que de acuerdo con Mingers & Leydesdorff (2015) se la define como el estudio de los aspectos cuantitativos del proceso científico como sistema de comunicación en el que puede estar involucrada una actividad económica como lo señala Tague-Sutcliffe (1992) quien además considera que es una parte de la sociología de la ciencia encontrando una gran aplicación en la formulación de políticas científicas. En 1973, Merton & Storer (1973) retoman el término “ciencia de la ciencia”, entendido hasta entonces como el hecho de estudiar la ciencia desde los aspectos psicológicos, sociológicos, históricos y filosóficos para darle esa categoría a la cienciometría. Considerando la perspectiva anterior, el término “la ciencia de la ciencia” no debe entenderse, sin embargo, como una disciplina que es superior a otras. En este sentido, las relaciones entre la cienciometría y otras disciplinas serían similares a las de la filosofía, como se había asumido anteriormente. Pero la cienciometría no debe considerarse como un campo que está por encima de otros campos científicos: la cienciometría no es la ciencia de las ciencias sino una ciencia de la ciencia para la ciencia como lo especifica Vinkler (2010). Desde un punto de vista más técnico, la cienciometría aplica los métodos y herramientas del análisis de datos a las bases de datos bibliométricas para calcular indicadores de producción en ciencia, tecnología e innovación tal como lo señala Cantú-Ortiz (2017), lo que ha permitido cómo entender las citas científicas; cómo medir el impacto científico, incluido el de investigadores, revistas e instituciones; cómo comparar las disciplinas científicas desde el punto de vista de la cienciometría; y que tipo de indicadores deben ser utilizados en la evaluación, política y gestión de la investigación. Con los aspectos mencionados anteriormente, la cienciometría también puede evaluar la importancia de las colaboraciones, las tendencias en lo que a investigación científica se refiere, y la evolución de la ciencia y la tecnología. Al haber muchas maneras de intentos de cuantificar los diferentes aspectos señalados anteriormente y que son objeto de estudio de la cienciometría, Vinkler (2001) sugirió la definición de categorías básicas de la cienciometría tales como los elementos, el conjunto, la medida, la unidad, la organización y el indicador. De manera más sencilla, Vinkler (2010) señala que los supuestos básicos de la cienciometría evaluativa (la unidad de información de las ciencias es el artículo científico, y la unidad de impacto es la cita) aunque estas unidades, a veces son solo aproximaciones crudas y estadísticas. Ha cobrado tal importancia la cienciometría que entre otras cosas, desde 1978, hay una revista, *Scientometrics* (1978), dedi-

cada exclusivamente a estos aspectos y que justifica su surgimiento como resultado de la gran importancia que adquiere el cuantificar la investigación científica al convertirse esta en una especie de actividad económica cuyos recursos debieran administrarse de la manera más eficiente para que la distribución de las ayudas financieras a la investigación no se la realice subjetivamente tal como lo explica de Solla Price (1978) en el editorial inaugural de esta revista. Al presente, *Scientometrics* ha publicado 375 números y 6045 artículos como se puede constatar en el portal WEB de *Scientometrics* (2020). Ha trascendido tanto la investigación en cienciometría que incluso hay estudios cienciométricos dedicados exclusivamente a la producción científica en cienciometría como el realizado por Moonghali *et al.* (2011).

En el proceso de cuantificación de la investigación científica y su impacto, existen otros campos relacionados con la cienciometría, en especial se pueden mencionar a la bibliometría, la informetría, la cibermetría y la denominada *altmetrics*. La bibliometría como ciencia evaluativa compara el impacto de las citas de los investigadores, los grupos de investigación y las instituciones tanto temporalmente como a nivel de las diferentes disciplinas como lo indican Bornmann & Marx (2015) y una revisión de los conceptos básicos de la misma está dada por Padhy *et al.* (2019). El término *informetría* que aparece en 1979 tal como lo menciona Tague-Sutcliffe (1992), tiene un alcance teórico y práctico en el estudio de los aspectos cuantitativos de la información en cualquier forma, no solo registros o bibliografías, y en cualquier grupo social, no solamente científicos. La *cibermetría* aparece en 1998 y como lo sostienen Mingers & Leydesdorff (2015) tiene como fin el evaluar la calidad de la producción de información con base en el análisis de documentos presentes en la WEB. Finalmente, la denominada *altmetrics* por su carácter de una métrica alternativa y también conocida como *cienciometría 2.0* es una forma de medir el impacto científico con base en la dinámica de las redes sociales en general, tales como Twitter o Facebook, así como en las más específicas como Mendeley, CiteULike como lo sostienen Galligan & Dyas-Correia (2013) o también en ResearchGate (RG) como lo estudiaron Yu *et al.* (2016) y otras como Academia.edu, Microsoft Academic Search (MAS) y Google Scholar Citations (GSC) que fueron utilizadas por Ortega (2015) para medir y comparar el impacto de los miembros de su institución.

La cienciometría trabaja con indicadores de productividad e impacto. En el primer caso, una de las bases es la utilización de las ideas de Zipf (1949) concernientes a la distribución de tamaños de rango. Para el segundo caso, se estudian patrones de citas y el impacto de las mismas a través de índices tales como el introducido por Hirsch (2005), denominado índice-*h* que es la coincidencia del número de artículos *h* que tienen este número de citas. Evidentemente, este índice no representa fielmente el impacto de autores, instituciones o países por lo que su uso debe ser hecho con las precauciones nece-

sarias como lo señala Guilak & Jacobs (2011). Por lo anteriormente mencionado, surgieron intentos de mejorar el índice- h como lo hicieron Cormode *et al.* (2013) y Dienes (2015), además de la introducción del índice- g por Egghe (2006); este último definido como el rango más alto, de modo que las primeras g publicaciones tienen, en conjunto, al menos g^2 citas, por lo que $g \geq h$. Posteriormente, Egghe (2008) hace una extensión de los índices h y g a los casos fraccionarios. Finalmente, en el núcleo del índice- h , se proponen otros indicadores complementarios tales como el índice- a que es el promedio de citas de las publicaciones, el índice- m que es el índice h dividido por el número de años desde la primera publicación y el índice- R que es la raíz cuadrada de la suma de las citas de las publicaciones que forman parte del núcleo del índice- h . Los anteriores indicadores son bien explicados por autores tales como Adler *et al.* (2009) y Kosmulski (2013). También es interesante mencionar al índice- r introducido por Rahul (2013) que tiene como objetivo el de identificar la calidad potencial de un trabajo, considerando para ello, el factor de impacto (IF) acumulado correspondiente a la suma de los factores de impacto de las revistas en que un artículo fue citado y el número de citaciones que tuvo cada artículo (c). Así, $r = \sum_{i=1}^N IF_i \times c_i$, donde N es el número total de artículos. Los índices h y r combinados nos dan una imagen más clara en cuanto a la calidad del trabajo.

El estudio de la cienciometría como una herramienta poderosa para poder elaborar políticas científicas y evaluar la productividad científica de investigadores, instituciones y países está en expansión y numerosos trabajos al respecto han sido elaborados para la evaluación de determinadas temáticas como lo hacen Bordons *et al.* (2015) con nanociencia, farmacología, y estadística; Sasvári *et al.* (2019) con derecho y economía en Hungría; Prakash & Arumugam (2017) en biotecnología, Siddiqui & Ran (2018) en biología experimental, y Rajgoli *et al.* (2017) en teledetección, en todos los casos en India; o aún el interesante análisis que hacen Moonghali *et al.* (2011) de las publicaciones en cienciometría. La evaluación de la producción científica en diferentes países también ha sido estudiada por CAICYT-CONYCEC (2007) para Argentina, utilizando el Science Citation Index (SCI) entre 1990 a 2004; por Bucheli *et al.* (2012) para Colombia en términos de su capital de acumulación intelectual; por Lancho-Barrantes & Cantú-Ortiz (2019) para México considerando la producción científica en ciencia y tecnología; por Vilchez-Román (2014) para Perú, por medio del índice- h ; también la situación de los seis países de América Latina considerados como los más importantes en ese tiempo (Brasil, Argentina, México, Chile, Venezuela y Colombia) comparados con países emergentes del sudoeste asiático (Taipei, Corea del Sur y Singapur), trabajo realizado por De Moya-Anegón & Herrero-Solana (1999); o la extensa comparación para 95 países realizada por Cole & Phelan (1999), en la cual también se utiliza el

SCI entre otros indicadores. Un trabajo interesante para cuantificar la visibilidad científica de una universidad colombiana es expuesto por Uribe-Tirado *et al.* (2019) que utiliza el impacto altmétrico de los investigadores y cuyo método podrá ser aplicado a otras universidades. Debemos señalar también que Achá (2018) realizó una estadística para mostrar la productividad científica en la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), en su Facultad de Ciencias Puras y Naturales, así como en su Carrera de Biología. La utilización de este tipo de herramientas, llega también a situaciones en las que se evalúa la cuantía en la que un determinado tópico ha sido estudiado, como lo hicieron Yeung *et al.* (2020) en el caso de los compuestos denominados lignanos (clase de metabolitos secundarios encontrados en plantas y con efectos antitumorales).

Por todos los aspectos mencionados anteriormente, está claro que la cienciometría reviste una capital importancia; sin embargo, al no tener indicadores completamente objetivos, a veces se tienen situaciones que pueden llevar a resultados engañosos en desmedro del avance científico como lo apunta Şengör (2014).

El presente trabajo considera como parámetros relevantes el tipo de artículo al cual se le asigna un determinado peso dependiendo si el mismo es un artículo arbitrado o si es simplemente una contribución; también se consideran a autores, afiliaciones y países. Así, el artículo está estructurado del siguiente modo: en la Sec. 2 se hace un análisis estadístico de la RBF considerando valores medios y distribuciones de los parámetros señalados más arriba que evolucionan en el curso de los números publicados de la RBF. Posteriormente, en la Sec. 3 se clasifican y ordenan los parámetros mencionados anteriormente en términos del número de artículos asociados con cada uno de ellos, lo que permite la pertinencia o no de la ley de Zipf. Un análisis basado en redes complejas es descrito en la Sec. 4 donde el concepto principal está ligado a la consideración del sistema como una red de redes; en este análisis se cuantifican diferentes características de las redes asociadas a las cuales consideramos desde tres puntos de vista: redes simétricas no pesadas y pesadas, además de redes asimétricas pesadas. Finalmente, en la Sec. 5 se exponen las conclusiones y perspectivas de esta investigación.

2. ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Para los análisis bibliométricos básicos, es importante definir ciertas cantidades que puedan proporcionar información relevante acerca de las publicaciones y de los patrones que puedan aparecer en ellas. Algunas de estas cantidades son: el número de artículos (NP), el número total de autores (NA), el número de autores diferentes (DA), el promedio de autores por artículo ($A_{av} = NA/NP$), el número promedio de artículos por autor ($P_{av} = NA/DA$), entre otras, tal como lo plantean Yoshikane *et al.* (2009). Así, los aspectos de estadística descriptiva a ser tomados en cuenta en este trabajo, están en

TABLA 1
 DISTRIBUCIÓN ANUAL DE LA CANTIDAD DE ARTÍCULOS, AUTORES, INSTITUCIONES Y PAÍSES PARA LA RBF.

