

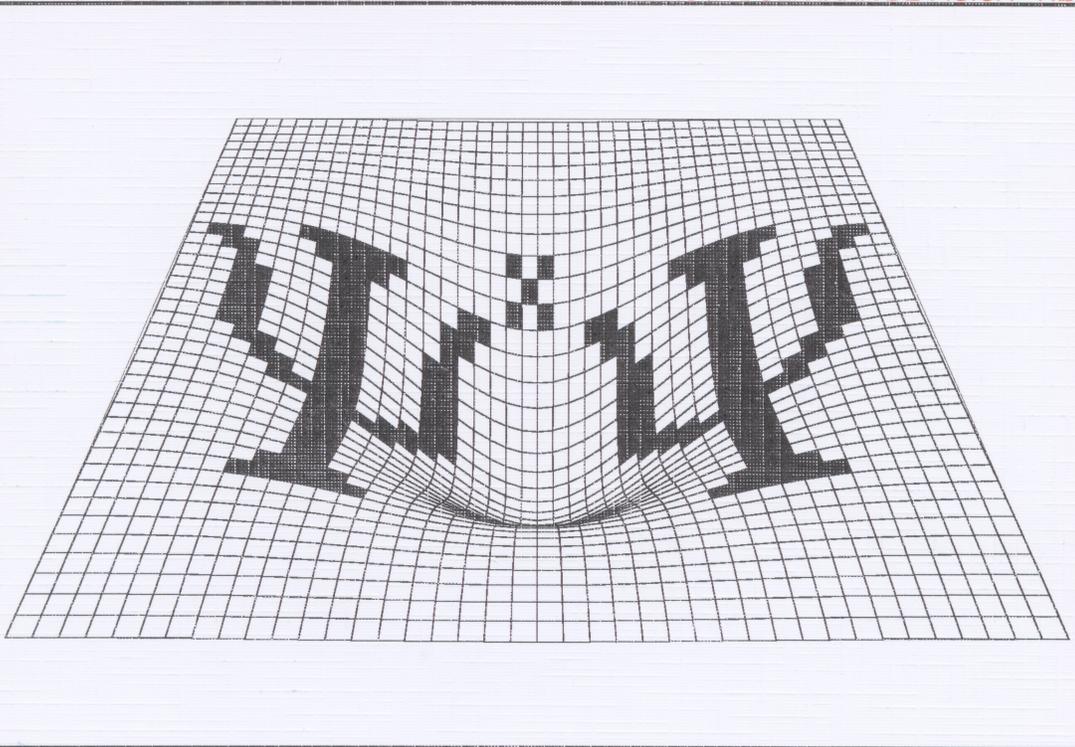
ISSN - 1562 - 3823

Indexada en PERIODICA

# REVISTA BOLIVIANA DE FISICA

NUMERO 12

OCTUBRE 2006 - LA PAZ - BOLIVIA

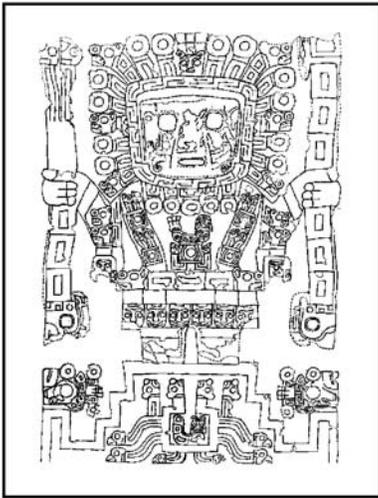


INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FISICAS  
CARRERA DE FISICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FISICA

ISSN 1562-3823

Indexada en PERIODICA



# Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS  
CARRERA DE FÍSICA  
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS  
Y  
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 12  
OCTUBRE DE 2006

## Revista Boliviana de Física

**ISSN 1562-3823**

**Indexada en PERIODICA**

<http://biblioweb.dgsca.unam.mx/latindex>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.  
Casilla 8635, La Paz, Bolivia

*Editores:* Alfonso Velarde Ch., Diego Sanjinés C. y Deterlino Urzagasti.

*Dirección:* Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.  
Tel: (591 2)2792999; FAX: (591 2)2792622.

*Portada:* “La densidad de probabilidad cuántica deformada por la estructura geométrica del espacio-tiempo en presencia de un objeto masivo. La representación alegórica del ‘grial’ de la física contemporánea: lograr la unificación de las interacciones fundamentales del universo a través de la cuantización de la gravedad.” (Propuesta para el logotipo de la SOBOFI.)

IMPRESO EN BOLIVIA - PRINTED IN BOLIVIA

## CONTENIDO

### A. ARTÍCULOS

SINCRONIZACIÓN Y TRANSIENTES EN CONFIGURACIONES UNIDIMENSIONALES DE OSCILADORES FOTOCONTROLADOS LOCALMENTE ACOPLADOS <i>G. M. Ramírez Ávila, J.-L. Guisset, J.-L. Deneubourg</i>	1
MONITOREO DE RADIATIVIDAD AMBIENTAL A GRAN ALTURA <i>Terrazas J. C., Velarde Chávez A., Saavedra San Martín O.</i>	8
UNA ADAPTACIÓN DEL MÉTODO DE RELAJACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE LAPLACE CON CONDICIONES DE CONTORNO ABIERTAS <i>Diego Sanjinés C.</i>	17
UN MODELO HIDRODINÁMICO AUTOSIMILAR PARA CURVAS DE ROTACIÓN GALÁCTICAS <i>Urzagasti D.</i>	25
CARACTERIZACIÓN DE MATERIAL MAGNÉTICO EN LAS PARTES DE LA ABEJA SIN AGUJÓN <i>S. QUADRIPUNCTATA</i> : UN ESTUDIO POR RESONANCIA FERROMAGNÉTICA Y MAGNETOMETRÍA SQUID <i>Marcelo J. Lucano</i>	33
LAS CARACTERÍSTICAS DEL VIENTO EN EL VALLE DEL RÍO DE LA PAZ EN EL PERIODO 2003-2004: PARTE I, DESCRIPCIÓN <i>R. Torrez, F. Ghezzi, E. Palenque</i>	38

### B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

ANÁLISIS DEL ALGORITMO CUÁNTICO DE FACTORIZACIÓN DE SHOR <i>C. L. Mayda, J. A. C. Nogales, G. M. Ramírez</i>	43
---	----

### C. MEMORIAS DE LA REUNIÓN ANUAL DE LA SOBOFI U OTRAS REUNIONES DE FÍSICA

XVII REUNIÓN NACIONAL DE LA SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA DEL 27 AL 29 DE OCTUBRE DE 2005 COCHABAMBA-BOLIVIA <i>SOBOFI</i>	53
--	----

## CONTENIDO

### D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

UNA DISCUSIÓN SOBRE LA CONFIABILIDAD DE LA TÉCNICA DE EXTRAPOLACIÓN DE LÍNEAS RECTAS DESDE EL PUNTO DE VIS- TA DE LA TEORÍA DE ERRORES	<i>Wilton Pereira da Silva et al.</i>	57
CALIBRACIÓN ESPECTRAL DE UN ESPECTROFOTÓMETRO	<i>A. Pecka V.</i>	63
11 <sup>ava</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA EXAMEN NACIONAL 8 <sup>vo</sup> DE PRIMARIA, 1 <sup>ro</sup> , 2 <sup>do</sup> , 3 <sup>ro</sup> Y 4 <sup>to</sup> DE SECUNDARIA 2006	<i>Bustos R. et al.</i>	66
1 <sup>ra</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA 7 Y 8 DE OCTUBRE DE 2006	<i>Bustos R. et al.</i>	97
NECESIDAD DE ENSEÑAR Y APRENDER CIENCIAS NATURALES Y LAS TENDENCIAS EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA	<i>René Gutiérrez Colque</i>	118
EL INGENIOMÁTICO: UNA FORMA DE UNIR TEORÍA Y PRÁCTI- CA PARA EL APRENDIZAJE DE LA FÍSICA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA	<i>Javier Saire Ibáñez</i>	120
SOL Y TEMPERATURA DESDE EL COLEGIO “FRANCISCANO”	<i>Wilson Fuentes M.</i>	125
COHETES IMPULSADOS POR PROPULSIÓN DE AGUA	<i>Roger Apaza Vásquez</i>	126

---

## REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

Ésta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

### COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física	Instituto de Investigaciones Físicas	Carrera de Física
<b>Dr. Diego Sanjinés Castedo</b> Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: sanjines@fiumsa.edu.bo Tel.: (591-2)2792999 Fax:(591-2)2792622	<b>Lic. Alfonso Velarde Chávez</b> Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: avelarde@fiumsa.edu.bo Tel.: (591-2)2792999 Fax:(591-2)2792622	<b>Lic. Deterlino Urzagasti</b> Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: urza@fiumsa.edu.bo Tel.: (591-2)2792999 Fax:(591-2)2792622

---

### CONSEJO EDITORIAL

<b>Dr. Ramiro de La Reza</b> Observatorio Nacional CNPq Rua General Bruce 586 20921-400 Rio de Janeiro-Brasil e-mail: delareza@danp6.on.br	<b>Dr. Paulo Murilo Castro de Oliveira</b> Instituto de Fisica Universidade Federal Fluminense C.P. 1002966, Niterói, RJ-Brasil e-mail: pmco@regulus.if.uff.br
<b>Dr. Juan C. Muzzio</b> Facultad de Ciencias Astrnómicas y Geofísicas Universidad Nacional de La Plata La Plata-Argentina e-mail: jmuzzio@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar	<b>Dr. Carlos Navia</b> Instituto de Física Universidad Federal Fluminense Av. Gen. Milton Tavares de Souza 24210-340, Niterói, RJ-Brasil e-mail: gfcnojj@portela.if.uff.br
<b>Dr. Oscar Antonio Rondón</b> Institute of Nuclear and Particle Physics University of Virginia McCormick Road, Charlottesville, VA 22901 804 924-6787, USA e-mail: or@virginia.edu	<b>Dr. Edison H. Shibuya</b> Instituto de Fisica Gleb Wataghin Universidade Estadual de Campinas C.P. 6165, 13.083-970 Campinas, SP-Brasil e-mail: shibuya@ifi.unicamp.br
<b>Dr. Oscar Saavedra</b> Dipartimento di Fisica Generale Universita di Torino, Italia e-mail: saavedra@to.infn.it	<b>Dr. Héctor Vucetich</b> Departamento de Física Fac. de Ciencias Exactas - Univ. Nac. de La Plata. C.C. N 67 - 1900 La Plata - Argentina e-mail: vucetich@venus.fisica.unlp.edu.ar
<b>Dr. Piero Galeotti</b> Dipartimento di Fisica Generale Universita di Torino, Italia e-mail: galeotti@to.infn.it	<b>Dr. Odivaldo C. Alves</b> CBPF Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 Rio de Janeiro, Brasil e-mail: cambraia@cbpf.br

---

---

# REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

## COMITÉ EDITORIAL

### Sociedad Boliviana de Física

**Dr. Diego Sanjinés Castedo**

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: sanjines@fiumsa.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax:(591-2)2792622

### Instituto de Investigaciones Físicas

**Lic. Alfonso Velarde Chávez**

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: avelarde@fiumsa.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax:(591-2)2792622

### Carrera de Física

**Lic. Deterlino Urzagasti**

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: urza@fiumsa.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax:(591-2)2792622

---

### Objetivos

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

La RBF publica artículos, revisiones y colaboraciones en lengua castellana. Se reciben también artículos escritos en inglés, los que son traducidos al castellano por los editores para su publicación.

### Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

### Instrucciones para los autores

Las colaboraciones enviadas para su publicación deberán estar escritas preferentemente en castellano. Trabajos escritos en inglés podrán ser aceptados por el Comité Editorial y, pasado el proceso de aceptación serán traducidos al castellano para su publicación en la RBF.

Los autores deberán enviar su contribución preferentemente en formato LATEX. Para ello necesitarán el formato de la RBF especificado en los archivos *rbfi.cls* y *rbfi.tex*, los cuales, podrán serles enviados por correo electrónico o podrán ser obtenidos de la página de *internet* de la Carrera de Física de la U.M.S.A. ([www.umsa.net.edu.bo/fisica/](http://www.umsa.net.edu.bo/fisica/)). En caso contrario, los autores podrán enviar su contribución en formato de texto (extensión *.txt*) ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. En cualquier caso, las figuras deberán ser enviadas preferentemente en formato *postscript* (extensiones *.ps* o *.eps*), o en su defecto en el formato con la extensión *.jpg*.

Las contribuciones, o cualquier consulta sobre la RBF, deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

# SINCRONIZACIÓN Y TRANSIENTES EN CONFIGURACIONES UNIDIMENSIONALES DE OSCILADORES FOTOCONTROLADOS LOCALMENTE ACOPLADOS

G. M. Ramírez Ávila<sup>1</sup>, J.-L. Guisset<sup>2</sup>, J.-L. Deneubourg<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés, Casilla 8635. La Paz, Bolivia*

<sup>2</sup>*Centre for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Universidad Libre de Bruxelles, CP231 Campus Plaine, Bld. du Triomphe 1050. Bruselas, Bélgica*

## RESUMEN

En el presente trabajo, se analizan diversas configuraciones unidimensionales de osciladores fotocontrolados localmente acoplados: con condiciones de borde libre (lineal) y condiciones de borde periódicas (anular). Para el análisis, se utilizó el modelo físico-matemático que se introdujo en [1], del cual se resolvieron numéricamente las ecuaciones diferenciales para diferentes situaciones: osciladores idénticos, no idénticos, e idénticos despreciando los efectos sobre la etapa de descarga de los osciladores (lo que los aproxima a los osciladores de integración y disparo). En cada uno de los casos se consideraron poblaciones de osciladores que van entre 2 y 25 y tomando en consideración una amplia variación en lo que respecta a los valores de acoplamiento. Para el análisis se han utilizado como criterios de sincronización el cumplimiento de enganche de períodos y de enganche de períodos y fases simultáneamente. Para cada uno de los casos, se identifican regiones de sincronización en el plano acoplamiento versus número de osciladores. Finalmente, se analizan los transientes para todos los casos estudiados.

## 1. INTRODUCCIÓN

Muchos trabajos han sido dedicados al estudio de diferentes tipos de osciladores localmente acoplados en configuraciones unidimensionales. Fenómenos tales como el enganche de fases [2][3], secuencias de osciladores con las mismas frecuencias [4], transiciones de fase [5], formación de patrones [6], ondas viajeras [7], y formación de cúmulos [8] (para una explicación detallada de formación de cúmulos en diferentes sistemas, véase [9]) son comunes en cadenas de osciladores; todos estos fenómenos están ligados a la sincronización, es decir, al ajuste de ritmos de objetos oscilantes debido a sus interacciones, que en general son débiles [10]. Los osciladores de integración y disparo han sido ampliamente utilizados para describir y modelar una gran variedad de fenómenos. tales como la sincronización en luciérnagas [11], la dinámica de neuronas [12] y las oscilaciones de las mismas [13]. Un oscilador de integración y disparo es un oscilador de relajación típico y está caracterizado por una variable de estado similar al voltaje  $V$ , la cual crece hasta alcanzar un umbral para luego “disparar” haciendo que  $V$  vuelva instantáneamente a su nivel de base. Recientemente, un nuevo tipo de oscilador que describe fenómenos de sincronización de una forma muy sencilla ha sido introducido [14][15][1] y se los ha denominado osciladores fotocontrolados, para los cuales se utiliza la abreviación LCO proveniente del inglés Light-Controlled Oscillator. La motivación original de este oscilador fue la de modelar la comunicación en algunos sistemas biológicos, tales como el de luciérnagas, pero se pudo verificar que este oscilador puede tener otro tipo de aplicaciones. Este trabajo es una extensión de re-

sultados previamente obtenidos para cadenas pequeñas de 2 y 3 LCOs. En el presente trabajo, se extiende el análisis a poblaciones más grandes de LCOs que van de 2 a 25 osciladores y en dos configuraciones parecidas. En este artículo, se estudia y caracteriza el comportamiento síncrono en configuraciones con condiciones de borde libres (lineal) y periódicas (anular) de LCOs (Fig. 1). En § 2 se describe el modelo y los criterios de sincronización. En § 3 se presentan los resultados. Finalmente, en § 4 se discuten los resultados, comparándolos con otros previamente publicados en los cuales se trabajaba con osciladores distintos a los LCOs.

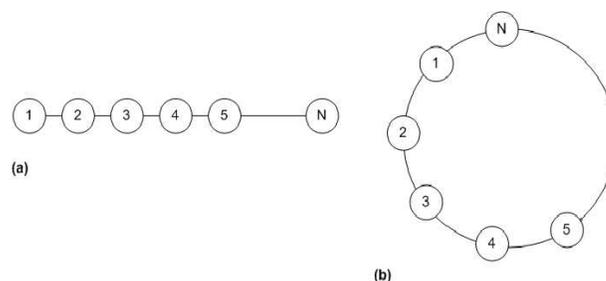


Figura 1. Configuraciones de osciladores localmente acoplados. (a) Lineal (condiciones de borde libres). (b) Anular (condiciones de borde periódicas).

## 2. EL MODELO

Como fue descrito en [14][15][1], un LCO es un oscilador electrónico de relajación en el sentido de que este posee dos escalas de tiempo, las cuales están asociadas

a ciclos en los que se tienen variaciones de voltaje lentas (etapa de carga) y variaciones de voltaje rápidas (etapa de descarga y en la cual el LCO emite un pulso luminoso). Cada LCO consiste de un chip LM555 conectado para funcionar en su modo oscilatorio astable. El inicio de las etapas de carga y descarga están determinados por dos umbrales bien definidos y situados a  $V_M/3$  y  $2V_M/3$  respectivamente; siendo  $V_M$  el voltaje de la fuente. El período de un LCO está relacionado con los valores de las resistencias ( $R_\lambda, R_\gamma$ ) y del condensador ( $C$ ) y está dado por  $T = T_\lambda + T_\gamma$ , donde  $T_\lambda = (R_\lambda + R_\gamma)C \ln 2 = \ln 2/\lambda$  es el intervalo de tiempo en el cual toma lugar la carga y  $T_\gamma = R_\gamma C \ln 2 = \ln 2/\gamma$  el correspondiente a la etapa de descarga. Un LCO está caracterizado por el voltaje de salida  $V(t)$  tomado en la pata 3 del chip LM555. Los LCOs pueden interactuar entre ellos por medio de pulsos luminosos, por lo que están equipados con fotosensores y LEDs que posibilitan el acoplamiento óptico. Los fotosensores actúan como fuentes de corriente cuando están recibiendo luz, haciendo que el tiempo de carga del condensador se acorte y/o haciendo que el tiempo de descarga del mismo se alargue (una descripción detallada del circuito y su funcionamiento se da en [14][15]).

Las ecuaciones que describen el modelo para  $N$  LCOs son:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda_i[(V_{Mi} - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma_i V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] + \sum_{i,j}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)], \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

donde  $\beta_{ij}$  es la intensidad de acoplamiento,  $\delta_{ij} = 1$  si los LCOs pueden interactuar y  $\delta_{ij} = 0$  en otro caso, y  $\epsilon_i(t)$  es el estado del oscilador que toma el valor 1 (etapa de carga) ó 0 (etapa de descarga);  $\epsilon_i(t)$  cambia su valor cuando se alcanza el umbral superior ( $2V_M/3$ ) o el umbral inferior ( $V_M/3$ ). Se debe mencionar que el modelo ha sido validado experimentalmente [1].

