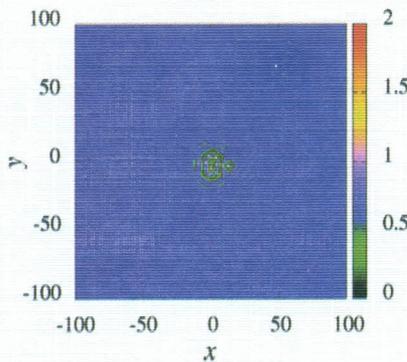


ISSN - 1562 - 3823

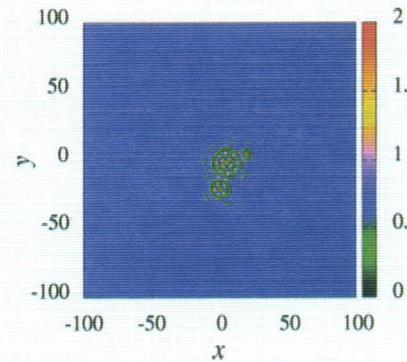
# REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

NUMERO 41

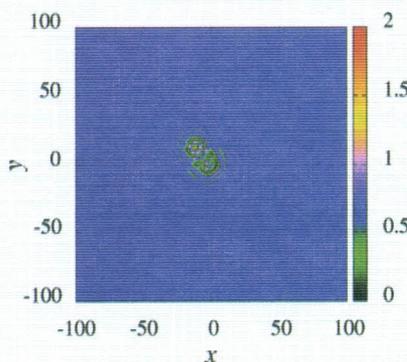
DICIEMBRE 2022 LA PAZ - BOLIVIA



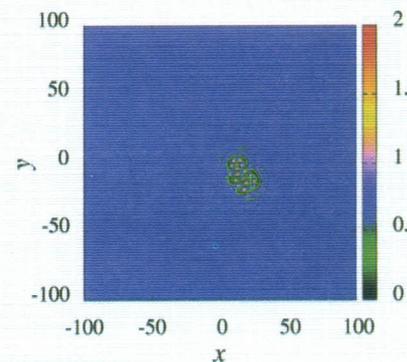
(a) Stadium-one,  $\gamma = 0.732$ ,  $\lambda_{\max} = 0.010$ .



(b) Pentagon-circular-one,  $\gamma = 0.758$ ,  $\lambda_{\max} = 0.015$ .



(c) Pentagon-grub,  $\gamma = 0.730$ ,  $\lambda_{\max} = -0.001$ .



(d) Pentagon-grub,  $\gamma = 0.753$ ,  $\lambda_{\max} = 0.016$ .

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS  
CARRERA DE FÍSICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

---

## REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

Esta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

### COMITÉ EDITORIAL

**Sociedad Boliviana de Física**

**Lic. Alfonso Velarde Chávez**  
Email: alfonso.velarde@gmail.com

**Instituto de Investigaciones Físicas**

**Dr. Flavio Ghezzi Moris**  
Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo  
**Dr. Wilfredo Tavera Llanos**  
Email: witavera@fiumsa.edu.bo

**Carrera de Física**

**Dr. Armando R. Ticona Bustillos**  
Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

---

### CONSEJO EDITORIAL

**Dr. Oscar Antonio Rondón**

Institute of Nuclear and Particle Physics  
University of Virginia  
McCormick Road, Charlottesville, VA 22901  
804 924-6787, USA  
Email: or@virginia.edu

**Dr. Carlos Navia**

Instituto de Física  
Universidade Federal Fluminense  
Av. Gen. Milton Tavares de Souza  
24210-340, Niterói, RJ-Brasil  
Email: gfcnoj@if.uff.br

**Dr. Iván Sidelnik**

Centro Atómico Bariloche - CONICET  
Av. Bustillo 9500 (R8402AGP)  
S. C. de Bariloche  
Rio Negro, Argentina  
Email: sidelnik@cnea.gov.ar

**Dra. Maria Emília Xavier Guimarães Lopes**

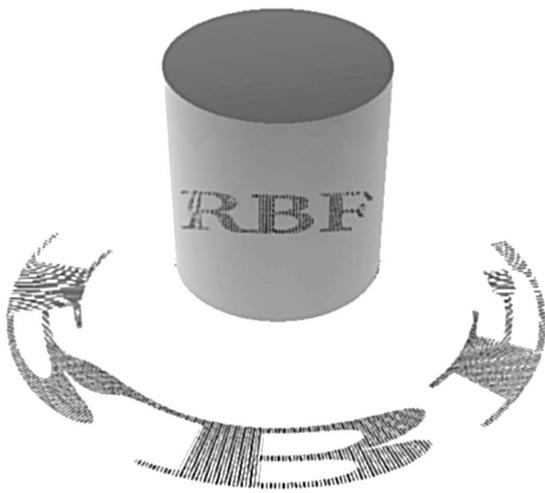
Instituto de Física  
Universidade Federal Fluminense  
Av. Gen. Milton Tavares de Souza  
24210-346, Niterói, RJ-Brasil  
Email: mexguimaraes@id.uff.br

**Dr. David Laroze**

Instituto de Alta Investigación  
Universidad de Tarapaca  
Arica - Chile  
Email: david.laroze@gmail.com

---

ISSN 1562-3823



# Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS  
CARRERA DE FÍSICA  
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS  
Y  
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 41  
DICIEMBRE DE 2022  
<https://doi.org/10.53287/edcc5033ur69u>

## **Revista Boliviana de Física**

**ISSN 1562-3823**

**Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica**

<http://www.scielo.org.bo>

<http://www.latindex.unam.mx>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.  
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

*Diseño:* W. Tavera

*Dirección:* Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.

Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

*Portada:* Cúmulos de solitones con patrones complejos.

*Formato*  $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ . *Tipo de fuente utilizada:* newcentury

*Impreso por:* **Imprenta Antofagasta**

*Dirección:* Canónigo Ayllón No. 524. Tel. (591 2) 2493609.

## CONTENIDO

EDITORIAL	<i>Editor</i>	1
-----------	---------------	---

### A. ARTÍCULOS

ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE UN DETECTOR CHERENKOV DE AGUA EN EL MARCO DE LA COLABORACIÓN LAGO	<i>Beymar Mamani &amp; Martín Subieta</i>	3
SOLUCIÓN DE UNA <b>EDP</b> COMPLETA INHOMOGÉNEA E IMPLEMENTACIÓN DE CONDICIONES DE FRONTERA MEDIANTE PASEOS ALEATORIOS	<i>V. Franz Suño M.</i>	12
MORFOLOGÍA DE PATRONES LOCALIZADOS BIDIMENSIONALES DE UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER NO-LINEAL GENERALIZADA	<i>Deterlino Urzagasti</i>	24

### B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

EFFECTOS DE LOS CAMBIOS CLIMÁTICOS SOBRE LOS BOSQUES DE ALTURA EN EL ALTIPLANO	<i>Vanesa Serrudo, Heidi Montecinos, María Elena Angulo, Peter Zabala-Medina &amp; Eduardo R. Palenque</i>	31
--	--	----

# EDITORIAL

La necesidad emergente de lograr que la ciencia sea cada vez más abierta, accesible, transparente y lleve beneficio para todos, posiciona a nivel global el concepto de “Ciencia Abierta” surgido desde la propia comunidad científica y que en la actualidad se ha convertido en un movimiento de carácter mundial. La Conferencia General de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), en su 41<sup>a</sup> reunión, del 9 al 24 de noviembre de 2021 (Paris), aprueba y hace público un documento denominado “Recomendación de la UNESCO sobre la Ciencia Abierta”, en el que se introducen definiciones, justificaciones, un marco de principios y valores, así como los ámbitos de acción en los que los estados miembros deberían aplicar determinadas medidas para alcanzar los objetivos de las recomendaciones sobre ciencia abierta (UNESCO (2021)). La recomendación de la UNESCO, considera que la ciencia abierta comprende todas las disciplinas científicas y todos los aspectos de las prácticas académicas, y se basa en los siguientes pilares clave: conocimiento científico abierto, infraestructuras de la ciencia abierta, comunicación científica, participación abierta de los agentes sociales y diálogo abierto con otros sistemas de conocimiento (UNESCO (2021)).

En este contexto, entre otras interrogantes, cabe la siguiente: ¿Será posible que la difusión de los resultados de la investigación científica pueda virar principalmente hacia una modalidad de “acceso abierto”? De cualquier manera, la implementación plena de las referidas recomendaciones sobre ciencia abierta, no será inmediata por los varios aspectos controversiales que aquello conlleva. En ese proceso, la Revista Boliviana de Física ratifica su propósito de renovación permanente, para continuar al servicio de la comunidad científica en general.

En esta oportunidad, tenemos la satisfacción de presentar a nuestros distinguidos lectores, la Revista Boliviana de Física número 41 con los siguientes artículos:

“Estudio de la Estabilidad de un detector Cherenkov de agua en el marco de la colaboración LAGO”, en el que los autores Mamani & Subieta (2022), presentan un interesante estudio de la estabilidad de un prototipo de detector Cherenkov de agua instalado en el Campus Universitario de la UMSA, La Paz-Bolivia, a una altura de  $\sim 3400$  m s.n.m.

“Solución de una **EDP** completa inhomogénea e implementación de condiciones de frontera mediante paseos aleatorios”, en el que Suxo (2022), desarrolla toda una metodología basada en “paseos aleatorios” para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDP’s) inhomogéneas que incluyen un término sin derivar y consideran diversas condiciones de frontera. En palabras del autor, no hay antecedentes para resolver una EDP inhomogénea que incluya el término sin derivar.

“Morfología de patrones localizados bidimensionales de una ecuación de Schrödinger no-lineal generalizada”, el autor Urzagasti (2022), realiza una clasificación cualitativa, de las características morfológicas, de un conjunto grande de patrones bidimensionales encontrados al resolver mediante métodos numéricos una ecuación de Schrödinger no lineal generalizada.

“Efectos de los cambios climáticos sobre los bosques de altura en el altiplano” (Serrudo et al. (2022)). En este trabajo se muestran los resultados de un estudio de las características especiales de las cortezas de la keñua (*Polylepis tarapacana*). Se reportan mediciones del coeficiente de conducción térmica de trozos de corteza de keñua provenientes de distintos lugares de la Cordillera de Los Andes.

Esperamos que la presente entrega sea de su entero agrado y le invitamos a que considere la publicación de su próximo artículo en la Revista Boliviana de Física.

## REFERENCIAS

- Mamani, B. & Subieta, M. 2022, *Revista Boliviana de Física*, **41**, 3
- Serrudo, V., Montesinos, H., Angulo, M. E., Zabala-Medina, P., & Palenque, E. R. 2022, *Revista Boliviana de Física*, **41**, 31
- Suxo, V. F. 2022, *Revista Boliviana de Física*, **41**, 12
- UNESCO. 2021, Recomendación de la UNESCO sobre la Ciencia Abierta, Website: [https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000379949\\_spa](https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000379949_spa)
- Urzagasti, D. 2022, *Revista Boliviana de Física*, **41**, 24

# EDITORIAL

In today's society it is increasingly necessary to make science more accessible, transparent, collaborative and for the benefit of all. This impetus has led the scientific community to coin the term "Open Science", which has since become a global movement. The United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO), in its 41st meeting in Paris (2021) ratified and published a document entitled "Recommendation on Open Science" (UNESCO (2021)). The document outlines a common definition, shared values, principles and standards for open science at the international level. It also identifies key areas of action in which member states should implement certain measures to achieve the UNESCO Open Science objectives. The UNESCO recommendation considers that open science encompasses all scientific disciplines and all aspects of academic practice, and is based on the following key pillars including: scientific knowledge, Open Science infrastructure, and the ability to use science as a tool for the development of science and technology (UNESCO (2021)).

Within this context we can ask ourselves: Is it possible to make the dissemination of scientific research and its results more effective and open? The full implementation of the UNESCO recommendations on Open Science will be a long journey given the complexity and often controversial aspects involved. In this process, the Bolivian Journal of Physics ratifies its intention of permanent renewal, in order to continue serving the scientific community in general.

On this occasion, we are pleased to present to our distinguished readers of the Revista Boliviana Física Number 41 the following articles:

"A study of the stability of a water Cherenkov detector in the framework of the LAGO collaboration", in which the authors Mamani & Subieta (2022), present an interesting study of the stability of a prototype water Cherenkov detector installed at the University Campus - UMSA, La Paz-Bolivia, at an altitude of  $\sim 3400$  m a.s.l.

"An inhomogeneous complete partial differential equation solution and the implementation of boundary conditions through random walks", in which Suxo (2022), develops a comprehensive methodology based on "random walks" to solve inhomogeneous partial differential equations (PDEs) that include an undifferentiated term and considering various boundary conditions. In the author's words, there is no precedent for solving an inhomogeneous PDE that includes the non-derived term.

"Localized two-dimensional patterns morphology of a generalized nonlinear Schrodinger equation", in which Urzagasti (2022), carries out a qualitative classification of the morphological characteristics of a set of bidimensional patterns when the nonlinear Schrodinger equation is solved.

And finally, in "Effects of climate change on high altitude woods in the altiplano", Serrudo et al. (2022) study the special characteristics of the bark of the keñua (*Polylepis tarapacana*). Measurements of the thermal conductivity coefficient of keñua bark pieces are reported from different locations in the Andes Mountains.

We hope you enjoy this issue and invite you to consider publishing your next article in the Bolivian Journal of Physics.

## REFERENCIAS

- Mamani, B. & Subieta, M. 2022, *Revista Boliviana de Física*, **41**, 3  
Serrudo, V., Montesinos, H., Angulo, M. E., Zabala-Medina, P., & Palenque, E. R. 2022, *Revista Boliviana de Física*, **41**, 31  
Suxo, V. F. 2022, *Revista Boliviana de Física*, **41**, 12  
UNESCO. 2021, Recomendación de la UNESCO sobre la Ciencia Abierta, Website: [https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000379949\\_spa](https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000379949_spa)  
Urzagasti, D. 2022, *Revista Boliviana de Física*, **41**, 24

## ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE UN DETECTOR CHERENKOV DE AGUA EN EL MARCO DE LA COLABORACIÓN LAGO

### A STUDY OF THE STABILITY OF A WATER CHERENKOV DETECTOR IN THE FRAMEWORK OF THE LAGO COLLABORATION

B. MAMANI<sup>†</sup>, M. A. SUBIETA VASQUEZ<sup>‡</sup>, & FOR THE LAGO COLLABORATION

Carrera de Física, Universidad Mayor de San Andrés,  
c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635, La Paz, Bolivia  
(Recibido 16 de noviembre de 2022; aceptado 20 de diciembre de 2022)  
<https://doi.org/10.53287/veba8520ih50k>

#### RESUMEN

El proyecto LAGO (*Latin American Giant Observatory*) tiene el objetivo de estudiar destellos de rayos gamma de ultra alta energía (GRBs, por sus siglas en inglés), así como también, astropartículas de alta energía en el contexto del clima espacial y la radiación atmosférica a nivel del suelo. LAGO despliega detectores Cherenkov de agua (WCD) al nivel de la superficie de la tierra, bajo la denominada, técnica de “partículas individuales”. En el presente trabajo se muestra el estudio de la estabilidad de un prototipo de detector Cherenkov de agua, puesto en marcha en las instalaciones del laboratorio de Rayos Cósmicos de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA). Este laboratorio se encuentra ubicado en el Campus de la universidad en la zona de Cota Cota, La Paz, Bolivia ( $\sim 3400$  m s. n. m.). Se ha estudiado el desempeño y la estabilidad del detector, bajo cuatro parámetros: la independencia de los datos registrados a través de una prueba de bondad de ajuste de los datos a una distribución de Poisson, el comportamiento de la razón área-pico de las señales registradas, el estudio del comportamiento del histograma de cargas y la medida experimental del tiempo de vida medio del muón; lográndose obtener un valor de  $2.2 \pm 0.2 \mu\text{s}$ . Este último estudio se llevó a cabo durante un tiempo de cuatro meses.

*Descriptores:* Rayos Cósmicos, LAGO, detectores de radiación Cherenkov, decaimiento de partículas, física de partículas.

Código(s) PACS: 96.40.-z, 29.40.Ka, 13.35.Bv

#### ABSTRACT

The LAGO project (*Latin American Giant Observatory*) is primarily focused on studying Gamma Ray Bursts (GRBs) as well as studying high energy astroparticles, space weather and atmospheric radiation at ground level. The technique used in LAGO is ground-based Water Cherenkov Detectors (WCD), by using “individual particle” detection. The present work shows the performance and stability of the WCD prototype at the Cosmic Ray Laboratory of the Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) based in Cota Cota La Paz, Bolivia ( $\sim 3400$  m a.s.l.). The detector was studied taking into account four parameters: the independence of the data by testing goodness-of-fit to Poisson distribution, the behavior of the signals area-peak ratio and finally the behavior of the charge histogram and the muon half-life time was experimentally measured obtaining a value of about  $2.2 \pm 0.2 \mu\text{s}$ . Data collected of the muon half-life study was carried out over four month period.

*Subject headings:* Cosmic Rays, LAGO, water Cherenkov detectors, particle decay, particle physics.

#### 1. INTRODUCCIÓN

Los Rayos Cósmicos (RC) son partículas altamente energéticas de origen extraterrestre que abarcan un rango de energía que va desde  $10^7$  eV hasta  $10^{20}$  eV. Si

trazamos el rango de energías contra el número de rayos cósmicos detectados, se genera el espectro de energías característico de los RC (Fig. 1), el cual obedece a una ley de potencias. En el espectro podemos destacar que alrededor de  $4 \times 10^{15}$  eV hay un cambio en el índice espectral que se conoce como la *Rodilla*, otro cambio alrededor de  $400 \times 10^{15}$  eV conocido como la *2da Rodilla*, y por último, un aplanamiento en las energías más altas alrededor de  $10 \times 10^{18}$  eV cono-

<sup>1</sup><https://orcid.org/0009-0000-6305-5736>

<sup>2</sup><https://orcid.org/0000-0002-9787-4681>

<sup>†</sup>Email: [bmamani@fiumsa.edu.bo](mailto:bmamani@fiumsa.edu.bo).

<sup>‡</sup>Email: [msubieta@fiumsa.edu.bo](mailto:msubieta@fiumsa.edu.bo).

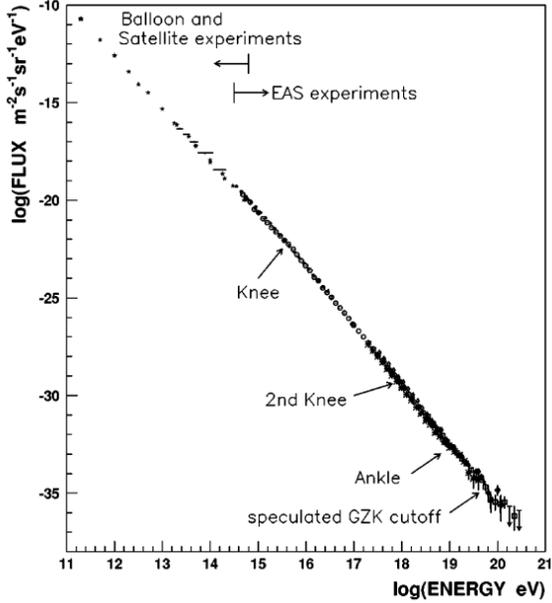


FIG. 1.— Espectro de energía de Rayos Cósmicos primarios, extraído de Nagano & Watson (2000)

cido como el *Tobillo* (Hörandel (2003)). En cuanto a su composición química, la cual puede ser muy variada debido al amplio rango de energías, podemos de manera general decir que un 90% son núcleos de hidrógeno o protones, un 9% son núcleos de helio y un 1% restante son núcleos pesados como el boro, litio, berilio y hierro (Rivera (2009)).

Debido a diversos factores, como la distancia a las fuentes de los rayos cósmicos y la naturaleza de los mecanismos de aceleración de los rayos cósmicos, entre otros, es que el flujo correspondiente a energías del orden de 1 GeV es de 1 partícula/(m<sup>2</sup>sr s GeV) por lo que la detección directa de estos eventos es posible por medio de satélites en órbita. La forma indirecta de detectar RC a partir de energías de 10<sup>15</sup>eV es por medio de los Chubascos Atmosféricos Extensos (EAS, por sus siglas en inglés) que nacen de la interacción del rayo cósmico primario con un núcleo de la atmósfera, produciendo una cascada de partículas secundarias que llegan hasta el nivel del suelo (nivel de observación).

Las EAS están dominadas por procesos hadrónicos los cuales se propagan longitudinalmente en la atmósfera (Grieder (2010)). Estos decaen en muones y neutrinos, produciendo la componente más penetrante del chubasco de partículas, es decir, la componente muónica. La componente más intensa del chubasco (electrones y fotones) se origina por el decaimiento de piones neutros en fotones, iniciando así, los chubascos electromagnéticos. Es de esta forma que podemos señalar las tres componentes características de cada chubasco atmosférico, la componente hadrónica ( $\pi^\pm$ ,  $K^\pm$ , p, n), la componente electromagnética ( $e^\pm$ ,  $\gamma$ ) y la componente muónica ( $\mu^\pm$ ,  $\nu^\pm$ ) (Fig. 2).

Una de las técnicas para la detección de los EAS es la denominada como “partículas individuales”

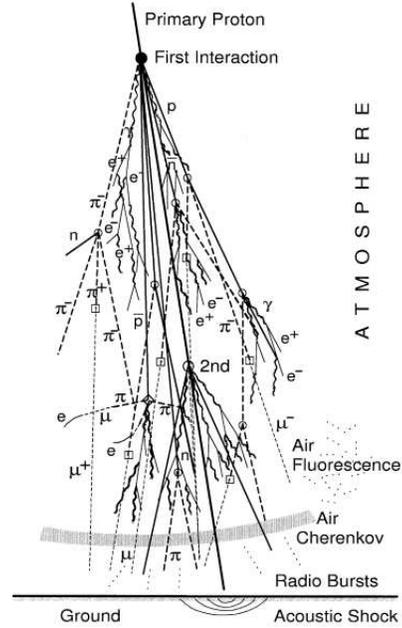


FIG. 2.— Esquema simplificado de un chubasco atmosférico, extraído de Grieder (2010)

(Vernetto (2000)), la cual requiere para su implementación, del registro de todas las partículas que interactúan con un detector, sean estas producto de los RC (partícula primaria) o de remanentes de otros eventos.