Año	# de artículos NP	# de aut. NA	# de aut. dif. DA	# de inst. NI	# de países NC
1995	12	27	25	7	3
1996	12	43	36	8	5
1997	10	42	35	11	5
1998	11	40	36	9	5
1999	16	80	71	23	11
2000	13	42	39	12	8
2001	34	45	28	3	4
2002	10	19	17	5	4
2003	13	35	29	8	5
2004	11	35	32	14	5
2005	15	32	26	6	5
2006	13	24	22	8	4
2007	14	53	45	16	5
2008	14	35	27	3	3
2009	8	15	15	2	1
2010	15	24	22	4	2
2011	31	162	124	32	15
2012	11	33	26	10	3
2013	4	10	10	1	1
2014	10	24	21	8	4
2015	9	44	42	15	8
2016	10	53	51	15	8
2017	10	34	29	11	3
2018	8	22	19	2	2
Totales	314	973	500	156	30

TABLA 3
 PRODUCTIVIDAD ANUAL EN TÉRMINOS DE AUTORES, INSTITUCIONES Y PAÍSES PARA LA RBF.

Año	Prod. por autores $PA = \frac{NP}{NA}$	Prod. por aut. dif. $PD = \frac{NP}{ND}$	Prod. por inst. $PI = \frac{NP}{NI}$	Prod. por países $PC = \frac{NP}{NC}$
1995	0.44	0.48	1.71	4.00
1996	0.28	0.33	1.50	2.40
1997	0.24	0.29	0.91	2.00
1998	0.28	0.31	1.22	2.20
1999	0.20	0.23	0.70	1.45
2000	0.31	1.21	1.08	1.63
2001	0.76	0.59	11.33	8.50
2002	0.53	0.45	2.00	2.50
2003	0.37	0.34	1.63	2.60
2004	0.31	0.58	0.79	2.20
2005	0.47	0.59	2.50	3.00
2006	0.54	0.31	1.63	3.25
2007	0.26	0.52	0.88	2.80
2008	0.40	0.53	4.67	4.67
2009	0.53	0.68	4.00	8.00
2010	0.63	0.25	3.75	7.50
2011	0.19	0.42	0.97	2.07
2012	0.33	0.40	1.10	3.67
2013	0.40	0.48	4.00	4.00
2014	0.42	0.21	1.25	2.50
2015	0.20	0.20	0.60	1.13
2016	0.19	0.34	0.67	1.25
2017	0.29	0.44	0.91	3.33
2018	0.36	0.38	4.00	4.00
Totales	0.32	0.63	2.01	10.47

TABLA 2

NÚMERO DE REGISTROS PARA ESTABLECER EL PATRÓN QUE SIGUEN LOS AUTORES, INSTITUCIONES Y PAÍSES EN TÉRMINOS DEL NÚMERO DE COMPONENTES EN LOS QUE APARECEN EN LOS ARTÍCULOS.

Número de componentes o patrón	autores	instituciones	países
único	137	254	266
dos	65	33	33
tres	42	9	9
cuatro	25	7	3
cinco	14	0	0
seis	6	0	3
más de seis	25	11	0
Totales	314	314	314

relación con la distribución de artículos, autores, instituciones y países a lo largo de los años de vida de la RBF; lo que se muestra en la Tabla 1. Otro aspecto estadístico que se puede describir es el número de registros relacionados a la cantidad de autores, instituciones y países por artículo, datos que se muestran en la Tabla 2. Por ejemplo, si en esta tabla se indica 137 registros de autores de patrón único, significa que hay 137 artículos publicados que tienen un único autor; si indica 9 registros de países de patrón 3 significa que hay 9 artículos publicados cuyos autores pertenecen a 3 países diferentes.

La productividad y colaboración sirven también para el análisis a través de A_{av} o su inversa, definida

como la productividad por autor ($PA = NP/NA$), cantidades expresadas en la Tabla 1. En tanto que el grado de colaboración descrito por Prakash & Arumugam (2017) se define como $C = \frac{Nm}{Nm+Ns}$, siendo Nm , el número de artículos con múltiples autores y Ns , el número de artículos con un único autor, cantidades expresadas para el caso acumulado, en la Tabla 2. Es evidente que la productividad y grado de colaboración pueden extenderse como concepto a instituciones y países y por ello, en la Tabla 3, se muestra la productividad anual de autores, instituciones y países. Finalmente, en la Tabla 4, se muestra el grado de colaboración ($C(X) = \frac{Nm(X)}{Nm(X)+Ns(X)}$) para autores ($X = A$), instituciones ($X = I$) y países ($X = C$). Por otra parte, la RBF, tiene características que son importantes a ser tomadas en cuenta, tales como el hecho de que podemos distinguir entre artículos científicos originales que son los que pasan por un proceso de arbitraje y los otros tipos de artículos que los denominamos genéricamente como contribuciones (revisiones, enseñanza e historia de la física). Con base en los resultados mostrados en las Tablas 1–4, se obtienen los histogramas que dan cuenta de los aspectos descriptivos en lo que se refiere a número de artículos, productividad y colaboración. Así, la evolución en el número de los diferentes artículos se muestra en la Fig. 1, donde se observa que el número de artículos publicados por año presenta pocas variaciones, tanto en artículos originales o ar-

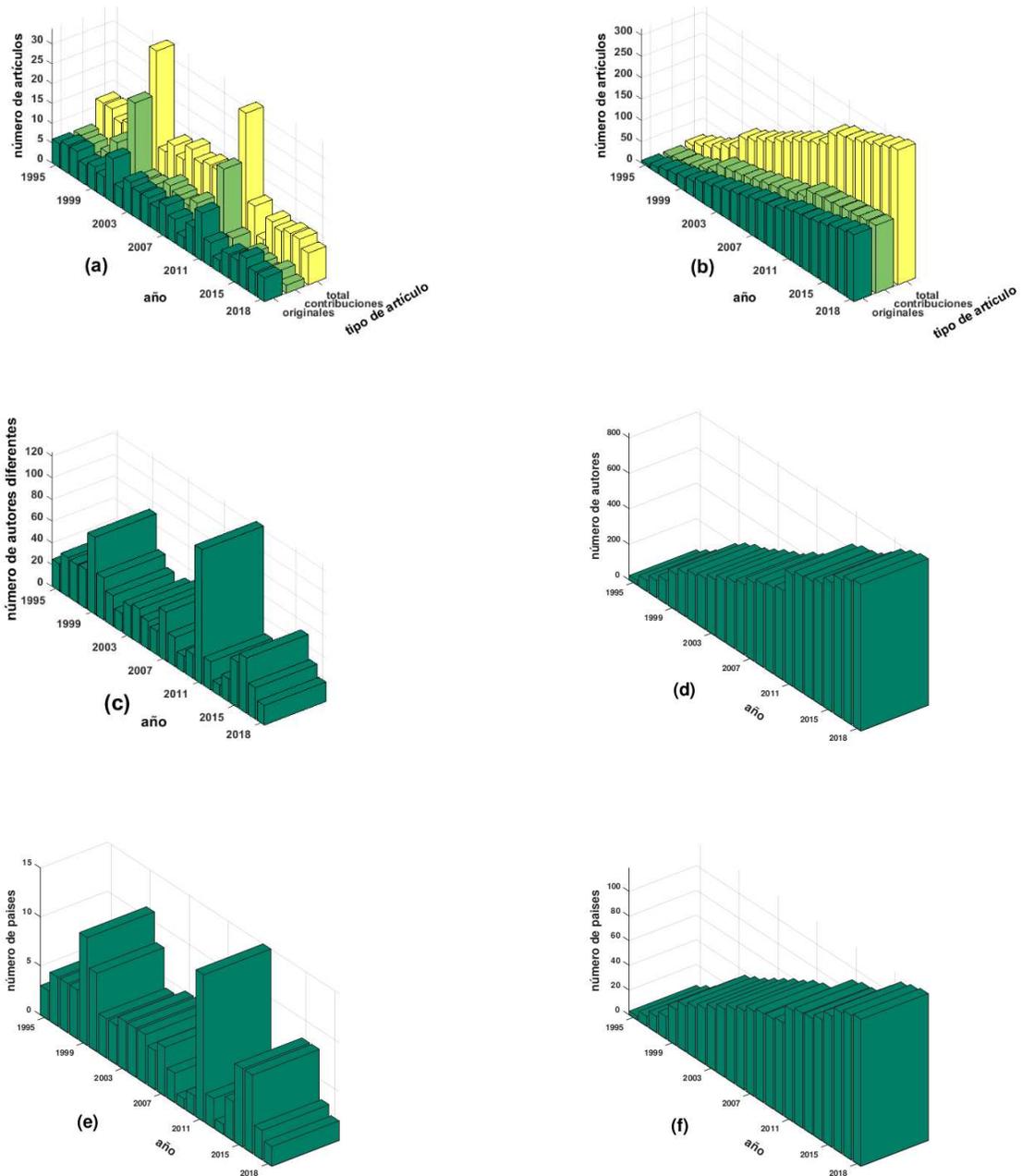


FIG. 1.— (a) Número de artículos por año, (b) número de artículos acumulados por año, (c) número de autores por año, (d) número de autores por año acumulados, (e) número de países por año, (f) número de países por año acumulados

bitrados como en otras contribuciones, teniéndose solo dos años extraordinarios en 2001 y 2011 con un número notablemente mayor de artículos en comparación a los otros años. En la Fig. 1(b) se observa un crecimiento casi lineal en la evolución del número de artículos. Comportamientos similares se tienen para el caso del número de autores diferentes y países de los autores como se muestran en las Figs. 1(c)–(d) y en las Figs. 1 (e)–(f) respectivamente.

En cuanto a la productividad por autores, países e instituciones, la evolución de las mismas se mues-

tra en la Fig. 2, donde no se observa una tendencia definida al transcurrir los años ya se presentan incrementos y decrementos alrededor de un valor medio que para autores es 0.37, para autores diferentes es 0.44, para instituciones es 2.24 y para países es de 3.36, sólo destacan nuevamente los valores atípicos del año 2001. En la Fig. 3 se muestra el grado de colaboración entre autores ($C(A)$), instituciones ($C(I)$) y países ($C(C)$). Se observa que, naturalmente, la colaboración entre autores es mayor a la colaboración entre instituciones y países; siendo estas dos últimas aproximadamente del mismo orden.

TABLA 4
GRADO DE COLABORACIÓN ANUAL PARA AUTORES,
INSTITUCIONES Y PAÍSES EN LA RBF.

Año	autores $C(A)$	instituciones $C(I)$	países $C(C)$
1995	0.500	0.167	0.083
1996	0.667	0.250	0.250
1997	0.600	0.200	0.200
1998	0.455	0.091	0.091
1999	0.563	0.188	0.188
2000	0.385	0.154	0.154
2001	0.206	0.000	0.000
2002	0.400	0.200	0.100
2003	0.769	0.231	0.154
2004	0.636	0.364	0.273
2005	0.400	0.200	0.800
2006	0.462	0.231	0.154
2007	0.571	0.214	0.214
2008	0.571	0.143	0.143
2009	0.375	0.000	0.000
2010	0.533	0.067	0.067
2011	0.839	0.452	0.290
2012	0.636	0.091	0.091
2013	1.000	0.000	0.000
2014	0.600	0.300	0.200
2015	0.889	0.333	0.222
2016	0.500	0.300	0.300
2017	0.700	0.200	0.100
2018	0.875	0.000	0.000
Totales	0.561	0.191	0.966

Lo anterior se debe a que de cada institución generalmente participan varios investigadores y no sólo uno en la elaboración de un artículo.