Utilizando (1), se pueden escribir las ecuaciones correspondientes a cada uno de los casos estudiados. En el caso de LCOs idénticos en una configuración lineal:

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = \lambda(V_M - V_1(t))\epsilon_1(t) - \gamma V_1(t)[1 - \epsilon_1(t)] + \beta[1 - \epsilon_2(t)], \quad (2)$$

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda(V_M - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] + \beta[2 - \epsilon_{i-1}(t) - \epsilon_{i+1}(t)], \quad 1 < i < N, \quad (3)$$

$$\frac{dV_N(t)}{dt} = \lambda(V_M - V_N(t))\epsilon_N(t) - \gamma V_N(t)[1 - \epsilon_N(t)] + \beta[1 - \epsilon_{N-1}(t)]. \quad (4)$$

Para LCOs idénticos en una configuración lineal y despreciando la influencia sobre la etapa de descarga, se tendrá que el acoplamiento  $\beta$  sólo puede actuar en el

término de carga. Como consecuencia de ello,  $\beta$  siempre estará ligado al término de carga y el tiempo del proceso de descarga (duración del pulso luminoso) será constante. Las ecuaciones en este caso están dadas por:

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = [\lambda(V_M - V_1(t)) + \beta(1 - \epsilon_2(t))]\epsilon_1(t) - \gamma V_1(t)[1 - \epsilon_1(t)], \quad (5)$$

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = [\lambda(V_M - V_i(t)) + \beta(2 - \epsilon_{i-1}(t) - \epsilon_{i+1}(t))]\epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)], \quad 1 < i < N, \quad (6)$$

$$\frac{dV_N(t)}{dt} = [\lambda(V_M - V_N(t)) + \beta(1 - \epsilon_{N-1}(t))]\epsilon_N(t) - \gamma V_N(t)[1 - \epsilon_N(t)]. \quad (7)$$

Para LCOs que no son idénticos y acoplados en una configuración lineal, la descripción se hace con (2)–(4), excepto por el hecho de que cada LCO tendrá un parámetro  $\lambda$  diferente. Para la configuración anular, las ecuaciones permanecen prácticamente inalteradas con la condición  $\epsilon_{N+1} = \epsilon_1$  debida a las condiciones de borde periódicas, lo que da:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda(V_M - V_i(t))\epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)] + \beta[2 - \epsilon_{i-1}(t) - \epsilon_{i+1}(t)], \quad i = 1, \dots, N, \quad (8)$$

para osciladores idénticos,

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = [\lambda(V_M - V_i(t)) + \beta(2 - \epsilon_{i-1}(t) - \epsilon_{i+1}(t))]\epsilon_i(t) - \gamma V_i(t)[1 - \epsilon_i(t)], \quad i = 1, \dots, N, \quad (9)$$

para osciladores idénticos en los que se desprecia las variaciones en la descarga. Finalmente, como en el caso de la configuración lineal, en el caso de osciladores no idénticos, el parámetro  $\lambda$  será diferente para cada oscilador.

### 2.1. Criterios de sincronización

Se utilizaron dos criterios para estudiar la sincronización, el primero considera eventos de encendido casi simultáneos con diferencias de fase constantes, en tanto que el segundo, considera la igualdad de períodos como criterio para la sincronización. El criterio de la diferencia de fases (CDF) es bastante fuerte, en el sentido que sólo se consideran como sincronizados a aquellos LCOs que están emitiendo sus pulsos luminosos casi simultáneamente y que mantienen sus diferencias de fase constantes, mientras que en el criterio del período (CP), la simultaneidad de los eventos de encendido no es estrictamente necesaria.

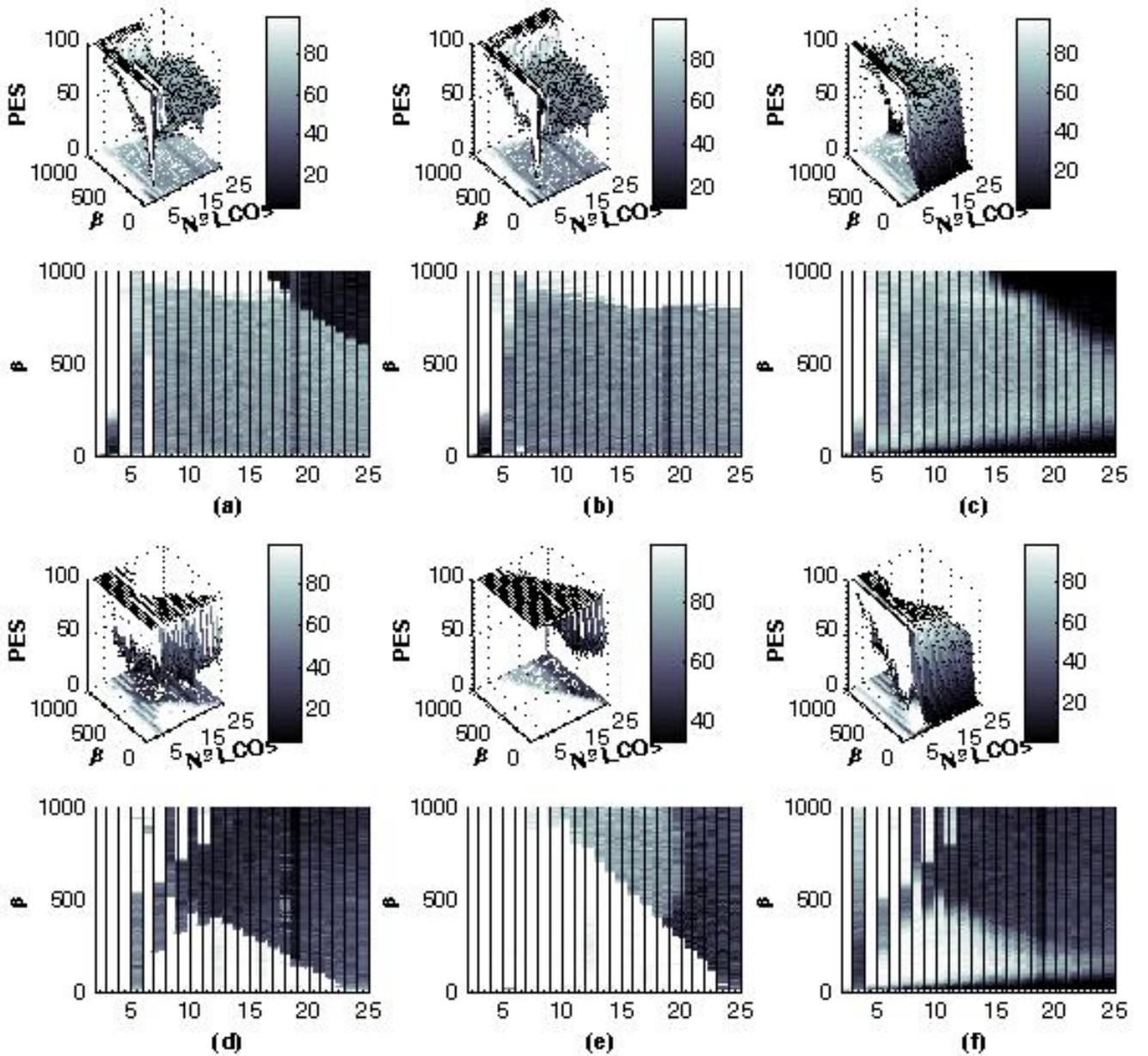


Figura 2. Criterio de la diferencia de fase para la sincronización en una configuración lineal (primera fila) y en una configuración anular (segunda fila) para LCOs idénticos (a) y (d), LCOs idénticos LCOs despreciando los cambios en la etapa de descarga (b) y (e), y para LCOs no idénticos (c) y (f). La escala de colores representa el porcentaje de eventos sincronizados.

### 3. RESULTADOS

Utilizando observaciones experimentales y numéricas, se mostró en [1] una fuerte dependencia a las condiciones iniciales incluso para sistemas compuestos sólo por 2 LCOs. Se resolvieron numéricamente las ecuaciones para cadenas de 2 a 25 LCOs, variando el acoplamiento desde  $\beta = 10$  hasta  $\beta = 1000$  en pasos de  $\Delta\beta = 10$  y realizando 100 simulaciones para cada caso con el fin de obtener una buena estadística. Se utilizaron los siguientes valores de parámetros:  $R_\lambda = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_\gamma = 1,6 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 0,47 \text{ }\mu\text{F}$ . Cuando los LCOs no son idénticos,  $\lambda_i = 1/(R_\lambda + \xi_i + R_\gamma)C$ , donde  $\xi_i$  es un número aleatorio que sigue una distribución Gaussiana con

media igual a cero y varianza igual a  $10^4 \Omega$ . Para el caso en el que la sincronización no es alcanzada, se observa un mínimo de 7500 eventos de encendido.

Para visualizar el comportamiento sincrónico de los LCOs utilizando ambos criterios, se construyeron las figuras 2 y 3 las cuales muestran la proyección sobre el plano número de osciladores ( $N$ )-acoplamiento ( $\beta$ ), con el porcentaje de eventos sincronizados (PES) representado por la escala de colores.

Se encuentra que las superficies generadas por los criterios anteriores y configuraciones, no están correlacionadas de manera simple. Para determinar cuál de las configuraciones maximiza el PES, se obtiene el valor me-

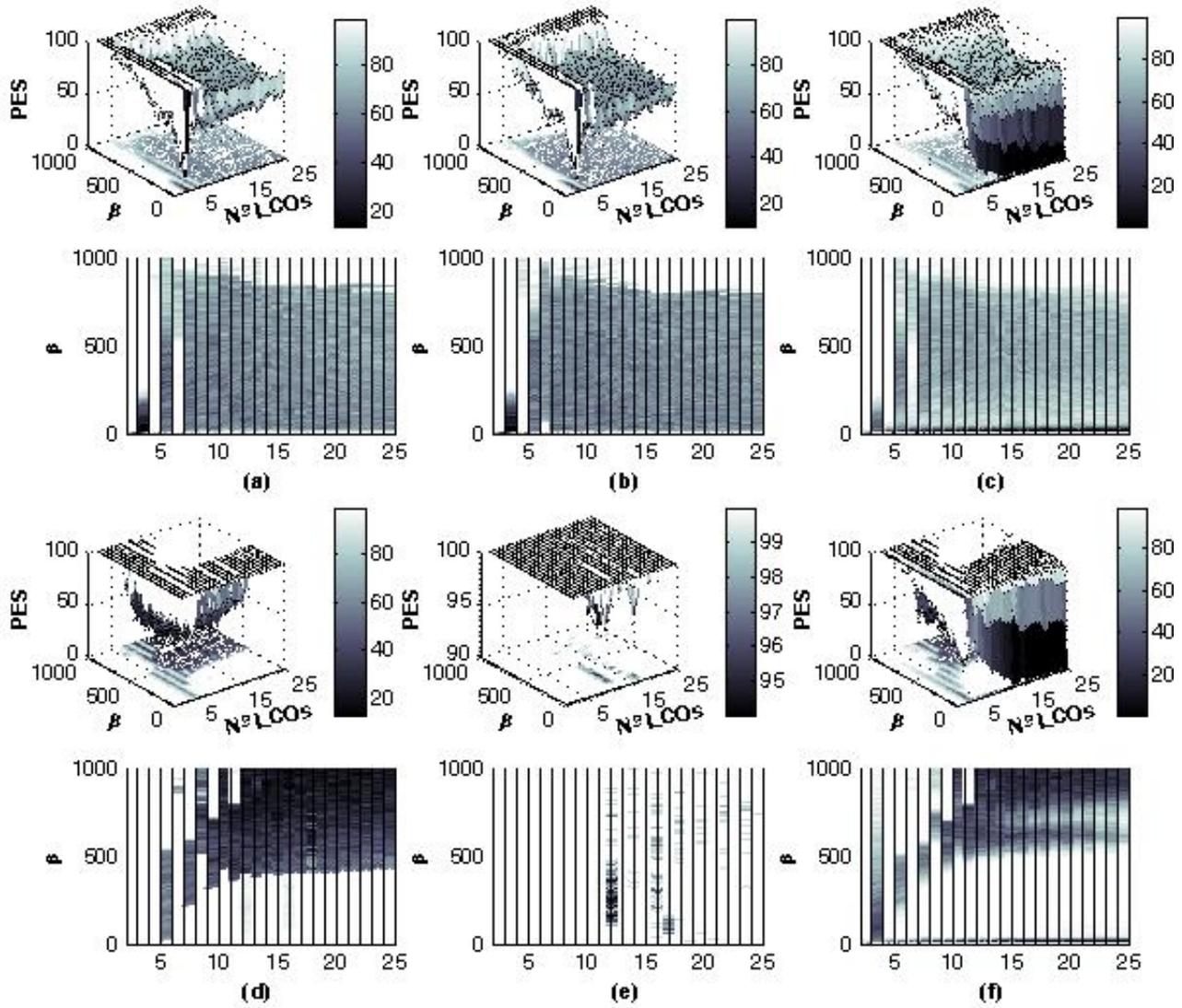


Figura 3. Idem que en la figura 2 pero utilizando el criterio del período para la sincronización.

dio según:

$$\langle PES \rangle = \frac{1}{N_{\max} - N_{\min} + 1} \frac{\Delta\beta}{\beta_{\max} - \beta_{\min} + 1} \times \sum_{i=N_{\min}}^{N_{\max}} \sum_{j=\beta_{\min}/\Delta\beta}^{\beta_{\max}/\Delta\beta} PES_{ij}, \quad (10)$$

donde, en nuestro caso,  $N_{\max} = 25$ ,  $N_{\min} = 2$ ,  $\beta_{\max} = 1000$ ,  $\beta_{\min} = 10$ , y como se especificó anteriormente,  $\Delta\beta = 10$ . Considerando que la desviación estándar  $\sigma_i$ ,  $i = N_{\min} \dots N_{\max}$ , constituye la incertidumbre cuando se calcula el valor medio del PES para cada configuración con un número de LCOs dado, en consecuencia, se puede estimar la incertidumbre total para el PES (para todo  $N$  y para todo  $\beta$ ), utilizando:

$$E_{PES} = \sqrt{\sum_{i=N_{\min}}^{N_{\max}} \sigma_i^2}. \quad (11)$$

Los valores y sus respectivas incertidumbres, se muestran en la Tab. 3).

Utilizando el CP, los valores del PES son mayores que utilizando el CDF, puesto que como se señaló anteriormente, este último es un criterio más fuerte. A partir de los resultados que se muestran en la Tab. 3 se constata que considerando LCOs idénticos en configuración anular para los cuales se desprecia la acción sobre la descarga, el PES es mayor que en los otros casos, tanto para el CDF como para el CP. Esto no es sorprendente ya que el hecho de despreciar los efectos sobre la descarga, hace que los LCOs se aproximen a los osciladores de integración y disparo para los cuales la sincronización total es prácticamente siempre alcanzada [11], es decir, 100% en términos del PES. Por otro lado, si se comparan las situaciones para LCOs idénticos y no idénticos, se observa que utilizando el CDF, el valor del PES es ligeramente mayor para LCOs idénticos que utilizando el CP; al contrario, utilizando el CP el resultado se invierte y los

TABLA 1

Valores promedio e incertidumbres de los PES, utilizando todos los valores de  $N$  y  $\beta$  para los LCOs acoplados en configuraciones lineal y anular y usando como criterio de sincronización la constancia y limitación de las diferencias de fase y la igualdad de períodos respectivamente.

Configuración	Criterio de sincronización	
	Diferencia de fase	Período
<b>Lineal</b>		
LCOs idénticos	$66,28 \pm 3,51$	$73,55 \pm 2,68$
LCOs idénticos despreciando la acción sobre la descarga	$70,33 \pm 3,15$	$71,14 \pm 3,08$
LCOs no idénticos	$61,50 \pm 4,25$	$77,81 \pm 2,93$
<b>Anular</b>		
LCOs idénticos	$58,21 \pm 5,28$	$69,32 \pm 6,08$
LCOs idénticos despreciando la acción sobre la descarga	$85,38 \pm 2,19$	$99,88 \pm 0,10$
LCOs no idénticos	$52,70 \pm 4,41$	$77,75 \pm 5,56$

valores del PES es ligeramente mayor en el caso de LCOs no idénticos. Esto podría significar que para LCOs no idénticos acoplados, estos sincronizan formando cúmulos con períodos iguales pero con tiempos de encendido diferentes.

El tiempo de sincronización en sistemas de mapas acoplados [16][17] y de osciladores [18][19][20] fue estudiado aunque sin llegar a resultados analíticos contundentes [21]. En los trabajos anteriormente citados, parece haber una ley de escala en el tiempo en el cual el sistema llega a sincronizar. En cuanto a los tiempos de sincronización o transientes en nuestros LCOs, se estudiaron los mismos para ambas configuraciones considerando un valor de  $\beta = 166$  para la intensidad de acoplamiento y además la situación de osciladores idénticos. Los resultados se pueden expresar por medio de la Fig. 4, en la cual se observa que una fuerte dependencia del tiempo de sincronización con el número de LCOs. Para la configuración lineal y con 3 LCOs (la situación más asimétrica), se ve que el tiempo de sincronización aumenta abruptamente así como el error correspondiente. Se puede ver también que para 13 LCOs, el transiente toma menos tiempo que en los casos con número de LCOs menor; además, parece haber una escala diferente Fig. 4(c) para configuraciones en las que el número de LCOs es primo (13,17,19 y 23 en este caso)

donde se puede destacar que también parece haber una influencia dada por la paridad o no en el número de LCOs.

#### 4. DISCUSIÓN

Nuestros resultados muestran que no hay un comportamiento exactamente predecible. Esto podría estar relacionado con el hecho de que los LCOs son sensibles a las condiciones iniciales, como se ha demostrado para 2 y 3 LCOs [1]. Por lo que, cuanto mayor sea la población, más difícil es predecir el comportamiento del sistema. Sin embargo, las simulaciones permiten identificar regiones en las cuales es más probable de observar sin-

cronización total. Los resultados muestran además que en una cadena lineal, la sincronización es común para cantidades pequeñas de LCOs, pero para 3 y 5 LCOs el PES cae drásticamente; Para más de 6 LCOs, el PES es de alrededor de 70% en una amplia región de valores de acoplamiento. Despreciando la acción sobre la descarga, para LCOs idénticos acoplados en una configuración lineal, ambos criterios de sincronización dan resultados casi idénticos. La diferencia con respecto al caso del modelo completo es que para acoplamientos fuertes, el PES alcanza valores cercanos al 100% usando el modelo simplificado, una situación que no se presenta en el modelo completo donde utilizando el criterio de la diferencia de fase como criterio de sincronización, el PES disminuye notoriamente para acoplamientos fuertes. En el caso de cadenas lineales de LCOs no idénticos, dependiendo del criterio de sincronización utilizado, el plano  $\beta$  vs.  $N$  muestra regiones que difieren considerablemente del caso de LCOs idénticos. Por ejemplo, en el caso de acoplamientos débiles, un dominio con PESs bajos aparece utilizando el CDF; sin embargo, en el resto de este plano, el PES es un poco mayor. Para cadenas anulares y para acoplamientos débiles, ambos criterios muestran PESs cercanos al 100% lo que no parece depender del número de LCOs; aunque, para 5 LCOs este no es el caso y esto puede estar relacionado con los resultados hallados para 5 osciladores en cadenas de osciladores multi-acoplados [3], donde los osciladores de los extremos se “deslizan” y no son capaces de enganchar sus fases con los osciladores del interior de la cadena. Para la llamada configuración de “doble anillo” descrita en [22] (una cadena anular en nuestro caso) con osciladores no idénticos, estos autores encontraron que un estado síncrono colapsa para una geometría de 13 osciladores, teniendo como consecuencia que la sincronización para  $N$  grande no puede subsistir pero produce una forma de sincronización débil en la cadena, es decir, grupos de osciladores vecinos que oscilan con la misma frecuencia en promedio pero no necesariamente con una relación de fases bien establecida. Se

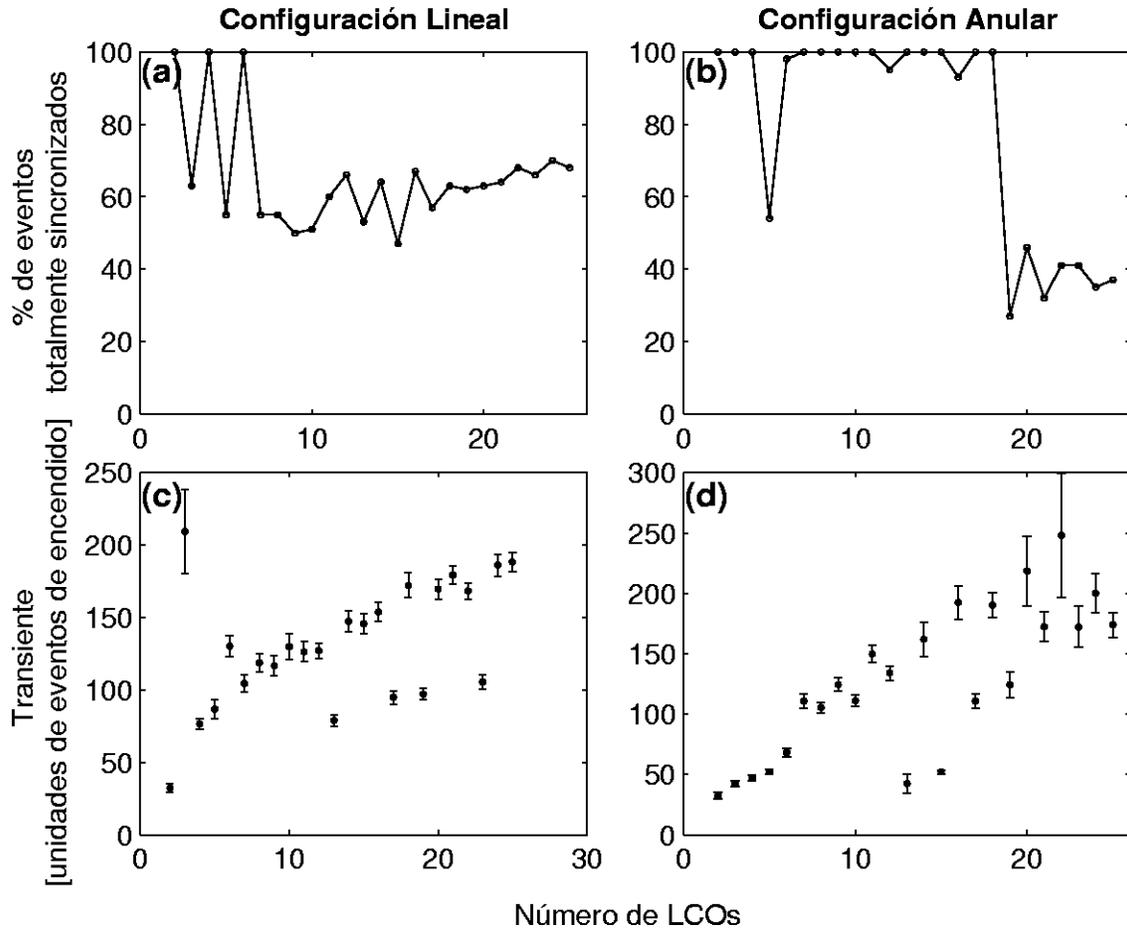


Figura 4. Porcentaje de eventos sincronizados para las configuraciones lineal (a) y anular (b). Transientes en unidades de eventos de encendido para las configuraciones lineal (c) y anular (d). Estas magnitudes se expresan en función del número de osciladores, siendo que ellos están acoplados con una intensidad  $\beta = 166$ .