Una manera típica de detectar estos eventos es a través de un detector Cherenkov de agua, en el cual, como su nombre lo menciona, la detección se realiza a través de un reservorio de *agua* cuyo interior está recubierto por un material con una alta reflectividad en el espectro visible (Gichaba & Mississippi U. (1998)), para optimizar la reflexión difusiva de los fotones producidos por el efecto Cherenkov debido al paso de una partícula cargada en el agua. En la parte superior del reservorio se encuentra un sensor de luz que se caracteriza por ser altamente sensible a un amplio espectro que va desde el ultravioleta hasta el infrarrojo. Este sensor es denominado como “tubo fotomultiplicador” (PMT, por sus siglas en inglés) y detecta a los fotones Cherenkov que producen las partículas cargadas que lo atraviesan.

LAGO (*Latin American Giant Observatory*) (LAGO PROJECT (2022)), es una gran colaboración internacional de 10 países, en particular latinoamericanos, de los cuales Bolivia forma parte. Las metas generales de la colaboración LAGO contemplan la realización de estudios sobre:

- Destellos de rayos gamma de ultra alta energía (GRBs, por sus siglas en inglés).
- Astropartículas de alta energía.
- Clima espacial.
- Radiación atmosférica a nivel del suelo.

La colaboración LAGO emplea principalmente la técnica de detección basada en un detector

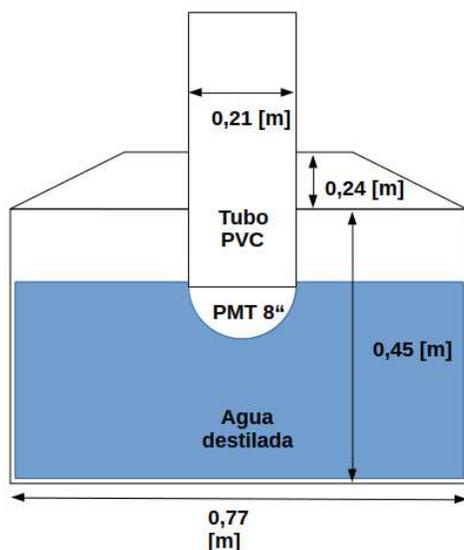


FIG. 3.— Esquema con las medidas del prototipo del detector Cherenkov de agua.

Cherenkov de agua. El efecto Cherenkov o radiación de Cherenkov no es más que el fenómeno producido por una partícula cargada que se mueve más rápido que la velocidad de la luz en el medio, dicha velocidad está dada por  $\beta c = v = \frac{c}{n}$ , donde  $n$  es el índice de refracción del medio y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Por lo tanto, para que se produzca el efecto Cherenkov, se debe cumplir que la velocidad de la partícula cargada debe ser  $v_{part} > \frac{c}{n}$  (Leo (1994)).

Un prototipo de detector Cherenkov de agua (WCD), fue montado y puesto en marcha en las instalaciones del Laboratorio de Rayos Cósmicos en la Carrera de Física (UMSA), ubicado en el campus universitario de Cota Cota, La Paz, Bolivia ( $\sim 3400$  m s. n. m.).

Se llevaron a cabo cuatro estudios sobre la estabilidad del tanque: probar que los datos siguen una distribución de Poisson, hallar la relación Área/Pico, observar el comportamiento del histograma de cargas y medir experimentalmente el tiempo de vida medio del muón.

## 2. PROTOTIPO DEL DETECTOR CHERENKOV DE AGUA

El prototipo del detector Cherenkov de agua, bajo la base de un tanque plástico de PVC de la marca TANKBURG de 300 litros de capacidad, tiene forma cilíndrica de 0,77 m de diámetro y 0,45 m de alto (ver Fig. 3). El tanque es llenado con aproximadamente 210 litros de agua destilada. Esta no debe ser contaminada con ningún producto en su interior, además no debe haber nada que se disuelva en el agua o que deje residuo alguno, ya que esto afectaría en el coeficiente de absorción (Sato (2011)). Por este motivo, en el interior del tanque se coloca un cilindro de Tyvek<sup>1</sup>, sin la tapa superior, cosido con hilo de pescar de la marca Strong & Strechy. De igual manera, se forraron dos semicircunferencias de

<sup>1</sup> El Tyvek es un material con una alta reflectividad en el espectro visible.



FIG. 4.— Fotografías del cilindro de Tyvek dentro del tanque plástico.

poliestireno expandido (plastroforno) (ver Fig.4) con una abertura circular de 0,23 m de diámetro para el paso del tubo fotomultiplicador (PMT). En la base interna del tanque, producto del diseño del mismo, presenta protuberancias que garantizan la estabilidad del mismo, por lo que para poder tener una base lisa se incorporaron dos semicircunferencias de acetato.

El detector utiliza un PMT de 8 pulgadas de la marca THOR EMI ELECTRON D642DKF. Para el soporte del PMT en la tapa del tanque se realizaron modificaciones con un tubo de PCV de 0,21 m de diámetro (Fig. 5). Para sujetar el PMT se diseñó una argolla de metal (Fig. 6), de manera tal que solo el fotocátodo esté en contacto con el agua. Por otro lado, para asegurar el PMT al tubo de PVC se calaron canales para que la argolla mantenga fijo al PMT. El tanque está cubierto con tela negra, esto para evitar el paso de los rayos de luz ambiental que pueden activar el PMT provocando ruido en la señal del detector (Fig. 7).

## 3. SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS

El sistema de adquisición de datos (DAQ, por sus siglas en inglés) empleado en el prototipo del detector (Fig. 8), consiste de un divisor de voltaje EMI-D642, esta placa cuenta con dos entradas BNC (Bayonet Neill-Concelman), una para suministrar alto voltaje a cada dínodo del PMT a través del divisor de voltaje, y la otra para la salida de señal. Un



FIG. 5.— Modificaciones realizadas a la tapa del tanque más el acople del tubo PVC.



FIG. 7.— Detector final puesto en marcha con tela negra como cobertura.



FIG. 6.— Argolla metálica diseñada para mantener el PMT fijo al tubo de PVC.

cable tipo LEMO es empleado para llevar la señal de la salida del ánodo del PMT al osciloscopio SIGLENT SDS 1202X-E de 200 MHz y 1 GSa/s el cual registra los pulsos de cada evento (Fig. 9). A través de una conexión vía Ethernet los datos son almacenados en un servidor. El registro de los datos es llevado a cabo por un programa escrito en GOLANG, desarrollado por el Grupo de Rayos Cósmicos de Carrera de Física (UMSA), que interpreta el protocolo SCPI (*Standard Commands for Programmable Instruments*) bajo el

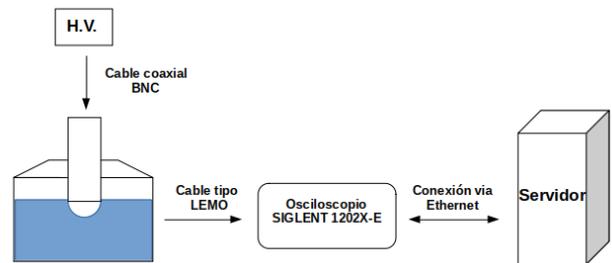


FIG. 8.— Esquema del sistema de adquisición de datos DAQ.

cual se comunica el osciloscopio.

#### 4. MEDICIONES Y RESULTADOS

El detector ha estado en funcionamiento intermitentemente desde febrero de 2022. Una serie de pruebas se han realizado para el estudio de la estabilidad del detector, consistentes en: confirmar que los datos siguen una distribución de Poisson, comportamiento de la razón Área/Pico de las señales, construcción del histograma de cargas y, finalmente, la medida experimental del tiempo de vida medio del muón.

Antes de poner en marcha el detector se realizó la caracterización del Plateau (Hamamatsu-Photonics (2007)). Para esto se conectó el PMT a la fuente de alto voltaje, un módulo nuclear CAEN MOD. N471

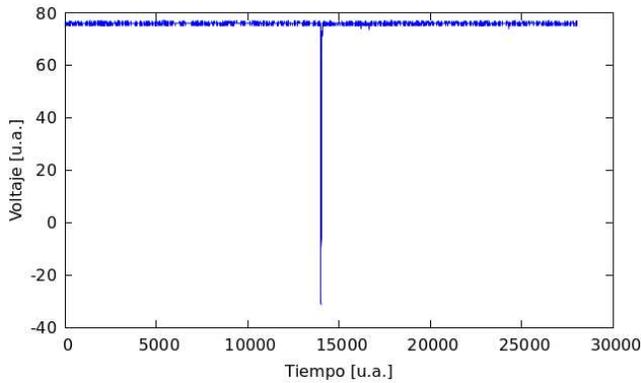
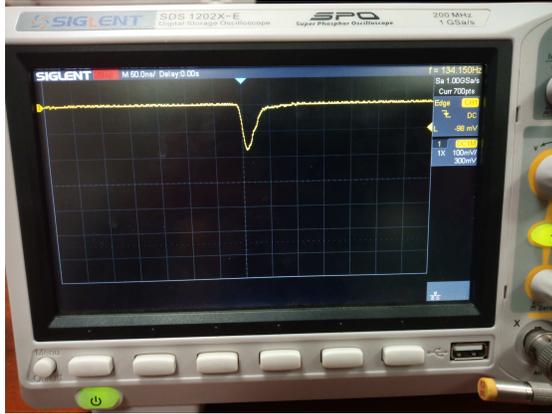


FIG. 9.— Pulso registrado a través del osciloscopio (en unidades arbitrarias). En la figura superior, se muestra un pulso observado en el osciloscopio. En la figura inferior, un pulso registrado, no hay relación entre los dos pulsos.



FIG. 10.— Distribuidor de alto voltaje y fuente de alto voltaje en la canastilla NIM.

alimentado por la canastilla (C) NIM, que alimenta a un distribuidor para garantizar la estabilidad a lo largo del tiempo (ver Fig. 10). A la salida del canal, un cable coaxial que lleva alto voltaje alimenta a la placa EMI-D64. La salida de la señal es llevada al osciloscopio y una copia de esta es conectada a los módulos de la canastilla NIM. En un intervalo de 20 s y variando el alto voltaje cada 50 V, se registraron el número de eventos en un módulo NIM contador. Observando para valores bajos de voltaje una correlación entre el número de eventos en el módulo NIM y el registro de pulsos en la pantalla del osciloscopio.

En la Fig. 11 se observa que la zona del “plateau”

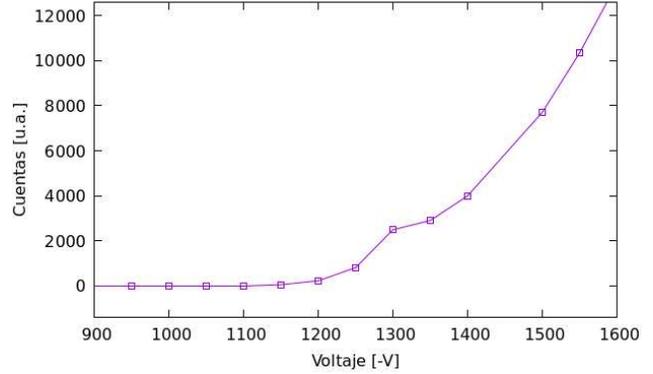


FIG. 11.— Plateau del PMT ThorEmiElectronTube D642DKF. A pesar que zona del plateau está entre 1300 y 1350 V se utilizó como voltaje efectivo de operación 1300 V, debido a que para voltajes superiores solo incrementan el ruido de señal y no así las cuentas provenientes de partículas secundarias producidas en las EAS.

ronda entre los valores de 1300 a 1350 V siendo el voltaje efectivo de operación 1300 V.

#### 4.1. Distribución de Poisson de los datos

Los eventos registrados en el detector, por su naturaleza, son eventos independientes que siguen una distribución de Poisson (Clark (1960)). El detector, al estar destinado a funcionar un largo tiempo (días, meses o incluso años), debe seguir una condición estable, garantizando así la independencia de los datos de otros efectos. Es con este fin, que se tomó el registro del número de cuentas, señales registradas denominadas trazas, en el detector.

Utilizando módulos nucleares en la canastilla NIM (ver Fig. 10), una copia de la señal entra hacia el discriminador de 8 canales de la marca CAEN MOD. 96 con un trigger (umbral) de 50 mV donde se tomaron las cuentas cada 10 s a lo largo de 20 min.

Se realiza una prueba de bondad de ajuste para una distribución de Poisson bajo los siguientes parámetros:

- Se establece un estadístico que nos ayude con la prueba de hipótesis. Este estadístico sigue una distribución de chi-cuadrado con  $n-1$  grados de libertad (Bol'shev & Mirvaliev (1979)).

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}} \quad (1)$$

- Se toma como  $H_0: D \sim \chi_{(n-1)}^2$ .
- Se toma como  $H_1: D \approx \chi_{(n-1)}^2$ .

Definiendo una prueba de dos colas, para un valor estándar del 5% para una muestra de 42 datos, se tiene un valor de la región de rechazo inferior en  $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ , con un valor de 24.4 y para la región de rechazo superior  $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$  con un valor de 59.3. Tras realizar la prueba de bondad de ajuste, el análisis del estadístico nos arroja un valor de

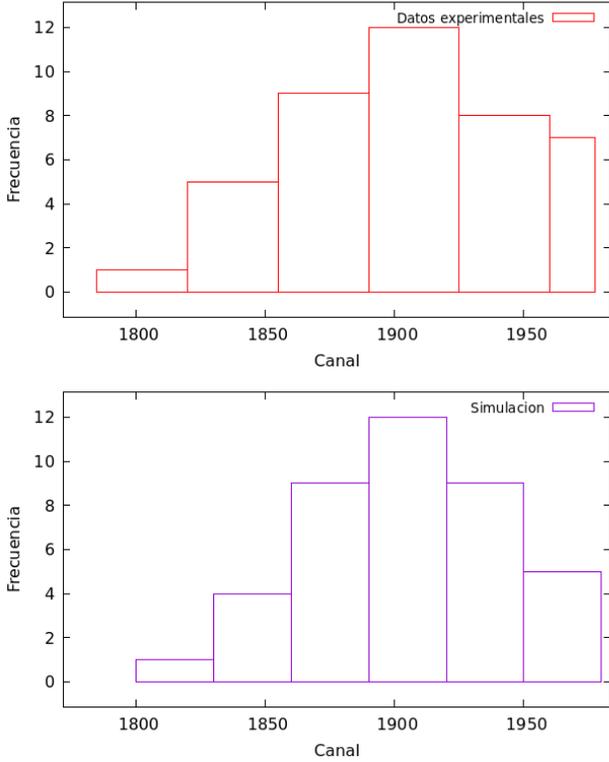


FIG. 12.— Gráfica del histograma de las cuentas en 20 minutos. Arriba: Datos obtenidos con el registro de los módulos NIM. Abajo: Datos simulados con la inversa de la acumulativa de la distribución de Poisson con  $E[x] = 1908$  y un percentil inicial de 1810.

$\chi^2_{0,025} = 24.4 < 43.6 < \chi^2_{0,975} = 59.3$ , por lo tanto, **NO** rechazamos la hipótesis nula y concluimos que la distribución de las cuentas registradas en el detector sigue una distribución de Poisson. Podemos apreciar de mejor manera, que el comportamiento de las cuentas sigue una distribución de Poisson en la Fig. 12, donde se muestra un histograma de las cuentas registradas por el contador. En la Fig. 12 inferior se muestra datos simulados para una distribución de Poisson con un  $E[x] = 1908$  y un percentil inicial de 1810.

#### 4.2. Razón Área-Pico

Una medida de la calidad del agua a través del coeficiente de absorción, junto a la reflectividad del recubrimiento interno del detector (Sato (2011)) (en nuestro caso el cilindro de Tyvek), es la razón área-pico de las señales registradas. Una caída en el comportamiento de esta razón, que en principio debería mantenerse lineal a lo largo del tiempo, es considerada una clara muestra de un cambio en la reflectividad o de la calidad del agua, producto del crecimiento de micro-organismos (Suomijärvi (2008)). Para este estudio se tomaron medidas intermitentes<sup>2</sup> de las señales registradas por el detector en un periodo de 4 meses.

<sup>2</sup> La toma de datos se realizó de forma discontinua a lo largo del estudio con una diferencia de 30 días entre los puntos de estudio.

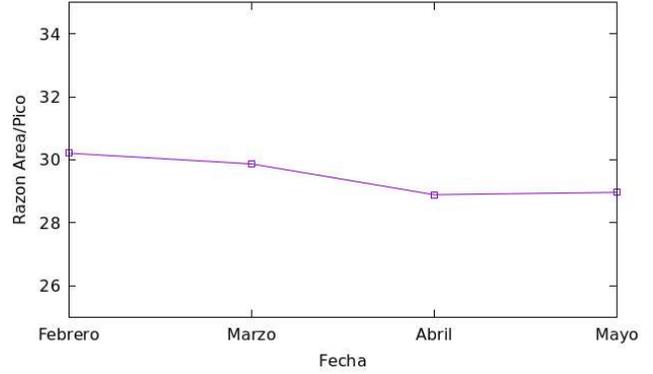


FIG. 13.— Comportamiento de los valores de la razón área-pico para los meses de febrero a mayo del 2022.

La obtención de la razón área-pico se realizó calculando el área debajo de cada pulso (traza) individual, a la par de la obtención del valor de voltaje máximo del pulso. Debido a la resolución con la que cuenta el DAQ, en especial el osciloscopio cuya resolución es de 1 GSa/s (1 giga sample por segundo), la diferencia temporal entre cada punto que conforma la señal entera es de 1 ns. Es por esta razón que se estableció el siguiente algoritmo para el análisis de los datos:

- Como podemos apreciar en la Fig. 9 el pulso se encuentra en unidades arbitrarias. El osciloscopio cuenta con una fórmula para la transformación a las unidades correctas.

$$V = N \frac{VDIV}{25} - OFFSET \quad (2)$$

- Con la transformación de las unidades, se voltea el pulso y se lo normaliza para que el análisis sea más sencillo.
- Se calcula el área debajo de la señal.
- Se acumulan los puntos del pulso en “bins”, cada bin cuenta con una ventana de 7 ns, es decir, con 7 puntos.
- Se calcula el máximo valor del voltaje para cada bin de la señal, y por comparación, se calcula el máximo bin de toda la señal.
- Se registra tanto el área, el máximo voltaje y la razón área-pico de cada señal en un archivo de texto.

Tras el cálculo de la razón área-pico de cada señal registrada en los datos tomados intermitentemente a lo largo de los 4 meses, se procede a realizar un ajuste lineal  $F(x) = A$ , de donde se obtiene un valor para cada mes (ver Fig. 9).

#### 4.3. Histograma de cargas del detector WCD

Una forma de calibrar el detector y tener una comparación con unidades físicas, es la obtención de la curva de los muones que atraviesan de forma completamente vertical al detector, de esta manera obteniendo el VEM (*Vertical Equivalent Muon*).

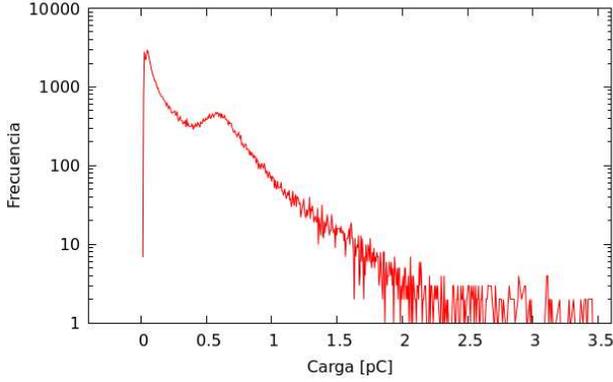


FIG. 14.— Gráfica del histograma de cargas.

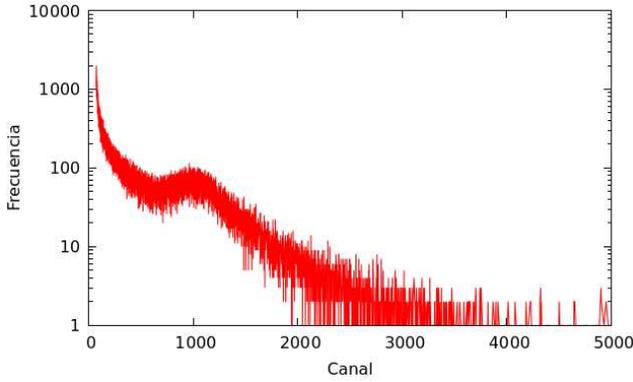


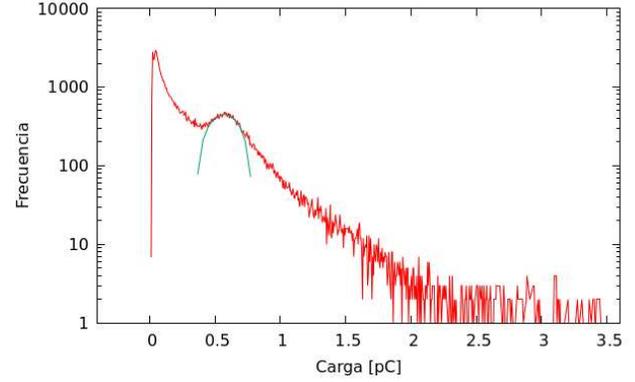
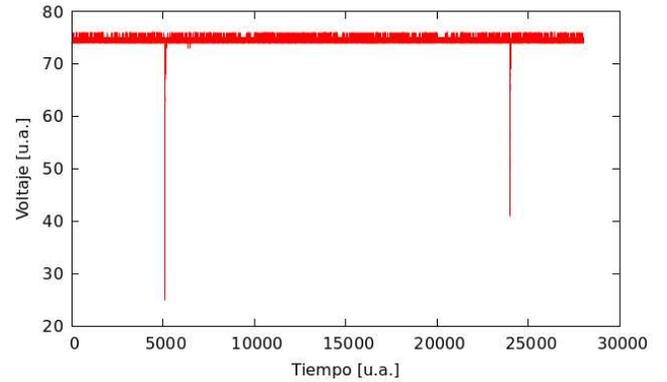
FIG. 15.— Histograma de altura de pulsos.