3. LEYES DE POTENCIA

Lotka (1926) reporta un resultado relacionado con aspectos cuantitativos en el cual, encuentra que la distribución de frecuencia de la productividad científica (porcentaje de autores vs. número de citas) sigue una ley potencial del tipo p^{-n} , siendo $n \approx 2$. Posteriormente, Zipf (1949), generaliza este tipo de resultados a leyes de potencia en general. Finalmente, una reevaluación de la denominada ley de Lotka es realizada por MacRoberts & MacRoberts (1982). Con base en los datos de la RBF se busca si se presentan estas leyes de potencia, para ello, se realiza un ajuste a los datos del número de autores en función del número de artículos publicados y el peso asignado a la producción como función del rango de autores. Se verifica como se puede ver en la Fig. 4 que el comportamiento corresponde a una ley de potencia con valor para la potencia de -2.567, valor que se acerca a la ley de potencia de Lotka que tiene el valor -2. En la Fig. 5 que da cuenta del peso de la producción en función del rango de autores también se observa un comportamiento de ley de potencia con valor de -0.788 para la potencia. La Fig. 4(a) parece presentar un buen ajuste a una ley de potencia; sin embargo, la representación en ejes logarítmicos (Fig. 4(b)), muestra que la ley de potencia es solamente válida de manera parcial hasta autores que cuentan con alrededor de 10

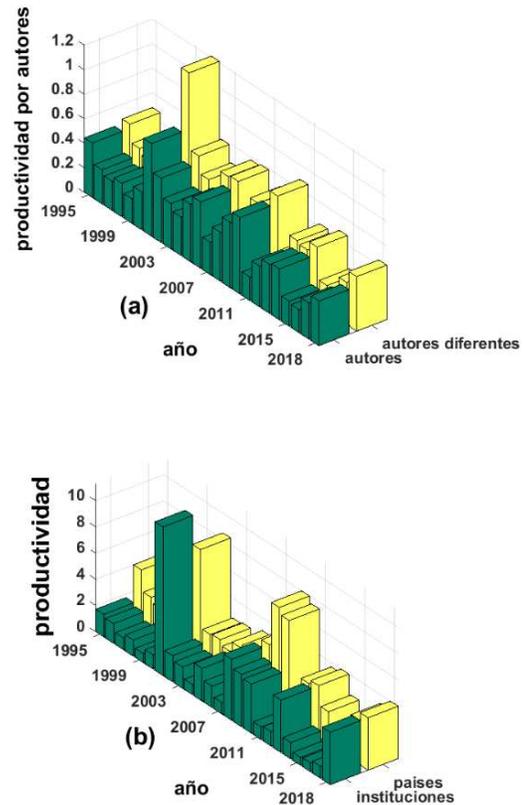


FIG. 2.— (a) Productividad por autores diferentes y repetidos, (b) productividad de instituciones y países

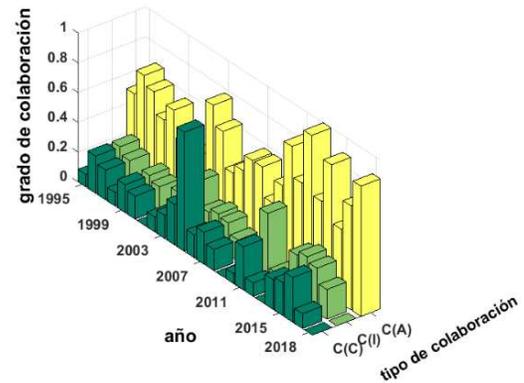


FIG. 3.— Grado de colaboración para autores ($C(A)$), instituciones ($C(I)$) y países ($C(C)$).

artículos. Por otro lado, se tiene un grupo de autores con una gran cantidad de artículos (de autores que son parte de las instituciones que editan la RBF, lo que se puede considerar como una fuerte endogeneidad que ocasiona que estos autores no formen parte de la ley de potencia esperada. La Fig. 5(a) también parece obedecer a una ley de potencias pero la representación doble logarítmica muestra una distribución que se asemeja a la típica distribución en forma de “rodilla” muy común en los espectros en-

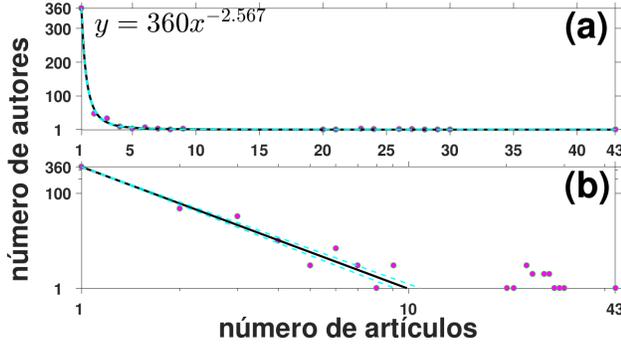


FIG. 4.— Distribución en rango del número de autores de acuerdo con el número de artículos que publicaron. (a) Se muestra un ajuste de tipo ley de potencia con un valor para la misma de -2.567 . (b) Representación en ejes logarítmicos.

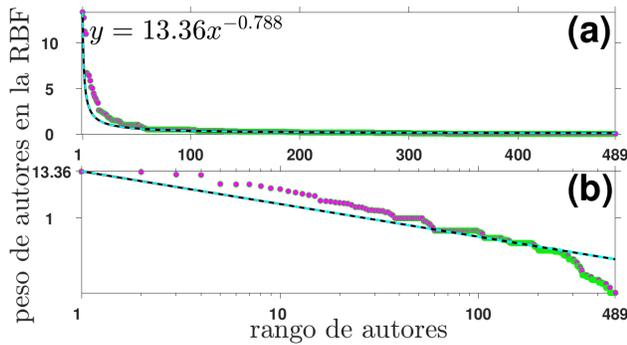


FIG. 5.— Contribución ponderada (pesos) de los autores en función del rango de los autores. (a) Se muestra también un ajuste de tipo potencial pero con valor de potencia de -0.788 . (b) Representación en ejes logarítmicos.

ergéticos de rayos cósmicos. Este comportamiento está también en relación con la característica de la RBF de tener una gran parte de sus autores con mayor ponderación, pertenecientes a las instituciones encargadas de la edición de la RBF; es decir, confirmando la endogeneidad intrínseca de la RBF.

El análisis anterior también permitió que se identifique a un pequeño grupo de autores (15 en total) que concentran un total de 394 artículos publicados en la RBF; es decir, con un promedio de 26.3 artículos por autor. Si bien a primera vista, lo anterior pueda ser considerado como un aspecto positivo; en la realidad, constituye una amenaza a la existencia de la RBF puesto que si estos autores por algún motivo dejan de publicar, la continuidad de la RBF puede sufrir un impacto importante en los requerimientos de artículos que permitan a la RBF permanecer en plataformas de acceso abierto. Lo anterior puede significar también una gran desproporción en las contribuciones de los investigadores bolivianos que finalmente se reflejará en aspectos tales como la productividad e influencia que se explican en la Sec. 4.

4. ANÁLISIS UTILIZANDO REDES COMPLEJAS

La evolución de los conceptos surgidos de la teoría de grafos que desembocan en lo que hoy conocemos como redes complejas ha sido de fundamental impor-

tancia para la ciencia como lo señalan Steen (2010) y Pozrikidis (2014), además de mostrar la ubicuidad de estas estructuras que se presentan en diversidad de sistemas como lo mencionan diferentes textos especializados en redes complejas como los debidos a Dorogovtsev & Mendes (2003), Ben-Naim *et al.* (2004), Newman *et al.* (2006), Caldarelli & Vespignani (2007), Dehmer & Emmert-Streib (2009), Newman (2010), Estrada (2011), Barthelemy (2018), o más especializados como los de Kepes (2007), Boccaletti (2010) y Buchanan *et al.* (2010) en redes biológicas, y los de Freeman (2004) y Gonçalves & Perra (2015) en redes sociales. Son precisamente, estas redes, cuyas aristas representan conexiones sociales las que interesan para la descripción de colaboraciones como lo mencionan Estrada & Knight (2015) y que se utilizan para los estudios científicos.

Existen aspectos básicos para la descripción de redes complejas tales como el hecho de que las redes están compuestas por un número N de *nodos*, los cuales están conectados a otros por medio de enlaces; el número de enlaces que salen y/o entran al nodo i , se denomina el *grado* k_i . De acuerdo con la característica del grado de los nodos, las redes pueden ser indirectas (simétricas), véase Secs. 4.1 y 4.2, o directas (asimétricas), véase Secs. 4.3 y 4.4. Con base en el concepto de grado, es posible calcular el *número total de enlaces (links)* L en una red indirecta como lo establece Barabási (2016) como $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i$, donde el factor $\frac{1}{2}$ aparece como resultado de que los enlaces se cuentan dos veces en este tipo de redes. También, el número total de interacciones entre los nodos está representado por L . Por otro lado, se define el *grado promedio* $\langle k \rangle$ como el valor medio del grado de cada uno de los nodos. Consecuentemente, $\langle k \rangle = \frac{\sum_i k_i}{N} = \frac{2L}{N}$. Otra forma de caracterizar redes es mediante la *densidad de la red* ρ definida como la razón del número de enlaces en la red al número total de enlaces posibles. Así, como lo indican Menczer *et al.* (2020), para una red indirecta,

se tendrá que $\rho = \frac{L}{L_{\max}}$, siendo $L_{\max} = \binom{N}{2}$. Consecuentemente, la densidad queda como: $\rho = \frac{2L}{N(N-1)}$. En tanto que para una red directa, se tiene que la densidad es $\rho = \frac{L}{N(N-1)}$.

En esta sección se analizarán las matrices de adyacencia asociadas a las redes complejas de países cuyos autores e instituciones pertenecen a los mismos. Es decir, en las redes complejas que se analizan, los nodos o vértices son los países y entre ellos existe un enlace o arista si es que se tiene un artículo publicado de manera conjunta. Sin embargo, se harán distinciones en los tipos de redes considerados como se explica en las siguientes subsecciones,

4.1. Redes simétricas y no pesadas: diversidad de países

La diversidad de países presentes en la RBF puede ser caracterizada mediante redes simétricas y no pesadas, de las cuales, se calculan algunos indicadores tales como:

Longitud de camino promedio.: Denotada por $\langle d \rangle$, es el promedio de las longitudes de los caminos más cortos (denominados geodésicas) existentes entre todos los pares de nodos. Un camino entre dos nodos está definido como la trayectoria que va desde un nodo a otro a través de los nodos que se hallan conectados con un enlace y la longitud de camino queda determinada por el número de nodos menos uno por el que atraviesa el camino. En consecuencia, de acuerdo con Barabási (2016), la expresión para la longitud de camino promedio es

$$\langle d \rangle = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i=1}^N d_{i,j}. \quad (1)$$

Diámetro de una red.: Es la geodésica (camino más corto entre dos nodos) de mayor tamaño que hay entre todos los nodos.