obtuvo un resultado similar al de [22] pero para ambos casos, a saber, LCOs idénticos y no idénticos en una configuración anular para una amplia región de valores de acoplamiento. Además, estos resultados confirman lo correcto de ambos criterios de sincronización. Para LCOs idénticos acoplados en una cadena anular y despreciando la influencia sobre la etapa de descarga, se tiene que el PES es prácticamente de 100 % en todos los casos tal como en los resultados hallados por diferentes autores (ver por ejemplo [23][24]). Ellos aseguran que para redes uni y bidimensionales de osciladores de integración y disparo, siempre habrá sincronización aún cuando esta pueda tomar un tiempo muy largo en producirse. De acuerdo con [24], el tiempo de sincronización es de alrededor 100 períodos para una red de  $40 \times 40$  o que el tiempo promedio de sincronización aumenta logarítmicamente con el tamaño del sistema [23]. Está claro que despreciar los efectos sobre la descarga constituye una aproximación a los osciladores de integración y disparo. En este trabajo, se encontró que en promedio, la situación de LCOs no idénticos muestra valores mayores del PES que para el caso de LCOs idénticos cuando se utiliza el criterio del período, por esto, un estudio más profundo de situacio-

nes con osciladores no idénticos podría ser importante para confirmar esta diferencia. Nuestra hipótesis es que esto debería ser confirmado, puesto que los sistemas reales que alcanzan sincronización robusta, están compuestos de osciladores no idénticos y las pequeñas diferencias deberían facilitar la sincronización como se observa en la naturaleza [25]. Finalmente, en lo concerniente a los tiempos de sincronización, los resultados muestran que estos tiempos aumentan con el número de osciladores y dependen también de la configuración que tiene el sistema.

#### AGRADECIMIENTOS

Se agradece a los organizadores de la International Conference on Control and Synchronization of Dynamical Systems, en particular al Prof. Alexander Pisarchik por el apoyo dado para que parte de estos resultados puedan ser comunicados en dicha conferencia que se llevó a cabo en León, México del 4 al 7 de octubre de 2005.

## REFERENCIAS

- [1] Ramírez Ávila, G. M., Guisset, J. L. & Deneubourg, J. L., “Synchronization in light-controlled oscillators”, *Physica D*, 182, 3-4, 254-273, 2003
- [2] Strogatz, Steven H. & Mirollo, Renato E., “Phase-locking and critical phenomena in lattices of coupled nonlinear oscillators with random intrinsic frequencies”, *Physica D*, 31, 2, 143-168, 1988
- [3] Ren, Liwei & Ermentrout, Bard, “Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators”, *Physica D*, 143, 1-4, 56-73, 2000
- [4] Ermentrout, G.B. & Kopell, N., “Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillators. I”, *SIAM J. Math. An.*, 15, 2, 215-237, 1984
- [5] Kopell, N. & Ermentrout, B., “Phase Transitions and Other Phenomena in Chains of Coupled Oscillators”, *SIAM J. App. Math.*, 50, 4, 1014-1052, 1990
- [6] Gavrielides, A., Kottos, T., Kovanis, V. & Tsironis, G.P., “Spatiotemporal organization of coupled nonlinear pendula through impurities”, *Phys. Rev. E*, 58, 5, 5529-5534, 1998
- [7] Bressloff, P. C. & Coombes, S., “Travelling waves in chains of pulse-coupled integrate-and-fire oscillators with distributed delays”, *Physica D*, 130, 3-4, 232-254, 1999
- [8] Osipov, G. V., Pikovsky, A. S., Rosenblum, M. G. & Kurths, J., “Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators”, *Phys. Rev. E*, 55, 33, 2353-2361, 1997
- [9] Manrubia, S. C., Mikhailov, A. S. & Zanette, D. H., “Emergence of dynamical order”, *World Scientific lecture notes in complex systems*, 2. Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004
- [10] Pikovsky, Arkady, Rosenblum, Michael & Kurths, J., “Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences”, *Cambridge nonlinear science series*, 12. New York, Cambridge University Press, 2001
- [11] Mirollo, Renato E. & Strogatz, Steven H., “Synchronization of Pulse-Coupled Biological Oscillators”, *SIAM J. App. Math.*, 50, 6, 1645-1662, 1990
- [12] Bressloff, P.C. & Coombes, S., “Dynamics of strongly coupled spiking neurons”, *Neural Comput.*, 12, 1, 91-129, 2000
- [13] Ermentrout, G.B. & Chow, C.C., “Modelling neural oscillations”, *Physiol. & Behav.*, 77, no 4-5, pp. 629-633, 2002
- [14] Guisset, J. L., Ramírez Ávila, G. M. & Deneubourg, J. L., “Constructing coupled electronic fireflies and measuring their phase-locking behavior (in Spanish)”, *Rev. Bol. Fis.*, 1, 7, 102-114, 2001
- [15] Guisset, Jean-Luc, Deneubourg, Jean-Louis & Ramírez-Ávila, Gonzalo Marcelo, “The Phase Information Associated to Synchronized Electronic Fireflies”, *arXiv.nlin.AO/0206036*, Mon, 24 Jun 2002 16:07:15 GMT, 2002
- [16] Politi, A., Livi, R., Oppo, G.-L. & Kapral, R., “Unpredictable behaviour in stable systems”, *Europhys. Lett.*, 22, 571, 1993
- [17] Pinto, Sandro E. de Souza, Lunardi, Jose T., Saleh, Abdala M. & Batista, Antonio M., “Some aspects of the synchronization in coupled maps”, *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 72, 3, 037206-4, 2005
- [18] Goldsztein, G. & Strogatz, S. H., “Stability of synchronization in networks of digital phase-locked loops”, *Int. J. Bif. & Chaos*, 5, 4, 983-990, 1995
- [19] Díaz-Guilera, A. & Pérez, C. J., “Mechanisms of synchronization and pattern formation in a lattice of pulse-coupled oscillators”, *Phys. Rev. E*, 57, 4, 3820-3828, 1998
- [20] Guardiola, X., Díaz-Guilera, A., Llas, M. & Pérez, C. J., “Synchronization, diversity, and topology of networks of integrate and fire oscillators”, *Phys. Rev. E*, 62, 4, 5565-5570, 2000
- [21] Sanders, D., “Synchronization time in coupled map lattices (personal communication)”, May 2002, 2002
- [22] De Sousa Vieira, M., Lichtenberg, A.J. & Lieberman, M.A., “Self-synchronization of many coupled oscillators”, *Int. J. Bif. & Chaos*, 4, 6, 1563-1577, 1994
- [23] Hopfield, J.J. & Herz, A.V., “Rapid local synchronization of action potentials: toward computation with coupled integrate-and-fire neurons”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 92, no. 15, pp. 6655-6662, 1995
- [24] Campbell, Shannon R., Wang, DeLiang L. & Jayaprakash, Ciriyaam, “Synchrony and Desynchrony in Integrate-and-Fire Oscillators”, *Neural Comput.*, 11, 7, 1595-1619, 1999
- [25] Camazine, Scott, Deneubourg, Jean-Louis, Franks, Nigel R., Sneyd, James, Theraulaz, Guy & Bonabeau, Eric, “Self-Organization in Biological Systems”, *Princeton University Press, Princeton, Princeton Studies in complexity*, 2001

## MONITOREO DE RADIATIVIDAD AMBIENTAL A GRAN ALTURA

Juan Carlos Terrazas<sup>1</sup>, Alfonso Velarde Chávez<sup>2</sup>, Oscar Saavedra San Martín<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Física  
Universidad Mayor de San Simón  
Cochabamba, Bolivia*

<sup>2</sup>*Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
La Paz, Bolivia*

<sup>3</sup>*Istituto di Fisica Generale  
Università di Torino  
Torino, Italia*

### RESUMEN

Durante el verano de 2003 (febrero-marzo) en el Laboratorio de Física Cósmica del monte Chacaltaya (5200 m.s.n.m), La Paz – Bolivia, se realizó el monitoreo de la radiactividad ambiental atmosférica y su relación con las variables meteorológicas: precipitación pluvial y viento. Se logró establecer una relación funcional de la radiactividad atmosférica respecto a la precipitación pluvial de la forma:

$$y = A - Be^{-Cx}$$

Se observa también la variación diurna de la radiactividad atmosférica coincidente con la variación diurna de la velocidad del viento.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los elementos radiactivos naturales se encuentran distribuidos en forma bastante uniforme en las rocas y suelos de la corteza terrestre, la que está constituida principalmente por basalto y granito. La mayor parte de esta radiactividad proviene de las series radiactivas naturales, siendo la más importante la serie de Uranio  $4n+2$ ; en la que los isótopos del Radón, que son gaseosos, se difunden en la atmósfera en forma de aerosoles.

El Uranio es mucho más abundante en la naturaleza que otros elementos comunes; se encuentra en una proporción 40 veces mayor que la Plata y 800 veces mayor que el Oro. En la corteza terrestre, los granitos contienen una concentración de Uranio que varía de 2 a 6 partes por millón aproximadamente y una concentración de Torio de tres a cinco veces mayor. Existen regiones que, por distintas causas geológicas y geoquímicas, constituyen yacimientos de minerales radiactivos en los que las concentraciones de los elementos radiactivos Uranio y Torio, son extraordinariamente altas.

Los elementos radiactivos que se encuentran en la atmósfera se originan en la corteza terrestre y en el espacio exterior. Aquellos que provienen de la corteza terrestre son básicamente los isótopos del Radón.

Además del Radón que emana continuamente de la superficie terrestre, existen fenómenos como las erupciones volcánicas que pueden inyectar en la atmósfera grandes cantidades de gases radiactivos, provenientes del magma. Los gases se incorporan a la atmósfera y se dispersan en mayor o menor grado dependiendo de las condiciones meteorológicas imperantes. Al difundirse en el

aire el material radiactivo se fisiona y origina una serie de descendientes, en muchas ocasiones también radiactivos, que se fijan en partículas suspendidas en la atmósfera.

El gas Radón es producto del decaimiento del Radio; se mantiene en suspensión en la atmósfera, decae naturalmente dando origen a una serie de otros elementos radiactivos. Los rayos gamma provenientes del decaimiento  $\beta^-$  del  ${}_{83}^{214}\text{Bi} \rightarrow {}_{84}^{214}\text{Po}$ , son los más importantes para ser detectados con técnicas de espectrometría gamma usando, por ejemplo, un monocristal de NaI.

El gas Radón decae en la cadena de isótopos:  ${}^{214}\text{Pb}$ ,  ${}^{214}\text{Bi}$ ,  ${}^{208}\text{Tl}$ . [Refs. (3), (4)]

El presente estudio centra su atención en la variación de la *emisión radiactiva de los hijos del Radón en eventos de precipitaciones pluviales: lluvias y nevadas*.

Diversos estudios realizados con anterioridad en otros lugares nos proporcionan datos sobre la correlación radiactividad - precipitación pluvial. [Ref.(5) a (11)].

Lo particular del presente estudio es la altura a la que se realiza: 5200m.s.n.m., convirtiéndolo en el sondeo ejecutado a mayor altura en el planeta. En el Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya se hicieron también medidas de radioactividad ambiental en los años 1957-1962 pero la técnica era pasiva y no por medios espectrométricos (Ref. Resumen de Labores 1957-1961, Lab. de Chacaltaya)

Para esta investigación se ha usado un monocristal de NaI y, al mismo tiempo, se instaló una estación meteorológica portátil cerca del detector, para poder establecer la correlación entre los datos de la estación y del detector de NaI.

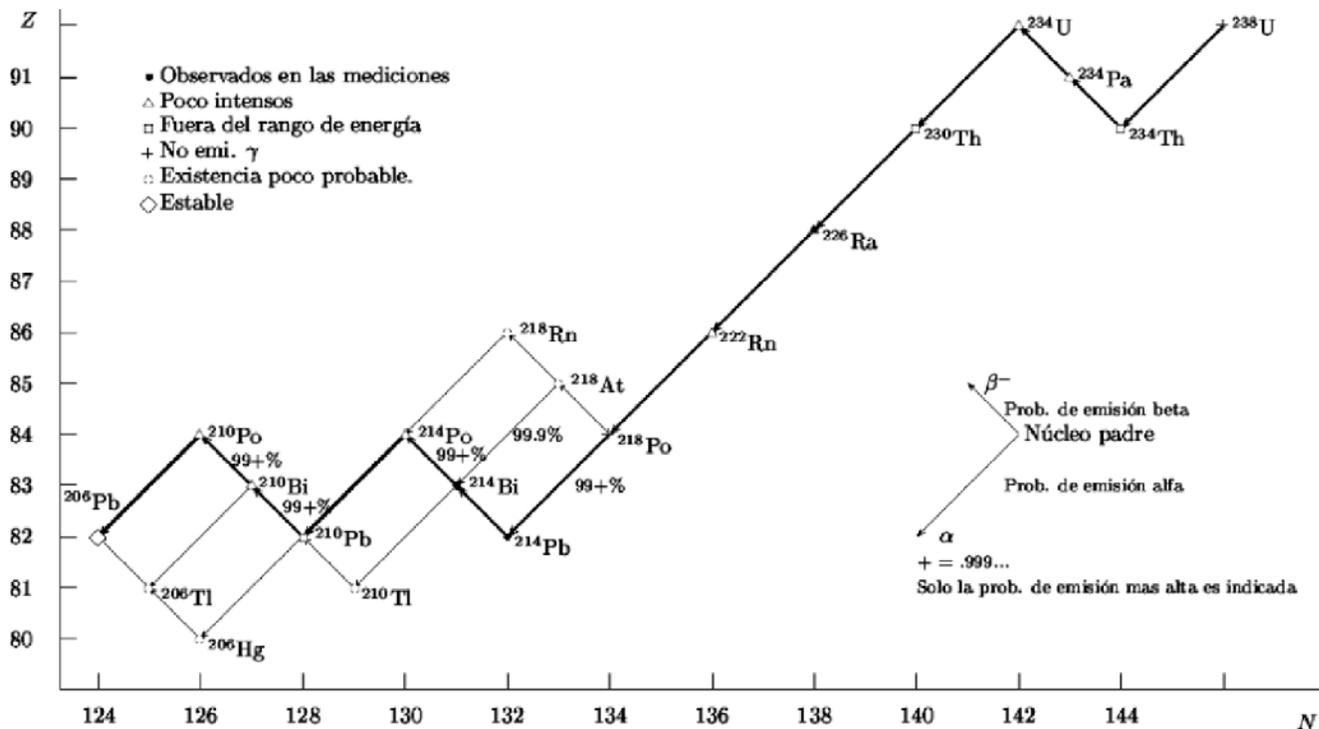


Figura 1. Serie radiactiva de Uranio 4n+2.

2. SERIE RADIATIVA NATURAL

Existen tres largas cadenas o series radiactivas que se extienden a lo largo de la última parte del Sistema Periódico y que se denominan, respectivamente, del Uranio, del Actinio y del Torio, según el elemento que se encuentre a su cabeza. En la serie del uranio el número de masa de cada componente puede expresarse en la forma  $4n + 2$ , donde  $n$  es un entero. En las del Actinio y el Torio el número de masa viene dado por las expresiones  $4n + 3$  y  $4n$ , respectivamente. [Ref. (1)]

En la Fig 1, se muestra la serie radiactiva del Uranio.

3. DECAIMIENTO DEL  $^{214}_{83}\text{Bi} \rightarrow ^{214}_{84}\text{Po}$

Por sucesivas emisiones alfa, el Radio decae hasta el  $^{214}\text{Pb}$ . Éste, por emisión de  $\beta^-$ , decae en  $^{214}\text{Bi}$  que, a su vez, decae, también por emisión  $\beta^-$ , en  $^{214}\text{Po}$ .

Los niveles de energía de este decaimiento son: 609, 768, 934, 1051, 1120, 1764, 2118, 2204, KeV. [Ref. (1)]

4. DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO UTILIZADO

Se utiliza un detector con un monocristal de NaI(Tl) de 20 cm de diámetro y 10 cm de espesor. El detector (monocristal más fotomultiplicador) se colocó dentro de un contenedor de aislamiento térmico de forma piramidal (Fig. 2), debido a que el NaI(Tl) es sensible a las variaciones de temperatura.

El detector estuvo a la intemperie, sobre el techo. Las temperaturas típicas diarias en Chacaltaya para esta época del año (feb.-mar.) que corresponde al verano, varían entre  $-1^\circ\text{C}$  y  $3^\circ\text{C}$ , es decir, son bastante estables. Sin embargo, pese al aislamiento térmico del detector se

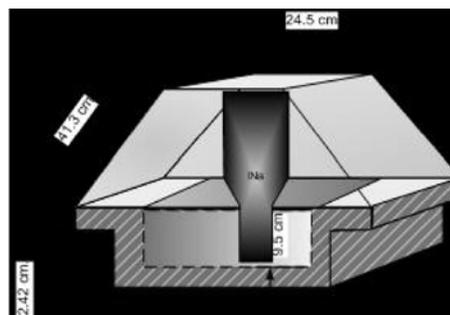


Figura 2. Blindaje térmico utilizado para el NaI(Tl).



Figura 3. Estación Meteorológica.

observaron variaciones en la posición de los picos del espectro de radiactividad ambiental debidos a variaciones de la temperatura. Se utilizaron los picos del  $^{40}\text{K}$  (1461 KeV) y  $^{208}\text{Tl}$  (2614 KeV) para recalibrar los espectros.

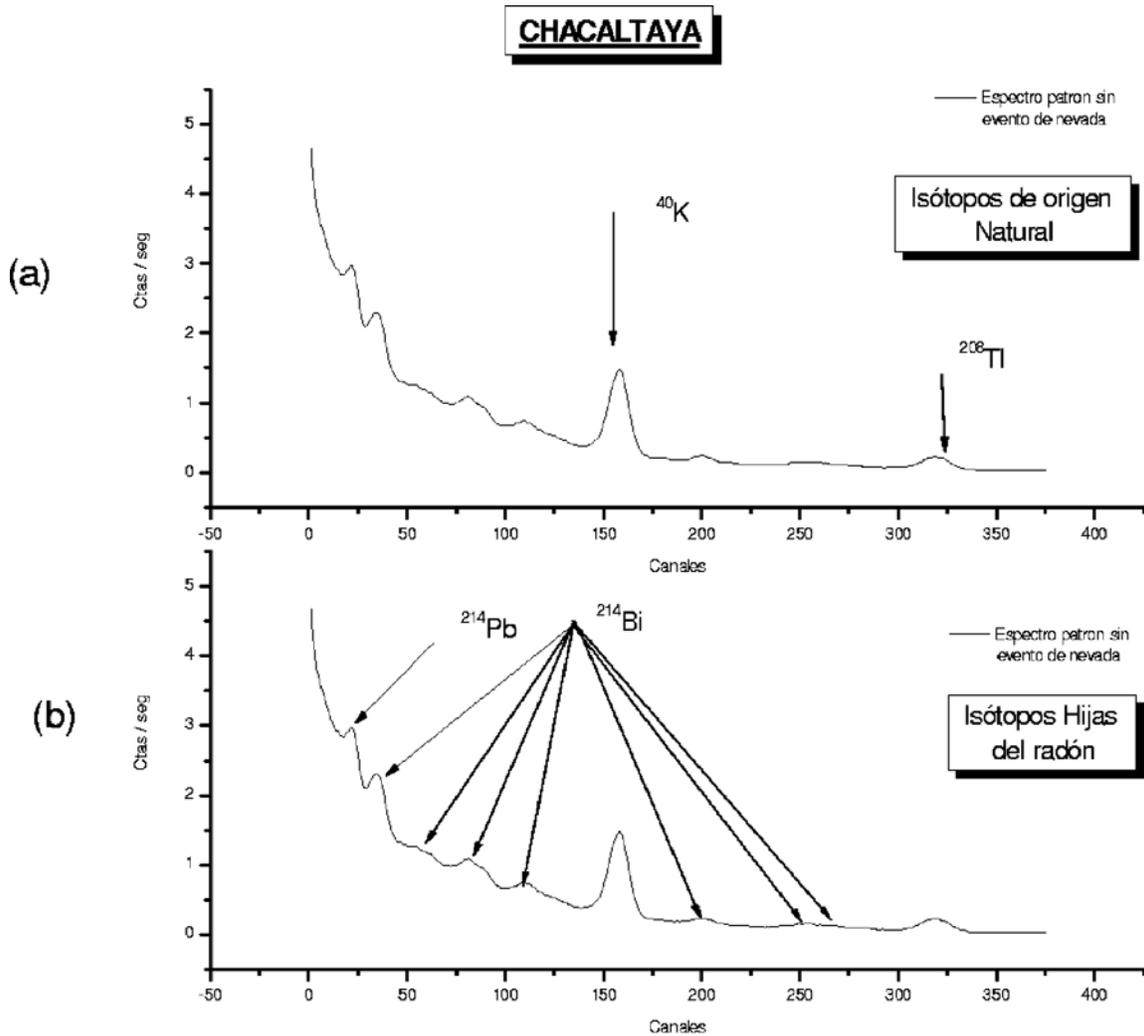


Figura 4. (a) Isótopos  $^{40}\text{K}$  y  $^{208}\text{Tl}$ ; (b) Isótopos hijos del Radón.