Tras el análisis de todas las partículas secundarias producidas por las EAS, los electrones y positrones al tener una masa aproximadamente 207 veces menor que la de los muones, pierden energía principalmente por el proceso de ionización. Los rayos gamma en el rango de energías [ $10^3$  eV -  $10^6$  eV] que llegan al detector, producen los efectos denominados: efecto fotoeléctrico, efecto de dispersión de Compton y producción de pares. El estudio de estos efectos muestra que ninguno produce una gran cantidad de fotones registrados en el PMT.

Los puntos mencionados se ven representados en el histograma de carga (ver Fig. 14). Donde se espera una frecuencia alta para valores bajos y frecuencias bajas para valores altos. Es entre estos dos valores que resalta la curva de los muones (ver Figuras 14 y 15), que es donde se debe realizar la calibración del detector.

De igual manera, se observa el comportamiento del histograma de la altura de los pulsos, donde se toma el valor máximo de cada pulso registrado asociado al pico del histograma (ver Fig. 15).

Con un ajuste a la curva de muones, podemos ver que el punto máximo representa al VEM (muones que atraviesan el detector de forma vertical). Estos muones depositan en el agua una energía promedio como una función de su energía y de la altura del detector. De esta manera vemos que:

FIG. 16.— Histograma de cargas ajustado con una función  $f(x) = e^{a+bx+cx^2}$ , dando un valor para el VEM en el canal  $0.57 \pm 0.06$ pC con una energía de 90 MeV.FIG. 17.— Pulsos registrados durante la apertura en la ventana temporal de  $\leq 20\mu s$ .

$$E_T = h_d \frac{dE}{dx}, \quad (3)$$

donde la pérdida de energía de un muón en el agua es típicamente  $\sim 2$  MeV/cm. Al realizar un ajuste a la curva de los muones (VEM), se tiene una distribución centrada en este valor (ver Fig. 16). Ajustando la curva a  $F(x) = e^{a+bx+c^2}$ , del histograma de la Fig. 14, se presenta un valor para el VEM en  $0.57 \pm 0.06$ pC con una energía de 90 MeV, que fue calculada utilizando la ecuación (3) como primera aproximación.

#### 4.4. Tiempo de vida media del muón

Como vimos en la sección 4.1, los eventos registrados en el detector siguen una distribución de Poisson. Una propiedad interesante de esta distribución es la re-escalabilidad (Machado et al. (2020)). Usando esta propiedad definimos  $t$  como la duración temporal entre dos eventos que siguen una distribución de Poisson, identificando a  $t$  como una variable aleatoria que obedece una distribución exponencial,  $P(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ . Con base en estas propiedades, definimos el tiempo de vida medio del muón como  $\tau_\mu = \frac{1}{\lambda_\mu}$ .

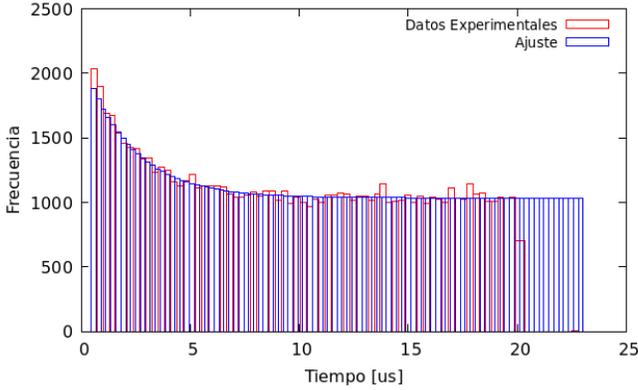


FIG. 18.— Histograma de las diferencias temporales de los pulsos, con un ajuste  $P(t) = Ae^{-\tau\mu t} + C$  se obtiene un valor para el muón de  $2.2 \pm 0.2\mu s$ .

Como una prueba de la sensibilidad y estabilidad del detector, se midió el tiempo de vida medio del muón. El muón puede decaer de dos maneras distintas:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e, \quad (4)$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e, \quad (5)$$

consecuencia de la fuerza débil. Debido a las condiciones del detector no se puede hacer distinción entre los dos decaimientos, por lo que solo tomaremos en cuenta el segundo decaimiento.

Ajustando el osciloscopio en las opciones del trigger, se establece el tipo *intervalo*, el cual activa una ventana temporal, que para nuestro caso es  $\leq 20 \mu s$  donde se registran todos los eventos que caen dentro de esta ventana temporal. De esta manera, se observa una secuencia de pulsos (ver Fig. 17): el primero, generado por un muón, y el segundo, debido al electrón.

Siguiendo el algoritmo desarrollado, descrito en la sección 4.2, se identifican los picos máximos de los dos pulsos, es decir, el primero del muón o antimuón, y el segundo, de los electrones o positrones. Con cada pico máximo se asocia un tiempo, la diferencia temporal entre los dos picos máximos, representará el tiempo que transcurre entre el registro del primer pulso y el segundo.

Debido a las interacciones que se producen en el detector, los fenómenos asociados al histograma se pueden resumir de la siguiente manera: la primera zona que está asociada al decaimiento del muón, sigue un comportamiento exponencial, y la segunda, dominada por *afterpulsing* (Torre et al. (1983)) y por eventos aleatorios producidos por partículas ajenas que atraviesan el detector en la misma ventana temporal.

Procediendo con al ajuste del histograma de tiempos, se emplea la siguiente ecuación:

$$P(t) = Ae^{-\tau\mu t} + C. \quad (6)$$

Del ajuste correspondiente (Fig. 18) se obtuvieron los siguientes valores para los parámetros:

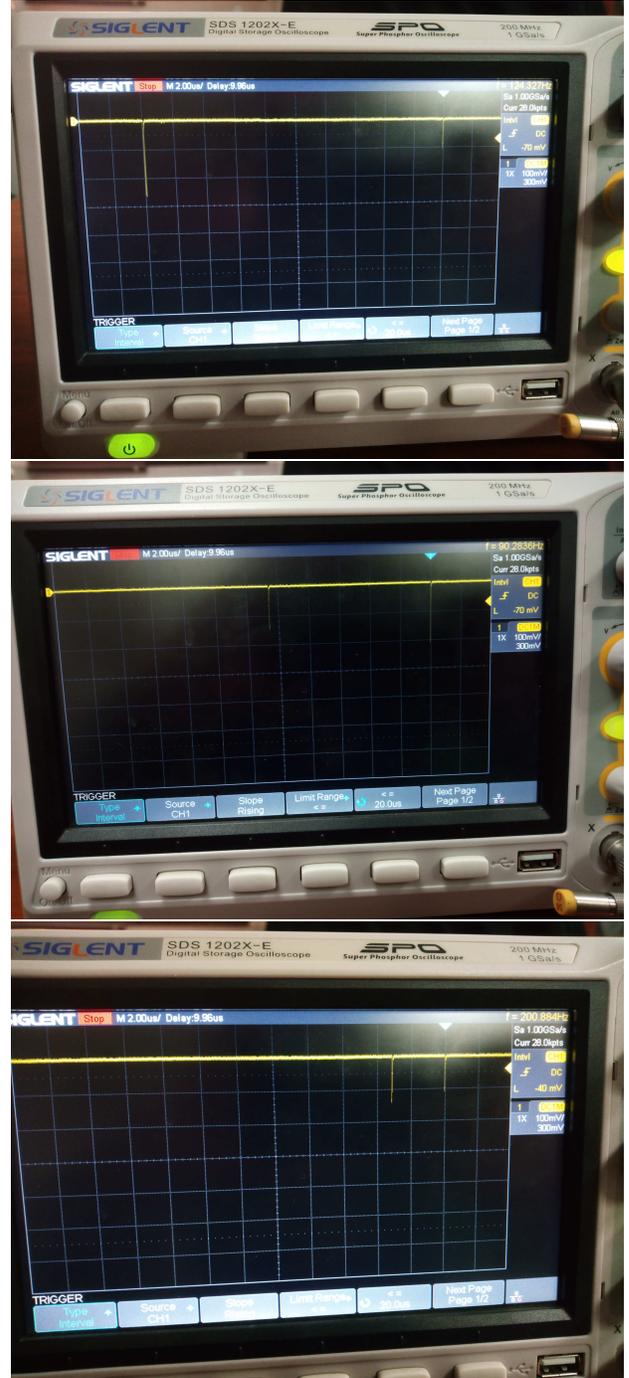


FIG. 19.— Pulsos registrados por el osciloscopio en la ventana de  $\leq 20\mu s$ . Arriba, pulso en el máximo de la ventana temporal. Medio, evento aleatorio. Abajo, posible decaimiento del muón.

$A = 1091 \pm 128$ ,  $C = 1035 \pm 6$  y  $\tau = 0.45 \pm 0.042$ . El valor obtenido para el tiempo de vida medio del muón fué  $2.2 \pm 0.2\mu s$ , siendo este valor muy cercano al reportado en la bibliografía, que es de  $2.1969811 \pm 0.0000022\mu s$  (Olive (2016)).

## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo, se han estudiado las principales características de un prototipo de detector Cherenkov de agua, que se mantuvo en operación

de forma intermitente por un tiempo de 4 meses, del mes de febrero al mes de mayo del año 2022.

Se confirma que los datos registrados por el DAQ, que fueron producidos por partículas que atraviesan el detector, siguen una distribución de Poisson garantizando su correcto funcionamiento. De no haber sido así, significaría que los datos están correlacionados, perdiendo la calidad de ser eventos independientes.

El estudio de la razón área-pico de las señales, nos muestra problemas técnicos al momento del ensamblado del detector, este no está completamente sellado. La disminución de la calidad de los datos con el paso del tiempo, refleja una alteración del coeficiente de absorción del agua destilada, debido a la introducción de motas de polvo o impurezas del ambiente, y la generación de microorganismos en el tanque bajando la calidad del agua. El histograma de cargas, nos muestra una mejor calidad del detector, comparado con los reportes previos para prototipos similares (Velarde et al. (2009)).

La medición del tiempo de vida media del muón, muestra que el prototipo del detector Cherenkov de agua a pesar de los problemas en el ensamblado, es lo bastante sensible como para detectar decaimientos de partículas (muones) que típicamente son estudiados en detectores de centelleo. Del histograma de diferencias temporales se puede apreciar un alza en la frecuencia para tiempos cortos ( $\leq 1.5\mu s$ ). Estos valores altos, son un claro indicio de que el detector es lo suficientemente sensible para observar decaimientos mucho más cortos que el del muón. De

esta manera, concluimos que existe la posibilidad de medir tiempos de decaimiento de partículas como los de los piones y kaones que hasta el momento solo habían sido estudiados con centelladores líquidos a menores alturas o en aceleradores de partículas.

Como perspectiva a futuro, se pretende implementar las siguientes mejoras al prototipo del detector: un nuevo sistema DAQ que se está probando para su funcionamiento a largo plazo, la implementación de la tarjeta Red Pitaya acoplada con la placa propia de la colaboración LAGO V1R0, además de la incorporación de sensores de presión y temperatura. Adicionalmente, la incorporación de un GPS para la posterior sincronización del tanque en un pequeño arreglo de 3 detectores WCD para el estudio de la dirección de arribo de las EAS en las instalaciones del laboratorio de Chacaltaya (UMSA) a más de 5000 m s. n. m.

## AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue posible gracias al arduo trabajo de los miembros del laboratorio de Rayos Cósmicos y Altas Energías de la UMSA con quienes se desarrolló el diseño, construcción y montaje del prototipo del detector Cherenkov de agua.

### Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses respecto a la publicación de este documento.

## REFERENCIAS

- Bol'shev, L. N. & Mirvaliev, N. 1979, *Theory of Probability and its applications*, **23**, 461
- Clark, G. W. 1960, *Phys. Rev.*, **122**, 637
- Gichaba, J. O. & Mississippi U. 1998, Measurements of TYVEK reflective properties for the Pierre Auger Project, <https://www.osti.gov/biblio/15017207>
- Grieder, P. K. 2010, *Extensive Air Showers, High Energy Phenomena and Astrophysical Aspects* (Springer)
- Hamamatsu Photonics. 2007, *Photomultiplier Tubes Basics and Applications* (Hamamatsu)
- Hörandel, J. R. 2003, *Astroparticle Physics*, **19**, 193
- Leo, W. R. 1994, *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments* (Springer Berlin, Heidelberg), 46
- Machado, F. D., Castromonte, D. C., & Otiniano, L. 2020, DETECTOR CHERENKOV: Estudio del decaimiento del  $\mu$  y el espectro de Michel, Facultad de Ciencias - Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú
- LAGO PROJECT. 2022, [http://wiki.lagoproject.net/index.php/Main\\_Page](http://wiki.lagoproject.net/index.php/Main_Page)
- Nagano, M. & Watson, A. A. 2000, *Reviews of Modern Physics*, **72**, 689
- Olive, K. A. 2016, *Chinese Physics. C, High Energy Physics and Nuclear Physics*, **40** (10), 100001
- Rivera, H. 2009, Tesis de Grado, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz
- Sato, R. 2011, in *32nd International Cosmic Ray Conference*, Vol. 3, 204
- Suomijärvi, T. 2008, in *30th International Cosmic Ray Conference*, Vol. 4, 311
- Torre, S., Atonioli, A., & Benetti, P. 1983, *Review of Scientific Instruments*, **54**, 1777
- Velarde, A., Ticona, R., Miranda, P., Rivera, H., & Quispe, J. 2009, *Revista Boliviana de Física*, **15**, 32
- Vernetto, S. 2000, *Astroparticle physics*, **13**, 75

SOLUCIÓN DE UNA **EDP** COMPLETA INHOMOGÉNEA E IMPLEMENTACIÓN DE  
CONDICIONES DE FRONTERA MEDIANTE PASEOS ALEATORIOS  
AN INHOMOGENEOUS COMPLETE **PDE** SOLUTION AND THE IMPLEMENTATION  
OF BOUNDARY CONDITIONS THROUGH RANDOM WALKS

V. FRANZ SUXO MAMANI<sup>†</sup>

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo – Brasil  
(Recibido 4 de noviembre de 2022; aceptado 12 de diciembre de 2022)  
<https://doi.org/10.53287/zahz5450im22o>

RESUMEN

El término inhomogéneo de una Ecuación Diferencial Parcial (EDP), describe diferentes sistemas físicos que contienen fuentes o sumideros como: carga, materia o energía, mientras que el término que no posee derivada (término de orden cero) está relacionado con diversos procesos físicos como: enfriamiento de Newton, absorción de Lambert o desintegración radiactiva entre otros. Existen métodos estocásticos como paseos aleatorios para resolver EDP's, por ejemplo, Suxo (2011) formuló un teorema aplicado exclusivamente a EDP's homogéneas, sin tomar en cuenta el término de orden cero. Por tanto, a fin de ampliar el estudio a mayor cantidad de fenómenos físicos, en este trabajo reformulamos el teorema antes mencionado, tomando en cuenta el término de orden cero dentro una EDP inhomogénea. Adicionalmente, implementamos el estudio de las condiciones de frontera de Dirichlet, Neumann y Mixta. Finalmente, verificamos la eficacia del estudio confrontando los resultados obtenidos con soluciones analíticas de las ecuaciones de Poisson, Fick y Fourier.

*Descriptores:* EDP completa inhomogénea – Condiciones de Frontera – Paseo Aleatorio

Código(s) PACS: 02.30.Jr, 02.60.Lj, 05.40.Fb

ABSTRACT

In a Partial Differential Equation (PDE), the inhomogeneous term describes different physical systems that contain sources or sinks such as: charge, matter or energy, while the term that does not have a derivative (zero order term) is related to diverse physical processes such as: Newton cooling, Lambert absorption or radioactive disintegration among others. There are stochastic methods such as random walks to solve equations, for example, Suxo (2011) formulated a theorem applied exclusively to homogeneous PDEs, without taking into account the zero order term. Therefore, in order to extend the study to several physical phenomena, in this work we reformulate that theorem taking into account the zero order term within an inhomogeneous PDE. In addition, we implement the study of the Dirichlet, Neumann and Mixed boundary conditions. Finally, we verify the effectiveness of the study by comparing the results obtained with analytical solutions of the Poisson, Fick and Fourier equations.

*Subject headings:* Inhomogeneous Complete PDE – Boundary Conditions – Random Walk

1. INTRODUCCIÓN

Fenómenos físicos por completo diferentes pueden describirse mediante un mismo modelo matemático o Ecuación Diferencial Parcial (EDP). Por ejemplo, una EDP *parabólica* modela procesos de evolución como difusión de materia o conducción de calor, entre tanto, una *elíptica* modela casos estacionarios como potenciales electrostáticos o membranas elásticas en reposo. Donde, la configuración inicial y la extensión espacial del sistema físico determinan la condición

inicial y de frontera de la EDP respectivamente<sup>1</sup>, es decir, el dominio del modelo matemático está definido en dimensiones espacio-tiempo. Por lo tanto, en el proceso de resolución de una EDP bajo un enfoque numérico, la condición inicial puede tratarse como una condición de frontera de tipo temporal.

A diferencia de la frontera *espacial* que puede ser cerrada o abierta, la frontera *temporal* en esencia es abierta porque está ubicada en el infinito, por tanto, la parte temporal del dominio es semi-infinita que abarca desde un instante inicial y se extiende hasta

<sup>†</sup><https://orcid.org/0009-0008-4914-241X>

<sup>1</sup> Un sistema físico que posee únicamente condiciones iniciales es modelado mediante una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO).

la eternidad ( $t_0 \leq t < \infty$ ). Sin embargo, como la frontera temporal no delimita el sistema físico de su entorno, el dominio temporal puede ser acotado de forma arbitraria sin alterar las propiedades del sistema. En contraste, el sistema y su entorno están en contacto en la frontera espacial, donde pueden ocurrir interacciones sistema-entorno a través de mecanismos conocidos como condiciones de frontera de *Dirichlet*, *Neumann* o una combinación de ambos denominada *Mixta* (Arfken (2007)). Por tanto, acotar un dominio espacial de carácter infinito significaría introducir ciertos errores de aproximación numérica en el proceso de resolución de una EDP.

Sistemas que obedecen la ley gravitacional o de naturaleza coulombiana están definidos sobre todo el espacio físico que es infinito, en consecuencia, si alguna propiedad del sistema es modelada a través de una EDP, la parte espacial del dominio adquiere dimensión infinita ( $0 \leq r < \infty$ ). En Sucho (2016), se encaran condiciones de frontera abiertas mediante paseos aleatorios, donde la estrategia para evitar paseos indeterminados es acotar el dominio espacial infinito, aunque en un dominio espacio-temporal no es necesario acotar porque el paseo siempre finaliza en la frontera temporal (condición inicial), mientras, Doob (1953) como estrategia predefine un número finito de pasos para interrumpir el paseo realizado sobre dominios infinitos. En suma, acotar el dominio o predefinir el número de pasos produce lo mismo, porque ambas estrategias finalizan/interrumpen el paseo aleatorio evitando procesos infinitos, es decir, la ampliación/reducción del acotamiento equivale a incrementar/disminuir los pasos predefinidos.

En una EDP, el *término inhomogéneo* representa diferentes aspectos físicos como presencia de cargas eléctricas en un medio dieléctrico, fuentes de calor en un material térmico o gradientes de presión en un fluido (líquido), donde los modelos matemáticos involucrados son las ecuaciones de Poisson, Fourier y Navier-Stokes respectivamente (Kreyszig (2006)). Por otro lado, el *término sin derivar* o término de orden cero está relacionado con diversos fenómenos físicos como: absorción de Lambert, enfriamiento de Newton, desintegración radiactiva, carga-descarga de capacitores o concentración iónica de disoluciones entre otros (Simmons (2002)), por ejemplo, el modelo

matemático del último caso es la ecuación no-lineal de Poisson-Boltzmann que linealizada adquiere la forma de una ecuación modificada de Helmholtz.

Numéricamente, existen diferentes métodos para resolver una EDP inhomogénea que puede contener (o no) el *término sin derivar*, por ejemplo: Diferencias Finitas, Elementos Finitos o Redes de Boltzmann. Pero, como requieren de un montaje matricial en el proceso de resolución, son inaplicables a condiciones de frontera abiertas por la finitud matricial, a menos que, el dominio sea acotado (ver, Sanjinés (2006)). Estocásticamente, los métodos de resolución de una EDP están basados en probabilidades de transición, como: *paseos aleatorios* que abordan condiciones de frontera abiertas sin necesidad de un acotamiento (ver, Sucho (2016)). Además, en lugar de operaciones matriciales, requiere solamente cálculos aritméticos que son fáciles de programar, así como, en vez de una resolución global, puede ser posible una parcial que favorece el cómputo paralelo. Sin embargo, no hay antecedentes para resolver una EDP inhomogénea (u homogénea) que incluya el término sin derivar.

En este trabajo, se desarrolla una metodología basada en paseos aleatorios para resolver una EDP inhomogénea que integra el término sin derivar y que posee diversas condiciones de frontera: *Dirichlet*, *Neumann* o *Mixta*. Específicamente, se implementa el concepto de *probabilidad de absorción* dentro las probabilidades de transición de un paseo aleatorio, cuya implementación se efectúa reformulando el teorema desarrollado en Sucho (2011). En síntesis, se generaliza el estudio realizado por Sucho (2011) para resolver EDP's más complejas, pero conservando la simplicidad que ofrece la metodología estocástica.