Transitividad.: Como lo señalan Boccaletti *et al.* (2006), la transitividad significa la presencia de un alto número de triángulos en la red, esta es cuantificada mediante el número relativo de triángulos, es decir la fracción de nodos conectados triples (triadas) los cuales también forman triángulos. En términos formales, se puede escribir:

$$\mathcal{T} = \frac{\sum_{i,j,k=1}^N a_{jk}a_{ij}a_{ki}}{\sum_{i,j,k=1}^N a_{ij}a_{ik}(1 - \delta_{jk})}. \quad (2)$$

Coefficiente de agrupamiento.: Es una medida introducida por Watts, & Strogatz (1998) y está definido como sigue: primeramente, se define el coeficiente de agrupamiento de cada nodo como el número de triángulos que forma con sus vecinos entre el número de triángulos que podría formar y el coeficiente de agrupamiento de toda la red es entonces el promedio de estos coeficientes de agrupamiento locales; es decir:

$$\mathcal{C} = \frac{\sum_{j,k=1}^N a_{jk}a_{ij}a_{ki}}{Nk_i(1 - k_i)}. \quad (3)$$

Heterogeneidad.: Conceptualmente es muy importante para la descripción de una red compleja; sin embargo, no existe un criterio unificado para su definición. Así, primero se introduce un índice que muestra la irregularidad local como la diferencia de la raíz cuadrada del inverso del grado de los nodos:

$$I_{ij} = (f(k_i) - f(k_j))^2. \quad (4)$$

Esta función tiene valor nulo cuando los nodos poseen el mismo grado, como sucede en redes regulares; en tanto que crece cuando los grados de los nodos son diferentes. Se define entonces el índice de heterogeneidad como la suma de los indicadores de irregularidades para todos los

enlaces de la red y se debe dividir entre un factor para que esta cantidad quede normalizada como lo establece Estrada (2010).

$$\rho(G) = \frac{\sum_{i,j \in E} (k_i^{-1/2} - k_j^{-1/2})^2}{N - 2\sqrt{N-1}}. \quad (5)$$

Para las redes regulares esta cantidad es idénticamente nula y a medida que las diferencias entre los grados de los nodos aumenta, el índice también crece.

En la Fig. 6 se muestra la evolución de nueve cantidades que caracterizan a las redes directas, no pesadas y por tanto simétricas de los países contribuyentes de la RBF, correspondientes a las situaciones acumuladas que dan cuenta de la evolución de la diversidad. Los números de enlaces y ciclos (Fig. 4(a) y (d)) dan cuenta de la diversidad de países en la RBF de una manera directa, ya que evidentemente aumenta con el tiempo pero a ritmos de crecimiento diferentes que nos dan la pauta de la actividad e internacionalización de la RBF. En particular, se observa un gran crecimiento en los intervalos 1998-2000 y 2014-2016. También, el grado y la longitud de camino promedios (Fig. 4(c) y (e)) tienden a aumentar con el tiempo, debido a que las redes acumuladas crecen, dando lugar a que los nodos puedan establecer más vínculos pero también, en los nodos no vinculados aumente la distancia entre ellos. Lo anterior, tiene su explicación en el hecho de que la mayoría de los autores son bolivianos pero cada investigador o grupo de investigación tiene colaboraciones preferenciales con gente de países específicos y que no necesariamente están vinculados entre ellos. La densidad de enlaces y la transitividad (Fig. 4(b) y (h)) tienen cualitativamente un comportamiento similar, donde se observa una tendencia a la disminución de estas cantidades; esto es debido a que la red aumenta más rápido de tamaño que el número de nuevos enlaces. Sin embargo, se observa que existe un remonte a partir de 2014. El diámetro de la red observado en la Fig. 4(f) presenta varias zonas de estabilidad, aunque se debe mencionar que para el cálculo de esta cantidad, se ha considerado la subred mayor. Finalmente, los indicadores más interesantes que son el coeficiente de agrupamiento y la heterogeneidad (Fig. 4(g) e (i)), no presentan grandes variaciones a partir de 2000. Para estas dos últimas cantidades, existe también un problema en el cálculo cuando se presentan subredes, lo que influye en el hecho de que se tenga esta suerte de casi estabilidad de los valores.

4.2. Redes simétricas y pesadas en enlaces: colaboración

Para la descripción de la colaboración entre países, se puede definir este concepto tanto desde un punto de vista local como global. En el primer caso, se considera sólo la colaboración entre países que publicaron en la RBF; en tanto que a nivel global se considera

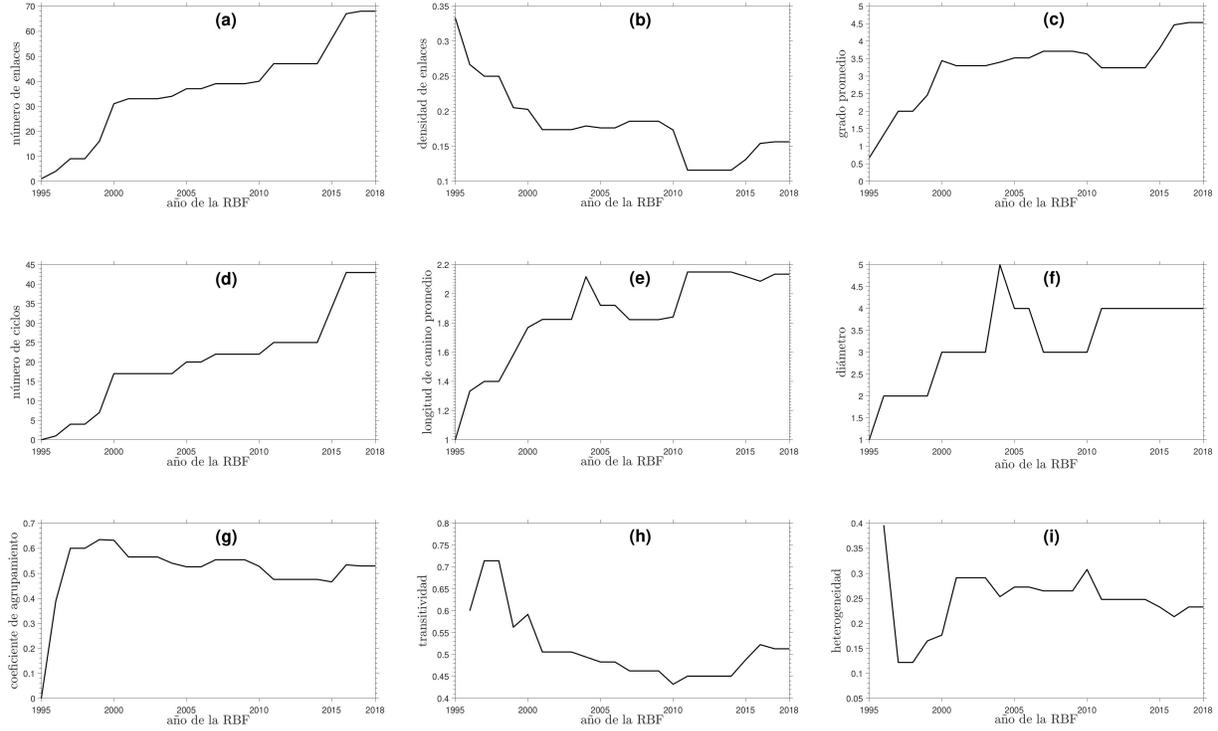


FIG. 6.— Evolución de cuantificadores de redes: (a) Número de enlaces, (b) densidad de enlaces, (c) grado promedio, (d) número de ciclos, (e) longitud de camino promedio, (f) diámetro, (g) coeficiente de agrupamiento, (h) transitividad y (i) heterogeneidad, para las redes complejas acumuladas por año correspondientes a los países que contribuyeron en la RBF, en el caso de redes directas y no pesadas.

el conjunto de todos los países posibles que por simplicidad, se toma como una constante igual a 194. En ambos casos, la colaboración puede ser caracterizada mediante redes cuyas matrices de adyacencia son simétricas y con enlaces pesados que señalan el número de publicaciones que tienen los países de manera conjunta. A partir de estas matrices se puede definir un indicador de colaboración C general que puede ser utilizado tanto para cada año por separado como para el caso acumulado. Este índice de colaboración se define como el cociente de la suma de los elementos de la matriz y un factor de normalización en términos del número de artículos y países que se expresa como:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} a_{ij}}{NC(NC - 1)NP} . \quad (6)$$

Siendo NC el número de países que publicaron en la RBF para el caso local y $NC = 194$ para el global. Queda claro que el intervalo de validez es $0 \leq C \leq 1$. En la Fig. 7 se muestra el mencionado índice para cada uno de los años y para el caso acumulado en la situación local. Una inspección de la Fig. 7(a) muestra que C puede presentar variaciones abruptas e incluso en algunas ocasiones no se lo puede definir como en 2009 y 2013. Lo anterior se debe a que en esos años sólo un país publicó en la RBF. Otro caso interesante ocurre en 2018, año en el cual, dos países publicaron en la RBF pero no existió colaboración alguna entre ellos, por lo que $C = 0$. En tanto que el comportamiento de la situación acumulada, de-

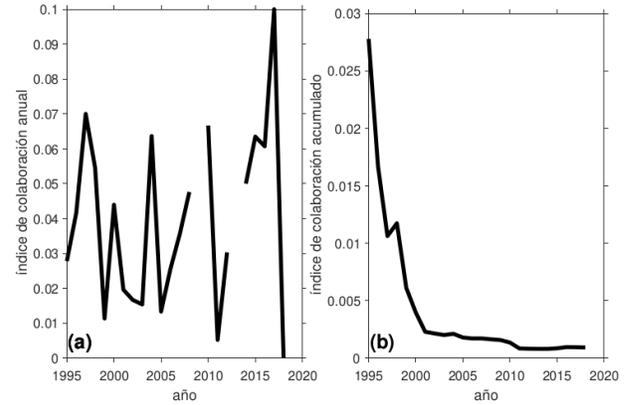


FIG. 7.— Índice de colaboración (C) local para las situaciones (a) anual y (b) acumulada.

crece drásticamente con el tiempo como se observa en la Fig. 7(b). El decaimiento de C es natural puesto que a medida que transcurre el tiempo, el número de artículos NP aumenta más rápidamente que el número de nuevos países.