La señal del PM es enviada a un Analizador Multicanal (AMC) mediante un amplificador inversor lineal. El AMC recibe señales unipolares positivas, tiene una amplitud variable de 20mV a 8V distribuidos linealmente en 4.096 canales. Todos los espectros se normalizaron al segundo dividiendo por el tiempo vivo de recolección en el AMC.

También se utilizó una estación meteorológica que incluye recolector de lluvia, sensores de temperatura y humedad, anemómetro, sensor de radiación solar y UV. (Ref. Davis Instruments, www.davisnet.com) con consola "Vantage Pro" capaz de almacenar toda la información meteorológica de los sensores (series temporales) y recuperarlos en la computadora mediante el programa "WEATHERLINK".

La distancia entre el detector y la estación meteorológica fue de 20m.

Se registraron datos de las variables climáticas cada minuto.

## 5. ESPECTRO PATRÓN

La campaña de monitoreo se realizó durante los meses de febrero y marzo de 2003 en el laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya (5200 m.s.n.m.)

En la Fig.4 se muestra el espectro patrón determinado para Chacaltaya, normalizado al segundo.

En la Fig. 4(a) se puede apreciar de manera muy clara la presencia de los isótopos  $^{40}\text{K}$  (1461 KeV) y  $^{208}\text{Tl}$ . (2615 KeV)

En la Fig.4(b) se muestran los picos correspondientes al decaimiento del  $^{222}\text{Rn}$ , se identifica un decaimiento del Plomo  $^{214}\text{Pb}$  con una energía de 480 KeV y varios del Bismuto  $^{214}\text{Bi}$  con energías de 609,768, 934, 1120, 1764 y 2118 KeV.

## 6. EFECTOS DE LA PRECIPITACIÓN PLUVIAL SOBRE LA RADIATIVIDAD AMBIENTAL

A continuación mostramos los eventos de lluvia o nevada registrados durante los meses de febrero y marzo de 2003.

Las Figs. 5(a) y (b) muestran el incremento de la radiactividad atmosférica en correlación a la lluvia y ta-

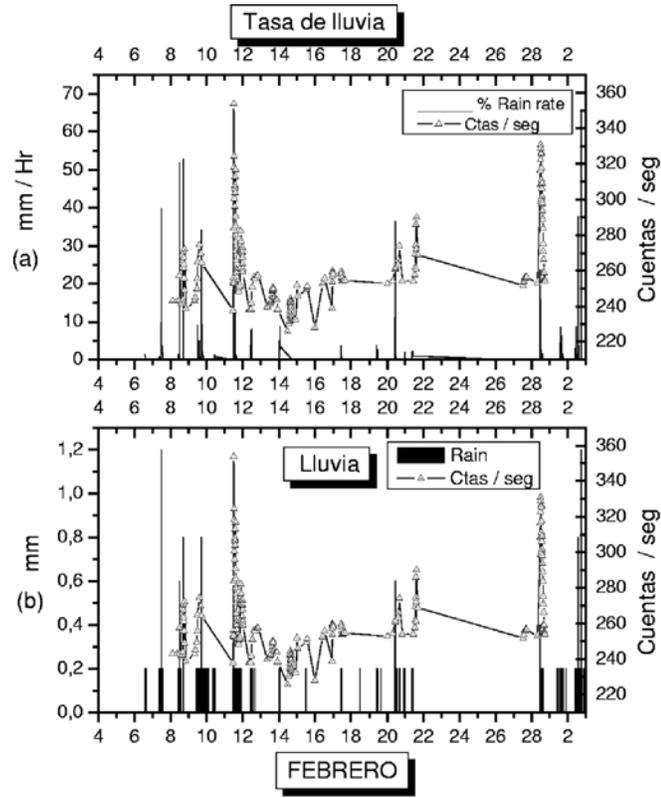


Figura 5. Radiactividad ambiental correlacionada con (a) tasa de lluvia, (b) lluvia.

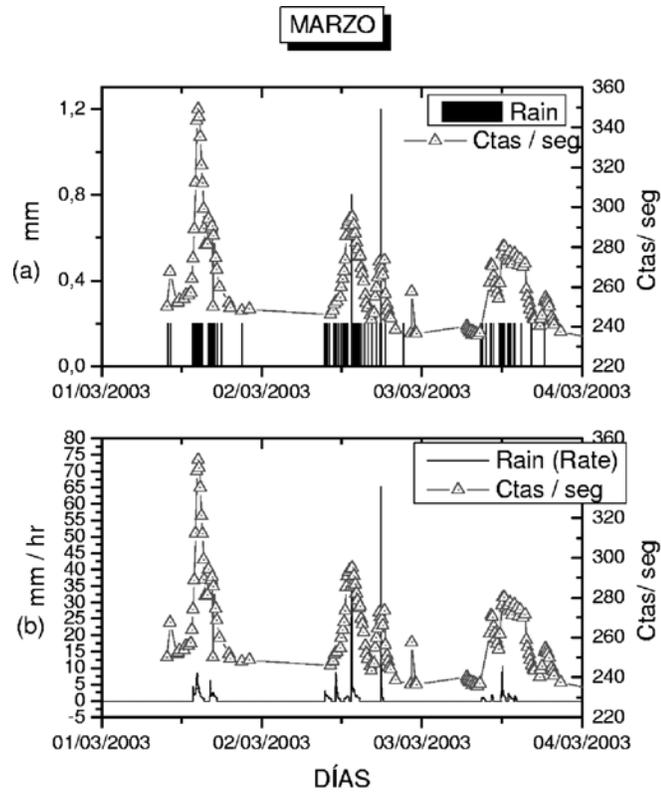


Figura 6. Radiactividad ambiental correlacionada con (a) lluvia, (b) tasa de lluvia.

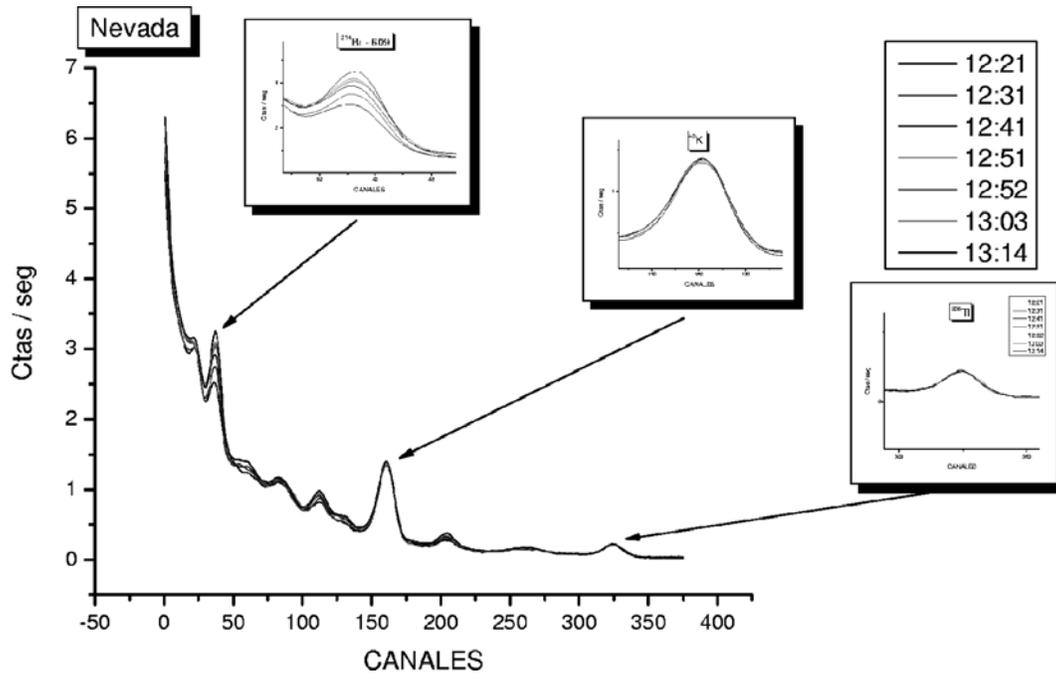


Figura 7. Durante una nevada fotopicos naturales de  $^{40}\text{K}$  y  $^{208}\text{Tl}$  e incremento de  $^{214}\text{Bi}$ —(609.)

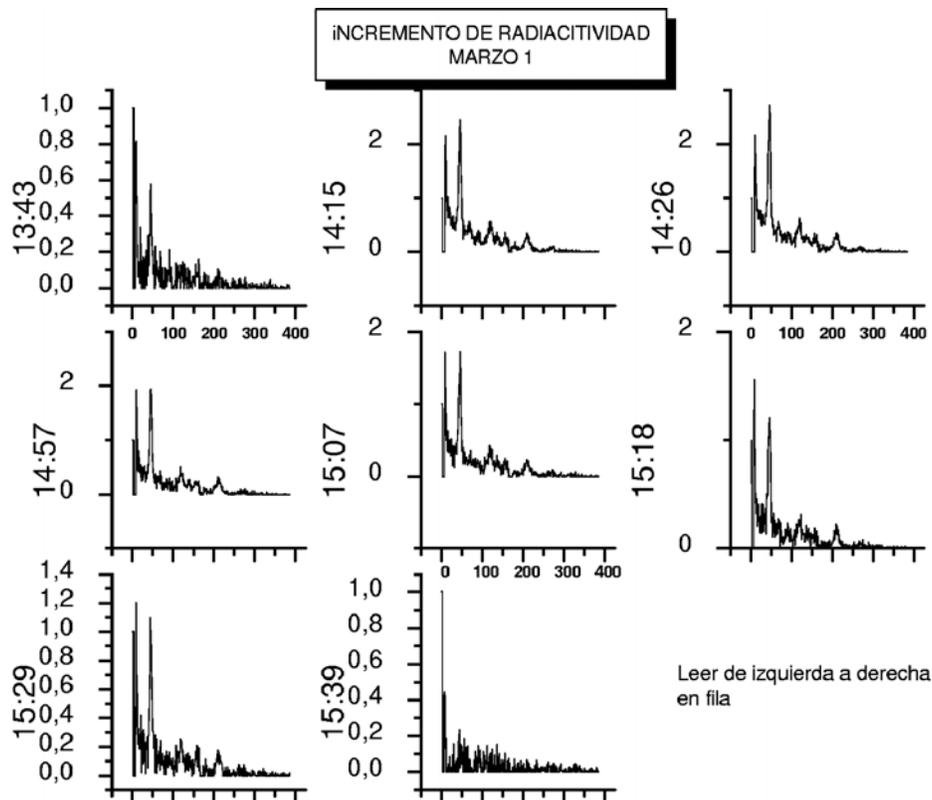


Figura 8. Variaciones de la radiactividad a lo largo de la precipitación pluvial.

sa de lluvia respectivamente. Es evidente que durante la lluvia la radiactividad atmosférica se incrementa. Lo mismo se observa durante los episodios de lluvia del mes de marzo (Figs. 6(a) y (b)).

En la Fig.7, se verifica que durante la lluvia o ne-

vada, se incrementa la radiactividad correspondiente al decaimiento del  $^{214}\text{Bi}$  en tanto que, para los picos correspondientes al  $^{40}\text{K}$  y  $^{208}\text{Tl}$ , no se observa incremento.

La duración de la precipitación pluvial que se muestra (1 de marzo 2003) fue de 2 horas 10 minutos.

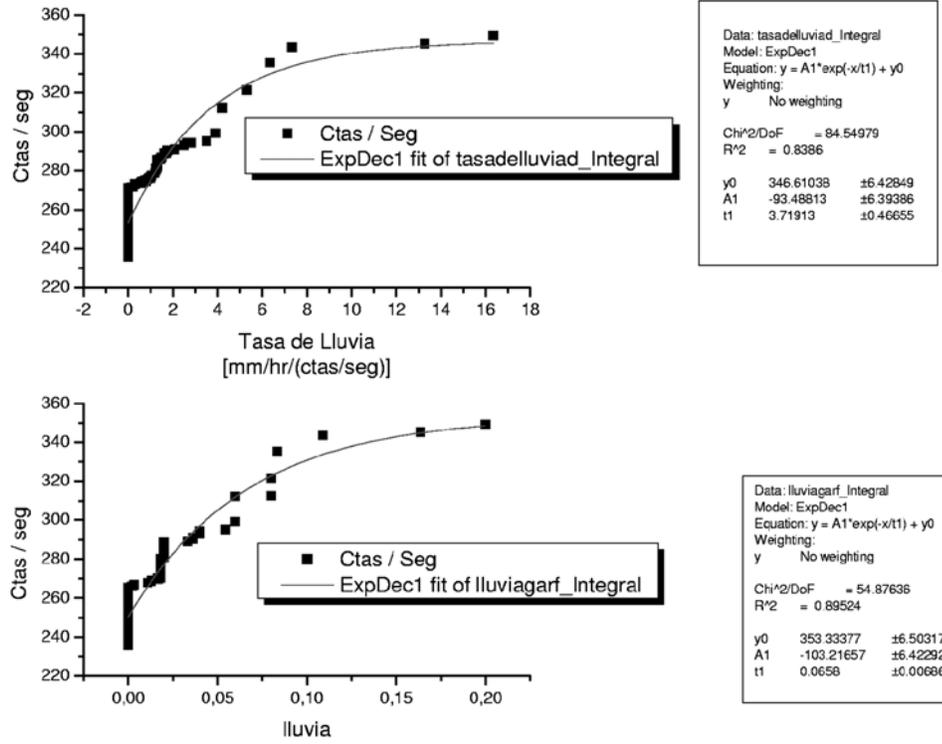


Figura 9. Radiactividad ambiental correlacionada con la tasa de lluvia y lluvia.

6.1. ACTIVIDAD DEL ISÓTOPO  $^{214}\text{Bi}$  Y DEL  $^{222}\text{Rn}$

Se encontró que la actividad del  $^{214}\text{Bi}$  en Chacaltaya es (ver apéndice II):

$$A_{Bi-214} = (0,75 \pm 0,03)\mu C^i/h$$

que representa el 99% de la actividad del  $^{222}\text{Rn}$  (ver Fig.1).

Entonces, la actividad del  $^{222}\text{Rn}$  resulta a ser:

$$A_{Rn-222} = (0,76 \pm 0,03)\mu C^i/h$$

En la Fig. 8 se muestra la evolución del incremento la radiactividad ambiental, respecto del espectro patrón, para el evento de lluvia del primero de marzo.

6.2. CORRELACIÓN DE LA RADIATIVIDAD AMBIENTAL CON LA PRECIPITACIÓN PLUVIAL

En la Fig 9 se muestran los niveles de radiactividad ambiental correlacionada con la Precipitación Pluvial y con la Tasa de lluvia.

La curva de mejor ajuste para los datos correspondientes a las variables climáticas de tasa de lluvia y lluvia es una exponencial de la forma:

$$y = A - Be^{-Cx}$$

con  $A = (347 \pm 6)\text{cts/s}$ ,  $B = (93 \pm 6)\text{cts/s}$  y  $C = (0,27 \pm 0,03)\text{hr/mm}$ , para la tasa de lluvia y  $A = (353 \pm 6)\text{cts/s}$ ,

$B = (103 \pm 6)\text{cts/s}$  y  $C = (15,2 \pm 1,6)\text{mm}^{-1}$ , para la precipitación pluvial (lluvia).

De donde, el nivel de saturación para la tasa de lluvia resulta ser  $347 \pm 6\text{ cts/s}$ . y para la tasa de lluvia corresponde a  $353 \pm 6\text{ cts/s}$ .

Que nos da un incremento máximo estimado de la radiactividad natural total del  $(39 \pm 9)\%$  para una tasa de lluvia mayor a  $16\text{ mm/hr}$  o una precipitación pluvial mayor a  $0,2\text{ mm}$ .

7. VARIACIÓN DIURNA

Este efecto fue publicado por primera vez por S. Cecchini [Ref. (8)]. En nuestra observación se corrobora la existencia de este efecto.

Para tener una aproximación mas detallada de cómo se comporta la radiactividad en Chacaltaya en un día normal (sin eventos de precipitaciones pluviales), tomamos los días 12 y 13 de febrero. El fenómeno de la onda diurna se observa claramente en la Fig. 10.

En esta figura también se muestra un ajuste de los datos diarios a una función gaussiana. La variación diurna muestra un máximo a las 15:40 de la tarde.

8. CORRELACIÓN CON EL VIENTO

Comparando los niveles de radiación con la velocidad de viento se obtiene la Fig. 11. Se puede observar que la variación diaria de la velocidad de viento coincide con la onda diurna de la radiactividad ambiental.

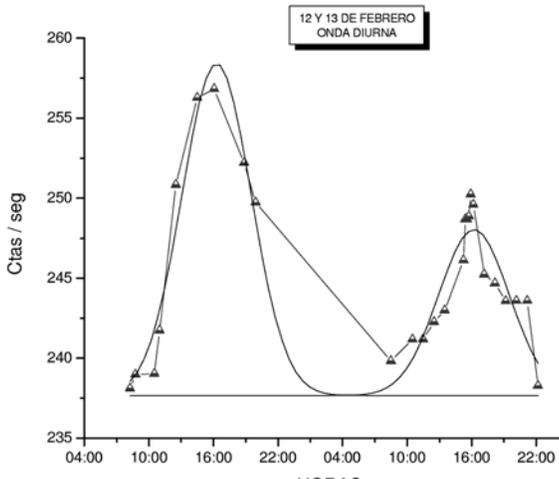


Figura 10. Onda diurna.

### 9. CONCLUSIONES

Se demostró que durante episodios de precipitación pluvial también existe un incremento en los niveles de radiactividad ambiental, esto es solo una corroboración otros experimentos realizados por el Instituto de Física Nuclear y la Universidad de Bolonia de Italia. Concluyendo que:

- Se observan los niveles de energía decaimiento para el  $^{214}_{83}\text{Bi} \rightarrow ^{214}_{84}\text{Po}$  de 609,768, 934, 1120, 1764 y 2118 KeV.
- Se observa el fenómeno de onda diurna.
- Se establece una correlación entre los niveles de precipitación pluvial y los incrementos en la radiactividad ambiental.
- Se observa una coincidencia entre las variaciones diurna de la radiactividad ambiental y de la velocidad del viento.