## 2. METODOLOGÍA

Únicamente los fenómenos o sistemas físicos más sencillos pueden modelarse mediante EDO's que dependen generalmente de una variable temporal, mientras que, la mayoría de los diversos tópicos avanzados de la Física Teórica son formulados en base a EDP's que dependen de dos o más variables (Kreyszig (2006)). Entonces, una ecuación general que represente tanto a EDO's como a EDP's tiene la forma de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \omega \frac{\partial^n f(x,y,\dots)}{\partial x^n} + \zeta \frac{\partial^{n-1} f(x,y,\dots)}{\partial x^{n-1}} + \dots + \delta \frac{\partial f(x,y,\dots)}{\partial x} + \\ & \mu \frac{\partial^m f(x,y,\dots)}{\partial y^m} + \xi \frac{\partial^{m-1} f(x,y,\dots)}{\partial y^{m-1}} + \dots + \lambda \frac{\partial f(x,y,\dots)}{\partial y} + \\ & \vdots \\ & \eta \frac{\partial^s f(x,y,\dots)}{\partial x^{s_i} \partial y^{s_j} \dots} + \varrho \frac{\partial^{s-1} f(x,y,\dots)}{\partial x^{s'_i} \partial y^{s'_j} \dots} + \dots + \beta \frac{\partial^2 f(x,y,\dots)}{\partial x \partial y} + \dots + \alpha f(x,y,\dots) = g(x,y,\dots) \end{aligned} \tag{1}$$

donde,  $f(x,y,\dots)$  es la función incógnita que describe

el sistema físico y  $g(x,y,\dots)$  es una función conocida

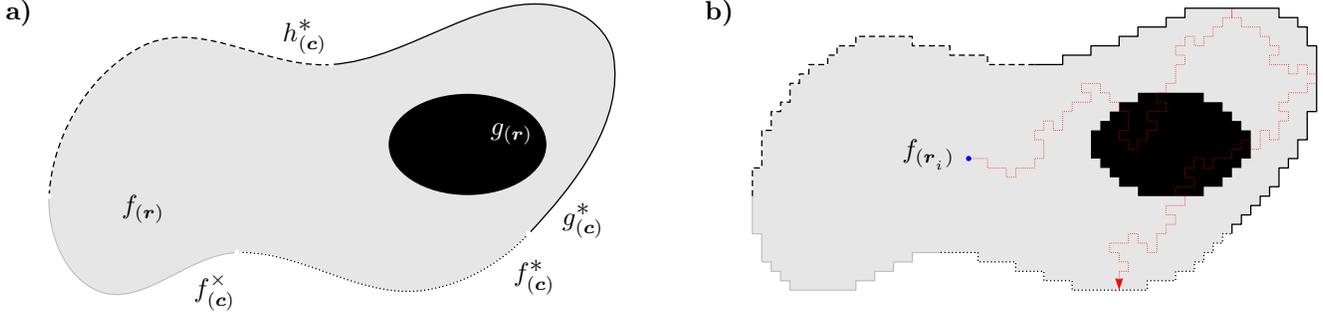


FIG. 1.— Representación gráfica de una EDP modeladora de un fenómeno físico. a) Esquema del dominio  $\Omega$  y frontera  $\partial\Omega$  de una EDP. b) Paseo aleatorio de una partícula virtual realizado sobre el dominio  $\Omega$  y frontera  $\partial\Omega$  de una EDP discretizada.

que es responsable de la inhomogeneidad del modelo matemático y representa a fuentes/sumideros, entre tanto, las letras griegas:  $\alpha, \beta, \dots, \omega$  son coeficientes que en general dependen de las variables  $(x, y, \dots)$ . Particularmente, si la EDP es homogénea pero con coeficientes constantes y la función  $f_{(x,y,\dots)}$  únicamente depende de dos variables con derivadas de segundo orden o menor, la EDP es lineal y puede ser reducida a una forma canónica: elíptica, parabólica o hiperbólica (Arfken (2007)).

Esquemáticamente, la función  $f_{(x,y,\dots)} \equiv f(r)$  abarca todo el dominio del sistema ( $\Omega$ ), en cambio la función  $g_{(x,y,\dots)} \equiv g(r)$  es un *subdominio* que puede cubrir todo, nada o parte del dominio (ver, Fig: 1a). Mientras que, la frontera del dominio denominada también borde o contorno ( $\partial\Omega$ ), está conformada por funciones conocidas:  $f^\times_{(c)}$ ,  $f^*_{(c)}$ ,  $g^*_{(c)}$  y  $h^*_{(c)}$ , donde, la primera función es la condición inicial relacionada con la *frontera temporal* ( $t = t_0$ ) y las tres restantes se relacionan con la *frontera espacial* ( $r = r_c$ ) que en específico son: la frontera de Dirichlet, Neumann y Mixta respectivamente (ver, Fig: 1a).

Físicamente, las interacciones que ocurren en una interfaz sistema-entorno pueden ser tan diversas como complejas dependiendo del fenómeno físico, sin embargo, en general están conformadas por dos tipos de interacciones básicas, como ser:

- ✓ Sistema  $f(r)$  inmerso en un baño infinito  $f^*_{(c)}$  que emula idealmente el entorno.
- ✓ Fuente/Sumidero  $g^*_{(c)}$  de una magnitud física presente en la frontera del sistema.

donde, estas interacciones son las condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann respectivamente.

Matemáticamente, las diferentes condiciones de frontera espacio-tiempo son expresadas como:

$$\begin{aligned}
 f(r) \Big|_{t_0} &= f^\times_{(c)} & \text{Inicial} & & \text{Tiempo (2)} \\
 f(r) \Big|_{r_c} &= f^*_{(c)} & \text{Dirichlet} & & \\
 -\frac{\partial f(r)}{\partial n} \Big|_{r_c} &= g^*_{(c)} & \text{Neumann} & & \\
 \gamma f(r) \Big|_{r_c} + \frac{\partial f(r)}{\partial n} \Big|_{r_c} &= h^*_{(c)} & \text{Mixta} & & 
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} f(r) \Big|_{t_0} \\ f(r) \Big|_{r_c} \\ -\frac{\partial f(r)}{\partial n} \Big|_{r_c} \\ \gamma f(r) \Big|_{r_c} + \frac{\partial f(r)}{\partial n} \Big|_{r_c} \end{aligned}} \right\} \text{Espacio (3)}$$

donde,  $h^*_{(c)} = \gamma f^*_{(c)} - g^*_{(c)}$  es la suma o combinación lineal entre Dirichlet y Neumann con  $\gamma$  como factor dimensional. Puesto que, la frontera de Dirichlet e Inicial tienen la misma estructura matemática, en un análisis estocástico ambas expresiones tienen las mismas propiedades (es decir,  $f^\times_{(c)} \equiv f^*_{(c)}$ ).

### 2.1. Reformulación del teorema

En Suxo (2011), la metodología para resolver una EDP está basada principalmente en paseos aleatorios y el objetivo principal es la formulación de un *teorema* sobre las *probabilidades de transición* obtenidas de la EDP discreta en diferencias finitas. Sin embargo, el teorema es exclusivo para una EDP (incompleta) conformada únicamente por términos que poseen derivadas igual o mayor a primer orden ( $n > 0$ ), es decir, no se puede aplicar a una EDP (completa) como la Ec. (1) porque incluye el término de orden cero o sin derivar ( $n \geq 0$ ). Por lo tanto, para resolver una EDP *completa* es necesario reformular el teorema que fue desarrollado en Suxo (2011).

Un triángulo de Pascal conformado por elementos con signos alternados (+, -), puede ser construido a partir de los coeficientes de derivadas discretizadas en diferencias finitas centrales (Sheid (1968)), tal como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{cccccc}
 f & & & & & 1 \\
 \frac{df}{dx} & & & & & 1 & -1 \\
 \frac{d^2f}{dx^2} & & & & & 1 & -2 & 1 \\
 \frac{d^3f}{dx^3} & & & & & 1 & -3 & 3 & -1 \\
 \frac{d^4f}{dx^4} & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
 \vdots & & & & & & & \vdots & & 
 \end{array}$$

donde, la suma de coeficientes es igual a cero en cada derivada excepto en la derivada de orden cero o función sin derivar (primer renglón del triángulo).

Según Suxo (2011), la sumatoria de coeficientes siempre es igual a cero independientemente si la

derivada parcial  $n$ -ésima es regular o cruzada, así como también, no depende si la discretización en diferencias finitas es hacia adelante, atrás o central. Sin embargo, existen dos casos que pueden incluir el término sin derivar manteniendo la sumatoria de coeficientes igual a cero:

- i) Si el coeficiente del término sin derivar  $\alpha f_{(x,y,\dots)}$  es igual a cero ( $\alpha = 0$ , ver Ec. (1)).
- ii) Si existe una función conocida  $f^\dagger_{(x,y,\dots)}$  que posee un coeficiente igual al término sin derivar pero de signo contrario, es decir:  $\alpha[f_{(x,y,\dots)} - f^\dagger_{(x,y,\dots)}]$ .

donde, evidentemente el primer caso es trivial, en cambio el segundo caso es complejo porque requiere de una función  $f^\dagger_{(x,y,\dots)}$  que está relacionada con cierta probabilidad de absorción markoviana.

En el método de cadenas de Markov se construye una matriz con base en las probabilidades de transición de dos tipos de nodos: *no-absorbente* y *absorbente* localizados en dominio y frontera respectivamente, donde la frontera conformada por nodos absorbentes significaría una condición de frontera de Dirichlet (Sadiku et al. (2002)). Desde la mirada de un paseo aleatorio, una partícula virtual se desplaza sobre el dominio realizando *saltos aleatorios* hacia los nodos más cercanos según determinadas probabilidades de transición y es absorbida si alcanza una

frontera tipo Dirichlet, donde adquiere el valor de la función  $f^*_{(c)}$  finalizando así su trayectoria (ver, Fig. 1b). En síntesis, la absorción en la frontera podría significar dos casos posibles: 0% de probabilidad de transición o 100% de probabilidad de absorción.

Por consiguiente, podemos explotar el concepto de *probabilidad de absorción* mencionado, pero aplicado sobre el dominio del sistema ( $\Omega$ ). Es decir, además de las probabilidades de transición hacia los nodos vecinos, existiría una probabilidad de absorción en el nodo presente finalizando así el paseo aleatorio antes de alcanzar la frontera del sistema ( $\partial\Omega$ ), donde, la partícula virtual absorbida por el dominio adquiriría el valor de alguna función  $f^\dagger_{(r)}$ , equivalentemente como adquiere el valor de la función  $f^*_{(c)}$  cuando es absorbida por una frontera de Dirichlet. Por tanto,  $f^\dagger_{(r)}$  y  $f^*_{(c)}$  tendrían las mismas características y propiedades pero definidas en diferentes escenarios, el dominio y la frontera respectivamente.

A fin de reformular el teorema, adicionamos el término  $\alpha f^\dagger_{(x,y,\dots)}$  en el miembro inhomogéneo de la Ec. (1), posteriormente discretizamos las derivadas en diferencias finitas para obtener la Ec. (4) que es una EDP discreta desarrollada alrededor del punto  $(x_0, y_0, \dots)$ , como se muestra a continuación:

$$\Psi = \frac{\omega (-1)^0 \binom{n}{0}}{(\Delta x)^n} + \dots + \frac{\mu (-1)^0 \binom{m}{0}}{(\Delta y)^m} + \dots + \frac{(-1)^{s_i \eta} (-1)^{0+0+\dots} \binom{s_i}{0} \binom{s_j}{0} \dots}{(\Delta x)^{s_i} (\Delta y)^{s_j} \dots} + \dots + \alpha$$

$$f_{(x_0, y_0, \dots)} = \frac{1}{\Psi} \frac{\omega}{(\Delta x)^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} f_{(x_i, y_0, \dots)} + \dots +$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\mu}{(\Delta y)^m} \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \binom{m}{j} f_{(x_0, y_j, \dots)} + \dots +$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{(-1)^{s_i \eta}}{(\Delta x)^{s_i} (\Delta y)^{s_j} \dots} \sum_{i=1}^{s_i} \sum_{j=1}^{s_j} \dots (-1)^{i+j+\dots+1} \binom{s_i}{i} \binom{s_j}{j} \dots f_{(x_i, y_j, \dots)} + \dots +$$

$$\frac{\alpha}{\Psi} f^\dagger_{(x_0, y_0, \dots)} + \frac{1}{\Psi} g_{(x_0, y_0, \dots)}$$
(4)

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\psi_{i0\dots}}{\Psi} f_{(x_i, y_0, \dots)} + \dots + \sum_{j=1}^m \frac{\psi_{0j\dots}}{\Psi} f_{(x_0, y_j, \dots)} + \dots + \sum_{i=1}^{s_i} \sum_{j=1}^{s_j} \dots \frac{\psi_{ij\dots}}{\Psi} f_{(x_i, y_j, \dots)} + \dots +$$
(5)

$$\frac{\alpha}{\Psi} f^\dagger_{(x_0, y_0, \dots)} + \frac{1}{\Psi} g_{(x_0, y_0, \dots)}$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{\psi_i}{\Psi} f_{(r_i)} + \frac{\alpha}{\Psi} f^\dagger_{(r_0)} + \frac{1}{\Psi} g_{(r_0)}$$
(6)

$$f_{(r_0)} = \sum_{i=1}^N p_i f_{(r_i)} + p_a f^\dagger_{(r_0)} + \Psi^{-1} g_{(r_0)}$$
(7)

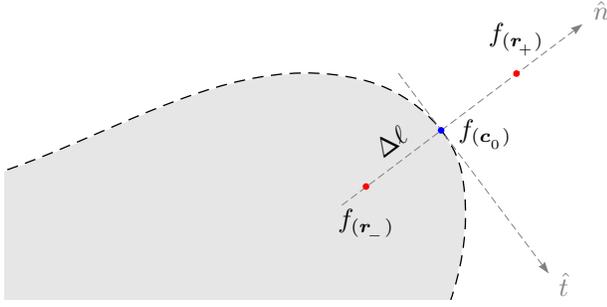


FIG. 2.— Representación esquemática de la discretización de una condición de frontera espacial Mixta (ver, Ec. (8)).

donde, todos los términos sumatorios pueden ser expresados bajo una sola sumatoria (ver, Ec. (6)), porque cada uno de los términos sumatorios está relacionado a un determinado nodo vecino ( $r_i$ ).

La Ec. (7) es la *ecuación principal* porque contiene toda la información para realizar paseos aleatorios, donde, el límite de la sumatoria  $N$  indica el número de nodos vecinos y los coeficientes  $i$ -ésimos  $p_i = \psi_i/\Psi$  son las probabilidades de transición. Mientras que, el coeficiente  $p_a = \alpha/\Psi$  es la probabilidad de absorción y complemento de las probabilidades de transición, es decir:  $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1 - p_a$  se cumple. Por tanto, el teorema formulado en Suxo (2011) puede ser reformulado y extendido de la siguiente manera:

**Teorema.** *En la discretización en diferencias finitas de una ecuación diferencial parcial conformada por términos que poseen derivadas de orden cero o mayor; puede afirmarse que, el coeficiente de cualquier función es igual a la suma de los demás coeficientes pero de signo contrario. Entonces, si despejamos una función escogida al azar, los coeficientes resultantes*

*de las demás funciones pueden ser tratables como probabilidades de transición-absorción.*

**Nota:** El término inhomogéneo no forma parte del teorema, sin embargo es afectado por el coeficiente  $\Psi^{-1}$  que proviene de la discretización (ver, Ec. (7)).

## 2.2. Implementación de condiciones de frontera

Para poder aplicar el teorema reformulado sobre la frontera de un sistema ( $\partial\Omega$ ), debemos discretizar en diferencias finitas sus condiciones de frontera. Entonces, como la condición de frontera espacial Mixta es una expresión general, discretizamos la última Ec. (3) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \ell} \Big|_{c_0} \approx \frac{f(r_+) - f(r_-)}{2\Delta\ell}$$

$$\gamma f(c_0) + \frac{f(r_+) - f(r_-)}{2\Delta\ell} = \gamma f_{c_0}^* - g_{c_0}^* \quad (8)$$

donde, los puntos  $r_+$  y  $r_-$  son externos e internos al dominio respectivamente, entre tanto la coordenada  $\ell$  es normal a la frontera del dominio (ver, Fig. 2).

En procesos de transición-absorción en la frontera pueden ocurrir: transiciones tangenciales sobre la frontera, absorciones en la propia frontera o también reflexiones al interior del dominio (ver, Fig. 1b), pero está estrictamente prohibido saltos aleatorios desde la frontera hacia el exterior (entorno) del dominio (ver, Fig. 2). Por tanto, debemos y podemos eliminar la función  $f(r_+)$  combinando la Ec. (8) y la ecuación principal aplicada sobre la frontera (ver, Ec. (9)), como se muestra a continuación:

$$f(c_0) = \sum_{i=1}^N p_i f(r_i) + p_a f_{c_0}^* + \Psi^{-1} g_{c_0}^* \quad (9)$$

$$= p_1 f(r_1) + p_2 f(r_2) + \dots + p_- f(r_-) + p_+ f(r_+) + \dots + p_N f(r_N) \quad (10)$$

$$= \frac{p_1}{1 + 2\Delta\ell p_+ \gamma} f(r_1) + \frac{p_2}{1 + 2\Delta\ell p_+ \gamma} f(r_2) + \dots + \frac{(p_- + p_+)}{1 + 2\Delta\ell p_+ \gamma} f(r_-) + \dots + \frac{p_N}{1 + 2\Delta\ell p_+ \gamma} f(r_N) + \frac{2\Delta\ell p_+ \gamma}{1 + 2\Delta\ell p_+ \gamma} f_{c_0}^* - \frac{2\Delta\ell p_+}{1 + 2\Delta\ell p_+ \gamma} g_{c_0}^* \quad (11)$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq +}}^{N-1} \frac{p_i}{\widehat{\Psi}} f(r_i) + \frac{2\Delta\ell p_+ \gamma}{\widehat{\Psi}} f_{c_0}^* - \frac{2\Delta\ell p_+}{\widehat{\Psi}} g_{c_0}^* \quad \widehat{\Psi} = 1 + 2\Delta\ell p_+ \gamma \quad (12)$$

$$f(c_0) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq +}}^{N-1} p'_i f(r_i) + p'_a f_{c_0}^* + (\Psi')^{-1} g_{c_0}^* \quad \Psi' = -\frac{\widehat{\Psi}}{2\Delta\ell p_+} \quad (13)$$

donde, la Ec. (13) tiene la misma estructura que la

Ec. (7), también:  $p'_1 + p'_2 + \dots + p'_{N-1} = 1 - p'_a$  se cumple

con  $(\Psi')^{-1}$  como el coeficiente inhomogéneo. Si  $\gamma$  es extremadamente grande ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) o prácticamente nulo ( $\gamma \rightarrow 0$ ), la Ec. (13) describe una condición de frontera de Dirichlet o Neumann respectivamente.

### 2.3. Solución de una EDP completa inhomogénea

Para resolver estocásticamente una EDP como la Ec. (1) que puede estar conformada por diversas condiciones de frontera (ver, Ecs. (2)–(3)), aplicamos la Ec. (7) y Ec. (13) sobre el dominio y la frontera del sistema respectivamente. En específico, realizamos simulaciones computacionales de paseos aleatorios mediante partículas virtuales que evolucionan según dos conjuntos probabilísticos de transición-absorción diferentes:  $\{p_1, p_2, \dots, p_N, p_a\}$  y  $\{p'_1, p'_2, \dots, p'_{N-1}, p'_a\}$  aplicados al dominio y frontera respectivamente.

Una partícula absorbida por el dominio adquiere el valor  $f^\dagger_{(r)}$ , mientras que, si es absorbida por una frontera temporal (Condición Inicial) adquiere el valor  $f^x_{(c)}$ , en cambio si es absorbida por una frontera espacial de Dirichlet adquiere el valor  $f^*_{(c)}$ . Además, si la partícula en su trayectoria atraviesa un subdominio adquiere el valor  $\Psi^{-1}g_{(r)}$ , pero si recorre una frontera de Neumann adquiere el valor  $(\Psi')^{-1}g^*_{(c)}$ . En una frontera Mixta, si la partícula es absorbida adquiere el valor  $f^*_{(c)}$ , en caso contrario, adquiere el valor  $(\Psi')^{-1}g^*_{(c)}$  y continúa el proceso.

En síntesis, la solución de un punto del dominio  $f_{(r_i)}$  es igual al valor de absorción:  $f^\dagger_{(r)}$ ,  $f^x_{(c)}$  o  $f^*_{(c)}$  más el valor:  $\Psi^{-1}g_{(r)}$  o  $(\Psi')^{-1}g^*_{(c)}$  si corresponde el caso (ver, Fig. 1b). Sin embargo, como el análisis es estocástico, la solución  $f_{(r_i)}$  es aproximada al promedio de  $N$  simulaciones (paseos aleatorios) de partículas virtuales que emergen del punto  $r_i$ , donde cada simulación aleatoria finaliza en una absorción o cuando se ejecuta un número predefinido de pasos. Finalmente, la estimación de la solución  $f_{(r_i)}$  tiene un error estadístico del orden  $1/\sqrt{N}$  (Sobol (1975)), es decir, si  $N \rightarrow \infty$  se obtienen mejores resultados.

## 3. APLICACIONES

Estudiamos diversos fenómenos físicos como ser: electrostática, transporte de materia y conducción de calor; específicamente, estudiamos el potencial eléctrico de cargas eléctricas ( $V$ ), la concentración de una disolución ( $C$ ) y la temperatura de un cuerpo ( $T$ ), respectivamente. En cada fenómeno físico se estudian tres casos extremos y/o especiales.