El índice de colaboración global se muestra para las situaciones anual y acumulada en la Fig. 8. Se observa que el índice de colaboración es mucho menor en la situación global que en la local. Siguen existiendo cambios abruptos en el caso anual como se ve en la Fig. 8(a). La diferencia aparece en el caso acumulado, donde ya no existe la tendencia de-

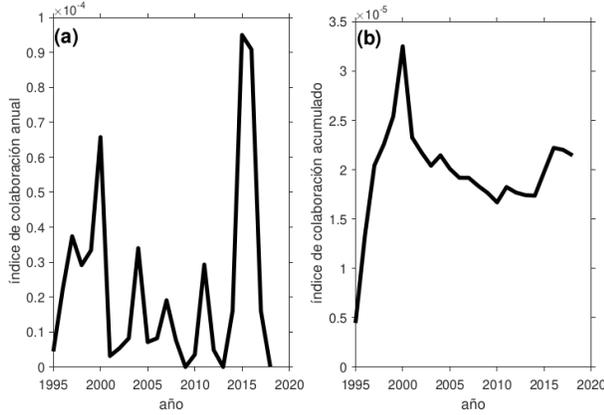


FIG. 8.— Índice de colaboración global (C) para los casos (a) anual y (b) acumulado.

creciente en el tiempo; esto se debe a que tanto el número de países que publican en la RBF como el número de artículos aumenta en el tiempo, lo que se reflejará, en general, en un aumento de la suma de los términos de la matriz de adyacencia y consiguientemente permitiendo que incluso pueda haber un crecimiento del índice de colaboración global.

4.3. Redes asimétricas y pesadas en enlaces: influencia

A diferencia de los anteriores casos, en los cuales, no se tomaban en cuenta los pesos de los artículos, ahora consideramos los pesos de participación de cada país en la publicación de un artículo, en el que participan varios países; por lo que se obtienen matrices de adyacencia asimétricas, donde la columna correspondiente a un dado país indica la participación de dicho país en publicaciones conjuntas con el país correspondiente a cada fila.

Con base en este tipo de redes podemos calcular la influencia de un país sobre los países con quienes colabora, es así que se puede definir un indicador de influencia del país i como

$$I_i = \frac{\sum_{j=1}^{NC} a_{ij}}{\sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} a_{ij}}. \quad (7)$$

En la Fig. 9 se muestra este indicador de influencia para cada año de publicación de la RBF (Fig. 9(a)) y para la situación acumulada (Fig. 9(b)). Para lo anterior, se consideraron los tres países más influyentes en las publicaciones: Bolivia, Brasil e Italia y además se tomó en cuenta al resto de los países como si se tratase de otro grupo.

En la Fig. 9(a), se observa que en los primeros dos años no están presentes Italia y Brasil como países influyentes, teniéndose solo a Bolivia y otros. En los 1997—1998, 2000 y 2002 aparece Italia con una gran influencia, incluso mayor a la de Bolivia. A partir del año 2004 desaparece la influencia de Italia para reaparecer una década más tarde con una influencia no despreciable durante tres años consecutivos. Brasil aparece de manera intermitente y con una in-

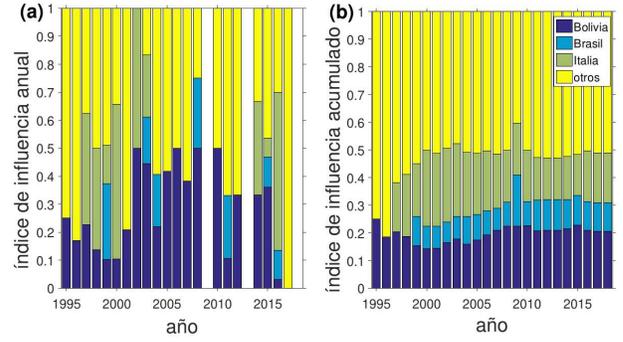


FIG. 9.— (Color online) Índice de influencia para los tres países más influyentes: Bolivia, Brasil e Italia, así como para los otros países considerados como un otro grupo. (a) Anual y (b) acumulado. La influencia de Bolivia se manifiesta durante casi todos los años, pero apenas alcanzando un máximo valor de 50% y no se presenta en 2017. Existen tres años en que no se representa la influencia el 2009, 2013 y 2018 porque solo participó Bolivia en las publicaciones. En la Fig. 9(b) se observa que el índice de influencia en el caso de los tres países más influyentes suma aproximadamente el 50% a partir de 2000.

4.4. Redes asimétricas y pesadas en nodos: productividad

Considerando el peso específico de la participación de cada país en el peso total de cada entrega anual de la RBF o de la cantidad acumulada a lo largo de la historia de la misma; la participación está caracterizada por una matriz de adyacencia asimétrica por el hecho de que la contribución de los países en cada artículo no es uniforme y además, se tendrán elementos en la diagonal puesto que en ciertas ocasiones, los artículos solamente son escritos por autores de un sólo país. Con esta matriz de adyacencia, es posible definir varios conceptos que estarán caracterizados por indicadores de producción, los mismos que se explican a continuación:

La producción general de la RBF: La producción anual de la RBF puede definirse como el cociente entre la producciones anual y de todos los años de existencia

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} a_{ij}}{\sum_{k=1995}^{2018} \sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} a_{ij}^k}. \quad (8)$$

El resultado de este índice se puede ver en la Fig. 10(a) de manera anual y en la Fig. 10(b) el caso acumulado año tras año. También en la Fig. 10(a) se ven los años extraordinarios de producción como los años 2001 y 2011. En tanto que en la Fig. 10(b), se obtuvo que la producción anual tiene un comportamiento casi lineal; es decir, que la producción anual en promedio fue constante.

La producción en artículos de manera individual: Se puede definir la producción individual como

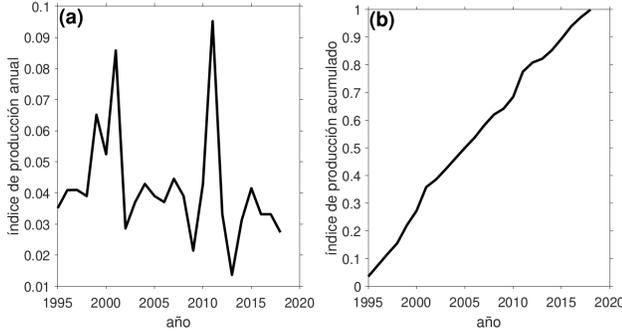


FIG. 10.— Producción en términos de peso de los artículos publicados en la RBF (a) anual y (b) acumulado.

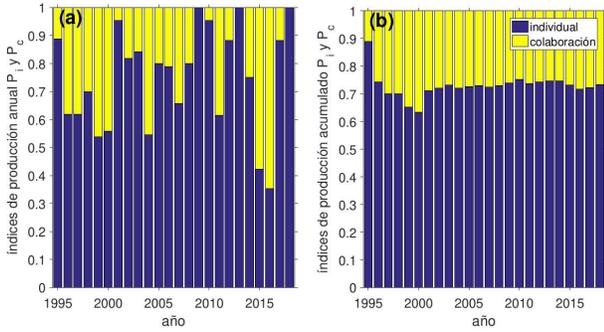


FIG. 11.— (Color online) Producción individual (azul) y en colaboración (amarillo) en términos de peso de los artículos publicados en la RBF para los casos (a) anual y (b) acumulado.

el cociente de la traza y la producción total dada por la suma de todos los elementos de la matriz.

$$P_{\text{ind}} = \frac{\sum_{i=1}^{NC} a_{ii}}{\sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} a_{ij}}. \quad (9)$$

La producción en colaboración: Está definida como el complemento de la producción individual P_{ind} :

$$P_{\text{col}} = 1 - P_{\text{ind}}. \quad (10)$$

En la Fig. 11 (a) se presentan los resultados anuales de la producción individual y en colaboración, observándose que a excepción de los años 2015 y 2016 siempre se tuvo mayor producción individual que en colaboración. Mientras que en la Fig. 11(b) se representa la situación acumulada, donde se ve que la producción individual, se mantiene casi constante al transcurrir los años en un 70%.

La productividad por país j : Definida como el cociente de la columna del país j y la suma de todos los elementos de la matriz:

$$P_j = \frac{\sum_{i=1}^{NC} a_{ij}}{\sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} a_{ij}}. \quad (11)$$

En la Fig. 12(a) se representa la productivi-

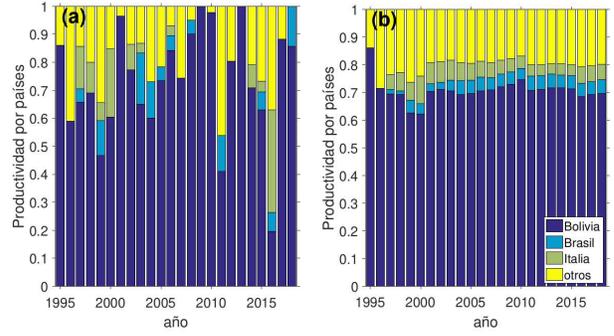


FIG. 12.— (Color online) Índice de productividad por país para los tres países: Bolivia, Brasil e Italia, así como para los otros países considerados como un otro grupo. (a) Anual y (b) acumulada.

dad anual por país, notándose que Bolivia fue el país con mayor producción, siendo esta del orden de 50% o mayor a excepción de los años 2011 y 2016. La producción acumulada se muestra en la Fig. 12(b), donde se ve que la producción por países tiene un comportamiento casi constante con una producción de Bolivia de aproximadamente 70%. Cabe mencionar que al igual que en el caso de la influencia, los países elegidos fueron Bolivia, Brasil e Italia, y el grupo de otros representa a los 25 países restantes que participaron en la RBF a lo largo de su historia. Se observa también que tanto Brasil como Italia, no superan el 10% en lo que se refiere a producción, lo que significa que el resto de los países en conjunto sólo sumarían alrededor de 20%.

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

El análisis cuantitativo realizado se basó en tres pilares, la estadística descriptiva, la ley de Zipf y el uso de redes complejas. El primero de los aspectos sirvió para tener una visión cuantitativa primaria estudiada por diferentes autores y que son comunes en este tipo de estudios. El segundo, permitió verificar el cumplimiento parcial de esta suerte de relación universal para este tipo de sistemas sociales. A partir del análisis se detectó que la presencia de súper nodos (autores con una gran cantidad de artículos o equivalentemente con ponderación importante en la RBF) lleva a una distribución en forma de “rodilla”. En tanto que, en el tercer aspecto se introducen nuevos conceptos ligados con las redes complejas y que nos permitió definir conceptos relevantes tales como la diversidad, la colaboración, la influencia y la productividad de acuerdo con el tipo de red considerado; es decir, si las mismas eran no pesadas e indirectas, pesadas e indirectas, pesadas y directas, y pesadas tanto en nodos como enlaces y directas, respectivamente. Según lo revisado bibliográficamente, creemos que es la primera vez que se hace un análisis cuantitativo de estas características; es decir, extraer todos los indicadores a partir de la estructura de red. Está claro que evaluaciones más certeras pueden hacerse considerando

el aporte de los autores en función del número de autores por artículo, como se hizo en la representación de redes pesadas y teniendo en cuenta la importancia de autores únicos; pero también se pueden establecer aspectos tales como la importancia de cada autor en un artículo dado como plantean Yoshikane *et al.* (2009) quienes consideran que el último autor puede tener una importancia fundamental en el sentido de que en general es quien dirige el trabajo o funge como mentor del mismo. En futuras investigaciones cuantitativas el anterior aspecto debería ser considerado para la evaluación del impacto, importancia o peso de los autores, instituciones o países. Sin duda, es muy importante someter a las publicaciones a este tipo de análisis ya que puede mostrar la evolución de la productividad de los científicos así como lo muestran Chaman Sab *et al.* (2012) para el caso de la medicina en India entre 2009 y 2018, hallando un crecimiento exponencial de la investigación en este campo y para este país en la última década. En cuanto al objeto de estudio que fue la RBF, con base en los resultados, podemos hacer algunos comentarios y recomendaciones a los editores de la RBF: (i) Se observa un carácter fuertemente endógeno de la RBF, lo que puede parecer natural por el hecho de que la mayoría de los investigadores en física pertenecen a la Sociedad Boliviana de Física (una de las instituciones que edita la RBF).