### REFERENCIAS

- [1] ADNAN A. SHIHAB- ELDIN, LESLIE J. JARDINE, JAGDISH K. TULI, M. AUDREY B. BUYRN, (1978) *Table of Isotopes*, Lederer Michael Seventh Edition, Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, Berkeley, United States of America.
- [2] GORDON GILMORE, JOHN D. HEMINGWAY (1995) *Practical Gamma - Ray Spectrometry*, Copyright © John Wiley & sons Ltd. New York, United States of America.
- [3] WILLIAM J. PRICE (1964) *Nuclear radiation Detection* McGraw - Hill Book Company, Second Edition, United States of America.
- [4] IRVING KAPLAN (1962) *Física Nuclear* © Aguilar, S. A. de Ediciones, Segunda Edición, Madrid España.
- [5] S. CHECCHINI, M. GALLI, A. PAGLIARIN, G.G.C PALUMBO, M. RICCIOTTI, (1998) *Environmental Radiation Monitoring Along The Course Of The Expeditions From Italy To Antarctica An Return.*

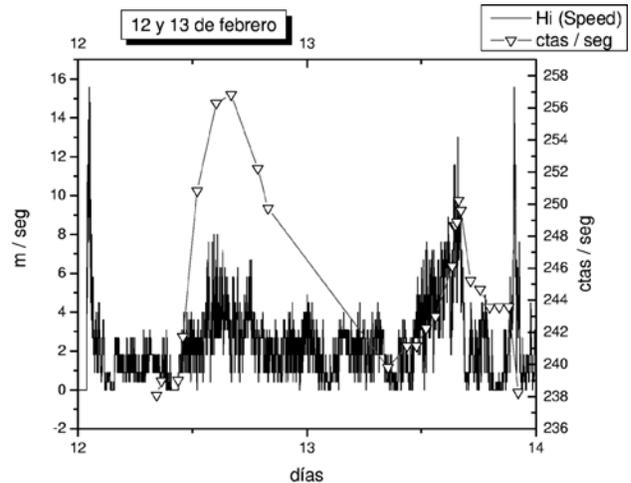


Figura 11. Radiactividad ambiental correlacionada con la velocidad de viento.

- [6] S. CHECCHINI, M. GALLI, A. PAGLIARIN, A. ARPESELLA, T. NANNI, (1998) *Environmental Radiation Monitoring At Terra Nova Bay base and Ross sea in Various Energy Bands.*
- [7] S. CHECCHINI, M. GALLI, A. PAGLIARIN, F. SAPORETTI, (1998) *The Sea - Land transition of the Environmental Radiation During the Expeditions Italy - Antarctica* -Italy Pag. 417.
- [8] S. CHECCHINI, M. GALLI, G. GFiovannini, G. Longo, A Pagliarin (2000) *Real Time monitoring of Environmental Monitoring in Tunguska (Siberia)* Bologna - Italy.
- [9] M. AGLIETT, G. MARCHETTI, C. MALAGRANAM, O. SAAVEDRA (1984) *Misure dell'attivita di  $^{222}\text{Rn}$  e delle sue Variazioni Temporali nella cavita n. 25 del Tunel del Monte Bianco* Tesis Doctoral ITALIA.
- [10] M. BRUNETTI, S. CECCHINI, M. GALLI, G. GIOVANNINI, G. LONGO, A. PAGLIARIN (1997) *Environmentakl Radiation Monitoring at high altitude Italy.*

## APÉNDICE I

### CALIBRACIÓN DEL NaI(Tl)

Se utilizaron tres pastillas radiactivas que se muestran en la Tabla 1.

En la Fig. 12 se muestra el espectro obtenido en el multicanal y en la Fig. AI 2 el ajuste lineal de calibración de la energía en función del número de canal en el multicanal.

Los resultados de la calibración se muestran en la Tabla 2.

TABLA 1

Elemento	Energía (KeV)
$^{22}\text{Na}$	511,600
$^{60}\text{Co}$	1173,238
$^{137}\text{Cs}$	661,640

TABLA 3

Elemento	Canal	Energía (keV)	Integral	Área Neta (Cnts)	Incert.(%)	Cps
<sup>137</sup> Cs	45,18	661,15	29502	21583,22	1,33	1.438,867
<sup>60</sup> Co	116,96	1174,92	5296	2416,43	4,72	24,1643
<sup>60</sup> Co	139,54	1334,51	4317	1930,47	5,03	19,3047

TABLA 4

Isótopo	T <sub>1/2</sub> (años)	Energía en keV	Probabilidad de emisión (%)
<sup>60</sup> Co	5,272±0,001	1173,238±0,004	99,857±0,006
		1332,502±0,005	99,980±0,009
<sup>137</sup> Cs	30,14±0,03	661,660±0,009	85,1±0,5

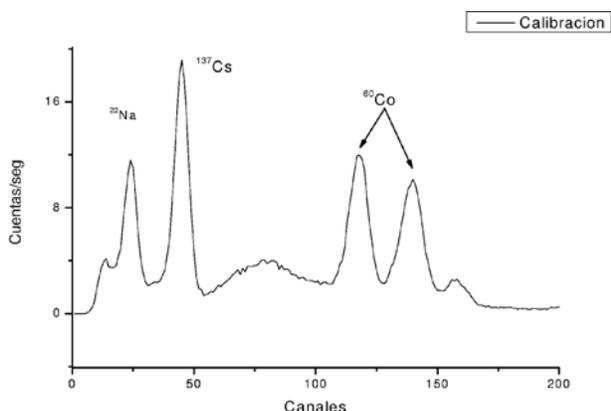


Figura 12. Isótopos de <sup>22</sup>Na, <sup>137</sup>Cs, y <sup>60</sup>Co, respectivamente, con sus dos picos y la suma de éstos mostrada al final como un pico más pequeño.

TABLA 2

Elemento	Número de canal	Energía [MeV]
<sup>22</sup> Na	23,52	511,6
<sup>137</sup> Cs	44,42	661,64
<sup>60</sup> Co	116,96	1173,238
<sup>60</sup> Co	139,54	1332,501

Se encuentra la siguiente relación:

$$E(KeV) = 346,4 + 7,1N$$

Coefficiente de correlación:  $R = 0,999997$

**APÉNDICE II**

**DETERMINACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL NaI(Tl) Y ACTIVIDAD DEL Rn-222.**

**1. EFICIENCIA DEL NaI(Tl)**

En la Tabla 3, se muestran los resultados de la calibración, obtenidos en el multicanal para los espectros del <sup>137</sup>Cs y del <sup>60</sup>Co.

TABLA 5

Isótopo	Actividad	Fecha de fabricación
<sup>60</sup> Co	2μCi	1980
<sup>137</sup> Cs	8μCi	1988

Los niveles de energía de los gammas de las pastillas utilizadas en la calibración están dados en la Tabla 4.

**2. ACTIVIDAD DE LAS PASTILLAS DE <sup>60</sup>Co Y <sup>137</sup>Cs**

La Tabla 5 muestra los datos de las pastillas radiactivas utilizadas.

De la ecuación:

$$A = A_0 e^{-\frac{t}{T_{1/2}} \ln 2} \tag{1}$$

se obtiene la actividad de las pastillas al año 2003:

$$A_{Co-60} = (0,09722 \pm 0,00004) \mu Ci$$

$$A_{Cs-137} = (5,666 \pm 0,002) \mu Ci$$

Calculamos la eficiencia de detector

$$\epsilon = \frac{S}{A \cdot P_\gamma} \tag{2}$$

$$S = Ctas/s$$

A = Actividad

P<sub>γ</sub> = Probabilidad de emisión.

De donde, la eficiencia para cada una de las pastillas resulta:

$$\epsilon_{Cs-137(661,66keV)} = (8,1 \pm 0,2) \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{Co-60(1174keV)} = (6,7 \pm 0,3) \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{Co-60(1334keV)} = (5,37 \pm 0,03) \times 10^{-4}$$

TABLA 6

Energía [KeV]	Probabilidad de decaimiento [%] [Ref.(1)]	Cuentas/s	Eficiencia [Ec. 3]	Actividades promedio [pCi][Ec. 4]	Error estadístico
609	46,10	4,36	0,00084318	30	2
768	2,30	0,55	0,00078396	84	4
934	1,49	2,54	0,00072214	649	26
1120	7,05	1,62	0,00065286	95	5
1764	7,42	1,00	0,00041301	87	4
2118	0,56	0,80	0,00028116	1412	77
—	—	—	Actividad promedio		
—	—	—	total	2360	90

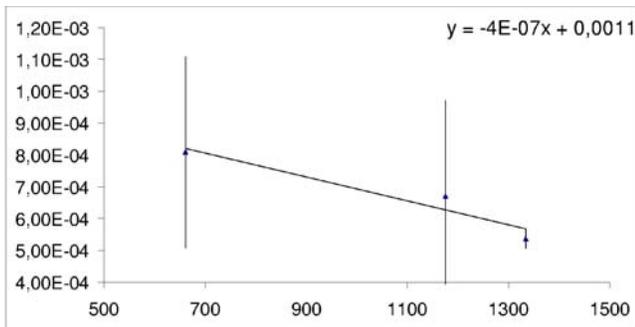


Figura 13. Eficiencia del detector en función de la energía.

En la Figura 13, se muestra el ajuste lineal de la eficiencia ( $\epsilon$ ) en función de la energía ( $E[KeV]$ ).

El resultado es:

$$\epsilon(E) = (1,07 \pm 0,08) 10^{-3} - (3,724446 \pm 0,000007) 10^{-7} / KeV \cdot E \quad (3)$$

Coefficiente de correlación:  $R = -0,95$ .

## 2. CÁLCULO DE LA ACTIVIDAD DEL Bi—214

La actividad puede obtenerse de:

$$A = \frac{S}{\epsilon(E) P\gamma \cdot 370} [pCi] \quad (4)$$

La actividad promedio obtenida de varios registros del multicanal para los picos observados del Bi-214 se muestran en la Tabla 6.

De modo que la actividad total promedio del Bi-214, registrada por el detector de NaI, resulta:

$$A_{Bi-214} = (2,36 \pm 0,09) = \mu Ci$$

que, dividida entre el volumen del cristal (diámetro: 20cm, espesor 10cm), nos da:

$$A_{Bi-214} = (0,75 \pm 0,03) \mu Ci/l$$

Como se puede ver del diagrama de decaimiento en la Fig. 1, la actividad del Bi-214 representa el 99 % de la del Rn-222.

Luego, la actividad medida del Rn-222, suspendido en la atmósfera en Chacaltaya (5200m.s.n.m.) resulta ser:

$$A_{Rn-222} = (0,76 \pm 0,03) \mu Ci/l$$

# UNA ADAPTACIÓN DEL MÉTODO DE RELAJACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE LAPLACE CON CONDICIONES DE CONTORNO ABIERTAS

Diego Sanjinés C.<sup>1</sup>

*Carrera de Física  
Universidad Mayor de San Andrés  
Casilla 8635, La Paz—Bolivia*

## RESUMEN

Se utiliza el algoritmo numérico de relajación para la ecuación de Laplace en dos dimensiones, correspondiente a una distribución arbitraria de carga eléctrica contenida en una región finita del espacio. Las condiciones de contorno de este problema son abiertas, pues se conoce el potencial en cada carga y no así en el contorno de la región. El problema de conocer el potencial dentro de dicha región se resuelve hallando las contribuciones de monopolo y dipolo en la expansión multipolar del potencial bajo la aproximación de campo lejano, y así se establece el potencial en un contorno circular que contiene a la región de interés. Luego se aplica el algoritmo de relajación usual tomando al potencial de dicho contorno como condición de contorno cerrada, lo que permite finalmente calcular de manera recursiva el potencial en toda la región interior. Esta técnica se ilustra para un dipolo, un “tripolo”, un cuadrupolo y una pieza continua de forma arbitraria.

## 1. INTRODUCCIÓN

La ecuación de Laplace,  $\nabla^2 V = 0$ , reviste una importancia fundamental en varias áreas de la física, y por ello se han elaborado varios métodos matemáticos para hallar sus soluciones  $V(\mathbf{r})$ . Dichas soluciones dependen fuertemente de las condiciones de contorno para esta ecuación. La mayoría de los métodos analíticos para resolver la ecuación suponen simetrías especiales que en la mayoría de los casos no corresponden a los problemas que se desea resolver. Una de las alternativas más viables de solución de la ecuación de Laplace resulta ser la aproximación numérica por iteraciones sucesivas una vez que  $\nabla^2 V = 0$  se ha convertido en una ecuación de diferencias finitas. Así, al comparar los valores de  $V(\mathbf{r})$  en dos iteraciones consecutivas (para un cierto  $\mathbf{r}$ ) y establecer que su diferencia es menor que un valor pequeño fijado de antemano, entonces se da por terminado el proceso de iteración y se supone que se tiene ya una buena aproximación numérica a la solución buscada para  $V(\mathbf{r})$ . Este método de aproximaciones numéricas sucesivas que converge a una solución se denomina “método de relajación”.

Si  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$  la ecuación de Laplace toma la forma

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

que se puede convertir en una ecuación de diferencias finitas al aproximar las derivadas parciales por :

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cong \frac{1}{\Delta x} [V(x + \Delta x, y) - V(x, y)], \quad (2a)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cong \frac{1}{\Delta x^2} [V(x + \Delta x, y) - 2V(x, y) + V(x - \Delta x, y)]; \quad (2b)$$

y de manera similar,

$$\frac{\partial V}{\partial y} \cong \frac{1}{\Delta y} [V(x, y + \Delta y) - V(x, y)], \quad (2c)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cong \frac{1}{\Delta y^2} [V(x, y + \Delta y) - 2V(x, y) + V(x, y - \Delta y)]. \quad (2d)$$

Al sustituir estas aproximaciones en (1) con  $\Delta x = \Delta y$  queda la fórmula

$$V(x, y) \cong \frac{1}{4} [V(x + \Delta x, y) + V(x - \Delta x, y) + V(x, y + \Delta y) + V(x, y - \Delta y)] \quad (3)$$

que es bien conocida (ver, por ejemplo, *Numerical Recipes* [1]) como un algoritmo numérico práctico que se aplica de manera iterativa a los puntos  $(x, y)$  de un cierto dominio cuadrículado  $S \subset \mathbb{R}^2$  con contorno  $\partial S$  donde se conoce de antemano los valores de  $V(x, y)$ . Esta última es la condición de contorno de Dirichlet. Existen otras condiciones de contorno como la de Neumann y la de Cauchy [2], pero en este trabajo se supondrá solamente la condición de Dirichlet pues ésta es la que resulta relevante para el problema comprendido aquí.

Cuando se aplica el método de relajación para el algoritmo (3) se obtiene como resultado los valores  $V(x, y)$  en el dominio cuadrículado  $S$  sujetos a la condición de

<sup>1</sup>Email: sanjines@fiumsa.edu.bo

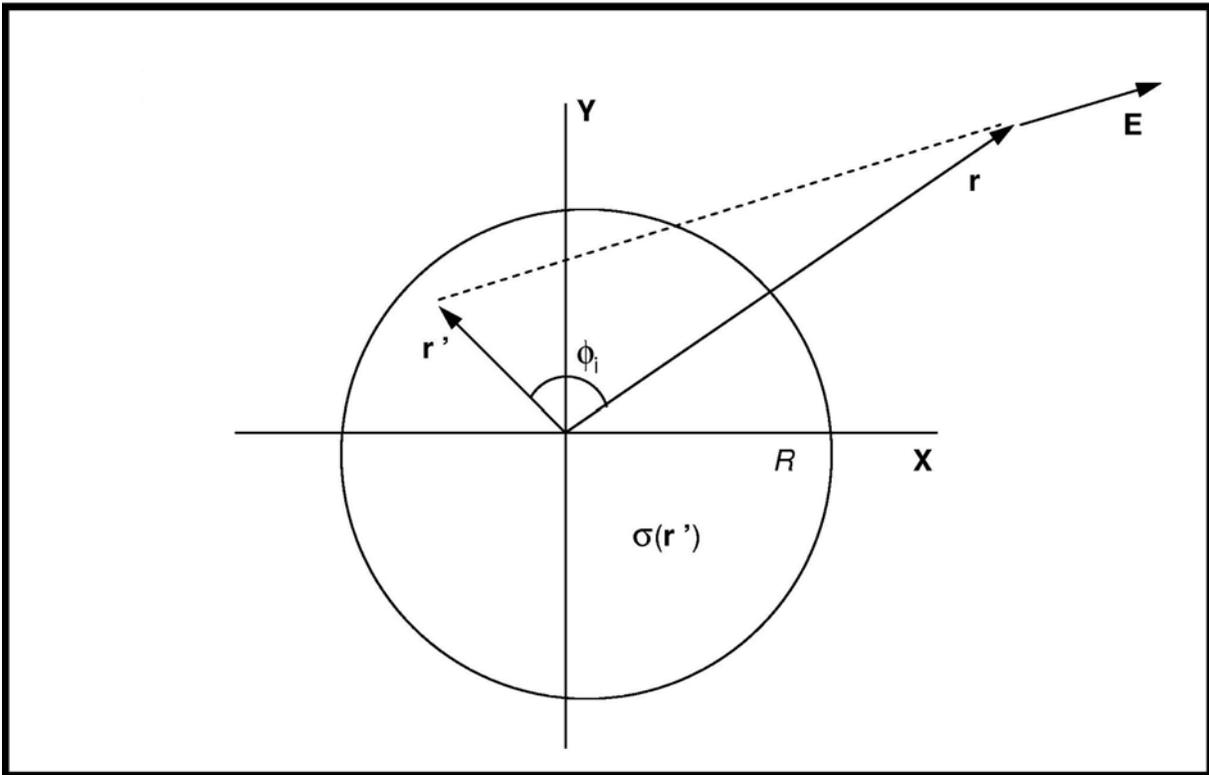


Figura 1.

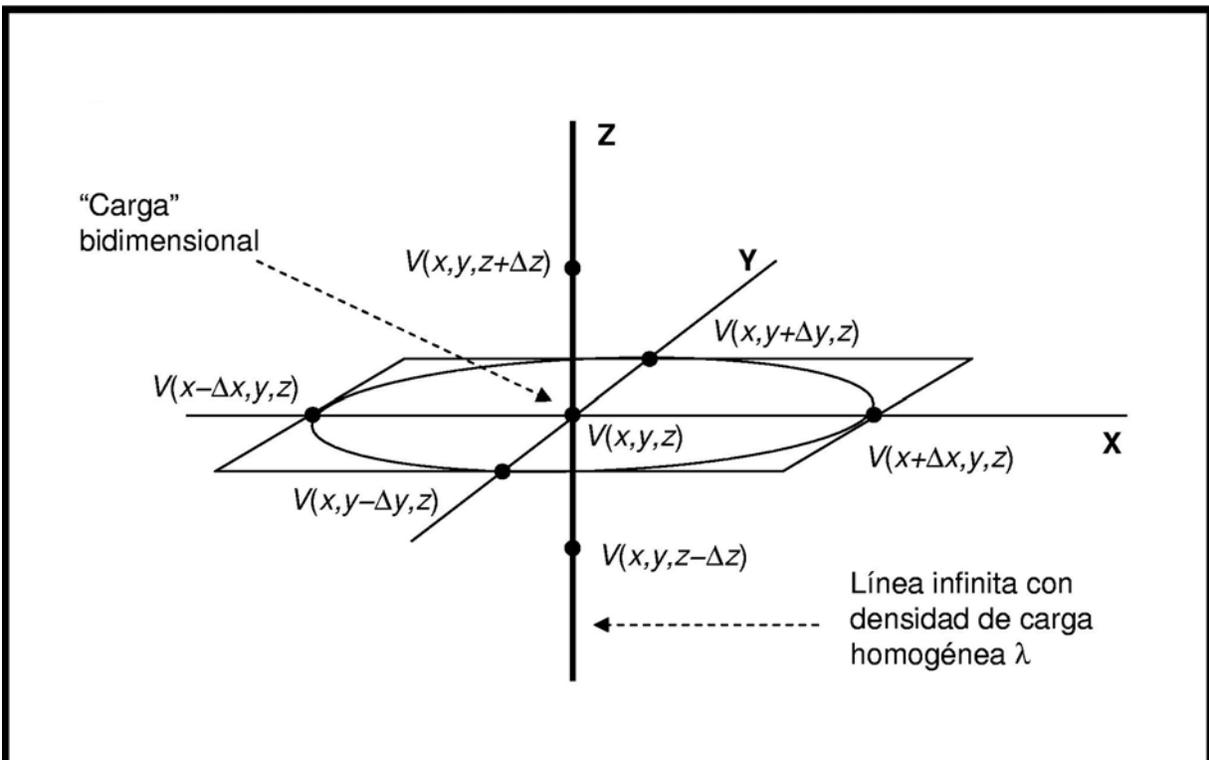


Figura 2.

contorno de Dirichlet fijada de antemano. Dichos valores se pueden graficar en un diagrama de “niveles”, lo que conduce a un “mapa” de curvas cuya ecuación es  $V(x, y) = V_0$ , donde  $V_0$  es un valor que caracteriza a cada curva. En electrostática,  $V(x, y)$  es la función potencial eléctrico y dichas curvas son las curvas equipotenciales. La determinación del mapa de curvas equipotenciales para una distribución arbitraria de carga eléctrica y una condición de contorno de Dirichlet, proporciona información valiosa sobre las características físicas de dicho sistema, como ser la distribución del campo eléctrico debido a la distribución de carga dada [2] [3].