### 3.1. Electroestática

El potencial eléctrico  $V_{(r)}$  existente en el espacio físico infinito es generado por la carga eléctrica total  $Q = 4 \times 10^{-9} C$  que está distribuida en una esfera de radio  $R = 6 \text{ cm}$ . En coordenadas esféricas (ver, Fig. 3), el sistema tiene simetría polar y azimutal ( $\theta, \phi$ ), por tanto, la función resultante es  $V = V_{(r)}$  y la ecuación de Poisson se expresa como:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \quad (14)$$

Dominio del sistema:  $0 \leq r < \infty$

donde,  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío y la función  $\rho_{(r)} \equiv \rho_{(r,\theta,\phi)}$  es la densidad de carga.

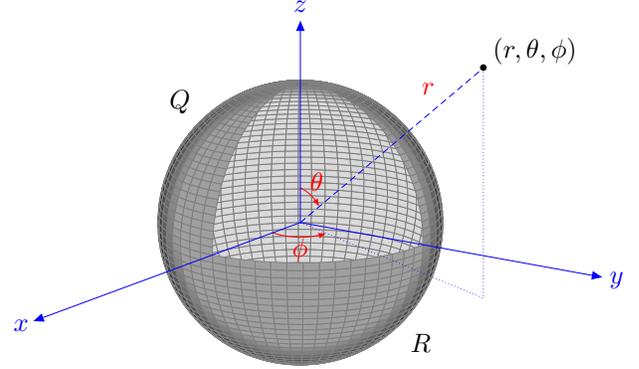


FIG. 3.— Representación esférica de un sistema de radio  $R$  con carga total  $Q$  presente en el espacio infinito.

Según la configuración de cargas eléctricas sobre la esfera, estudiamos tres casos que tienen soluciones analíticas (Wangness (1986)), como ser:

a) Esfera cargada:  $\rho = Q/V$  ( $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ )

$$V_{(r)} = \begin{cases} \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) & r < R \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r} & r \geq R \end{cases} \quad (15)$$

b) Esfera conductora:  $\sigma = Q/A$  ( $A = 4\pi R^2$ )

$$V_{(r)} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} R & r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} & r \geq R \end{cases} \quad (16)$$

c) Monopolo eléctrico:  $q = Q$  ( $R \rightarrow 0$ )

$$V_{(r)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (17)$$

donde,  $\rho$ ,  $\sigma$  y  $q$  son las densidades de carga eléctrica volumétrica, superficial y puntual respectivamente.

### 3.2. Transporte de materia

La difusión-reacción de la concentración  $C_{(r)}$  de una disolución de ClNa en un recipiente infinito es generado por una concentración de agua salada  $C_o = 0.6 M$  más agua pura  $C_o = 0.0 M$  inicialmente dividida. En coordenadas cartesianas (ver, Fig. 4), el sistema tiene simetría en profundidad y altitud ( $y, z$ ), por tanto, la función resultante es  $C = C_{(x,t)}$  y la ecuación de Fick se expresa como:

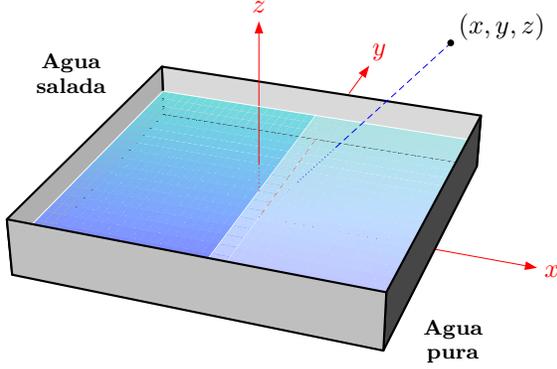


FIG. 4.— Representación cartesiana de una disolución de agua salada y agua pura inicialmente dividida por el plano  $yz$ .

$$\nu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial t} - \mu C = 0 \quad (18)$$

Dominio del sistema:  $-\infty < x < \infty \quad 0 \leq t < \infty$

$$\text{Condición Inicial: } C(x,t)|_0 = \begin{cases} C_0 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

donde,  $\nu = 1,28 \text{ cm}^2/\text{dia}$  y  $\mu = 0,05 \text{ dia}^{-1}$  son los coeficientes de difusión y reacción respectivamente.

A partir de los valores  $\nu$  y  $\mu$ , estudiamos tres casos extremos del sistema que tienen soluciones analíticas (Spiegel (1974)), como ser:

a) Proceso netamente difusivo: ( $\mu \rightarrow 0$ )

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right] \quad (19)$$

b) Proceso netamente reactivo: ( $\nu \rightarrow 0$ )

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{sgn}(x) \right] e^{-\mu t} \quad (20)$$

c) Proceso difusivo reactivo: ( $\nu, \mu > 0$ )

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right] e^{-\mu t} \quad (21)$$

donde,  $\operatorname{erf}(x)$  y  $\operatorname{sgn}(x)$  son las funciones especiales *error* y *signo* respectivamente (Spiegel et al. (2008)).

### 3.3. Conducción de calor

La difusión de temperatura  $T(r)$  en un cilindro (metal Ag) de longitud infinita y radio  $R = 10 \text{ cm}$  es generado por su temperatura inicial  $T_0 = 0^\circ \text{C}$  y las diversas condiciones de frontera. a) **Dirichlet**: cilindro sumergido en un ambiente de temperatura  $T_s = 6^\circ \text{C}$ , b) **Neumann**: gradiente de temperatura  $T_{\rho s} = -1^\circ \text{C}/\text{cm}$  en la interfaz cilindro-ambiente y c) **Mixta**: proceso de enfriamiento de Newton sobre la interfaz en un caso semiaislado,  $T_{\rho s} = 0^\circ \text{C}/\text{cm}$  y  $T_s = 6^\circ \text{C}$ . En coordenadas cilíndricas (ver, Fig. 5), el sistema tiene simetría azimutal y longitudinal ( $\phi, z$ ), por tanto, la función resultante es  $T = T(\rho, t)$  y la ecuación de Fourier se expresa como:

$$\kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

Dominio del sistema:  $0 \leq \rho \leq R \quad 0 \leq t < \infty$

Condición Inicial:  $T(\rho, t)|_0 = T_0$

Condición de Frontera:

a) Dirichlet:  $T(\rho, t)|_R = T_s$

b) Neumann:  $-\frac{\partial T(\rho, t)}{\partial \rho}|_R = T_{\rho s}$

c) Mixta:  $-\frac{\partial T(\rho, t)}{\partial \rho}|_R = h(T(\rho, t) - T_s)|_R$

donde,  $\kappa = 1,75 \text{ cm}^2/\text{s}$  es el coeficiente térmico y como parámetro de enfriamiento el valor  $h = 1,00 \text{ cm}^{-1}$ .

El sistema físico bajo estudio que es sometido a diferentes condiciones de frontera, tiene solución analítica en cada caso, como ser:

a) Frontera de Dirichlet (Spiegel (1974)):

$$T(\rho, t) = T_s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left( \frac{\lambda_n \rho}{R} \right) e^{-\kappa \left( \frac{\lambda_n}{R} \right)^2 t} \quad (23)$$

$$A_n = \frac{2(T_0 - T_s)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

$$\lambda_n \text{ ceros de: } J_0(\lambda) = 0$$

b) Frontera de Neumann (Spiegel (1965)):

$$T(\rho, t) = T_{\rho s}^* R + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left( \frac{\lambda_n \rho}{R} \right) e^{-\kappa \left( \frac{\lambda_n}{R} \right)^2 t} \quad (24)$$

$$T_{\rho s}^* = \frac{1}{4} \left( 1 - 2 \frac{\rho^2}{R^2} - 8 \frac{\kappa t}{R^2} \right) T_{\rho s}$$

$$A_n = \frac{2T_{\rho s} R}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)}$$

$$\lambda_n \text{ ceros de: } J_1(\lambda) = 0$$

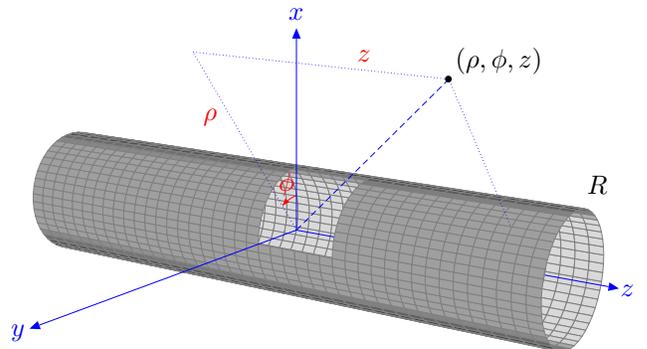


FIG. 5.— Representación cilíndrica de un sistema de longitud infinita y radio  $R$  expuesta al medio ambiente.

c) Frontera Mixta (Spiegel (1974)):

$$T_{(\rho,t)} = T_s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{R} \rho\right) e^{-\kappa\left(\frac{\lambda_n}{R}\right)^2 t} \quad (25)$$

$$A_n = \frac{2(T_0 - T_s)hR}{[\lambda_n^2 + (hR)^2] J_0(\lambda_n)}$$

$\lambda_n$  ceros de:  $\lambda J_1(\lambda) - hR J_0(\lambda) = 0$

donde,  $J_0(x)$  y  $J_1(x)$  son funciones de Bessel de primera especie (Spiegel et al. (2008)).

#### 4. RESULTADOS

Con el objetivo de verificar la efectividad de la metodología desarrollada (ver, Sec. 2), resolvemos las ecuaciones de Poisson, Fick y Fourier a través de paseos aleatorios y comparamos los resultados obtenidos con sus soluciones analíticas (ver, Sec. 3). Para visualizar el error estimado de los resultados, seleccionamos problemas unidimensionales excepto en el caso del *monopolo eléctrico* (densidad puntual), donde realizamos un tratamiento tridimensional pero presentamos resultados unidimensionalmente.

##### 4.1. Ecuación de Poisson

La Ec. (14) es una EDP incompleta e inhomogénea porque no existe un *término sin derivar* y su *término inhomogéneo* es diferente de cero<sup>2</sup>, además, sólo posee una condición de frontera espacial que se ubica en el infinito ( $r \rightarrow \infty$ ). Entonces, la discretización de la Ec. (14) a través de diferencias finitas genera la siguiente ecuación principal:

Dominio del sistema:

$$V_{(r_i)} = p_{i+1} V_{(r_{i+1})} + p_{i-1} V_{(r_{i-1})} - \Psi^{-1} g_{(r)} \quad (26)$$

$$\text{transición} \begin{cases} p_{i+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{i}\right) \\ p_{i-1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{i}\right) \end{cases}$$

$$\text{coeficiente} \quad \Psi^{-1} = \frac{(\Delta r)^2}{2} \quad g_{(r)} = -\frac{\rho_{(r)}}{\epsilon_0}$$

donde, las probabilidades de transición dependen de la posición ' $i$ ' y no existe probabilidad de absorción.

Dado que la Ec. (26) está sujeta a la función  $g_{(r)}$ , discretizamos las diversas densidades de carga  $\rho_{(r)}$  (ver, Ape. A) que se presentan a continuación:

a) Volumétrica:  $\rho_{(r)} = \rho$

b) Superficial:  $\rho_{(r)} = \frac{\sigma}{\Delta r}$

c) Puntual:  $\rho_{(r)} = \frac{1}{4\pi i^2} \frac{q}{(\Delta r)^3}$

<sup>2</sup> Si  $\rho_{(r)} = 0$  significa ausencia de cargas, entonces la Ec. (14) se transforma en homogénea denominada Ecuación de Laplace.

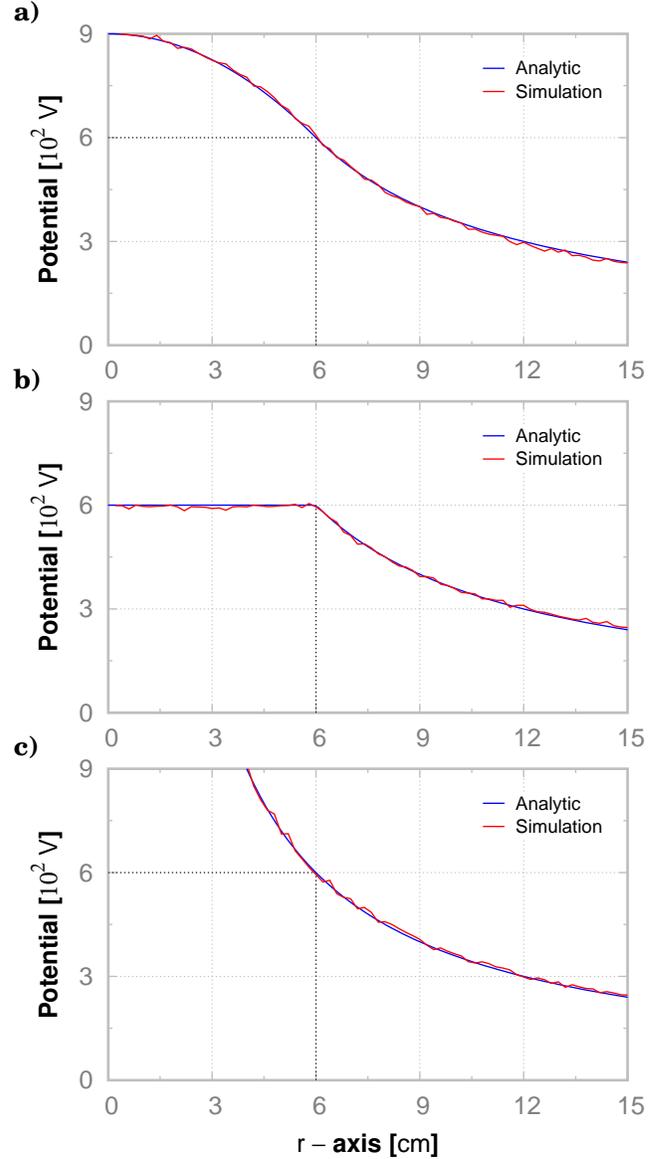


FIG. 6.— Resultados de una Ecuación de Poisson (ver, Ec. (14)). a) Esfera cargada, b) Esfera conductora y c) Monopolo eléctrico.

donde, a) y b) son constantes, mientras c) es función de la posición ' $i$ ' e indeterminado en el origen ( $i = 0$ ).

El potencial eléctrico  $V = V_{(r)}$  generado por una esfera cargada de densidad uniforme  $\rho$  o una esfera conductora de densidad superficial  $\sigma$ , se presentan en la Fig. 6a y Fig. 6b respectivamente. Sin embargo, el monopolo eléctrico no es viable bajo coordenadas esféricas (o cilíndricas) porque la ubicación de una carga puntual en el origen produce indeterminación. Por tanto, abordamos el problema bajo coordenadas cartesianas pero tridimensionalmente porque no hay simetría sobre los ejes, es decir la EDP es:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_{(r)}}{\epsilon_0} \quad (27)$$

El potencial eléctrico  $V = V_{(x,y,z)}$  generado por un monopolo eléctrico de carga  $q$  se expone en la Fig. 6c

( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ), pues, la Ec. (27) en diferencias finitas es la siguiente ecuación principal:

Dominio del sistema:

$$V_{(x_i, y_j, z_k)} = p_{i+1, j, k} V_{(x_{i+1}, y_j, z_k)} + \dots + p_{i, j, k-1} V_{(x_i, y_j, z_{k-1})} - \Psi^{-1} g(r) \quad (28)$$

$$\text{transición } p_{i+1, j, k} = \dots = p_{i, j, k-1} = \frac{1}{6}$$

$$\text{coeficiente } \Psi^{-1} = \frac{(\Delta x)^2}{6} \quad g(r) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

donde, si  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$  se generan probabilidades de transición de valor igual, así como una densidad de carga  $\rho(r) = q/(\Delta x)^3$  constante (ver, Ape. A).

#### 4.2. Ecuación de Fick

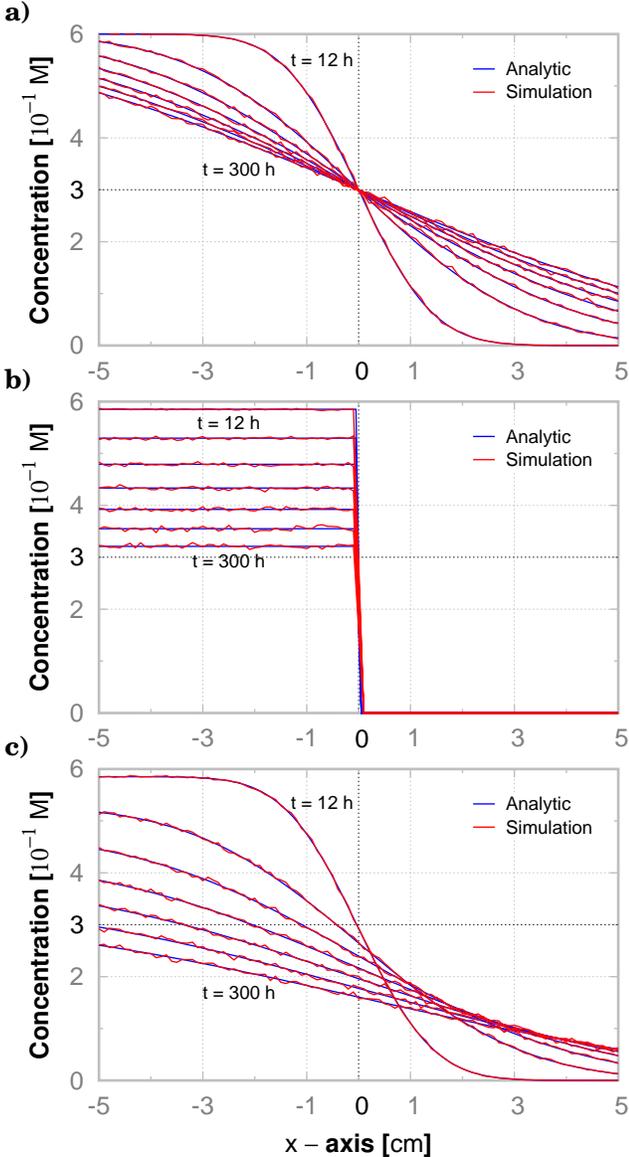


FIG. 7.— Resultados de una Ecuación de Fick (ver, Ec. (18)). Proceso: a) Difusión, b) Reacción y c) Difusión-Reacción.

La Ec. (18) es una EDP completa y homogénea porque existe un *término sin derivar* y su *término inhomogéneo* es igual a cero<sup>3</sup>, además, posee una condición inicial ( $t = 0$ ) y condiciones de frontera que se ubican en el infinito ( $x \rightarrow \pm\infty$ ). Entonces, la Ec. (18) discretizada mediante diferencias finitas genera la siguiente ecuación principal:

Dominio del sistema:

$$C_{(x_i, t_j)} = p_{i+1, j} C_{(x_{i+1}, t_j)} + p_{i-1, j} C_{(x_{i-1}, t_j)} + p_{i, j-1} C_{(x_i, t_{j-1})} + p_{i, j} C_{(x_i, t_j)}^\dagger \quad (29)$$

$$\text{transición } \begin{cases} p_{i+1, j} = \frac{\varphi}{1 + 2\varphi + \vartheta} \\ p_{i-1, j} = \frac{\varphi}{1 + 2\varphi + \vartheta} \\ p_{i, j-1} = \frac{1}{1 + 2\varphi + \vartheta} \end{cases}$$

$$\text{absorción } p_{i, j} = \frac{\vartheta}{1 + 2\varphi + \vartheta} \quad C_{(x_i, t_j)}^\dagger = 0$$

Condición inicial:

$$C_{(x_i, 0)} = p_{i, 0} C_{(x_i, 0)}^\times \quad (30)$$

$$\text{absorción } p_{i, 0} = 1 \quad C_{(x_i, 0)}^\times = \begin{cases} C_0 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

donde,  $\varphi = \nu\Delta t/(\Delta x)^2$  y  $\vartheta = \mu\Delta t$  son adimensionales y las probabilidades transición-absorción constantes.

La concentración  $C = C_{(x, t)}$  de ClNa en un proceso difusivo ( $\mu \rightarrow 0$ ) ó reactivo ( $\kappa \rightarrow 0$ ), se presentan en la Fig. 7a y Fig. 7b respectivamente, mientras que, el proceso de difusión-reacción se presenta en la Fig. 7c. En cada caso, calculamos siete instantes de tiempo en intervalos de 48 h, desde  $t = 12 h$  hasta  $t = 300 h$ .

#### 4.3. Ecuación de Fourier

La Ec. (22) es una EDP incompleta y homogénea porque no existe un *término sin derivar* y su *término inhomogéneo* es igual a cero, además, posee una condición inicial ( $t = 0$ ) y diversas condiciones de frontera aplicadas sobre el área lateral del cilindro ( $\rho = R$ ). Entonces, la Ec. (22) discreta en diferencias finitas genera la siguiente ecuación principal:

Dominio del sistema:

$$T_{(\rho_i, t_j)} = p_{i+1, j} T_{(\rho_{i+1}, t_j)} + p_{i-1, j} T_{(\rho_{i-1}, t_j)} + p_{i, j-1} T_{(\rho_i, t_{j-1})} \quad (31)$$

$$\text{transición } \begin{cases} p_{i+1, j} = \frac{i\zeta}{i + (2i - 1)\zeta} \\ p_{i-1, j} = \frac{(i - 1)\zeta}{i + (2i - 1)\zeta} \\ p_{i, j-1} = \frac{i}{i + (2i - 1)\zeta} \end{cases}$$

<sup>3</sup> Si  $\mu = 0$  significa que el término sin derivar es descartado, entonces la Ec. (18) se transforma en una EDP incompleta.

Condición inicial:

$$T_{(\rho_i,0)} = p_{i,0} T_{(\rho_i,0)}^{\times} \quad (32)$$

$$\text{absorción } p_{i,0} = 1 \quad T_{(\rho_i,0)}^{\times} = T_0$$

Condiciones de frontera:

$$T_{(R,t_j)} = p'_{N-1,j} T_{(R-\Delta\rho,t_j)} + p'_{N,j-1} T_{(R,t_{j-1})} + p'_{N,j} T_{(R,t_j)}^* - (\Psi')^{-1} g_{(R,t_j)}^* \quad (33)$$

donde,  $R = N\Delta\rho$  y  $\zeta = \kappa\Delta t/(\Delta\rho)^2$  es adimensional, las probabilidades de transición varían según 'i' y no existe una probabilidad de absorción en el dominio.