(ii) Se recomienda a los autores favorecer las colaboraciones internacionales. (iii) Para la diversificación de la RBF se sugiere que se invite a científicos de renombre a que contribuyan con artículos que dado el prestigio de los autores puedan aumentar el interés en la RBF. (iv) Es menester que la RBF pueda aumentar su impacto por lo que es imprescindible que se mantenga en la plataforma de acceso abierto SciELO y se debería propender a ser parte de otras plataformas de acceso abierto. (v) Se debe implementar una política de otorgación de créditos a los árbitros que cumplen una función muy valiosa en la RBF; una forma para lograr lo anterior, es que los editores intenten ser considerados en la plataforma Publons. Como perspectiva, tenemos planeado hacer estos análisis para publicaciones bolivianas que presenten continuidad y sigan algunos estándares de rigurosidad, más concretamente con revistas indexadas en la plataforma SciELO Bolivia.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Carrera de Física y al Instituto de Investigaciones Físicas de la Universidad Mayor de San Andrés por habernos permitido desarrollar esta investigación en las mejores condiciones.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Achá, D. 2018, *Ecología en Bolivia*, **53**, 77
- Adler, R., Ewing, J., & Taylor, P. 2009, *Statistical Science*, **24**, 1
- Barabási, A. L. 2016, *Network science* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Barthelemy, M. 2018, *Morphogenesis of spatial networks* (Cham: Springer)
- Ben-Naim, E., Frauenfelder, H., & Toroczkai, Z. 2004, *Complex networks* (Berlin: Springer)
- Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., & Hwang, D.-U. 2006, *Physics Reports*, **424**, 175
- Boccaletti, S. 2010, *Handbook on biological networks* (Singapore: World Scientific)
- Bordons, M., Aparicio, J., González-Albo, B., & Díaz-Faes, A. 2015, *Journal of Informetrics*, **9**, 135
- Bornmann, L. & Marx, W. 2015, *Journal of Informetrics*, **9**, 408
- Buchanan, M., Caldarelli, G., Rao, F., & Vendruscolo, M. 2010, *Networks in cell biology* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Bucheli, V., Díaz, A., Calderón, J., Lemoine, P., Valdivia, J., Villaveces, J., & Zarama, R. 2012, *Scientometrics*, **91**, 369
- CAICYT-CONYCET. 2007, *Revista Argentina de Endocrinología y Metabolismo*, **44**, 25
- Caldarelli, G. & Vespignani, A. 2007, *Large scale structure and dynamics of complex networks: from information technology to finance and natural science* (New Jersey: World Publishing)
- Cantú-Ortiz, F. 2017, *Research analytics: boosting university productivity and competitiveness through scientometrics* (Boca Raton: CRC Press. Taylor & Francis Group)
- Chaman Sab, M., Dharani Kumar, P. & Biradar, B. S. 2018, *Library Philosophy and Practice (e-journal)*, 2186 Website: <https://digitalcommons.unl.edu/libphilprac/2186>. Acceso: 18.05.2019
- Cole, S. & Phelan, T. 1999, *Minerva*, **37**, 1
- Cormode, G., Ma, Q., Muthukrishnan, S., & Thompson, B. 2013, *Journal of Informetrics*, **7**, 718
- De Moya-Anegón, F. & Herrero-Solana, V. 1999, *Scientometrics*, **46**, 299
- de Solla Price, D. 1978, *Scientometrics*, **1**, 3
- Dehmer, M. & Emmert-Streib, F. 2009, *Analysis of complex networks: from biology to linguistics* (Mörlenbach: Wiley)
- Dienes, K. 2015, *Journal of Informetrics*, **9**, 385
- Dorogovtsev, S. & Mendes, J. 2003, *Evolution of networks: from biological nets to the internet and WWW* (Oxford: Oxford University Press)
- Egghe, L. 2006, *Scientometrics*, **69**, 131
- . 2008, *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, **59**, 1608
- Estrada, E. 2010, *Physical Review E*, **82**, 066102
- . 2011, *The structure of complex networks: theory and applications* (Oxford: Oxford University Press)
- Estrada, E. & Knight, P. 2015, *A first course in network theory* (Oxford: Oxford University Press)
- Freeman, L. 2004, *The development of social network analysis* (Vancouver: Empirical Press)
- Galligan, F. & Dyas-Correia, S. 2013, *Serials Review*, **39**, 56
- Gonçalves, B. & Perra, N. 2015, *Social phenomena: from data analysis to models* (Cham: Springer)
- Guilak, F. & Jacobs, C. 2011, *Journal of Biomechanics*, **44**, 208
- Hirsch, J. 2005, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **102**, 16569
- Kepes, F. 2007, *Biological networks* (New Jersey: World Scientific)
- Kosmulski, M. 2013, *Journal of Informetrics*, **7**, 693
- Lancho-Barrantes, B. & Cantú-Ortiz, F. 2019, *Scientometrics*, **118**, 499
- Lotka, A. 1926, *Journal of the Washington Academy of Sciences*, **16**, 317
- MacRoberts, M. & MacRoberts, B. 1982, *Social Studies of Science*, **12**, 443
- Menczer, F., Fortunato, S., & Davis, C. A. 2020, *A first course in network science* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Merton, R., & Storer, N. 1973, *The sociology of science: theoretical and empirical investigations* (Chicago: University of Chicago)
- Mingers, J. & Leydesdorff, L. 2015, *European Journal of Operational Research*, **246**, 1
- Moonghali, A., Alijani, N., Karami, A., & Khasseh, A. 2011, *International Journal of Information Science and Management (IJISM)*, **9**, 19

- Newman, M. 2010, *Networks: an introduction* (Oxford: Oxford University Press)
- Newman, M., Barabási, A.-L., & Watts, D. 2006, *The structure and dynamics of networks* (Princeton: Princeton University Press)
- Ortega, J. 2015, *Journal of Informetrics*, **9**, 39
- Padhy, H., Mishra, P., & Behera, S. 2019, *Global Journal of Engineering Science and Research Management*, **6**, 1
- Pozrikidis, C. 2014, *An introduction to grids, graphs, and networks* (Oxford: Oxford University Press)
- Prakash, M. & Arumugam, J. 2017, *Journal of Advances in Library and Information Science*, **6**, 36
- Rahul, P.R.C. 2013, *Journal of Scientometric Research*, **2**, 80
- Rajgoli, I., Mamdapur, G., & Prabahaar, P. 2017, *Journal of Advances in Library and Information Science*, **6**, 52
- Sasvári, P., Nemeslaki, A., & Duma, L. 2019, *Scientometrics*, **119**, 595
- Schweitzer, F. 2018, *Physics Today*, **71**, 40
- Scientometrics: An International Journal for all Quantitative Aspects of the Science of Science, Communication in Science and Science Policy. Website: <https://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/11192>. Acceso: 12.05.2019
- Scientometrics, 2020, datos de la revista Scientometrics, disponible en <https://link.springer.com/journal/11192>
- Şengör, A. 2014, *GSA Today*, **24**, 44
- Siddiqui, J. & Ran, R. 2018, *Indian Journal of Library and Information Science*, **12**, 169
- Steen, M. 2010, *Graph theory and complex networks: an introduction* (Lexington: van Steen)
- Subieta-Frías, V. & Ramírez-Ávila, G. M. 2017, *Revista Boliviana de Física*, **31**, 3
- Subieta Vásquez, M. & Ramírez-Ávila, G. M. 2007, *Revista Boliviana de Física*, **13**, 87
- Tabah, A. 1992, *Information Processing & Management*, **28**, 61
- Tague-Sutcliffe, J. 1992, *Information Processing & Management*, **28**, 1
- Uribe-Tirado, A., Ochoa-Gutiérrez, J., Ruiz-Nuñez, K. & Fajardo-Bermúdez, M. 2019, *Transinformação*, **31**, e190016
- Vinkler, P. 2001, *Scientometrics*, **50**, 539
- . 2010, *The evaluation of research by scientometric indicators* (Oxford: Chandos Publishing)
- Vílchez-Román, C. 2014, *Transinformação*, **26**, 143
- Watts, D. J., & Strogatz, S. H. 1998, *Nature*, **393**, 6684
- Wiesner, K., Birdi, A., Eliassi-Rad, T., Farrell, H., Garcia, D., Lewandowsky, S., Palacios, P., Ross, D., Sornette, D., & Thébault, K. 2019, *European Journal of Physics*, **40**, 014002
- Yeung, A. W. K., Tzvetkov, N. T., Balacheva, A. A., Georgieva, M. G., Gan, R.-Y., Jozwik, A., Pyzel, B., Horbańczuk, J. O., Novellino, E., Durazzo, A., Lucarini, M., Camilli, E., Souto, E. B., Atanasov, A. G., & Santini, A. 2020, *Frontiers in Pharmacology*, **11**, 37
- Yoshikane, F., Nozawa, T., Shibui, S., & Suzuki, T. 2009, *Scientometrics*, **79**, 435
- Yu, M.-C., Wu, Y.-C., Alhalabi, W., Kao, H.-Y., & Wu, W.-H. 2016, *Computers in Human Behavior*, **55**, 1001
- Zipf, G. 1949, *Human behaviour and the principle of least effort: an introduction to human ecology* (Cambridge: Addison-Wesley)

DEL MOVIMIENTO BROWNIANO A LOS MOTORES BROWNIANOS

FROM BROWNIAN MOTION TO BROWNIAN MOTORS

L. A. MANZANEDA OSORIO G.[†]

Carrera de Física, Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia el fenómeno de obtener movimiento en una dirección preferencial a partir del movimiento aleatorio de partículas microscópicas como una consecuencia de sistemas con potencial asimétrico y periódico espacialmente. En adición, se explora brevemente el fenómeno de transporte de la kinesina en microtúbulos.

Código(s) PACS: 83.10.Mj – 02.30.Em – 87.16.Nn

Descriptores: Movimiento browniano – teoría de los potenciales – kinesina.

ABSTRACT

In this paper we study the movement in a preferential direction obtained from the random movement of microscopic particles as a consequence of systems with spatial asymmetric and periodic potential. In addition, the transport phenomenon of kinesin in microtubules is briefly explored.

Subject headings: Brownian dynamics — Potential theory — Kinesin.

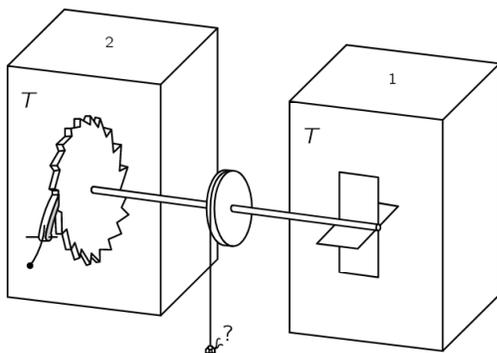


FIG. 1.— Esquema de la rueda dentada y trinquete de Feynman, tomado de (Feynman et al. 1963).