## 2. CONDICIONES DE CONTORNO ABIERTAS

La aplicación del método de relajación (3) a problemas de electrostática generalmente supone la condición de contorno de Dirichlet “cerrada”, es decir, que el dominio  $S$  se encuentra en el *interior* del contorno  $\partial S$ . Dicho de otro modo: ya que  $S \subset \mathbb{R}^2$ , entonces  $\partial S$  es una curva plana continua que al ser recorrida en el sentido antihorario tiene al dominio  $S$  siempre a su *izquierda*. Pero, ¿es posible tener otras condiciones de contorno consistentes con el algoritmo dado por la fórmula (3)? Esta fórmula es muy adecuada y fácil de aplicar a una gran variedad de problemas pues representa a un algoritmo “aritmético” o “escalar”, i.e., no toma en cuenta la posición de los puntos  $\mathbf{r}_n$  que constituyen la condición de Dirichlet  $V(\mathbf{r}_n) = V_n$ . Si tuviera que tomarse en cuenta la posición de estos puntos, entonces el correspondiente algoritmo de relajación ya no tendría la simplicidad de (3) donde  $V(x, y)$  es una función lineal de los potenciales de los cuatro primeros vecinos de  $(x, y)$ , sino algo más general y complicado como ser  $V(x, y) = f(x, y, x_n, y_n)$  donde la distancia entre  $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n)$  y  $(x, y)$  es variable y  $f$  puede no ser una función lineal de sus argumentos. Así, la alternativa a una condición de contorno “cerrada” será la condición de contorno “abierta” definida como el valor o valores que toma  $V(\mathbf{r})$  a lo largo de la curva plana continua  $\partial S$  que al ser recorrida en el sentido antihorario tiene al dominio  $S$  siempre a su *derecha*. Así, el dominio  $S$  queda ilimitado.

El problema de resolver la ecuación de Laplace con condición de contorno “abierto” de Dirichlet se conoce también como el *primer problema externo de contorno* [4] y se establece en tres dimensiones ( $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ) requiriendo que la función  $V(x, y, z)$  satisfaga:

- i)  $\nabla^2 V = 0$  en el dominio desacotado  $S$ ;
- ii)  $V$  debe ser continua en todas partes, incluyendo el contorno  $\partial S$ ;
- iii)  $V(\partial S) = f(x, y, z)$  donde  $f$  es una función dada en  $\partial S$ ;
- iv)  $V(M) \rightarrow 0$  cuando  $M \rightarrow \infty$  ( $M \in \mathbb{R}$ ).

De manera similar, en dos dimensiones ( $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ ) se requiere que la función  $V(x, y)$  satisfaga (i), (ii), (iii) (con  $f = f(x, y)$ ) y además, la condición –menos restrictiva que (iv)–:

- v)  $V(M) \rightarrow N$  cuando  $M \rightarrow \infty$  ( $N \in \mathbb{R}$ ).

En este trabajo nos interesará el caso particular de la

condición de contorno “abierta” (primer problema externo de contorno) aplicada a *varios* contornos diferentes, cada uno de los cuales cumple con las condiciones (i), (ii), (iii) y (v). Así, en términos físicos, el problema abordado aquí consiste de adaptar el método de relajación representado por el algoritmo (3) a una distribución de carga, ya sea continua o discreta, localizada en un cierto dominio de  $\mathbb{R}^2$  que podremos suponer como un círculo de radio  $R$  (Fig.1), de tal forma que (3) nos permita calcular el “mapa” de curvas equipotenciales en el dominio desacotado  $S$ , correspondiente a la distribución de carga en cuestión.

## 3. EL PROBLEMA BIDIMENSIONAL COMO UN CASO DE PROBLEMA TRIDIMENSIONAL

Al aplicar el algoritmo (3) a una cierta distribución de carga en dos dimensiones (2D), ésta debe corresponder a una distribución de carga en tres dimensiones (3D). ¿Cuál es esta distribución y qué características geométricas tiene? Para contestar la cuestión veamos la forma de convertir a una ecuación de diferencias la ecuación de Laplace en tres dimensiones:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Las fórmulas correspondientes a (2b) y (2d) son:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cong \frac{1}{\Delta x^2} [V(x + \Delta x, y, z) - 2V(x, y, z) + V(x - \Delta x, y, z)], \quad (5a)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cong \frac{1}{\Delta y^2} [V(x, y + \Delta y, z) - 2V(x, y, z) + V(x, y - \Delta y, z)], \quad (5b)$$

y, *mutatis mutandi*,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \cong \frac{1}{\Delta z^2} [V(x, y, z + \Delta z) - 2V(x, y, z) + V(x, y, z - \Delta z)] \quad (5c)$$

Sustituyendo (5a) – (5c) en (4) con  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$  se obtiene

$$V(x, y, z) \cong \frac{1}{6} [V(x + \Delta x, y, z) + V(x - \Delta x, y, z) + V(x, y + \Delta y, z) + V(x, y - \Delta y, z) + V(x, y, z + \Delta z) + V(x, y, z - \Delta z)]. \quad (6)$$

Al hacer que  $V(x, y, z + \Delta z) = V(x, y, z - \Delta z) = V(x, y, z)$  se obtiene la ecuación (3). Esto quiere decir que el algoritmo de relajación bidimensional representado por (3) corresponde a una distribución de carga tridimensional con simetría de traslación a lo largo del eje  $Z$ . Dicho de otra manera: el algoritmo (3) permite

encontrar la *proyección bidimensional* (en el plano XY) del “mapa” de curvas equipotenciales correspondientes a una distribución de líneas infinitas de carga orientadas a lo largo del eje Z. Esta distribución (discreta o continua) está localizada dentro de un dominio finito circular de radio  $R$  en el plano XY (Fig.2). Así, de manera interesante, vemos que –por ejemplo– para una distribución discreta de líneas de carga, se tiene distribuciones continuas de carga a lo largo del eje Z mientras en el plano XY se tiene una distribución discreta de “cargas”. Estas “cargas” en dos dimensiones en realidad tienen unidades bien definidas en SI que hallaremos en la siguiente sección.

Otra forma pedagógica de entender el problema en 2D como un problema físico *bona fide*, es suponer una carga eléctrica puntual de valor  $Q$  ubicada en  $\mathbf{r} = (0,0,0)$  en una lámina dieléctrica bidimensional delgada e infinita (plano XY de la Fig.2). El valor de la permitividad eléctrica  $\epsilon(\mathbf{r}) = \kappa(\mathbf{r})\epsilon_0$  sería variable y correspondería a un medio anisotrópico en 3D:  $\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon_0$  si  $z \neq 0$  y  $\epsilon(\mathbf{r}) = \kappa\epsilon_0$  ( $\kappa > 1$ ) si  $z = 0$ . Nos preguntamos entonces cuál es la forma que adquiere la ecuación de Laplace en dicho medio anisotrópico. El campo eléctrico correspondiente será

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

y ya que este campo es conservativo, entonces se cumple  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , así que  $\nabla^2 V = -\nabla \cdot \mathbf{E}$ . Realizando las derivadas correspondientes, se obtiene

$$\nabla^2 V = \frac{Q}{4\pi\epsilon^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \frac{z}{r^3}.$$

Si  $z \neq 0$  (encima o debajo del plano dieléctrico según la Fig.2), entonces  $\epsilon$  es constante, así que  $\partial_z \epsilon = 0$ , por lo que  $\nabla^2 V = 0$  en 3D (ecuación (4)). Si  $z = 0$ , entonces el valor de  $\epsilon$  varía *abruptamente*, por lo que  $\partial_z \epsilon$  se puede modelar por una delta de Dirac,  $\partial_z \epsilon = \delta(z)$ . En este caso ( $z = 0$ ), el producto  $z\delta(z)$  es cero *para todo*  $z$  (ver, por ejemplo, Butkov [5]). Así, se obtiene  $\nabla^2 V = 0$  en 2D (ecuación (1)), cuya solución corresponde al potencial eléctrico sobre una lámina dieléctrica plana e infinita cuya constante dieléctrica  $\kappa$  es diferente del medio que está encima y debajo de la lámina. En la práctica, tal situación se puede encontrar aproximadamente en una película delgada de agua ( $\kappa = 80$ ) donde haya alguna distribución de carga eléctrica; esta película reposaría sobre una placa de vidrio ( $\kappa = 5$ ) y encima de la película habría aire ( $\kappa = 1$ ).

#### 4. EXPANSIÓN MULTIPOLAR DEL POTENCIAL ELÉCTRICO EN DOS DIMENSIONES

Para una línea continua de carga orientada a lo largo del eje Z, la simetría de traslación es la simetría cilíndrica. En este caso se puede utilizar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico radial debido a una densidad lineal y homogénea de carga  $\lambda$ . El resultado bien conocido es  $\mathbf{E} = (2K\lambda/r)\mathbf{e}_r$ , donde  $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$  y  $\mathbf{e}_r$  es el vector unitario radial. El potencial correspondiente se encuentra a través de la relación  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , donde

$\nabla = \mathbf{e}_r (\partial/\partial r)$  es el operador nabla efectivo en coordenadas cilíndricas para un potencial con simetría cilíndrica  $V = V(r)$ . Así, el potencial buscado para una línea continua de carga resulta ser  $V(r) = -2K\lambda \ln(r/r_0)$ , donde  $r_0$  es la distancia a partir de la línea de carga donde el valor del potencial se define como cero para esta línea. Si  $r < r_0$ , entonces  $V(r) > 0$ . A partir de esta expresión se construye la solución general del potencial para una distribución de “carga” bidimensional en el plano XY:

$$V(r) = - \int dr' \sigma(r') \ln \left( \frac{|r - r'|}{r'_0} \right). \quad (7)$$

Los límites de integración en (7) corresponden al círculo de radio  $R$  donde se encuentra localizada la “carga” total  $Q$  de valor

$$Q = \sum_i q_i = \int dr' \sigma(r'), \quad (8)$$

siendo  $\sigma(\mathbf{r}')$  la densidad superficial de la distribución de “carga” en el plano XY. Vemos pues que la cantidad física a la que nos referimos como la “carga” bidimensional corresponde a  $2K\lambda$  y tiene unidades de voltios.

El valor de  $r_0'$  en (7) es inmaterial para la determinación del campo eléctrico correspondiente, por ejemplo, a una sola línea de carga ( $r_0' = r_0$ ) y a una distancia  $r$  de la línea:  $E(r) = -\partial V/\partial r = 2K\lambda/r$ . Por otra parte, si se conoce el campo eléctrico  $E_a \equiv E(a)$  a una distancia  $a$  de la línea de carga, entonces  $E(r) = E_a a/r$  para cualquier  $r > 0$ . Vemos pues que ni la “carga” bidimensional  $2K\lambda$  ni  $r_0$  aparecen como parámetros relevantes en la determinación física del campo eléctrico. De la misma forma, el potencial eléctrico  $V(r)$  se puede escribir como

$$V(x) = V_a \left( \frac{\ln x}{\ln a/r_0} + 1 \right), \quad (9)$$

donde  $r = xa$  y  $a > r_0$ . El potencial re-escalado definido por  $\tilde{V} \equiv V_a/\ln(a/r_0)$  correspondería a un valor intermedio entre  $V(a) = V_a$  y  $V(r_0) = 0$ . Eliminando la constante aditiva  $V_a$  en (9) por ser inmaterial, el potencial debido a una línea de carga se escribe finalmente en términos de la “distancia” adimensional  $x = r/a > 1$  como

$$V(x) = \tilde{V} \ln x. \quad (10)$$

Así, a partir de (10) se construye la solución general del potencial eléctrico en un punto del plano XY correspondiente a una distribución de potenciales  $\tilde{V}_i$  cuyas fuentes son las “cargas”  $q_i$  en (8):

$$V(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' \xi(\mathbf{x}') \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \quad (11)$$

donde  $\xi(\mathbf{x}')$  es una “densidad de potencial” definida por

$$\sum_i \tilde{V}_i = \int d\mathbf{x}' \xi(\mathbf{x}'). \quad (12)$$

Las ecs. (11) y (12) son pues equivalentes a (7) y (8) respectivamente, con la novedad de que en (11) y (12) ya no aparecen “cargas” bidimensionales  $q_i$  ni  $r_0'$ , y en su lugar queda la distribución de potenciales re-escalados  $\tilde{V}_i$  que son proporcionales a los potenciales “fuente”  $V_{a,i}$ ; éstos serán usados como datos en las condiciones de contorno abiertas del algoritmo de relajación dado por (3).

El desarrollo de (7) en serie de Taylor en torno a  $r'=0$  es

$$V(\mathbf{r}) = Q \ln\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^2} + (r'^2), \quad (13)$$

donde  $Q$  es la “carga” total en (8) y  $\mathbf{p}$  es el momento dipolar dado por:

$$\mathbf{p} = \int dr' \sigma(\mathbf{r}') \mathbf{r}' = \sum_i q_i \mathbf{r}'_i. \quad (14)$$

Resulta interesante comparar (13) con la expansión multipolar de  $V(\mathbf{r})$  en tres dimensiones:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + (r'^2), \quad (15)$$

donde  $Q$  y  $\mathbf{p}$  coinciden con las sumas discretas de (8) y (14) siempre que  $q_i$  sea la carga eléctrica. Vemos pues que –en general– la solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones es *diferente* del caso en tres dimensiones, y que éste no se reduce a la solución en dos dimensiones al tomar, por ejemplo,  $z=0$  (que podría ser un primer intento intuitivo de obtener la solución bidimensional a partir de la conocida solución tridimensional).

De manera análoga a (13), el desarrollo de (11) en serie de Taylor alrededor de  $x'=0$  es

$$V(\mathbf{x}) = \left( \sum_i \tilde{V}_i \right) \ln x + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{P}}{x^2} + (x'^2), \quad (16)$$

donde el potencial total  $\sum_i \tilde{V}_i$  está dado por (12) y  $\mathbf{P}$  es el momento “dipolar” del potencial definido por

$$\mathbf{P} = \int dx' \xi(\mathbf{x}') \mathbf{x}' = \sum_i \tilde{V}_i \mathbf{x}'_i. \quad (17)$$

A partir de (16) se puede proponer un esquema de solución numérica al problema en cuestión: ¿cómo adaptar el algoritmo de relajación para resolver la ecuación de Laplace con condiciones de contorno abiertas? Ya que en (16) los dos primeros términos son dominantes para  $x \rightarrow \infty$ , entonces elegiremos condiciones para que el primer término  $V_M$  (monopolar) sea cero y el segundo término  $V_D$  (dipolar) sea suficientemente pequeño, de tal forma que  $V(\mathbf{x}) \cong 0$  sobre una circunferencia de radio  $R_0 \gg R$  (Fig.1). Así, dicha circunferencia con  $V(\mathbf{x}) \cong 0$  constituiría una condición de contorno (de Dirichlet) *cerrada* y el algoritmo de relajación dado por (3) se aplicaría de la manera usual en la región  $0 < r < R_0$ . En efecto, si elegimos una distribución de potenciales “fuente” tal que  $\sum_i \tilde{V}_i = 0$  en (16), entonces el término

monopolar se anula (a pesar del comportamiento divergente de  $\ln x$ ) y el término dipolar se evalúa en  $R_0 \gg R$  (i.e,  $X_0 \gg X$  con  $X \equiv R/a$ ):

$$V_D = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{P}}{x^2} = \frac{1}{X_0} \sum_i \tilde{V}_i \cos \phi_i x'_i \leq \frac{X}{X_0} \sum_i |\tilde{V}_i|, \quad (18)$$

de tal forma que  $|V_D| \cong 0$ .

## 5. EL CASO DEL DIPOLO

Esta configuración de cargas constituye el caso más sencillo con el que se puede verificar la aproximación dada por (18), pues para el dipolo se puede calcular fácilmente la solución analítica exacta que da la forma de las curvas equipotenciales en 2D.

Para los potenciales “fuente”  $\tilde{V}_1 = -\tilde{V}_2 = V$  o bien  $V_{a,1} = -V_{a,2} = V \ln(a/r_0)$  (correspondientes a las “cargas” bidimensionales  $q_1 = -q_2 = q$ ) localizados en los puntos  $(\pm h, 0)$  del plano  $XY^2$ , el potencial exacto en  $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$  se calcula a partir de (10) como la contribución de dos términos monopulares:

$$\begin{aligned} V(x) &= V \ln \sqrt{(x_1 - h)^2 + x_2^2} - V \ln \sqrt{(x_1 + h)^2 + x_2^2} \\ &= \frac{V}{2} \ln \left[ \frac{(x_1 - h)^2 + x_2^2}{(x_1 + h)^2 + x_2^2} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Si  $V(\mathbf{x}) = C$  y  $C' \equiv \exp(2C/V)$ , las curvas equipotenciales corresponden a

$$\left( x_1 - \frac{C' + 1}{C' - 1} h \right)^2 + x_2^2 = h^2 \left[ \left( \frac{C' + 1}{C' - 1} \right)^2 - 1 \right]. \quad (20)$$

Claramente (20) representa a una familia de circunferencias excéntricas cuyos centros se desplazan hacia los extremos del eje  $X$  a medida que sus radios respectivos crecen.

Para la simulación numérica en *Excel* se tomó  $\Delta x = \Delta y = a$  (Fig.2) como la separación entre celdas adyacentes. Para la magnitud y ubicación de los potenciales “fuente” se tomó los valores  $V_{a,1} = -V_{a,2} = 1$  V junto con  $V = 0,26$  V (lo que supone una relación  $a/r_0 = 46,8$  en (9)) y  $h = 4$ , así que la región de radio  $R$  en la Fig.1 corresponde a  $X = 4$  en (18). La circunferencia que sirve como condición de contorno cerrada tiene un radio adimensional  $X_0 = 50$ , así que la contribución máxima del término dipolar  $V_D$  sobre esta circunferencia corresponde al eje del dipolo ( $\phi_1 = \phi_2 = 0$ ) y coincide con la máxima cota superior en (18):

<sup>2</sup>La notación que se utiliza es  $\mathbf{r} = a\mathbf{x} = (x, y)$  para el vector posición medido en unidades de longitud, donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  es el vector posición adimensional y  $\Delta x = \Delta y = a$  es el tamaño de la celda en las simulaciones numéricas. Ya que el símbolo “ $x$ ” puede representar la componente  $x$  del vector  $\mathbf{r}$  o bien la magnitud del vector  $\mathbf{x}$ , entonces el contexto correspondiente debe aclarar a qué “ $x$ ” se está refiriendo el uso de este símbolo.

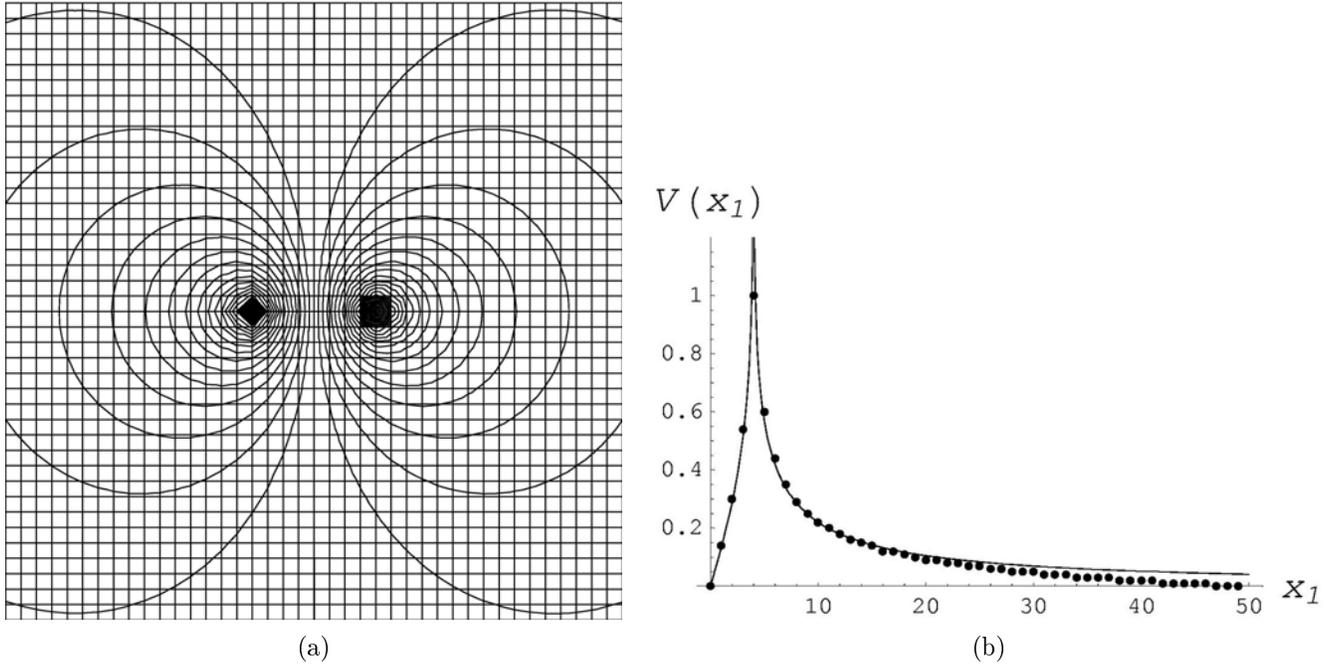


Figura 3.