La Ec. (33) expresa las condiciones de frontera de forma general y según el parámetro físico  $h$  ( $\equiv \gamma$ ) describe una frontera de Dirichlet, Neumann o Mixta (ver, Sec. 2.2 y Ec. (13)), como muestra lo siguiente:

a) Frontera de Dirichlet: ( $h \rightarrow \infty$ )

$$\text{absorción } p_{N,j} = 1 \quad T_{(R,t_j)}^* = T_s$$

b) Frontera de Neumann: ( $h \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \text{transición} & \begin{cases} p'_{N-1,j} = p_{N+1,j} + p_{N-1,j} \\ p'_{N,j-1} = p_{N,j-1} \end{cases} \\ \text{coeficiente } (\Psi')^{-1} & = 2\Delta\rho p_{N+1,j} \quad g_{(R,t_j)}^* = T_{\rho s} \end{aligned}$$

c) Frontera Mixta: ( $h > 0$ )

$$\begin{aligned} \text{transición} & \begin{cases} p'_{N-1,j} = \frac{p_{N+1,j} + p_{N-1,j}}{\widehat{\Psi}} \\ p'_{N,j-1} = \frac{p_{N,j-1}}{\widehat{\Psi}} \end{cases} \\ \text{absorción } p'_{N,j} & = \frac{2\Delta\rho p_{N+1,j} h}{\widehat{\Psi}} \quad T_{(R,t_j)}^* = T_s \end{aligned}$$

donde,  $\widehat{\Psi} = 1 + 2\Delta\rho p_{N+1,j} h$  en caso Mixto (ver, Ec. (12)).

La temperatura  $T = T_{(\rho,t)}$  del cilindro metálico (Ag) sometido a una temperatura exterior  $T_s$  ó a un gradiente de temperatura  $T_{\rho s}$  sobre su superficie, se presentan en la Fig. 8a y Fig. 8b respectivamente, mientras que, el cilindro sometido a un proceso de enfriamiento de Newton se presenta en la Fig. 8c. En cada caso, calculamos siete instantes de tiempo en intervalos de 1, 2 s, desde  $t = 0, 7$  s hasta  $t = 9, 1$  s.

#### 4.4. Bonus - Track

Resolvemos el exterior de una esfera conductora (ver, Sec. 3.1), pero vía Ecuación de Laplace que posee condición de contorno tipo Neumann, es decir:

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0 \quad (34)$$

Dominio del sistema:  $R \leq r < \infty$

Condición de frontera:  $-\frac{dV(r)}{dr} \Big|_R = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

entonces, la Ec. (34) discreta en diferencias finitas genera la siguiente ecuación principal:

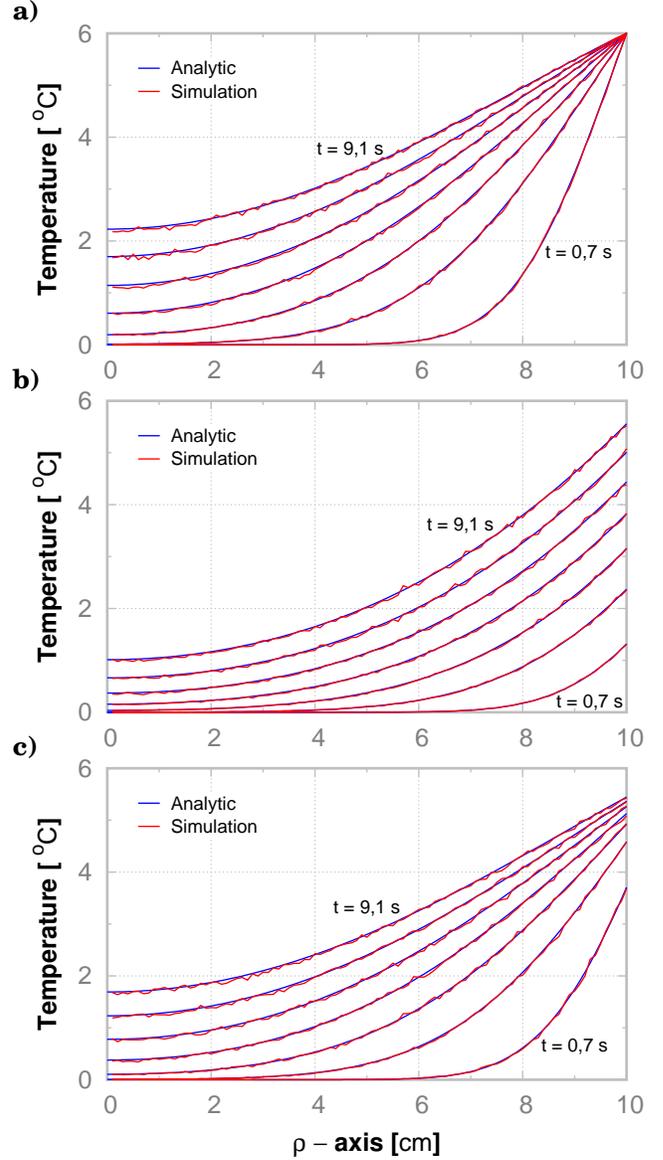


FIG. 8.— Resultados de una Ecuación de Fourier (ver, Ec. (22)). Condición de Frontera: a) Dirichlet, b) Neumann y c) Mixta.

Dominio del sistema:

$$V_{(r_i)} = p_{i+1} V_{(r_{i+1})} + p_{i-1} V_{(r_{i-1})} \quad (35)$$

$$\text{transición} \begin{cases} p_{i+1} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{i} \right) \\ p_{i-1} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{i} \right) \end{cases}$$

Condición de frontera:

$$V_{(R)} = p'_{N_0+1} V_{(R+\Delta r)} + (\Psi')^{-1} g_{(R)}^* \quad (36)$$

$$\text{transición } p'_{N_0+1} = p_{N_0+1} + p_{N_0-1} = 1$$

$$\text{coeficiente } (\Psi')^{-1} = 2\Delta r p_{N_0-1} \quad g_{(R)}^* = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

donde,  $N_0$  es referido al contorno esférico ( $R = N_0\Delta r$ ).

El resultado de la Ec. (34) es igual al resultado de la Ec. (14) para valores  $r \geq R$  (ver, Fig. 6b), es decir la inhomogeneidad de la Ecuación de Poisson equivale a la frontera de Neumann de la Ecuación de Laplace.

## 5. CONCLUSIONES

La reformulación del teorema permite resolver una EDP inhomogénea que puede estar conformada por términos de cualquier orden de derivada incluido el término de orden cero (o sin derivar), así como también puede poseer diversos tipos de condiciones de frontera. En especial, implementar el concepto probabilidad de absorción dentro las probabilidades de transición de un paseo aleatorio es el principal aporte del trabajo, porque permite abordar procesos reactivos y el enfriamiento de Newton que suceden en el dominio y la frontera respectivamente.

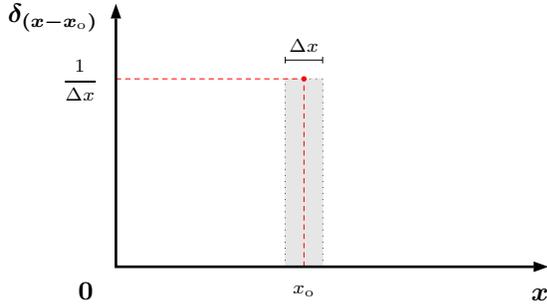


FIG. 9.— Esquema de una función delta de Dirac discretizada. El área es igual a 1 y la función  $\delta_{(x-x_0)}$  es infinita en  $x_0$  si  $\Delta x \rightarrow 0$ .

## APÉNDICE

### A. DISCRETIZACIÓN DE LA FUNCIÓN $\rho(r)$

Unidimensionalmente, la definición de una función delta de Dirac discreta es la siguiente:

$$\delta_{(x-x_0)} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} & |x - x_0| \leq \frac{1}{2} \Delta x \\ 0 & |x - x_0| > \frac{1}{2} \Delta x \end{cases} \quad (\text{A1})$$

donde,  $\delta_{(x-x_0)}$  guarda sus propiedades (ver, Fig. 9).

En electromagnetismo, la distribución o función densidad de cargas eléctricas  $\rho(r)$  está representada por una función delta de Dirac (Jackson (1999)), como se muestra a continuación:

$$\rho(r) = Q \delta_{(r-r_0)} \quad (\text{A2})$$

donde,  $Q$  es la carga y  $\delta_{(r-r_0)}$  tiene dimensión  $[\ell^{-3}]$ .

### 1. Esfera cargada $(r, \theta, \phi)$ : $\rho = Q/V$ ( $V = \frac{4}{3}R^3$ )

$$\begin{aligned} \rho(r) &= Q \delta_{(r-r_0)} \\ &= \frac{Q}{r^2 \sin \theta} \delta_{(r-r_0)} \delta_{(\theta-\theta_0)} \delta_{(\phi-\phi_0)} \\ &= \frac{Q}{2\pi r^2 \sin \theta} \delta_{(r-r_0)} \delta_{(\theta-\theta_0)} \\ &= \frac{Q}{4\pi r^2} \delta_{(r-r_0)} \\ &= \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\ &= \frac{Q}{V} \\ \rho(r) &= \rho \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

### 2. Esfera conductora $(r, \theta, \phi)$ : $\sigma = Q/A$ ( $A = 4\pi R^2$ )

$$\begin{aligned} \rho(r) &= Q \delta_{(r-r_0)} \\ &= \frac{Q}{r^2 \sin \theta} \delta_{(r-r_0)} \delta_{(\theta-\theta_0)} \delta_{(\phi-\phi_0)} \quad r = R \\ &= \frac{Q}{R^2 \sin \theta} \delta_{(r-r_0)} \delta_{(\theta-\theta_0)} \delta_{(\phi-\phi_0)} \\ &= \frac{Q}{2\pi R^2 \sin \theta} \delta_{(r-r_0)} \delta_{(\theta-\theta_0)} \\ &= \frac{Q}{4\pi R^2} \delta_{(r-r_0)} \\ &= \frac{Q}{A} \frac{1}{\Delta r} \\ \rho(r) &= \frac{\sigma}{\Delta r} \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

### 3. Monopolo eléctrico $(r, \theta, \phi)$ : $q = Q$ ( $R \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \rho(r) &= Q \delta_{(r-r_0)} \\ &= \frac{Q}{r^2 \sin \theta} \delta_{(r-r_0)} \delta_{(\theta-\theta_0)} \delta_{(\phi-\phi_0)} \quad r = i\Delta r \\ &= \frac{Q}{(i\Delta r)^2 \sin \theta} \delta_{(r-r_0)} \delta_{(\theta-\theta_0)} \delta_{(\phi-\phi_0)} \\ &= \frac{Q}{2\pi i^2 (\Delta r)^2 \sin \theta} \delta_{(r-r_0)} \delta_{(\theta-\theta_0)} \\ &= \frac{Q}{4\pi i^2 (\Delta r)^2} \delta_{(r-r_0)} \\ &= \frac{Q}{4\pi i^2 (\Delta r)^2} \frac{1}{\Delta r} \\ \rho(r) &= \frac{1}{4\pi i^2} \frac{q}{(\Delta r)^3} \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

4. Monopolo eléctrico  $(x, y, z): q = Q$ 

$$\begin{aligned}
 \rho(r) &= Q \delta(r-r_0) \\
 &= Q \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) \\
 &= Q \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta y} \frac{1}{\Delta z} \\
 \rho(r) &= \frac{q}{\Delta x \Delta y \Delta z} \tag{A6}
 \end{aligned}$$

**Conflicto de intereses**

El autor declara que no hay conflicto de intereses respecto a la publicación de este documento.

## REFERENCIAS

- Arfken, W. 2007, *Métodos matemáticos para físicos* (U.S.A.: Diana)
- Doob, J. L. 1953, *Stochastic Processes* (John Wiley & Sons, New York)
- Jackson, J. D. 1999, *Classical electrodynamics*, 3rd edn. (New York, NY: Wiley)
- Kreyszig, E. 2006, *Advanced Engineering Mathematics* (John Wiley & Sons)
- Sadiku, M. N., Gu, K., & Obiozor, C. N. 2002, *International Journal of Engineering Education*, **18**, 745
- Sanjinés, D. 2006, *Revista Boliviana de Física*, **12**, 17
- Sheid, F. 1968, *Numerical Analysis* (McGraw-Hill)
- Simmons, G. 2002, *Differential Equations with Applications and Historical Notes* (U.S.A.: McGraw-Hill)
- Sobol, I. M. 1975, *The Monte Carlo Method* (Mir Publishers)
- Spiegel, M. 1965, *Schaum's Outline of Laplace Transforms, Schaum's Outlines of Theory and Problems* (McGraw-Hill Education)
- . 1974, *Schaum's Outline of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, Schaum's Outline Series (McGraw Hill LLC)
- Spiegel, M., Lipschutz, S., & Liu, J. 2008, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 3ed, Schaum's Outline Series (McGraw-Hill Education)
- Suxo, F. 2011, *Revista Boliviana de Física*, **19**, 24
- . 2016, *Revista Boliviana de Física*, **29**, 1
- Wangsness, R. K. 1986, *Electromagnetic fields* / Roald K. Wangsness., 2nd edn. (New York: Wiley)

## LOCALIZED TWO-DIMENSIONAL PATTERNS MORPHOLOGY OF A GENERALIZED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

### MORFOLOGÍA DE PATRONES LOCALIZADOS BIDIMENSIONALES DE UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER NO-LINEAL GENERALIZADA

DETERLINO URZAGASTI<sup>†</sup>

Planetario Max Schreier, P.O.Box 3164

Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia

(Recibido 4 de diciembre de 2022; aceptado 22 de diciembre de 2022)

<https://doi.org/10.53287/hity1826bi37c>

#### RESUMEN

Se realiza una clasificación morfológica cualitativa sobre una muestra de cientos de patrones bidimensionales encontrados al resolver numéricamente una ecuación no lineal generalizada de Schrödinger dentro de una región de parámetros donde coexisten estos patrones con soluciones homogéneas no triviales. Los patrones hallados van desde aquellos muy simples a otros más complejos. Aparte de la forma, cada patrón es caracterizado también por su contenido caótico. Asimismo se observa la interacción de los distintos tipos de patrones.

*Descriptores:* Ecuaciones de amplitud; dinámica disipativa; sistemas dinámicos; formación de patrones.

Código(s) PACS: 05.90.+m

#### ABSTRACT

A qualitative morphological classification is performed on a sample of hundreds of two-dimensional patterns found by numerically solving a nonlinear generalized Schrödinger equation within a region of parameters where these patterns coexist with non-trivial homogeneous solutions. The patterns found range from those very simple to others more complex. Apart from the shape, each pattern is also characterized by its chaotic content. Likewise, the interaction of the different pattern types is observed.

*Subject headings:* Amplitude equations; dissipative dynamics; dynamical systems; pattern formation.

#### 1. INTRODUCTION

Localized patterns in two dimensions, that is, of finite area, are observed in many physical contexts. To mention just a few, we can say that they are present in Bose-Einstein condensates as well as in optical, magnetic, and mechanical systems. Given the large number of works in this field, we will refer the reader to the publications Aranson & Kramer (2002); Dangelmayr & Oprea (2004); Pismen (2006) and references therein, where different qualitative and quantitative analyzes are presented, as well as their comparison with experimental results.

Some years ago, patterns in two dimensions that appear when a generalized nonlinear Schrödinger equation is solved numerically have been studied in depth (Urzagasti et al. 2017). The present manuscript presents results of a morphological analysis of a large set of simulations carried out solving the same equation and in the same region of parameters given in Urzagasti et al. (2017).

The working equation for the complex amplitude  $A$  reads

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} = & -ivA - i|A|^2A - i\nabla^2A - \mu A + \gamma A^* \\ & + \gamma \left\{ b|A|^4A^* + \delta A^3 + \beta|A|^2A^3 + \alpha|A|^2A^* \right\} \\ & + ia|A|^4A + \kappa\nabla^2A - c|A|^2A, \end{aligned} \quad (1)$$

Details of the meaning of all terms can be found in Urzagasti et al. (2017). However, we can mention that it contains a dissipative term with coefficient  $\mu$ , a detuning term to approach the parametric resonance,  $\nu$ , and a forcing term, with coefficient  $\gamma$ . Regarding the other terms, we can highlight that the equation is rich in nonlinearity and this allows the coexistence of the structures that we seek to classify morphologically with the non-trivial homogeneous background.

Likewise, the connection with physics in different scenarios is given in detail in Urzagasti et al. (2017). This important aspect, that of the universality of the working equation, is the main motivation of this work.

<sup>†</sup><https://orcid.org/0000-0001-7387-9499>

<sup>†</sup>Email: [durzagasti@fcpn.edu.bo](mailto:durzagasti@fcpn.edu.bo).

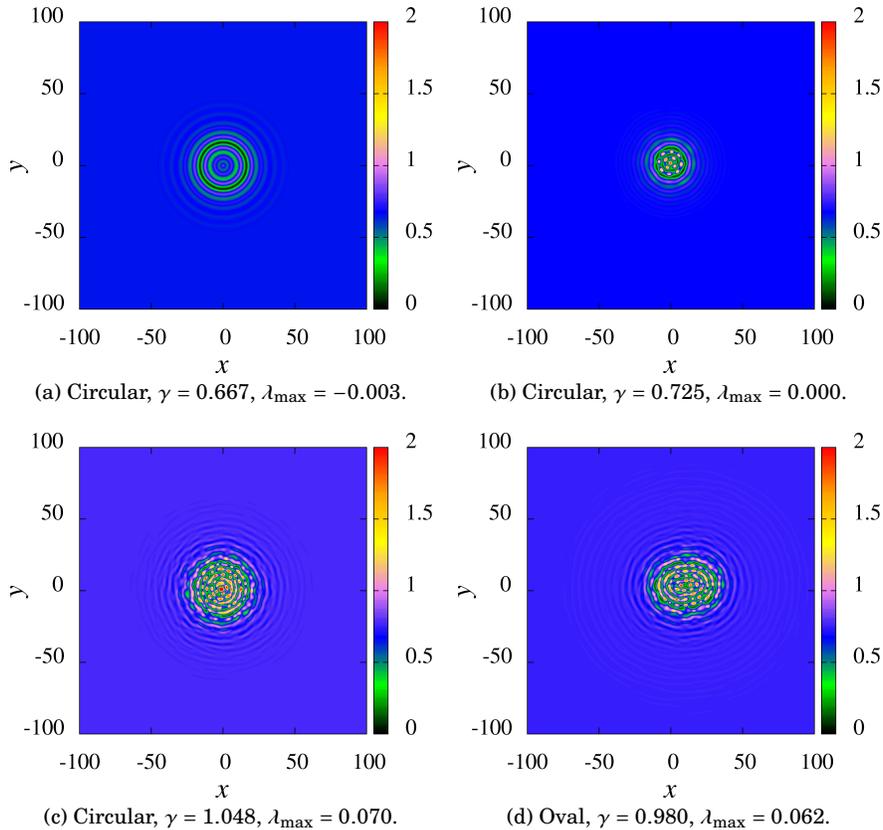


Fig. 1.— Localized circular-like patterns.

## 2. RESULTS

We show some examples of the basic structures we have found in our simulations at  $\nu = -0.05$ , for the detuning parameter, and for different values of the  $\gamma$  driving parameter after a simulation time interval of  $\Delta t = 5.6 \times 10^3$  has elapsed. We have worked 359 objects, for which we have performed some kind of basic morphological classification by direct inspection of the final results. The initial condition for all the simulations was the same pulse with circular symmetry. All the figures below corresponding to these examples map with a color code the modulus of the amplitude ( $|A|$ ) at the final instant. To determine the chaotic content, we use as an indicator the maximum Lyapunov exponent,  $\lambda_{\max}$ , which is obtained numerically using the techniques described in Urzagasti et al. (2017).

To begin, in Fig. 1 we show different circular-like structures. In the stationary regime these structures are isotropic, while in the quasi-stationary and chaotic cases they are clustered and composed of concentric chains of peaks. There are some exceptions to the circular shape as the oval object shown in box (d) of the same Figure.

In Fig. 2 we show some regular in shape patterns that are found in both the stationary and quasi-stationary regimes. In particular, the object shown in box (d) is an exceptional stationary case in the chaotic zone above  $\gamma = 0.8$ .

Figure 3 shows some simple chain-like structures. We point out that grub and stadium structures tend

to move away from their initial position.

The simplest structures appear interacting for some parameters. Examples of the resulting clusters are shown in Fig. 4. Again, we remark how the structures involving grubs move away from the initial central position.

Also, there are interacting systems that involve more complex structures such as circles, pentagons, and stadiums. Some examples are shown in Fig. 5. Note that in the case of pentagon-grub structure there are a stationary version as well as a chaotic one.

We found even more complex structures such as those shown in Fig. 6. We remark that the caterpillar structure appears in both the quasistationary and chaotic cases.

Finally, we distinguish two general types of big complexes: complex type I, which are composed of several kinds of interacting complexes such as the one shown in box (a) of Fig. 7, and complex type II which are built from several interacting chains of peaks and that have a tassel-like structure as it is shown in the example in box (b) of the same Figure. Figure 7 also shows the very big and very chaotic structures that appear as a band-like and extended pattern structures in box (c) and (d), respectively.