1. INTRODUCCIÓN

El movimiento browniano hace referencia al movimiento de partículas microscópicas que experimentan un movimiento aleatorio debido a fluctuaciones térmicas, fenómeno observado por primera vez en 1827 por R. Brown y descrito formalmente en 1905 por A. Einstein. En 1963 R. Feynman propone un dispositivo que realiza trabajo a partir del movimiento aleatorio, (Feynman et al. 1963). En base a este mecanismo se discuten nuevos sistemas microscópicos fuera del equilibrio térmico que consiguen un movimiento dirigido por medio de potenciales tipo *ratchet*, (Astumian 1997). Los *motores brownianos* surgen como una consecuencia de

obtener movimiento en una dirección a partir del movimiento browniano a escala microscópica, principal diferencia con un motor térmico convencional.

En la siguiente sección se discute el funcionamiento de un motor browniano propuesto por R. Feynman, como punto de partida para sistemas con potenciales asimétricos (tipo *ratchet*), cuyo formalismo se revisa brevemente en la sección 3, posteriormente en la sección 4 se discute acerca del movimiento de partículas brownianas en potenciales tipo *ratchet* como aplicación a sistemas biológicos y por ultimo, en la sección 6, se presentan las conclusiones y recomendaciones bibliográficas en caso de querer profundizar sobre el tema.

2. RUEDA DENTADA Y TRINQUETE DE FEYNMAN

La rueda dentada y trinquete es un dispositivo ingenioso ideado por R. Feynman (Feynman et al. 1963), que a primera vista pretende violar la segunda ley de la termodinámica la cual según la declaración de Kelvin-Planck afirma que; *en ningún proceso cíclico es posible la extracción de energía de un reservorio de calor, y la conversión de toda esa energía en trabajo*. Este dispositivo en escala mesoscópica consta de dos cajas que contienen cierto gas a la misma temperatura T , en una caja hay un eje con aspas que conecta con la otra caja donde está la rueda dentada y el trinquete (o gatillo), ver Fig. 1.

[†]lmanzaneda@fiumsa.edu.bo

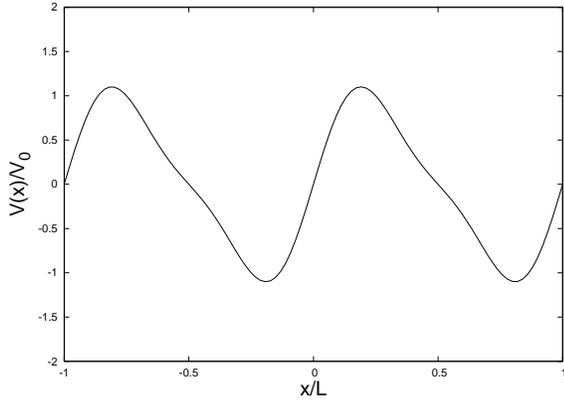


FIG. 2.— Ejemplo de potencial ratchet asimétrico con periodo L , específicamente: $V(x) = V_0[\text{sen}(2\pi x/L) + 0.25 \text{sen}(4\pi x/L)]$ en unidades adimensionales.

Debido al movimiento browniano de las partículas en la caja 1, las múltiples colisiones con las aspas transmitirán un movimiento de rotación a la segunda caja, no obstante este movimiento es sesgado a una dirección de giro favorable debido al sistema de rueda dentada y trinquete. Incluso, según Feynman podría atarse a una “pulga” para levantarla, como se muestra en la Fig. 1. En otro sentido este dispositivo consigue un tipo de movimiento perpetuo lo cual va en contra de la segunda ley de la termodinámica, i.e. se extrae el calor de los reservorios (cajas a temperatura constante) y se convierte completamente en trabajo (levantando la pulga) en un proceso cíclico.

Es evidente que este dispositivo no puede funcionar ya que en la naturaleza no existe un movimiento aislado perpetuo y una de las razones se debe a que la rueda dentada y el trinquete también tienen movimiento Browniano, esto provoca que el trinquete ocasionalmente se levante justo cuando el movimiento de las aspas se da en sentido contrario y cuanto más se eleva la temperatura de estas cajas, esto ocurre con mayor frecuencia, por lo que el movimiento neto es nulo. Por otro lado si la temperatura en la caja 1 es mayor a la temperatura donde se encuentra la rueda dentada y el trinquete ($T_1 > T_2$), la colisión de las partículas con las aspas será mucho más frecuente que el movimiento browniano del trinquete, con lo cual se consigue que el dispositivo rote en un sentido favorable, esto no va en contra de la segunda ley de la termodinámica debido a que la transferencia de energía ocurre de un reservorio de mayor temperatura T_1 a un reservorio de menor temperatura T_2 . Este mecanismo de movimiento circular puede ser adaptado a un movimiento lineal a través de un potencial asimétrico de diente de cierra, conocido comúnmente como potencial *ratchet*, Fig. 2.

Este tipo de potencial simula una perturbación externa que da lugar al transporte de partículas en una dirección, lo que se conoce como *efecto ratchet*.

Por otro lado en caso de añadir una fuerza externa que se opone a este movimiento (e.g., levantamiento de peso) y a pesar de ello el transporte continua, significa que el sistema realiza trabajo sobre esta fuerza. Debido a ello tales sistemas son llamados mo-

tores brownianos.

3. FORMALISMO

Una partícula suficientemente pequeña inmersa en un fluido, debido a fluctuaciones térmicas exhibe movimiento browniano, cuya evolución en el tiempo puede ser descrita por la ecuación de Langevin (un tipo de ecuación diferencial estocástica), para ello se considera una partícula de masa m en una dimensión con coordenada $x(t)$ sujeta a un potencial asimétrico periódico $V(x) = V(x + L)$ (potencial ratchet), además de efectos térmicos con el ambiente tales como disipación de energía y ruido térmico (Reimann & Hänggi 2002), entonces la dinámica de la partícula esta dada por:

$$m\ddot{x}(t) + V'(x) = -\gamma\dot{x}(t) + \eta(t) \quad (1)$$

La fuerza de fricción que experimenta la partícula con su ambiente es descrita por $\gamma\dot{x}$, donde γ es el coeficiente de fricción, mientras que las fluctuaciones térmicas $\eta(t)$ quedan descritas por el *ruido blanco Gaussiano* de media cero $\langle\eta(t)\rangle = 0$ y relación de fluctuación-disipación dada por:

$$\langle\eta(t)\eta(t')\rangle = 2\gamma k_B T \delta(t - t') \quad (2)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, T es la temperatura del medio, $\delta(t)$ es la función delta-Dirac, el término $2\gamma k_B T$ representa la intensidad del ruido.

Por otro lado al tratarse de una partícula browniana y con la constancia de experimentos el factor m/γ es del orden de pico-segundos (Jülicher et al. 1997), por lo que como una muy buena aproximación se desprecia el término inercial $m\ddot{x}(t)$ dando lugar a la ecuación de Langevin:

$$\gamma\dot{x}(t) = -V'(x) + \eta(t) \quad (3)$$

A partir de esta ecuación se puede construir la correspondiente ecuación de Fokker-Planck (Reimann 2002) para la evolución temporal de la densidad de probabilidad, la cual esta dada por:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V'(x)}{\gamma} P(x, t) \right) + \frac{k_B T}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) \quad (4)$$

Los términos primero y segundo del lado derecho de la ecuación (4) son conocidos como “*drift term*” (término de arrastre o deriva) y “*difusion term*” (término de difusión) respectivamente. Esta ecuación puede ser expresada en términos de una densidad de corriente de probabilidad:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} \quad (5)$$

$$j(x, t) = -\frac{1}{\gamma} \left(V'(x) + k_B T \frac{\partial}{\partial x} \right) P(x, t) \quad (6)$$

Ahora bien, si se considera una fuerza estática adicional F que modela el efecto de un torque constante como en el dispositivo de la Fig. 1, lo cual corresponde

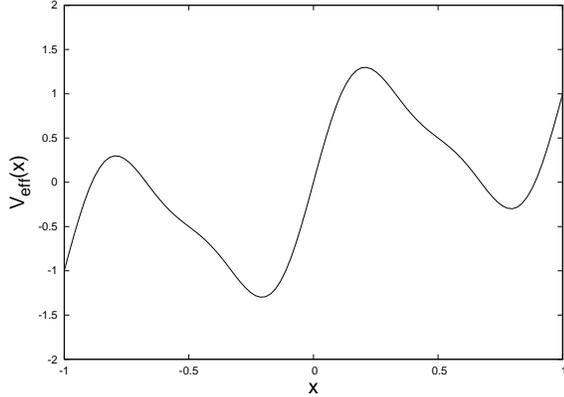


FIG. 3.— Ejemplo de potencial efectivo inclinado a la izquierda, gráfica a partir de la ecuación (8); $V_{eff}(x) = \sin(2\pi x) + 0.25\sin(4\pi x) + x$, con $V_0 = L = -F = 1$.

a una generalización de la ecuación (3), la ecuación de Langevin toma la forma:

$$\gamma\dot{x}(t) = -V'(x) + F + \eta(t) \quad (7)$$

Es posible englobar el potencial ratchet $V(x)$ y la fuerza F dentro de un potencial efectivo, de la forma:

$$V_{eff}(x) = V(x) - xF \quad (8)$$

Dependiendo de si la fuerza F es negativa o positiva, las partículas sujetas al potencial efectivo se moverán en promedio pendiente abajo a la izquierda o derecha respectivamente, como se muestra en Fig. 3.

4. POTENCIALES RATCHET

4.1. Flashing ratchet

Este tipo de potencial además de ser tipo ratchet, periódico y asimétrico, se caracteriza por ser intermitente entre los estados prendido (on) y apagado (off). El modelo es descrito por la ecuación de Langevin:

$$\gamma\dot{x}(t) = -V'(x)[1 + f(t)] + \eta(t) \quad (9)$$

Donde $f(t)$ representa una función de control que le da el carácter intermitente al potencial y es restringida a los valores ± 1 . Cuando $f(t)$ toma el valor de -1 cancela la acción de $V(x)$, que se interpreta como un estado *off* del potencial, mientras que si $f(t) = 1$ el potencial $V(x)$ esta activo, es decir, en estado *on*. Esta ecuación modela la dinámica de las partículas sometidas a este tipo de potencial, ahora bien si se considera la interacción con una fuerza F externa, la ecuación (9) toma la siguiente forma:

$$\gamma\dot{x}(t) = -V'(x)[1 + f(t)] + F + \eta(t) \quad (10)$$

El comportamiento de estas partículas sujetas a este tipo de potencial *flashing ratchet* se visualiza en la Fig. 4.(a) y en la Fig. 4.(b) se considera la interacción con una fuerza externa no nula $F \neq 0$.