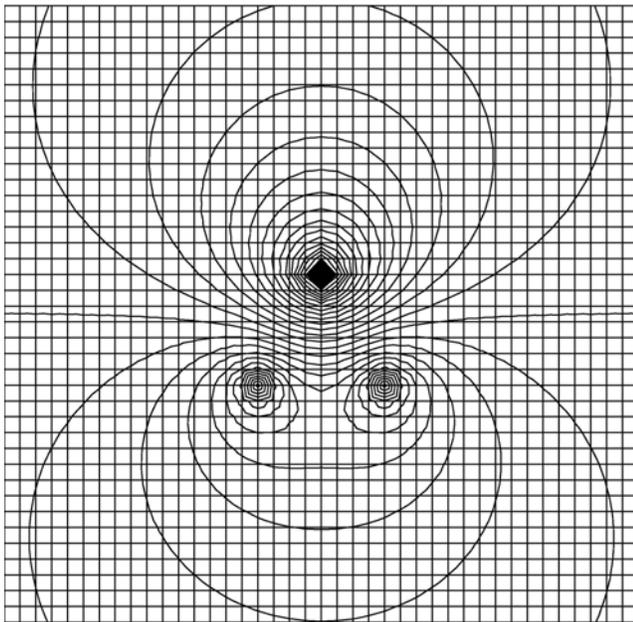


Figura 4.

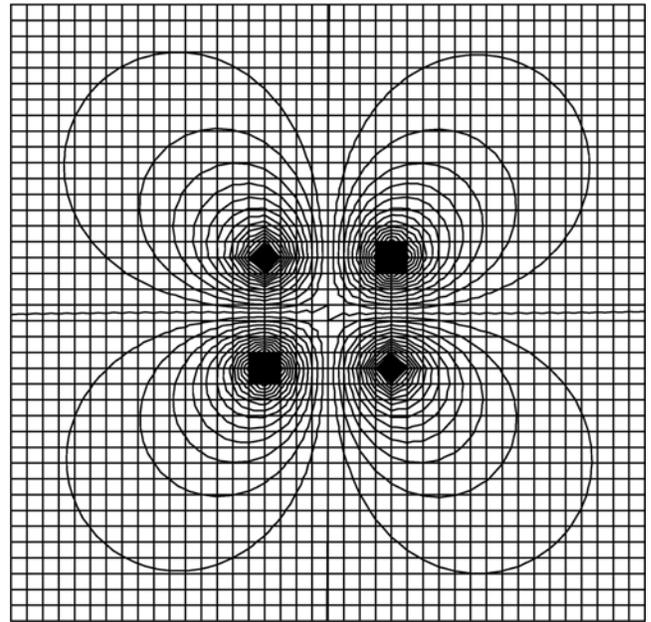


Figura 5.

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_0} \left( \tilde{V}_1 h \cos \phi_1 + \tilde{V}_2 (-h) \cos \phi_2 \right) &= \frac{X}{X_0} \sum_i |\tilde{V}_i| \\ &= \frac{4}{50} (0,26 + 0,26) \cong 0,04 \text{ V.} \quad (21) \end{aligned}$$

Esto significa que la contribución dipolar  $V_D$  sobre dicha circunferencia toma los valores  $-0,04 \leq V_D(\mathbf{X}_0) \leq 0,04$ , así que la condición de contorno efectiva que se

tomará es  $V(\mathbf{X}_0)=0$ .

En la Fig.3a se muestra el resultado de esta simulación para una ventana correspondiente a los intervalos  $x_1 \in [-20, 20]$  y  $x_2 \in [-20, 20]$ . Nótese que en la región  $x_1 \in [-13, 13]$  y  $x_2 \in [-13, 13]$  aún las curvas equipotenciales se aproximan a circunferencias. A medida que la ventana va creciendo hasta abarcar la región total de radio  $X_0 = 50$ , la forma de las curvas equipotenciales se va “achatando” horizontalmente debido a la condición de

contorno  $V(\mathbf{X}_0)=0$ . En la Fig.3b se muestra una comparación entre los valores numéricos del potencial calculados según el método de relajación (puntos negros) y los valores *exactos* del potencial según la fórmula analítica (19) (curva continua). En ambos casos se eligió graficar el potencial a lo largo del eje del dipolo (eje X) correspondiente a  $x_1 \in [0,50]$  y  $x_2=0$ . Como se observa en la Fig.3a, es a lo largo de este eje en donde se debe registrar la mayor discrepancia entre la teoría y la simulación numérica, ya que es aquí en donde se acentúa el “achataamiento” de las circunferencias equipotenciales predichas por (19). Nótese que el potencial exacto es singular en  $x_1=4$  pues corresponde a una “carga” puntual; sin embargo, el valor elegido del potencial “fuente” debido a esta “carga” es  $V_{a,1}=1$  V, esto es, el potencial a una distancia  $a=46,81r_0$  de la “carga” puntual, donde  $r_0$  es la distancia convenida para que el potencial sea cero. Tomando pues  $V_{a,1}=1$  V como referencia, el error porcentual entre los valores teórico y numérico del potencial en  $x_1=50$  es aproximadamente 4%, lo que coincide razonablemente bien con la contribución dipolar calculada en (21).

## 6. OTRAS DISTRIBUCIONES DE CARGA

Para las distribuciones de carga que se muestran a continuación, el cálculo analítico exacto de  $V(\mathbf{x})$ , si bien no es complicado, ya no conduce a fórmulas sencillas para las curvas equipotenciales al establecer  $V(\mathbf{x})=C$ . Es así que la simulación numérica y la apreciación cualitativa de los gráficos de curvas equipotenciales puede ofrecer una guía valiosa que permita dilucidar características físicas de estos sistemas. Veamos algunos casos.

**a) “Tripolo”.**- Para una distribución de tres cargas ubicadas en  $\mathbf{x}_1=(-4, -4)$ ,  $\mathbf{x}_2=(4, -4)$ ,  $\mathbf{x}_3=(0, 3)$  y que producen los potenciales “fuente” con valores  $V_{a,1} = V_{a,2} = -V_{a,3}/2 = 1$  V respectivamente, la contribución monopolar de  $V(\mathbf{x})$  en (16) es cero. La contribución máxima de  $V_D$  sobre la circunferencia de radio  $X_0 = 50$  ocurre a lo largo del eje dipolar del tripolo y corresponde a  $|V_D|=0,018$  V. Fijando pues la condición de contorno  $V(\mathbf{X}_0) = 0$  se obtiene la familia de curvas equipotenciales que se muestra en la Fig.4. Nótese que en los contornos de la ventana de esta figura, las curvas tienden a formar “circunferencias” achatadas similares a las de la Fig.3a, lo que refleja el comportamiento dipolar de esta distribución en el campo lejano.

**b) Cuadrupolo.**- Para una distribución de cuatro cargas ubicadas en  $\mathbf{x}_1 = (-4, 4)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (-4, -4)$ ,  $\mathbf{x}_3 = -\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_4 = -\mathbf{x}_2$ , y que producen los potenciales con valores  $V_{a,1} = -V_{a,2} = V_{a,3} = -V_{a,4} = 1$  V respectivamente, tanto la contribución monopolar como dipolar de  $V(\mathbf{x})$  en (16) es cero, así que la condición de contorno  $V(\mathbf{X}_0) = 0$  es muy adecuada. En la Fig.5 se puede apreciar las correspondientes curvas equipotenciales.

**c) Pieza metálica continua.**- En este caso se simula una pieza metálica continua por la yuxtaposición de 26 celdas con potenciales “fuente” de igual valor

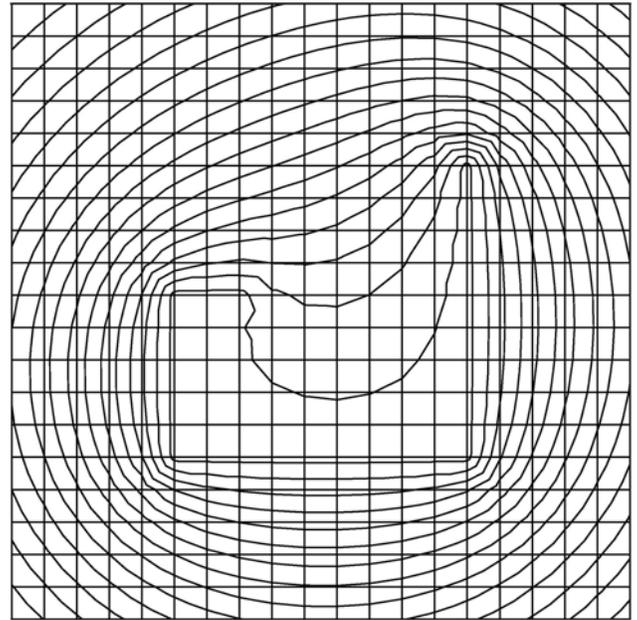


Figura 6.

$V_{a,i} = 1$  V ( $1 \leq i \leq 26$ ). Las contribuciones monopolar ( $V_M$ ) y dipolar ( $V_D$ ) de  $V(\mathbf{x})$  en (16) son diferentes de cero. La primera contribución tiene una magnitud sobre la circunferencia de radio  $X_0 = 50$  igual a  $|V_M(\mathbf{X}_0)| \cong 26,44$  V, mientras que la magnitud de la segunda contribución tiene una máxima cota superior de magnitud  $|V_D(\mathbf{X}_0)| \cong 0,68$  V. Por lo tanto, ya que  $V_M$  es dominante sobre  $V_D$ , se puede tomar el valor de  $V_M$  como la condición de contorno. Sin embargo, recordemos que el potencial eléctrico está determinado a menos de una constante aditiva, e.g. (9) y (10), así que bien se puede obtener *la misma* distribución geométrica de curvas equipotenciales para esta pieza tomando como condición de contorno  $V(\mathbf{X}_0) = 0$ . Esto es lo que se muestra en la Fig.6.

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo se adaptó el algoritmo de relajación usual en 2D dado por (3) utilizando  $V(\mathbf{X}_0) = 0$  como una condición de contorno *efectiva* (de Dirichlet) cerrada, donde  $R_0 = aX_0$  es el radio de una circunferencia suficientemente grande con relación al círculo de radio  $R = aX$  que contiene a una distribución arbitraria (continua o discreta) de cargas eléctricas. La relación que se usó a lo largo de este trabajo fue  $X/X_0 = 0.1$  con  $X = 5$ . Las simulaciones numéricas muestran la distribución de curvas equipotenciales en la región  $0 \leq x \leq X_0$  ( $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ). Observando la simulación para el caso del dipolo, esta región se puede dividir en tres regiones: el “campo cercano”:  $0 \leq x \leq 5$ , el “campo intermedio”:  $5 \leq x \leq 20$  y el “campo lejano”:  $20 \leq x \leq 50$ . En el campo lejano las curvas equipotenciales ya pierden su forma circular debido a que la condición de contorno aproximada  $V(\mathbf{X}_0) = 0$  no es muy buena

para las distribuciones de carga que tienen momento dipolar diferente de cero. Sin embargo, en el campo intermedio –y por lo tanto en el campo cercano– la aproximación  $V(\mathbf{X}_0) = 0$  es suficientemente buena. Para el caso del cuadrupolo se puede suponer que en el campo lejano el cálculo de las curvas equipotenciales sea bueno, ya que esta distribución no tiene momento dipolar. Una forma de subsanar la limitación impuesta por  $V(\mathbf{X}_0) = 0$  es calcular *exactamente* la contribución del momento dipolar de la distribución arbitraria de carga sobre la circunferencia de radio  $X_0$ , y así tener el valor de  $V(\mathbf{X}_0)$  exacto como condición de contorno *efectiva* cerrada en el campo lejano. Este trabajo adicional seguramente mejoraría el cálculo de las curvas equipotenciales, pero se incluiría en una próxima publicación a propósito de un método numérico práctico para la “triangulación del dipolo”, i.e., hallar, mediante mediciones del potencial en el campo lejano, el momento dipolar equivalente de una distribución arbitraria de

“cargas” en 2D. La aplicación del algoritmo de relajación (3) puede constituir una poderosa herramienta de simulación numérica para problemas que ya no se pueden tratar analíticamente de una manera práctica, como pueden ser los casos del “tripolo” (Fig.4) o de la pieza metálica continua (Fig.6), donde la pérdida de una o varias simetrías complica notablemente el problema.

#### REFERENCIAS

- [1] Press W. *et al.*, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, 1986).
- [2] Jackson J., *Classical Electrodynamics* (3ra. ed., Wiley, 1999).
- [3] Purcell E., *Electricidad y Magnetismo (Berkeley Physics Course vol.2, Reverté, 1988).*
- [4] Tijonov A., Samarsky A., *Ecuaciones de la Física Matemática* (Mir, Moscú, 1980).
- [5] Butkov E., *Mathematical Physics* (Addison-Wesley, 1973).

# UN MODELO HIDRODINÁMICO AUTOSIMILAR PARA CURVAS DE ROTACIÓN GALÁCTICAS

Urzagasti D.

*Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
La Paz-Bolivia*

## RESUMEN

Se construye un modelo para describir el comportamiento de la velocidad circular de rotación de galaxias. Para ello se utilizan los resultados del modelo cosmológico estándar para normalizar las ecuaciones de un fluido ideal que se aleja de la expansión homogénea de Hubble y colapsa de manera autosimilar hacia un exceso de densidad inicial. Se adopta el sistema de coordenadas esféricas con el eje polar coincidente con el eje de rotación galáctico. La única interacción considerada es la gravitacional y, como buena aproximación, se trabaja con un potencial gravitacional originado solamente por la componente dominante en la masa, la cual es asumida con simetría esférica, conformada por materia oscura y estrellas de tipo halo. Se asume establecido el equilibrio hidrostático en las direcciones distintas de la radial y se obtiene una solución para la velocidad circular. Se promedia esta solución en las variables angulares proponiendo la presencia de un fenómeno de pulsaciones en las oscilaciones de las ondas de densidad y se obtiene una fórmula de ajuste para curvas de rotación. Se ajusta el modelo a los datos de curvas de rotación de diez galaxias obteniendo un buen acuerdo, y con estos ajustes se obtienen distintos parámetros de la estructura y dinámica de galaxias.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las curvas de rotación de galaxias espirales constituyen una fuente de información muy valiosa en el estudio de la estructura y dinámica de estos objetos. En estas galaxias, el movimiento de rotación es muy superior en magnitud respecto de otros movimientos y por ello, los rasgos de la velocidad circular como función de la distancia radial sobre el plano de rotación son muy bien definidos y comunes a todas ellas. El rasgo más importante del comportamiento de la velocidad circular es que a medida que aumenta la distancia radial es creciente y muy empinado cerca del eje de rotación, similar al comportamiento de un cuerpo rígido en rotación, tornándose luego y bruscamente en un comportamiento casi plano, donde la velocidad de rotación no cambia mucho con la distancia. En la descripción más simple de una rotación kepleriana, sin tomar en cuenta los efectos de los gradientes de presión, la velocidad circular se escalaría con la distancia radial  $r$  y con la masa contenida dentro de ese radio,  $M$ , según  $(M/r)^{1/2}$ . Si se considera sólo la masa visible de una galaxia, esta descripción falla para distancias suficientemente grandes, pues en esas regiones donde la masa visible ha caído notablemente, la forma de la curva de rotación continúa siendo plana. Este hecho dio lugar al planteamiento de la existencia de la materia oscura (de composición no del todo conocida hasta ahora) que constituiría aproximadamente el noventa por ciento de la masa de una galaxia típica, y cuya distribución se extendería a mayores distancias que la de la materia visible. De todas maneras, incluyendo la materia oscura,

el modelo kepleriano no describe de buena manera a las curvas de rotación, haciéndose necesario el considerar a un sistema galáctico como un fluido. Los primeros estudios del problema mostraron que cuando la materia visible es modelada como un gas Maxwelliano no colisional embebido en un halo de materia oscura conformada por partículas no colisionales con una muy alta dispersión de velocidades, aparecía de forma natural el potencial gravitacional que da lugar a curvas de rotación planas [7]. Por otro lado, se han construido potenciales con componentes de disco, halo y bulbo esferoidal que proveen de buenos ajustes a las curvas de rotación de galaxias espirales [8]. Otros modelos ajustan el campo gravitacional usando un modelo adecuado para la densidad superficial de discos galácticos, obteniendo de igual manera buenos resultados [9]. El fenómeno está presente también en galaxias elípticas y primeros modelos que las consideran como sistemas esferoidales oblatos con pequeña rotación dan como resultados curvas de rotación razonablemente planas [10]. Trabajos recientes en teoría de campos han alcanzado modelar las curvas de rotación, por ejemplo, al considerar que el acople fuerte entre la materia oscura y la visible puede ser descrito como una relación de desviación topológica, la cual es interpretada como una modificación de la ley de Newton [11]. Peebles [1] y Bertschinger [2] hicieron notar que el comportamiento de las curvas de rotación en la parte plana puede ser descrito con el escalamiento  $r^{-1/8}$  que se obtiene de soluciones con simetría esférica para distancias suficientemente grandes. Siguiendo esta idea, se plantea aquí una solu-

ción con simetría de disco que busque explicar no sólo el comportamiento general mencionado sino también las fluctuaciones respecto del mismo. Estas fluctuaciones, en las curvas de rotación provenientes de observaciones de galaxias espirales, tienen la forma de oscilaciones de amplitud variable, oscilaciones cuya frecuencia y amplitud disminuyen con la distancia radial.

A continuación se describe la construcción del modelo, luego los resultados y finalmente se realiza una discusión y se dan las conclusiones de este trabajo.

## 2. ECUACIONES DEL MODELO

Las ecuaciones de trabajo adoptadas para describir la dinámica de un fluido colisional no viscoso con interacción gravitacional son:

La ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0, \quad (1)$$

las ecuaciones de Euler:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \vec{g}, \quad (2)$$

y la ecuación del flujo de energía:

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0, \quad (3)$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $\vec{v}$  es el vector velocidad,  $p$  es la presión,  $\gamma$  es el índice politrópico y  $\vec{g}$  es la aceleración gravitatoria, la cual, como gradiente de la solución de la ecuación de Poisson, tiene la siguiente expresión:

$$\vec{g} = G\vec{\nabla} \int \frac{\rho_T(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}', \quad (4)$$

$$\rho_T = \rho + \rho_{NC};$$

donde  $\rho_{NC}$  es la densidad de la materia no colisional.

Se busca construir un modelo autosimilar, es decir que sea invariante en forma y apariencia en todas las escalas, tanto espaciales como temporales. Esto se logra al adoptar los resultados del modelo cosmológico estándar para tiempos suficientemente grandes posteriores al comienzo de la expansión. Bajo el régimen de esta expansión homogénea de Hubble, la densidad media del universo, llamada densidad de Einstein-De Sitter, evoluciona con el tiempo según la forma:

$$\rho_H(t) = \frac{1}{6\pi Gt^2}, \quad (5)$$

Por otro lado, las fluctuaciones de la densidad, que crecen como  $t^{2/3}$ , originan centros de condensación locales que hacen que sucesivas capas concéntricas alrededor de ellos se alejen de la expansión general. De modo que una de estas capas, que inicialmente se está expandiendo siguiendo el flujo de Hubble, llega a frenarse y comienza un movimiento contrario de colapso hacia el centro de

condensación. Según la teoría del modelo estándar, el radio de retorno de las capas de masa colapsantes obedece el siguiente comportamiento con el tiempo:

$$r_{ta}(t) = \tau(t)^{8/9} \propto t^{8/9}. \quad (6)$$

Lo que se propone en la construcción del presente modelo es que estas capas colapsantes dan lugar a la formación de galaxias y entonces, al margen de considerar otros efectos estructurales y dinámicos producidos por procesos tales como los de formación estelar, disipativos y otros debidos a la presencia de campos magnéticos, el modelo debería representar de buena manera los rasgos generales de las galaxias normales.

Se ve, por lo tanto, que la normalización de las variables en términos del radio de retorno y de la densidad de Einstein-De Sitter es muy adecuada. Tal normalización en coordenadas esféricas es la siguiente:

a. Posición:

$$\vec{R}(\vec{r}, t) = (\lambda, \theta, \phi), \quad \lambda = \frac{r}{r_{ta}(t)}, \quad (7)$$

b. Velocidad:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{r_{ta}(t)}{t}\vec{V}(\lambda, \theta, \phi), \quad (8)$$

c. Densidad:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_H(t)D(\lambda, \theta, \phi), \quad (9)$$

d. Presión:

$$p(\vec{r}, t) = \rho_H(t)\left(\frac{r_{ta}(t)}{t}\right)^2 P(\lambda, \theta, \phi), \quad (10)$$

Al ser el radio de retorno la única escala espacial función del tiempo, el sistema resulta autosimilar, es decir, dada la escala fija  $\lambda$ , es invariable en forma y apariencia para todas las escalas  $r = \lambda\tau^{8/9}$ .