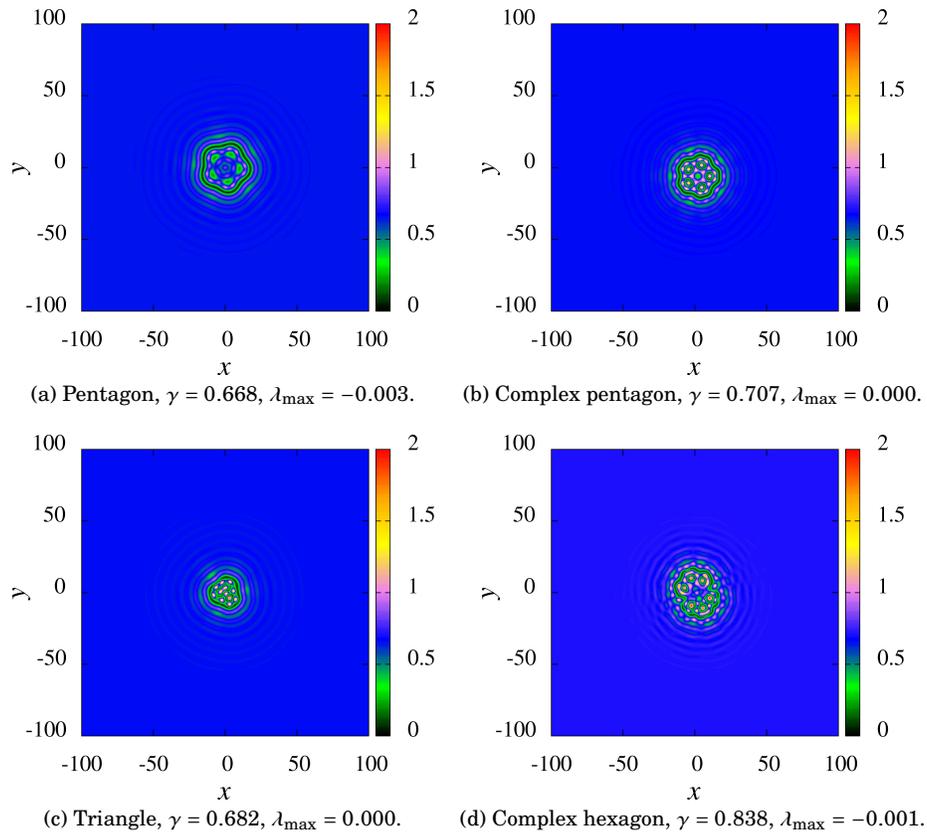


Fig. 2.— Localized regular patterns.

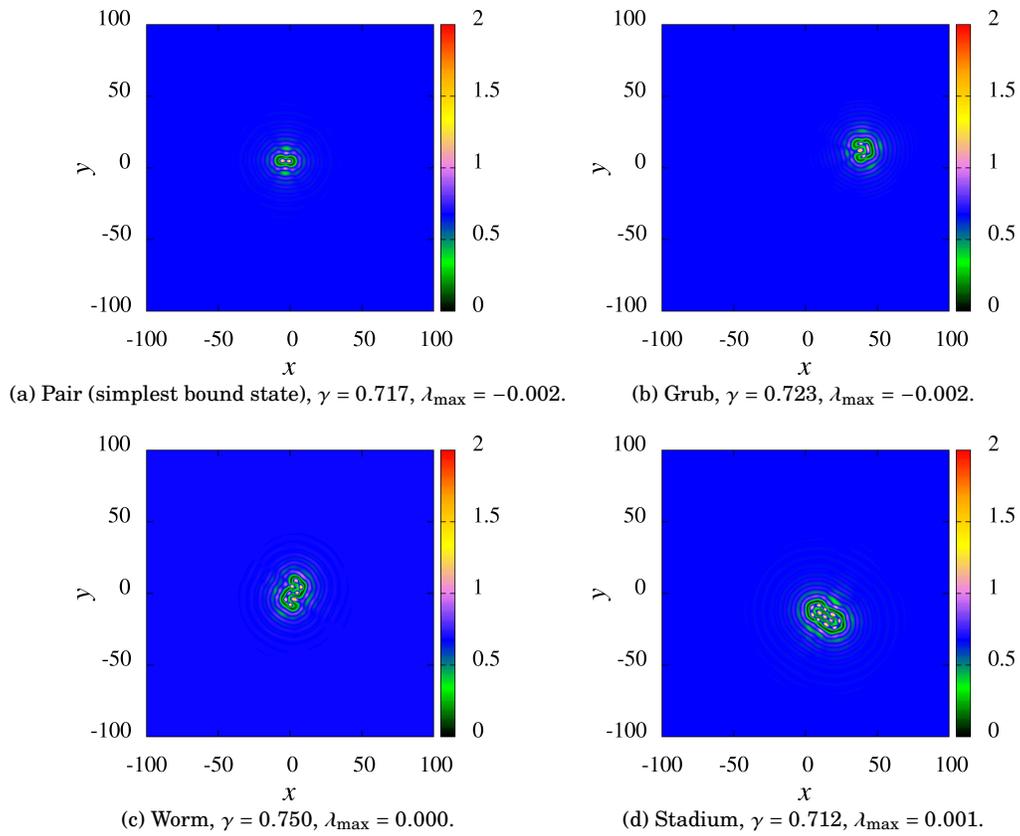


Fig. 3.— Localized chain-like patterns.

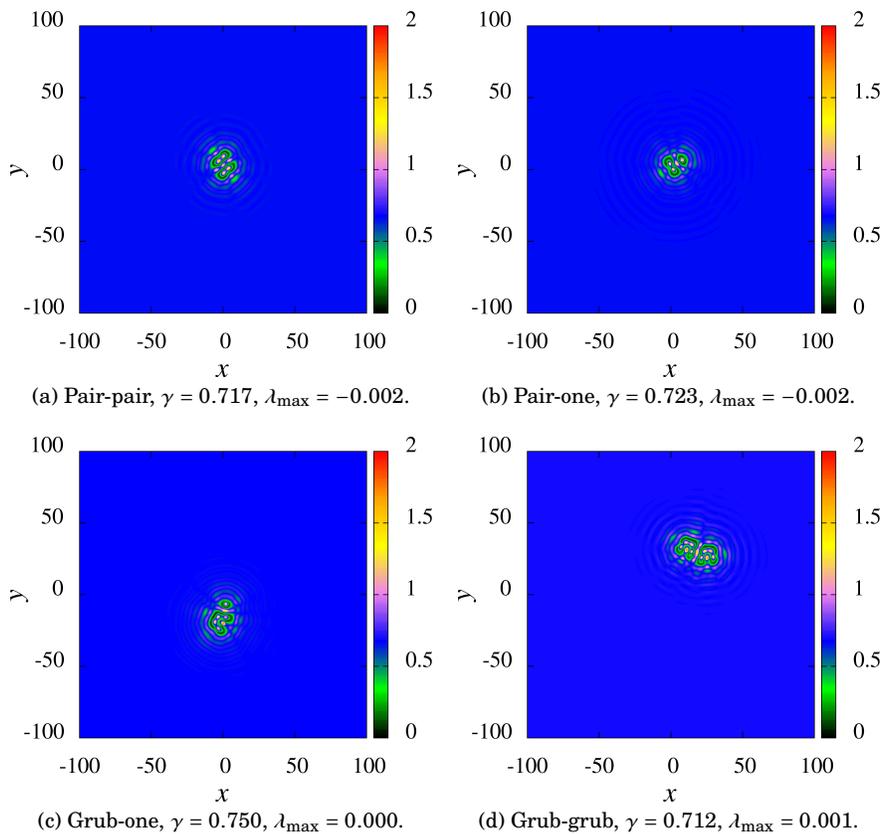


Fig. 4.— Localized clusters of simple patterns.

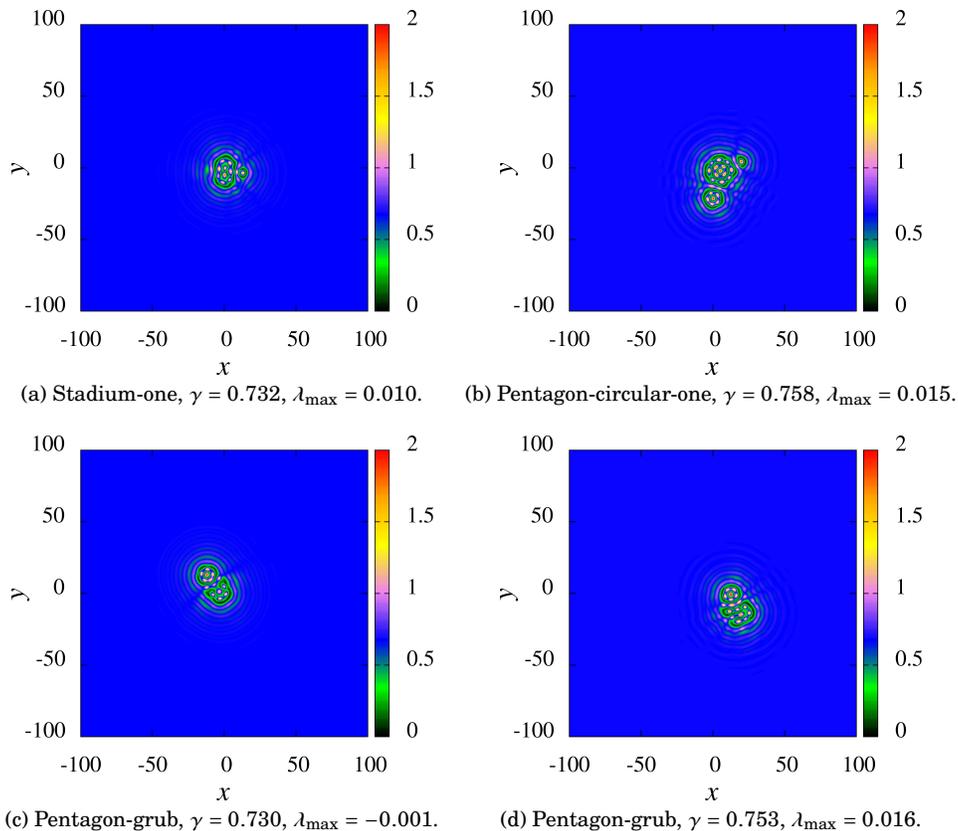


Fig. 5.— Localized clusters with more complex patterns.

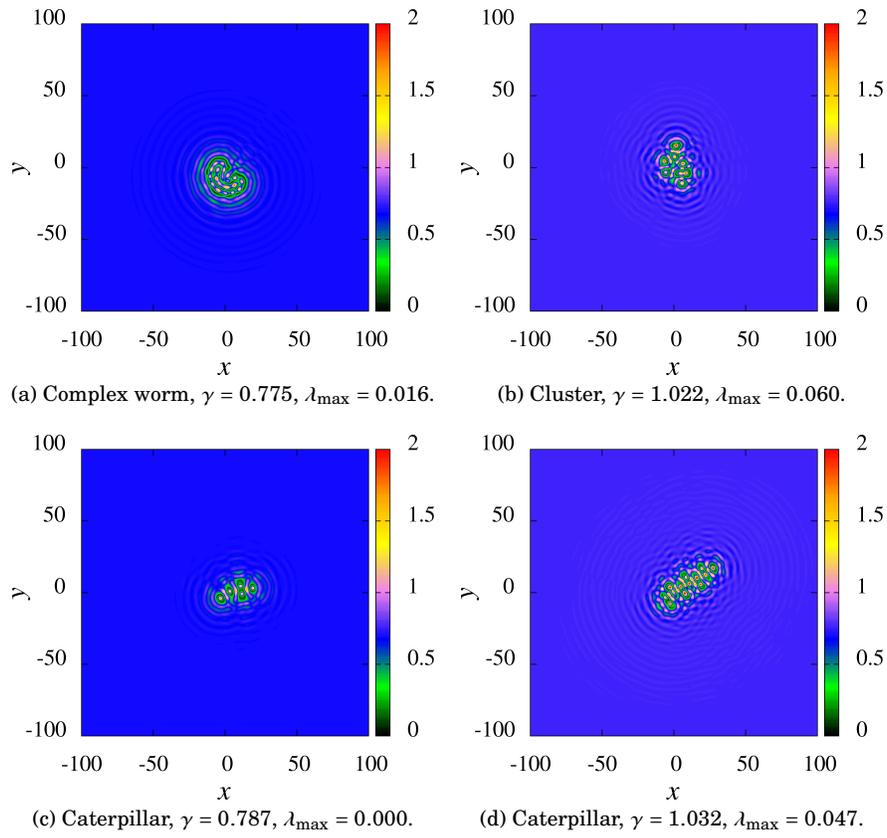


Fig. 6.— Localized complexes.

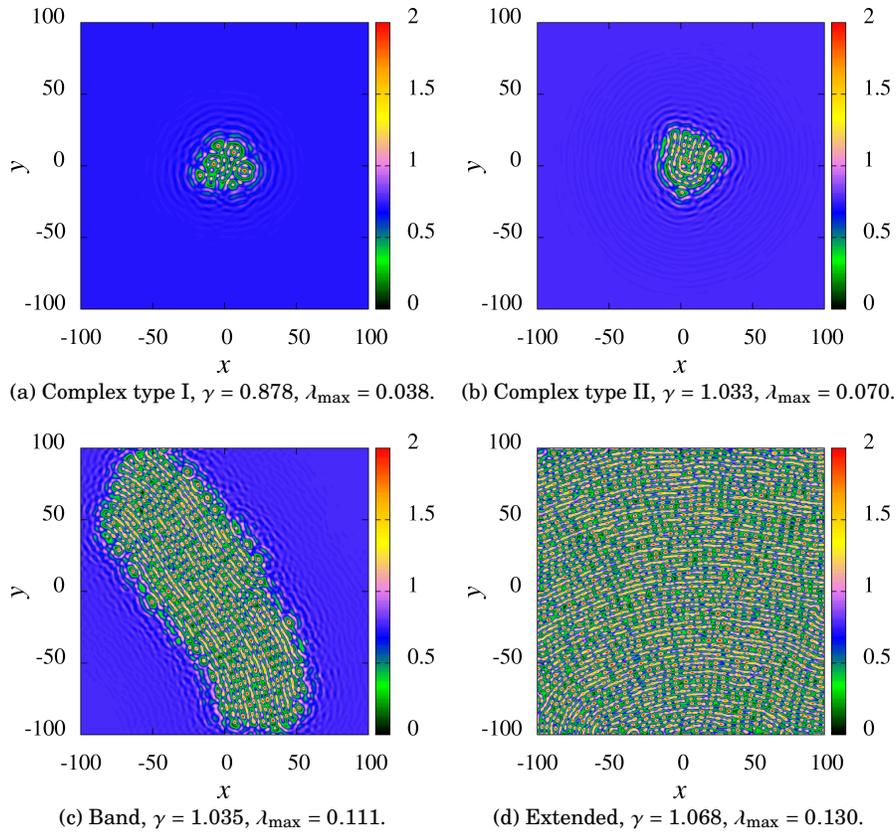


Fig. 7.— Localized and extended big complexes.

## 3. CONCLUDING REMARKS

In summary, we have found several types of structures whose complexity is determined by their extension and by their number of walls, trenches, and soliton pulses. After an exhaustive review of the results of hundreds of simulations, only a few types of structures were found, namely: circular, oval, triangular, pentagonal, and hexagonal patterns; bound states of solitons, grubs, worms, and caterpillars; stadiums, clusters; complex irregular structures (here called type I complexes), complex tassel-like structures (here called type II complexes), and bands, which are extensive band-shaped structures.

In general, the greater the complexity, the greater

the chaotic content; however, there are exceptions. In particular, less complex structures can be both chaotic and periodic.

It should be noted that some less complex objects acquire movement. We do not have an explanation of the cause of this interesting effect, nor of the causes for the formation of different patterns for very close values of the forcing parameter. These problems, which are outside the scope of this manuscript, are raised for further study.

**Conflicto de intereses**

El autor declara que no hay conflicto de intereses respecto a la publicación de este documento.

## REFERENCIAS

Aranson, I. S. & Kramer, L. 2002, *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 99  
Dangelmayr, G. & Oprea, I. 2004, *Dynamics and Bifurcation of Patterns in Dissipative Systems* (WORLD SCIENTIFIC)  
Pismen, L. M. 2006, *Patterns and Interfaces in Dissipative Dynamics* (Springer Berlin, Heidelberg)

Urzagasti, D., Laroze, D., & Pleiner, H. 2017, *Phys. Rev. E*, **95**, 052216

## EFFECTOS DE LOS CAMBIOS CLIMÁTICOS SOBRE LOS BOSQUES DE ALTURA EN EL ALTIPLANO\* CLIMATE CHANGE EFFECTS ON HIGH-ALTITUDE WOODS IN THE ALTIPLANO

VANESA SERRUDO<sup>†</sup> [1], HEIDY MONTECINOS<sup>†</sup> [2], MARÍA ELENA ANGULO<sup>†</sup> [3], PETER ZABALA-MEDINA<sup>†</sup> [4], & EDUARDO R. PALENQUE<sup>†</sup> [5]

<sup>†</sup> Instituto de Investigaciones Físicas (IIF), Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), La Paz, Bolivia.  
<https://doi.org/10.53287/pnbo2770ae45h>

### RESUMEN

Se midió el coeficiente de conducción térmica de trozos de corteza de keñua (*Polylepis tarapacana*), provenientes de distintos lugares de la Cordillera de Los Andes, para poder comparar con datos climáticos y meteorológicos, buscando correlaciones entre los estímulos ambientales y algún mecanismo de defensa. Se encontró un método alternativo para clasificar las muestras por su lugar de origen.

*Descriptor:* Cambio climático — *Polylepis tarapacana* — Andes bolivianos — Conductividad térmica.

Código(s) PACS: 44.10+i

### ABSTRACT

The keñua tree (*Polylepis tarapacana*), found at 5200 m a.s.l. in the Andes Mountains, grows at the highest treeline in the world. We measured the thermal conduction coefficient of keñua bark samples taken from different locations within the Andes Mountains. These measurements were used to find a correlation between environmental inputs and high altitude plant defence mechanisms. We found a new classification method to identify the origin of plant samples.

*Subject headings:* Climate change — *Polylepis tarapacana* — Bolivian Andes — Heat conduction.

### 1. INTRODUCCIÓN

La Cordillera de Los Andes es el mayor accidente geográfico en parte occidental de Sud América, ya que cruza el continente desde el norte (en Venezuela) hasta el extremo sur (llegando al océano Antártico). La Cordillera es conocida por sus grandes reservas de minerales, muy bien registrados, y también por tener los picos más altos en el hemisferio occidental, etc. Además, entre sus propiedades notables, está el tener una gran cantidad de “hotspots” de biodiversidad, debido a los enormes cambios en altura (y del clima asociado) dentro de distancias relativamente cortas. Por ejemplo, el valle de Zongo, en Bolivia, varía 5 km en altura, en menos de 100 km lineales sobre el mapa. A partir de estas alturas muy cambiantes, y los climas asociados a cada altura, la Cordillera de Los Andes presenta colinas tropicales

en su base, subiendo hasta las cumbres heladas con clima polar. Siguiendo esas variaciones en altura, también se presentan cambios en la vegetación, con un gradiente de disminución continua: desde la selva húmeda densa, con árboles por encima de los 30 m de alto; cambiando al bosque nuboso, cubierto de arbustos y helechos; pasando a llanuras de pastizales en el altiplano; para terminar con pendientes cubiertas de rocas, en las cuales existen manchones de musgos y líquenes, hasta la línea de nieve permanente.

En el presente trabajo, se muestran los resultados de las características especiales de las cortezas de la keñua (*Polylepis tarapacana*), que es una de las 26 especies del género *polylepis*, familia de las rosáceas. Este género es endémico de la Cordillera de Los Andes en su totalidad. Se destaca el hecho que solo 5 de las 26 especies provienen de las altas montañas. Las keñuas (*Polylepis tarapacana*) crecen entre las latitudes de 16°S y 23°S, en la base de la zona tropical, pero con la salvedad que solo se desarrollan en zonas muy altas, por encima de los 4000 m s.n.m. (Kessler (1995)) y se reconoce que forman la línea de árboles más alta del mundo; por encima de los 5200 m s.n.m. en el Parque Nacional Sajama, en Bolivia (Argollo et al. (2004)). El nombre común de las *Polylepis tarapacana*, es keñua, y tiene diferentes grafías según las regiones de su dis-

<sup>1</sup><https://orcid.org/0000-0002-9781-2835>

<sup>2</sup><https://orcid.org/0009-0003-3577-9691>

<sup>3</sup><https://orcid.org/0009-0008-3020-1045>

<sup>4</sup><https://orcid.org/0009-0001-2130-1713>

<sup>5</sup><https://orcid.org/0009-0008-8477-9483>

<sup>†</sup>Email: epalenque@fiumsa.edu.bo.

\*Este artículo es la versión en idioma español del capítulo 9 del libro: “Naturaleza en los Andes”, K. Mizuno ed., publicado por la Universidad de Kyoto, en idioma japonés (2015).

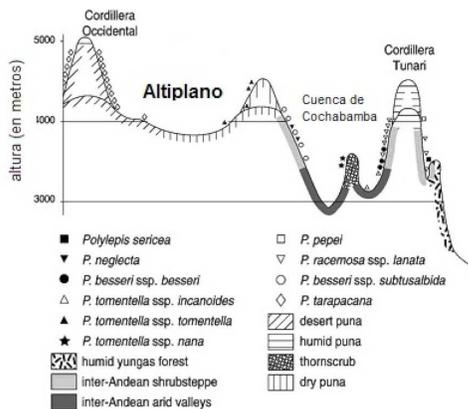


FIG. 1.— Diagrama de un perfil del altiplano mostrando la distribución ecológica de las diferentes especies de *Polylepis* (adaptado de Chepstow-Lusty et al. (2005)). Nótese que en este trabajo, solo se presentan datos para *Polylepis tarapacana*.

tribución geográfica que incluye el sudeste del Perú, el oeste de Bolivia, el noreste de Chile y el noroeste de Argentina. Aquí solo se presentan resultados de muestras recolectadas en Bolivia.