La energía térmica ($k_B T$) de las partículas es menor a la altura del potencial $V(x)$, es decir, cuando el potencial se encuentra en estado *on* las partículas

quedan concentradas en los puntos mínimos del potencial y cuando el potencial es desactivado (estado *off*) las partículas son libres de difundirse con movimiento browniano, como se muestra en la Fig.4. El ciclo de apagado y encendido (*off-on*) del potencial induce un movimiento de partículas en una dirección particular debido a la asimetría del potencial obteniendo un flujo neto de partículas $\langle \dot{x} \rangle \neq 0$. Para lograr tal propósito el periodo de tiempo para el potencial en estado *on-off* no debe ser muy corto, ya que si lo fuera, las partículas no tendrían tiempo suficiente para difundirse y prácticamente se quedarían atrapadas en cercanías del mínimo de potencial y por tanto el flujo neto de partículas sería nulo $\langle \dot{x} \rangle = 0$.

En presencia de una fuerza externa F , el movimiento de las partículas en sentido opuesto al de esta fuerza es posible, si la misma no es muy intensa, como se observa en la Fig. 4.(b), en tal caso el sistema realiza trabajo, acción de un motor browniano. Por otro lado si la fuerza externa es muy grande, el flujo de la partículas debido al potencial *flashing* no es posible y el movimiento neto de las partículas es causado por este agente externo, lo cual no corresponde a un motor browniano ya que se realiza trabajo sobre el sistema.

4.2. Rocking ratchet

Este tipo de potencial, a diferencia del estudiado en la subsección previa, consiste de una fuerza periódica en el tiempo. La ecuación de Langevin que modela este caso es similar a la ecuación (7) con la diferencia de que la fuerza aplicada es dependiente del tiempo $F(t)$ y análogamente a la ecuación (8) el potencial efectivo es de la forma:

$$V_{eff}(x, t) = V(x) - xF(t) \quad (11)$$

Este potencial se regirá entre dos límites marcados por los máximos $\pm|F(t)|$ de la fuerza aplicada, esto y la dinámica del sistema se observa en la Fig. 5. El movimiento dirigido se consigue en cada ciclo de $F(t)$ y con la asimetría del potencial $V(x)$.

5. APLICACIONES A MOTORES MOLECULARES

A escala microscópica en células eucariotas se encuentran cierto tipo de proteínas motoras como la *kinesina* que se transporta sobre los *microtúbulos* (estructuras celulares formadas por polímeros proteicos) a partir de la energía liberada por la hidrólisis de ATP (nucleótido fundamental en la obtención de energía celular), cuya reacción es dada por la ecuación (12) y el proceso se muestra en la Fig. 6. El movimiento constante de la kinesina es compatible con funciones celulares muy importantes como ser la *mitosis*, *meiosis* y *transporte axonal*.



donde P_i corresponde a un grupo de fosfato inorgánico.

El mecanismo de conversión de energía recolectada de la hidrólisis de ATP en un progresivo movimiento

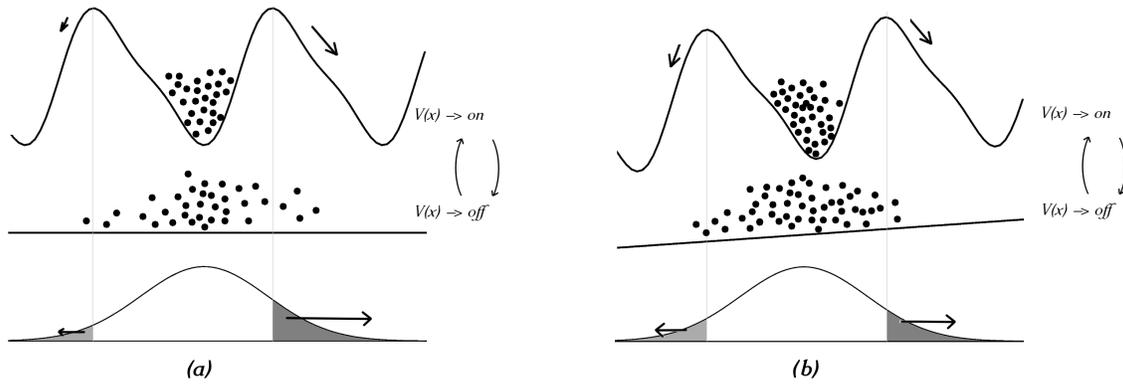


FIG. 4.— Gráfica cualitativa donde se presenta; en la parte superior el efecto de un potencial ratchet en estado *on* con (a) $F = 0$ y (b) $F \neq 0$, en el estado *off* del potencial, las partículas se dispersan con movimiento browniano (aleatorio) cuya distribución se observa en la parte inferior, donde las regiones sombreadas corresponden a partículas que se encuentran donde inicia o finaliza un pico de potencial y debido a la asimetría del potencial el número de estas partículas en tales regiones no es igual y por tanto en cada ciclo se obtiene un movimiento preferencial en una dirección.

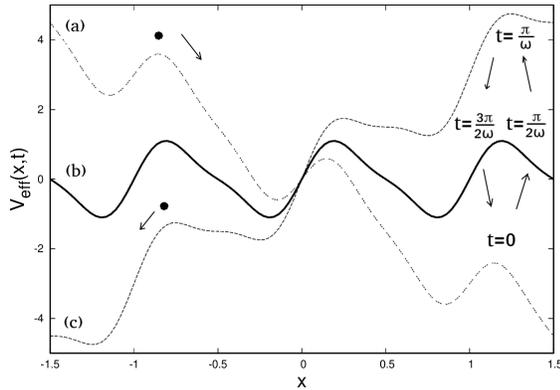


FIG. 5.— Gráfica del potencial efectivo de la ecuación (11) con $F(t) = a \cos \omega t$, $a = 3$ y ω arbitrario. (a) y (c) son correspondientes para los máximos de $F(t) = \pm a$ respectivamente, mientras que (b) es obtenido cuando se anula $F(t)$. La transición entre (a), (b) y (c) es suave a medida que avanza t . El movimiento dirigido surge de la asimetría del potencial en cada ciclo.

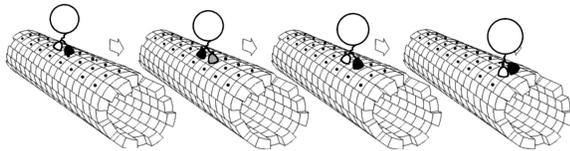


FIG. 6.— Transporte de la kinesina sobre un microtúbulo, tomado de <https://en.wikipedia.org/wiki/Kinesin>.

sobre los microtúbulos por la kinesina puede ser estudiado desde el formalismo de los motores brownianos con potencial ratchet, (Xie 2010), por ejemplo, se considera el potencial *flashing ratchet* como modelo para describir la dinámica de la kinesina, donde las partículas brownianas son reemplazadas por ésta

proteína. El potencial en estado *on* corresponde a la kinesina en estado ATP y cuando el potencial se anula la kinesina se encuentra en estado ADP. La aplicación cíclica de (12) genera un movimiento favorable hacia la dirección *positiva* del microtúbulo.

El comportamiento de una partícula browniana dentro del potencial intermitente es análogo al comportamiento de la kinesina en un ciclo dado por la ecuación (12), debido a ello, el modelo de motores brownianos con potencial flashing ratchet es investigado para describir la dinámica de esta proteína, incluso es posible modelar la acción de una fuerza externa que apunta a la dirección *negativa* del microtúbulo, de manera similar a la ec. (8), (Xie 2010).

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Este trabajo describe de manera resumida el mecanismo de generar movimiento en una dirección preferencial a partir del movimiento browniano de partículas a escala microscópica con la implementación de potenciales tipo *ratchet* y por tanto este trabajo puede servir como punto de partida para un estudio más detallado acerca de los motores brownianos, (Reimann 2002).

Se recomienda al lector, en caso de profundizar más acerca de motores moleculares, consultar; (Jülicher et al. 1997), donde se estudian sistemas biológicos a pequeña escala que convierten energía química en mecánica, comportamiento típico de un motor molecular, también se puede consultar, (Tu & Cao 2018), donde se estudia el rendimiento de un motor molecular con un análisis analítico y numérico.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Astumian, R. D. 1997, *Science*, 276, 917
 Avellaneda, D. R. & Naranjo, F. 2014, *Ciencia en Desarrollo*, 5, 173
 Feynman, R., Leighton, R., & Sands, M. 1963, *The Feynman Lectures on Physics*, Volume 1 (Addison-Wesley)
 Jülicher, F., Ajdari, A., & Prost, J. 1997, *Rev. Mod. Phys.*, 69, 1269
 Parrondo, J. M. & de Cisneros, B. 2002, *Applied Physics A*, 75, 179
 Reif, F. 1965, *Fundamentals of statistical and thermal physics* (McGraw-Hill Book Company)
 Reimann, P. 2002, *Phys. Rep.*, 361, 57
 Reimann, P. & Hänggi, P. 2002, *Applied Physics A*, 75, 169
 Tu, Y. & Cao, Y. 2018, *Phys. Rev. E*, 97, 022403
 Xie, P. 2010, *International journal of biological sciences*, 6, 665

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Dr. Flavio Ghezzi Moris

Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos

Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

Misión

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica semestralmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

Instrucciones para los autores

La Revista Boliviana de Física recibe trabajos escritos en castellano, inglés o portugués y deben contar con un resumen en castellano y su correspondiente traducción en inglés.

Los autores deberán enviar sus trabajos preferentemente en los formatos $\text{L}^{\text{T}}_{\text{E}}_{\text{X}} 2_{\epsilon}$, *MS Word*, o *sólo texto* (con extensiones *.tex*, *.doc* y *.txt*, respectivamente), ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. Las figuras deberán tener una resolución razonable a fin de que puedan ser vistas con suficiente claridad por el lector.

Los artículos científicos serán revisados por el Comité Editorial y posteriormente por un par de árbitros anónimos quienes dan el veredicto sobre si el artículo es aceptado o no.

La comunicación de los autores con los árbitros se realiza únicamente a través del editor encargado del área.

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

Conflicto de interés: Los autores que envíen artículos para su publicación en la RBF admiten que no tienen conflicto de interés en relación a los trabajos realizados y presentados.

CONTENIDO

A. ARTÍCULOS

ANÁLISIS DE LA DINÁMICA POBLACIONAL DE
CÉLULAS CANCEROSAS, MEDIANTE UN MODELO DE
RADIOSENSIBILIDAD

*Winder A. Canezo-Gómez, Gloria Rodrigo & Gonzalo Marcelo
Ramírez-Ávila*

ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL ARO ROTANTE: NUEVAS
EVIDENCIAS DE LA INDEPENDENCIA DE LA MASA Y DE LA
EQUIPROBABILIDAD DEL PUNTO DE EQUILIBRIO

Lucas Blitz Lozada Gobilard & Gonzalo Marcelo Ramírez-Ávila

ESTUDIO CIENCIOMÉTRICO DE LA REVISTA BOLIVIANA DE
FÍSICA CON ELEMENTOS DE ANÁLISIS DE REDES COMPLEJAS

Verónica Subieta-Frías & Gonzalo Marcelo Ramírez-Ávila

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

DEL MOVIMIENTO BROWNIANO A LOS MOTORES
BROWNIANOS

L. A. Manzaneda Osorio G.