## 2. EL ÁRBOL DE LA KEÑUA

Los árboles de la keñua crecen en condiciones ambientales extremas, por lo que la especie ha desarrollado varias adaptaciones morfológicas y fisiológicas, las cuales le permiten sobrevivir a temperaturas muy bajas y períodos largos de estío. La especie es notable por su resistencia a temperaturas muy bajas, como las registradas de  $-20^{\circ}\text{C}$  durante el invierno (Aceituno (1993)). Esta capacidad se atribuye (entre otras hipótesis) al contenido de carbohidratos de las hojas (González et al. (2001)). Las condiciones duras del clima también afectaron a las condiciones morfológicas de las plantas, como las hojas perennes, un follaje espeso, ramas retorcidas desde la base del tronco, y en especial, un tipo particular de corteza, con muchas hojas delgadas en varias capas (Kessler (1995)). En términos generales, los árboles tienden a formar islas de bosque que tratan de cubrir pendientes extensas en las montañas. Sin embargo, no es extraño encontrar árboles aislados en los valles. Esta especie ha sido utilizada durante siglos, principalmente para leña, y en forma secundaria como material de construcción. Durante el siglo pasado, la explotación tuvo un gran incremento, llevando a la keñua a estar en el libro rojo de las especies en peligro (Moya & Lara (2011)). Los bosques de *polylepis* no solo son sistemas en peligro, sino que también han sido reducidos a enclaves en zonas arbustivas o pastizales secos, las cuales son dominantes en los bordes del altiplano (Navarro et al. (2005)).

Los árboles de keñua a grandes alturas están distribuidos en las pendientes de las montañas de la rama occidental de los Andes, y son más comunes en Bolivia que en los otros tres países que comparten el altiplano. En los valles interandinos existen también especies similares, pero estas crecen allí por las condiciones climáticas más suaves. La keñua es la más resistente a las bajas temperaturas y tiene



FIG. 2.— Un ejemplar típico de *Polylepis tarapacana* en la región de las Machacas en el altiplano boliviano (Fotografía por E.R. Palenque)

el récord mundial de altura para la línea de árboles.

La keñua (*Polylepis tarapacana*) ha sido descrito como un árbol con un tronco ramificado, que no crece recto, con su follaje que se abre desde la base. Los árboles pueden llegar a tener entre 3 a 7 m de altura, con una base formada por un tronco corto de hábito helicoidal, generalmente de 30 a 60 cm de diámetro. Las ramas también crecen retorcidas, con pequeñas ramitas en los extremos. Las hojas son perennes, del tipo compuesto, trifoliadas, de forma oblonga, con 7 a 9 mm de largo, y de 3 a 5 mm de ancho, cubiertas con un pelo muy fino. Las hojas tienen también una distribución helicoidal, con tendencia a agruparse al final de las ramas nuevas. Las flores son bastante pequeñas, cerca de 5 mm de diámetro y no tienen pétalos. El periodo de floración es bastante largo, cerca de cuatro meses, desde el final del invierno hasta el inicio del verano. Los frutos tienen cuatro lados, alrededor de 4 mm de largo y 5 mm de ancho, con una o dos semillas. Es muy frecuente que un fruto se mantenga unido al árbol por más de un año, lo que hace que cualquier colecta contenga frutos nuevos y antiguos (Stern (2001)).

La keñua es un árbol relativamente pequeño, con ramas que crecen desde la base, y con un follaje compacto y denso. Si un conjunto de árboles crecen juntos, generalmente en el fondo de una cañada, tienden a ser más delgados y con un follaje menos denso; pero si un árbol crece solitario, la tendencia es que sea menos alto, pero con follaje denso, para poder protegerse de los fuertes vientos. La baja humedad relativa de esos hábitats se contrarresta por el pequeño tamaño de las hojas y la escasa cantidad de estomas en cada hoja, así como la presencia de pequeños pelos en la cara expuesta al sol (Stern (2001)).

### 3. EL HÁBITAT

La región de estudio está situada en el altiplano boliviano, que tiene condiciones climáticas extremas. Es una de las regiones en el mundo que recibe mayor cantidad de radiación solar, lo que representa un incremento de casi el 50% en la región ultravioleta del espectro solar. La región de donde fueron colectadas la mayoría de las muestras de corteza, está cerca del Parque Nacional Sajama, y se le puede dar la clasificación de Koppen como microtermal con invierno seco (Dw), con una temperatura media de 3.4°C, y una media de máximos diarios de 17.2°C y de -12.6°C para los mínimos; con un mínimo histórico de -19°C (Libermann-Cruz (1986)). El aspecto principal es la gran variación de temperaturas durante el ciclo diario, que se extiende cerca de 30°C; mientras que la variación entre las estaciones de verano a invierno solo cubre una diferencia de 10°C.

Las keñuas se han utilizado como indicadores de cambio climático, ya que tienen anillos anuales de crecimiento que actúan como indicadores proxy de la temperatura y humedad ambientales; de manera tal que es posible realizar la reconstrucción del pasado climático de regiones y épocas donde no existían instrumentos meteorológicos (Argollo et al. (2004)). En general, el estudio del clima pasado muestra la existencia de sequías severas alrededor del siglo XIV, lo que causó grandes cambios y migraciones de la población hacia sitios de colinas fortificadas en el altiplano boliviano (IAI (2012)). Los bosques de *polylepis* tienen una tasa de crecimiento extremadamente lenta, marcada por la tendencia estacional; la cual se ve incrementada con la altura geográfica, de tal manera que el género *polylepis* forma anillos estacionales muy marcados, pero extremadamente delgados, algunas veces de menos de un milímetro de espesor (Argollo et al. (2009)). Ese es uno de los ejemplos de la utilidad de los bosques de keñua, ya que no solo funcionan como un registro climático, sino que además ofrecen varios servicios ecoambientales. Entre estos últimos se puede citar que los bosques actúan como sistemas de captura de agua, cientos de veces más eficientes que las pasturas (Serrudo & Udaeta (2013)). Esta capacidad podría utilizarse para hacer que el bosque de *polylepis* actúe como un reservorio de agua, además de su contribución a la fertilidad del suelo, o como lugar de anidación para aves locales y migratorias, etc. (Kessler (2006)).

Los bosques de keñua fueron alguna vez el aspecto dominante del paisaje del altiplano, pero ahora están reducidos a unos cuantos puntos aislados. La mayor parte del hábitat perdido fue a causa de la sobreexplotación causada por actividad extractivista para convertir la leña en carbón, para alimentar las calderas de las locomotoras de ferrocarril. Esta práctica se detuvo hace más de 50 años. Actualmente, existen otros riesgos, la mayor parte de estos está asociada a los cambios climáticos, tanto de escala local como global. El calentamiento global no es un fenómeno uniforme, y en la región de estudio presenta diversas tendencias locales, aún

para lugares cercanos, como Patacamaya y Sica Sica en el altiplano central (Palenque (2003)). En el caso del altiplano, se observa una tendencia de disminuir las temperaturas mínimas en las regiones cercanas a las montañas, que son las zonas donde crece la keñua. Por tanto, los cambios en la temperatura representan una doble amenaza para la keñua. Si la temperatura sube por encima de los 23°C, las semillas tienden a infectarse con bacterias, y se tornan inviables; por lo que el bosque no puede regenerarse por sí mismo (Vega-Krstulovic et al. (2007)). Por otro lado, existe el riesgo de escasez de agua de lluvia. Debido a que el derretimiento de los glaciares está causando periodos de estiaje más largos durante el invierno, con cielos extremadamente claros. Durante la noche, el cielo despejado puede causar un congelamiento debido a los procesos de radiación hacia la atmósfera oscura; lo cual es un efecto muy conocido por los habitantes del altiplano. Si existe menor cantidad de agua durante el ciclo diario, la temperatura más baja (generalmente antes del amanecer) sería aún más baja, lo que causaría daños severos a la vegetación. Se ha probado que los árboles de keñua poseen una defensa química de protección de las hojas contra la helada (González et al. (2001)). En este trabajo investigamos si las ramas y el tronco podrían aguantar temperaturas muy bajas durante muchas horas. La mayoría de los árboles de keñua poseen ramas delgadas, con una razón relativamente alta entre la superficie expuesta y el volumen del tejido que debe ser protegido; ya que este último contiene savia y otras sustancias vitales, que son soluciones acuosas. Este asunto se torna más importante al considerar que la keñua no solo es la especie de árbol que tiene el hábitat más alto en el mundo entero (es decir, es una especie única), sino al considerar también que si bien la temperatura media global ha incrementado a un ritmo de 0.1- 0.2°C/década, en los Andes Centrales la tasa es de 0.34, un 70% más que en el resto del planeta. También se sabe que los ecosistemas de montaña son más sensibles al cambio climático; y los nuevos datos sugieren que una alteración del ciclo hidrológico podría llevar a desbalances tan fuertes que los bosques de *polylepis* no llegarían a recuperarse (AGRIFORT (2009)).

### 4. MÉTODOS DE TRABAJO DE CAMPO Y DE LABORATORIO

Tal como se describió líneas arriba, la corteza de los árboles de keñua está formada por varias capas de hojuelas muy delgadas, que le dan un aspecto de madera laminada. Entre esas capas delgadas existe algo de aire encapsulado, y se supone que el conjunto (capas y aire) actúa en forma similar a las plumas de las aves para aislamiento térmico. Para el presente trabajo, el equipo de investigación recolectó muestras de cortezas provenientes de varios lugares de la Cordillera Occidental de Los Andes, en Bolivia, de otros puntos en el altiplano, y se compararon con dos muestras urbanas, de la ciudad de La Paz. Todas las muestras de lugares rurales provienen de puntos de

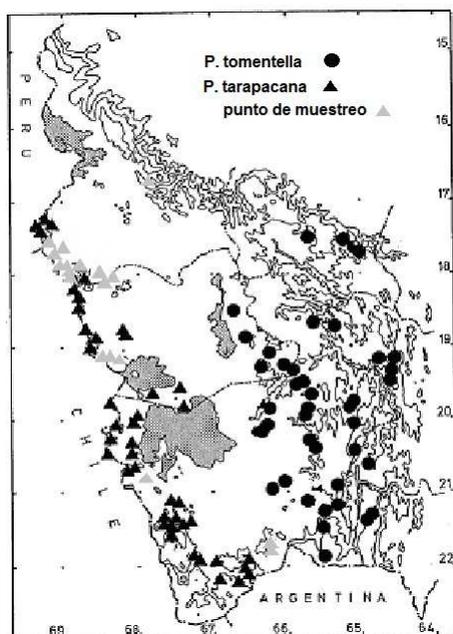


FIG. 3.— Lugares de recolección de muestras (adaptado del mapa de Kessler (1995)). Los triángulos grises muestran los lugares de las muestras analizadas.

bosques cuya altura es superior a los 4200 m sobre el nivel del mar.

Cada muestra de corteza consiste en un grupo de láminas delgadas de alrededor de una decena de árboles, elegidos al azar como representativos de cada rodal o “isla de bosque” de keñua. Las muestras analizadas fueron tomadas de la cara norte del árbol, ya que ese lado recibe la mayor radiación solar a lo largo de todo el año. Cada una de las muestras fue llevada al laboratorio en el Instituto de Investigaciones Físicas de la UMSA en un sobre especial, hecho de papel manila, marcado con el número del árbol, la altura geográfica y la ubicación del mismo, la cual fue determinada a través de un GPS portátil.

Cuando las muestras llegaron al laboratorio, se dejaron secar, durante semanas, e inclusive varios meses. Una vez secas, las muestras fueron separadas en sus láminas delgadas. Se midió el espesor de cada una de láminas como hojas, con un vernier digital, registrando ese dato en una bitácora especial, junto con un código especial de identificación; el cual retiene los datos importantes del lugar de origen de la muestra. Posteriormente, se cortó un trozo pequeño (alrededor de  $1 \text{ cm}^2$ ) de cada una de las capas de cada muestra, para poder medir el coeficiente de transmisión térmica de la muestra, que es una característica física del material. El método usado para medir el coeficiente es estándar en los laboratorios de física, pero no se lo emplea mucho en los laboratorios de biología; por lo que a continuación está una descripción breve del mismo (ver, p.ej. White & Manning (1954)).

Durante este estudio se utilizó el método de medición del flujo de calor a través de una muestra cuando esta se coloca entre dos reservorios a diferentes temperaturas. Se sabe que el calor fluye desde el



FIG. 4.— Una rama del árbol de keñua al pie del Monte Sajama, en Bolivia; mostrando el aspecto laminar de la corteza, con varias capas (Fotografía por V. Serrudo).

reservorio a mayor temperatura hacia el de menor temperatura, cumpliendo con la ecuación:

$$\Delta Q = \frac{kA\Delta T\Delta t}{L} \quad (1)$$

donde  $\Delta Q$  representa el calor perdido por el reservorio más caliente (y que es ganado por el otro),  $A$  es la sección transversal por la cual pasa el calor (el área efectiva de contacto de la muestra),  $L$  es el grosor de la muestra,  $\Delta T$  es la diferencia inicial de temperaturas entre los reservorios,  $\Delta t$  es el tiempo durante el cual se mide el flujo de calor, y finalmente  $k$  es la cantidad buscada: coeficiente de conducción térmica. Mientras más alto sea el valor de  $k$ , más fácilmente el calor podrá atravesar la muestra. Por ejemplo, en un metal como el cobre,  $k$  tiene un valor que es miles de veces más alto que el correspondiente a las maderas, como el pino. Cuando un material tiene un valor de  $k$  sumamente bajo, como el caso del corcho, se dice que es un aislante térmico. La clave está que mientras más bajo sea el valor de  $k$ , más tiempo le tomará al calor poder atravesar desde el interior de las ramas hasta el aire frío durante el invierno. Por tanto, midiendo el valor de  $k$ , se tiene un método para predecir si un árbol podrá soportar las temperaturas más bajas que están predichas para las montañas del altiplano occidental en Bolivia.

Para lograr un mejor rendimiento del sistema experimental en el laboratorio, se utilizó un montaje capaz de registrar simultáneamente la temperatura de ambos lados de la muestra, midiendo la temperatura varias veces en cada segundo, y dentro del rango de temperaturas que se consideró adecuado, con valores similares a los que se encontrarían en el campo. Todos los datos se registraron en forma electrónica y fueron procesados con un programa de computadora diseñado en forma específica.

## 5. RESULTADOS

Se encontró que todas las muestras presentan valores similares del coeficiente de conducción térmica,

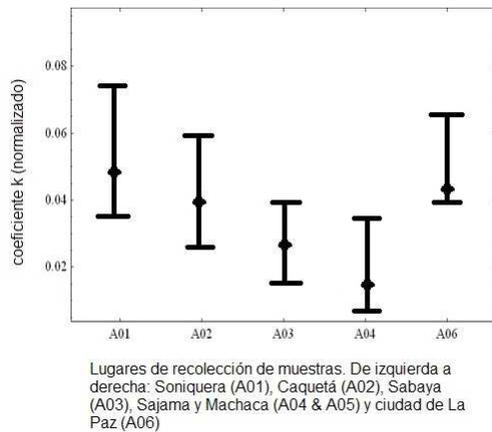


FIG. 5.— Coeficientes de conducción térmica vs. lugares de recolección de las muestras.

$k$ , tal como se esperaba, ya que las muestras son de una misma especie. Sin embargo, las pequeñas variaciones entre valores nos permitieron diferenciar las muestras por sus lugares de origen, tal como se puede apreciar en la figura 5. El eje horizontal corresponde a promedios de muchas muestras de cada lugar de recolección, y están ordenados por su latitud geográfica, desde el sur (Soniquera) hacia el norte (ciudad de La Paz). Estas últimas muestras (de la ciudad de La Paz) se deben considerar como un caso especial, ya que corresponden a muestras cultivadas, y su régimen de riego no es el natural. Todas las otras muestras provienen de la cordillera, recolectadas en zonas rurales. En el caso de las muestras de Sajama y Machaca, se encontró gran similitud, que es estadísticamente imposible separar los dos grupos; lo cual es lógico por la proximidad de ambos lugares. A pesar de estos casos, se encontró una relación marcada entre el lugar geográfico de origen y el valor

relativo del coeficiente de conducción térmica ( $k$ ) a lo largo de toda la cordillera.

Al comparar los valores absolutos del coeficiente  $k$  con los valores calculados para que los árboles no se congelen por completo, se concluye que no existe un riesgo importante para los bosques de *Polylepis*, aún considerando diferentes escenarios climáticos posibles, como los considerados por el IPCC.

El resultado de este estudio es un método indirecto para clasificar las muestras de cortezas de acuerdo a su lugar de origen. El siguiente paso será la expansión de las zonas de colecta, para probar el método con muestras del otro lado de la Cordillera de Los Andes, lo que implica una colaboración internacional, ya que se compararán muestras provenientes de diferentes países.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Prof. Kazuharu Mizuno por el interés y apoyo de nuestra investigación y por darnos la oportunidad de realizar trabajos conjuntos en una buena colaboración interinstitucional.

También se agradece a Alejandra Domic, José Valderrama, Arely Palabral Aguilera, Isabel Gómez Urquiza, al proyecto “Conservación de los Bosques de *Polylepis*” de la UMSA, y a la Asociación Civil “Armonía” por proporcionarnos varias de las muestras de cortezas; y a Leonardo Apaza, Enrique Calvo y Policarpio Valencia su ayuda con las medidas de algunas muestras.

Se agradece a Edson García por su colaboración en el proceso final del texto.

#### Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses respecto a la publicación de este documento.

#### REFERENCIAS

- Aceituno, P. 1993, *Revista de Geofísica*, **44**, 37
- AGRIFORT 2009, Climate Change in Latin America (AGRIFORT Consult, Les Isnas, Belgium)
- Argollo, J., Angulo, M. E., & Palenque, E. R. 2009, Registro de la variabilidad climática por los bosques de *Polylepis* tarapacana de la serranía de Levita mediante los proxies de dendrocronología, palinología y secuestro de carbono, Memorias del Primer Congreso de Proyectos Concursables UMSA-ASDI La Paz
- Argollo, J., Soliz, C., & Villalba, R. 2004, *Ecología en Bolivia*, **39** (1), 5
- Chepstow-Lusty, A., Bush, M. B., Frogley, M. R., Baker, P. A., Fritz, S. C., & Aronson, J. 2005, *Quaternary Research*, **63**, 90
- González, J. A., Liberman-Cruz, M., Boero, C., Gallardo, M., & Prado, F. E. 2001, *Phyton*, **40**, 41
- IAI. 2012, Tree rings point to drought as the trigger of social conflict, Science Snapshots 11
- Kessler, M. 1995, *Candollea*, **50** (1), 131
- . 2006, Bosques de *Polylepis*. Botánica Económica de los Andes Centrales (UMSA, La Paz), 110–120
- Libermann-Cruz, M. 1986, *Documents Phytosociologiques, N.S.*, **10** (2)
- Moya, J. & Lara, M. 2011, *Bosque*, **32** (2), 165
- Navarro, G., Molina, J. A., & De la Barra, N. 2005, *Plant Ecology*, **176** (1), 113
- Palenque, E. R. 2003, *Revista Boliviana de Geociencias*, **3**, 43
- Serrudo, V. & Udaeta, K. 2013, Conservation Leadership Programme, Report 255311
- Stern, J. 2001, Queñoa, árbol de las alturas (Compañía Minera Doña Inés de Collahuasi, Santiago de Chile)
- Vega-Krstulovic, C., Bermejo-Franco, J. C., Villegas-Alvarado, G., Quezada-Portugal, J., Aguilar-Llanos, M., & Conde-Velasco, E. 2007, *Ecología en Bolivia*, **42** (2), 102
- White, M. W. & Manning, K. V. 1954, Experimental College Physics - A Laboratory Manual (McGraw Hill, New York)

---

## REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

### COMITÉ EDITORIAL

#### Sociedad Boliviana de Física

**Lic. Alfonso Velarde Chávez**  
Email: alfonso.velarde@gmail.com

#### Instituto de Investigaciones Físicas

**Dr. Flavio Ghezzi Moris**  
Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo  
**Dr. Wilfredo Tavera Llanos**  
Email: witavera@fiumsa.edu.bo

#### Carrera de Física

**Dr. Armando R. Ticona Bustillos**  
Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

---

#### Misión

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica semestralmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

#### Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

#### Instrucciones para los autores

La Revista Boliviana de Física recibe trabajos escritos en castellano, inglés o portugués y deben contar con un resumen en castellano y su correspondiente traducción en inglés.

Los autores deberán enviar sus trabajos preferentemente en los formatos  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ , *MS Word*, o *sólo texto* (con extensiones *.tex*, *.doc* y *.txt*, respectivamente), ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. Las figuras deberán tener una resolución razonable a fin de que puedan ser vistas con suficiente claridad por el lector.

Los artículos científicos serán revisados por el Comité Editorial y posteriormente por un par de árbitros anónimos quienes dan el veredicto sobre si el artículo es aceptado o no.

La comunicación de los autores con los árbitros se realiza únicamente a través del editor encargado del área.

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

Conflicto de interés: Los autores que envíen artículos para su publicación en la RBF admiten que no tienen conflicto de interés en relación a los trabajos realizados y presentados.

## CONTENIDO

EDITORIAL

*Editor*

### A. ARTÍCULOS

ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE UN DETECTOR CHERENKOV  
DE AGUA EN EL MARCO DE LA COLABORACIÓN LAGO

*Beymar Mamani & Martín Subieta*

SOLUCIÓN DE UNA **EDP** COMPLETA INHOMOGÉNEA E IMPLI-  
MENTACIÓN DE CONDICIONES DE FRONTERA MEDIANTE PA-  
SEOS ALEATORIOS

*V. Franz Suxo M.*

MORFOLOGÍA DE PATRONES LOCALIZADOS BIDIMENSIONA-  
LES DE UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER NO-LINEAL GENE-  
RALIZADA

*Deterlino Urzagasti*

### B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

EFFECTOS DE LOS CAMBIOS CLIMÁTICOS SOBRE LOS BOSQUES  
DE ALTURA EN EL ALTIPLANO

*Vanesa Serrudo, Heidy Montecinos, María Elena Angulo, Peter  
Zabala-Medina & Eduardo R. Palenque*