Con las variables así normalizadas, las ecuaciones (1), (2) y (3) toman las siguientes formas adimensionales:

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot (D\vec{V}) - 2D - \frac{8}{9}\lambda D' = 0,$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}\vec{V} - \frac{1}{9}\vec{V} - \frac{8}{9}\lambda\vec{V}' + \frac{1}{D}\vec{\nabla}_{\vec{R}}P =$$

$$\frac{2}{9}\vec{\nabla}_{\vec{R}} \int \frac{D_T(\vec{R}'')}{|\vec{R} - \vec{R}''|} d^3\vec{R}'',$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}\left(\frac{P}{D}\right) - \frac{2}{9}\frac{P}{D} - \frac{8}{9}\lambda\left(\frac{P}{D}\right)' + (\gamma - 1)\frac{P}{D}\vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \vec{V} = 0, \quad (11)$$

donde las primas indican derivadas parciales respecto de  $\lambda$ .

Se introducen las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
\chi &= \cos \theta, \quad \vec{V} = (V_\lambda, V_\theta, V_\phi), \\
u_\lambda &= V_\lambda, \quad u_\theta = (1 - \chi^2)^{1/2} V_\theta, \\
u_\phi &= \frac{V_\phi}{(1 - \chi^2)^{1/2}}, \quad \eta = \frac{P}{D}, \\
Z &= \int \frac{D_T(\vec{R}'')}{|\vec{R} - \vec{R}''|} d^3 \vec{R}'';
\end{aligned} \tag{12}$$

y con éstas, las ecuaciones (11) en coordenadas esféricas son:

$$\begin{aligned}
(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)D' + \frac{2}{\lambda}Du_\lambda + Du'_\lambda - 2D \\
- \frac{1}{\lambda}(D\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}D) + \frac{1}{\lambda}(D\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi + u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}D) = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)u'_\lambda - \frac{1}{9}u_\lambda - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}u_\lambda + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}u_\lambda \\
+ \eta' + \eta\frac{D'}{D} = \frac{2}{9}Z',
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)u'_\theta - \frac{1}{9}u_\theta - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + \frac{1}{\lambda}(u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}u_\theta - \frac{\chi}{1-\chi^2}u_\theta^2) \\
- \frac{1-\chi^2}{\lambda}(\frac{\partial}{\partial\chi}\eta + \frac{\eta}{D}\frac{\partial}{\partial\chi}D) = -\frac{2}{9}\frac{1-\chi^2}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\chi}Z,
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)u'_\phi - \frac{1}{9}u_\phi + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi - \frac{1}{\lambda}u_\theta(\frac{\partial}{\partial\chi}u_\phi - \frac{\chi}{1-\chi^2}u_\phi) \\
+ \frac{1}{\lambda(1-\chi^2)}(\frac{\partial}{\partial\phi}\eta + \frac{\eta}{D}\frac{\partial}{\partial\phi}D) = \frac{2}{9}\frac{1}{\lambda(1-\chi^2)}\frac{\partial}{\partial\phi}Z,
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
(u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda)\eta' - \frac{2}{9}\eta - \frac{1}{\lambda}u_\theta\frac{\partial}{\partial\chi}\eta + \frac{1}{\lambda}u_\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\eta \\
+ (\gamma - 1)\eta(\frac{2}{\lambda}u_\lambda + u'_\lambda - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\chi}u_\theta + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\phi}u_\phi) = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

### 3. SOLUCIONES

#### 3.1. Aproximación radial

En esta aproximación se hallan las soluciones de las ecuaciones (13—17) para valores de  $\lambda$  suficientemente grandes. Para estos valores, dichas ecuaciones se reducen a las formas:

$$\begin{aligned}
\lambda D' + \frac{9}{4}D &= 0, \\
-\frac{8}{9}\lambda u'_\lambda - \frac{1}{9}u_\lambda + \eta' + \eta\frac{D'}{D} &= \frac{2}{9}Z', \\
\lambda u'_\theta + \frac{1}{8}u_\theta &= 0, \\
\lambda u'_\phi + \frac{1}{8}u_\phi &= 0, \\
\lambda\eta' + \frac{1}{4}\eta &= 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

Las soluciones de este conjunto son:

$$\begin{aligned}
D^r &= D_0\lambda^{-9/4}, \quad Z^r = 18(\beta_g v_0)^2\lambda^{-1/4}, \\
u_\lambda^r &= v_0\sigma_\lambda\lambda^{-1/8} - v_0^2\lambda_0^2\lambda^{-5/4}, \\
u_\phi^r &= v_0\lambda^{-1/8}, \quad u_\theta^r = v_0\sigma_\theta\lambda^{-1/8}, \\
\eta^r &= \eta_0\lambda^{-1/4}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Estas soluciones están expresadas en términos de parámetros dinámicos para valores de  $\lambda$  suficientemente grandes, los cuales se describen a continuación:

- i.  $\beta_g$  es el parámetro de soporte rotacional, definido como el cociente entre la aceleración gravitatoria y la aceleración centrífuga. Si  $v_c(r)$  es la velocidad circular del fluido a la distancia radial  $r$  y  $m(r)$  la masa total dentro de ese radio. La expresión para el cuadrado de  $\beta_g$  es la siguiente:

$$\beta_g^2 = \frac{g}{g_\phi} = \frac{Gm(r)}{v_c(r)^2 r} = \frac{32\pi D_0(1+\varepsilon)}{27 v_0^2}, \tag{20}$$

donde  $\varepsilon$  es el cociente entre la masa de la materia no colisional y la masa del gas colisional ( $\varepsilon \approx 9$ ).

- ii.  $\beta_p$  es el cociente entre la aceleración del gradiente de presión radial y la aceleración centrífuga. La expresión para su cuadrado es:

$$\beta_p^2 = -\frac{r\frac{\partial}{\partial r}p(r)}{v_c(r)^2\rho(r)} = \frac{5}{2}\frac{\eta_0}{v_0^2}. \tag{21}$$

- iii. El parámetro  $\chi_0^2$  da una medida de la combinación de los efectos gravitacionales y de los gradientes de presión:

$$\chi_0^2 = \beta_g^2 - \beta_p^2 \tag{22}$$

- iv.  $\sigma_\lambda$  y  $\sigma_\theta$  comparan las amplitudes de los movimientos radiales y polares con la amplitud del movimiento circular, respectivamente.

- v. Adicionalmente se define un parámetro,  $\Omega_0$ , que mide el grado en el que el efecto del segundo término en  $u_\lambda^r$  se aparta del efecto del primero:

$$\chi_0^2 = \frac{9}{32}(\Omega_0^2 + \sigma_\lambda^2). \tag{23}$$

#### 3.2. Equilibrio Hidrostático

Como una simplificación del modelo se adoptan condiciones de equilibrio hidrostático en las direcciones  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$ , ésto permite anular la suma de las componentes de las fuerzas gravitacionales y de gradientes de presión en esas direcciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi} \eta + \frac{\eta}{D} \frac{\partial}{\partial \chi} D - \frac{2}{9} \frac{\partial}{\partial \chi} Z &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \eta + \frac{\eta}{D} \frac{\partial}{\partial \phi} D - \frac{2}{9} \frac{\partial}{\partial \phi} Z &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Por otro lado, no se consideran condiciones de equilibrio hidrostático en la dirección radial; éste se daría si  $\chi_0^2 = 0$ .

Con esta propuesta, las ecuaciones (15) y (16) se reducen a las formas:

$$OpV_\theta = 0, \quad OpV_\phi = 0, \quad (25)$$

$$Op = (u_\lambda - \frac{8}{9}\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{1}{9} + \frac{1}{\lambda} (u_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} - u_\theta \frac{\partial}{\partial \chi}).$$

Quiere decir que, bajo las condiciones de equilibrio hidrostático asumidas, las soluciones para  $V_\theta$  y para  $V_\phi$  son idénticas a menos de un factor constante. Es inmediato que este factor es  $\sigma_\theta$ :

$$V_\theta = \sigma_\theta V_\phi. \quad (26)$$

### 3.3. Aproximación Lineal

En este punto, la única ecuación necesaria para la obtención de la velocidad circular es (25). Como siguiente aproximación se propone expresar el operador  $Op$  en términos de los resultados de la aproximación radial:

$$Op \rightarrow Op^r = (u_\lambda^r - \frac{8}{9}\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{1}{9} + \frac{1}{\lambda} (u_\phi^r \frac{\partial}{\partial \phi} - u_\theta^r \frac{\partial}{\partial \chi}). \quad (27)$$

Definiendo la variable  $u$  como

$$u = \lambda^{-9/8}, \quad (28)$$

se encuentra que las soluciones de la ecuación diferencial

$$Op^r V_\phi = 0 \quad (29)$$

tienen la forma general

$$\begin{aligned} V_\phi^m &= A_m u^{1/9} (\cos^2 g(u))^{1/18} \exp \left[ \frac{\sigma_\lambda}{9\Omega_0} g(u) \right] \\ &\times \exp \left[ -K_m \left( \frac{16\sigma_\theta}{9\Omega_0} g(u) + \chi \right)^2 - im \left( \frac{16}{9\Omega_0} g(u) - \phi \right) \right], \end{aligned} \quad (30)$$

donde

$$g(u) = \tan^{-1} \left\{ \frac{2v_0 \chi_0^2 u - \sigma_\lambda}{\Omega_0} \right\} \quad (31)$$

y  $m$  es entero.

La constante  $K_m$ , cuando positiva, sirve para regular el grado de achatamiento del sistema hacia el plano de rotación, mientras que  $m$  da el número de brazos espirales.

## 4. FÓRMULA PARA EL AJUSTE

Se adopta una forma de la solución correspondiente a una estructura de  $m$  brazos espirales:

$$\begin{aligned} V_\phi &= A(u|\cos g|)^{1/9} e^{\frac{\sigma_\lambda}{9\Omega_0} g} e^{-K \left( \frac{16\sigma_\theta}{9\Omega_0} g + \chi \right)^2} \times \\ &\left[ 1 + B e^{-\beta \left( \frac{16\sigma_\theta}{9\Omega_0} g + \chi \right)^2} \cos \left\{ m \left( -\frac{16}{9\Omega_0} g + \phi + \phi_0 \right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Se propone la presencia de un fenómeno de pulsaciones, de manera que se hace el siguiente cambio en la frecuencia de las variaciones armónicas:

$$m \rightarrow m + \delta, \quad \delta \ll 1. \quad (33)$$

Por otro lado, se plantea que la solución de orden cero, con  $B = 0$ , representa el comportamiento medio de la velocidad circular correspondiente a  $\chi = 0$  (plano de simetría) e independiente de  $\phi$ , y que las fluctuaciones respecto de este valor medio están representadas por la solución de orden  $m$ , las cuales dependen de  $\chi$  y  $\phi$ , además de  $\lambda$ . A fin de simplificar el ajuste, se toma en estas fluctuaciones un valor medio  $\langle \chi \rangle = 1/2$ ; y con esta elección, los valores de  $v_0 \sigma_\theta$  corresponden al hemisferio superior  $0 \leq \chi \leq 1$ .

Con estas consideraciones y realizando el promedio en la variable angular  $\phi$ , la expresión resultante para la velocidad circular de rotación es la siguiente:

$$\begin{aligned} V_c = \langle V_\phi \rangle &= A(u|\cos g|)^{1/9} e^{\frac{\sigma_\lambda}{9\Omega_0} g} e^{-K \left( \frac{16\sigma_\theta}{9\Omega_0} g \right)^2} \times \\ &\left[ 1 + A_0 e^{-\beta \left( \frac{16\sigma_\theta}{9\Omega_0} g + \frac{1}{2} \right)^2} \cos \left( m \frac{16}{9\Omega_0} g + \varphi_0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Dada una tabla de datos para los valores de la velocidad circular de rotación,  $y$ , versus los valores de la distancia radial,  $x$ , la forma a usar para los ajustes es la siguiente:

$$\begin{aligned} f(u) &= a_1 (a_2 u |\cos g|)^{1/9} e^{a_3 g/9} e^{-a_6 g^2} \times \\ &\left[ 1 + a_8 e^{-a_7 (g - a_5)^2} \cos(a_4 g + a_9) \right], \end{aligned} \quad (35)$$

$$g = g(u) = \tan^{-1}(a_2 u - a_3),$$

$$u = u(x) = (x + a_{10})^{-9/8}.$$

El parámetro  $a_{10}$  es introducido para considerar la posibilidad de que los datos  $x$  no tengan como origen al centro de la distribución.

Finalmente, los parámetros físicos se obtienen a partir de los parámetros del ajuste con las relaciones:

TABLA 1

Parámetros obtenidos con los ajustes a las curvas de rotación. Los valores están dados para  $m = 2$  y  $\tau = 1$ . Excepto los indicados con '\*', que pertenecen a la base de datos *co-hi*, todos los demás corresponden a la base de datos *optical* [5].

Galaxia	$\sigma_\lambda$	$\sigma_\theta$	$v_0$	$\Omega_0$	$\chi_0^2$	$A$	$A_0$	$K$	$\beta$	$\varphi_0$
NGC 2590	-0,007	-0,1	15,7	0,2	0,01	362,7	-0,3	1,1	7,9	-29,4
NGC 2841	0,001	-0,06	12,3	0,2	0,01	430,6	-6,1	10,1	35,5	-30,7
NGC 3521	-0,01	0,02	-49,2	-0,06	0,001	291,5	$-2 \times 10^4$	7,5	243,3	-58,0
NGC 4448	-0,01	0,5	14,6	0,2	0,006	314,7	0,002	0,1	-0,7	-28,2
NGC 4527	-0,001	-1,2	15,7	0,1	0,006	230,5	0,06	0,005	-0,06	-29,4
NGC 4565	0,01	-0,03	15,0	0,1	0,004	320,8	$4 \times 10^{14}$	180,2	208,7	19,1
NGC 4569	-0,003	-0,04	13,0	0,2	0,007	376,0	$2 \times 10^{14}$	47,1	324,9	17,8
NGC 5033	-0,07	-0,06	3,0	0,2	0,01	496,0	$-3 \times 10^4$	9,4	286,3	-24,9
NGC 891*	-0,003	-0,07	15,4	0,2	0,007	295,9	-0,2	3,0	10,5	-30,1
NGC 1068*	0,001	-0,007	60,8	0,03	0,0003	279,9	$1 \times 10^{15}$	56,7	179,7	12,1
NGC 2841*	0,0006	-0,06	12,2	0,2	0,01	436,5	-6,1	10,0	37,1	-30,6
NGC 4527*	-0,001	0,2	23,2	0,1	0,004	235,7	0,05	-0,1	-1,2	-28,3

TABLA 2

Valores del parámetro  $a_{10}$  (en unidades de *kpc*) para los ajustes a las curvas de rotación de las galaxias de la Tabla 1.

NGC 2590	NGC 2841	NGC 3521	NGC 4448	NGC 4527	NGC 4565
2.9	1.9	1.8	2.4	2.2	2.6
NGC 4569	NGC 5033	NGC 891*	NGC 1068*	NGC 2841*	NGC 4527*
2.6	1.0	3.1	4.6	2.0	4.0

## 6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El modelo desarrollado se ajusta de modo razonable con los datos de curvas de rotación galácticas. Según éste, el comportamiento medio de la velocidad circular de rotación, con una forma empinada cerca del centro de la distribución y con una forma plana al alejarse luego de aquél, sería debido principalmente a la preponderancia de los movimientos polares de los elementos del fluido hacia y desde el plano de simetría galáctico en el primer caso, y al efecto contrario en el segundo, cuando, para valores suficientemente grandes de la variable radial  $\lambda$ , la forma plana es explicada por la lenta variación de la velocidad con tal variable, según  $\lambda^{-1/8}$ . Las fluctuaciones respecto de este comportamiento medio serían explicadas por dos efectos: el efecto de un fenómeno oscilatorio de pulsaciones provocado por las oscilaciones armónicas de las ondas de densidad que originan también los brazos espirales. La frecuencia de estas oscilaciones decrece con la variable radial según la forma de la función  $g(u)$  (ec. 31). Esta función se presenta como una variable natural del problema; la velocidad circular como función de  $g$  tiene oscilaciones armónicas de frecuencia constante, frecuencia cuyo valor está definido por el valor del parámetro  $\Omega_0$ . Según la Tabla 1, los valores de  $\Omega_0$  son del orden

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \left(\frac{m}{2}\right) \frac{32}{9a_4}, & \frac{v_0}{\tau} &= \left(\frac{m}{2}\right)^{-1} \frac{a_2 a_4}{2(1+a_3^2)}, \\ \sigma_\theta &= -\left(\frac{m}{2}\right) \frac{1}{a_4 a_5}, & \sigma_\lambda &= \left(\frac{m}{2}\right) \frac{32a_3}{9a_4}, \\ A &= a_1 a_2^{1/9}, & A_0 &= a_8, & \varphi_0 &= a_9, \\ K &= 4a_6 a_5^2, & \beta &= 4a_7 a_5^2. \end{aligned} \quad (36)$$

## 5. RESULTADOS

Se aplica la fórmula de ajuste (35) a datos de curvas de rotación obtenidas de las observaciones por Sofue Y. [5]. Los ajustes son realizados utilizando el método de Levenberg-Marquardt [4] con una precisión de  $10^{-3}$  % en el parámetro  $\chi^2$ . Estos datos junto con las correspondientes curvas de ajuste son mostrados en las figuras 1 y 2 para doce galaxias. Los parámetros obtenidos para estas galaxias están contenidos en la Tabla 1 y en la Tabla 2 se presentan los valores obtenidos para el parámetro  $a_{10}$ .

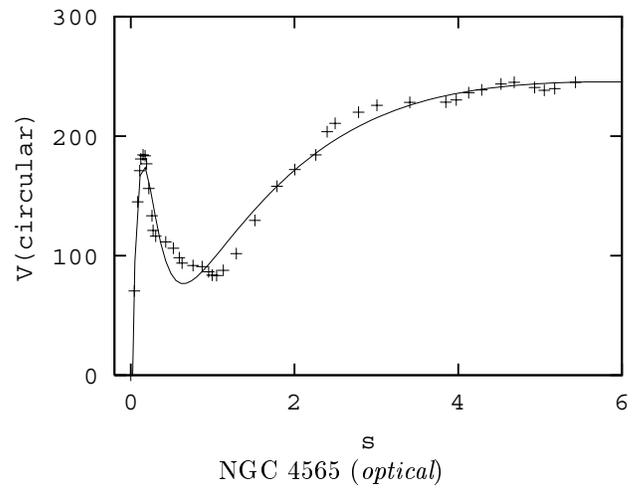
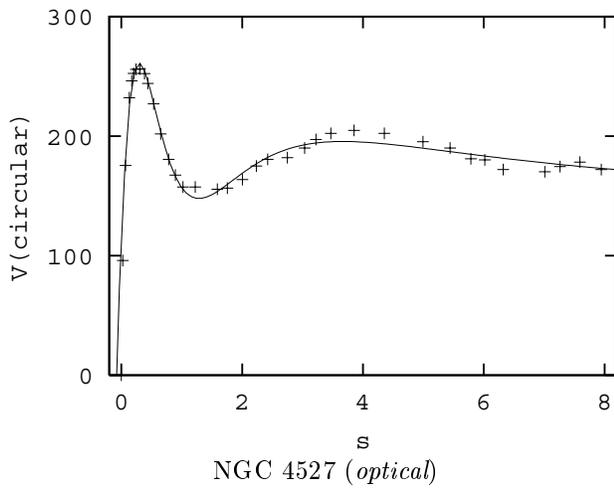
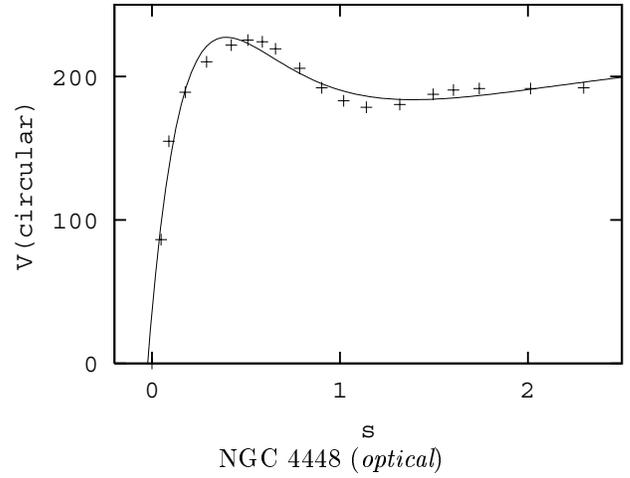
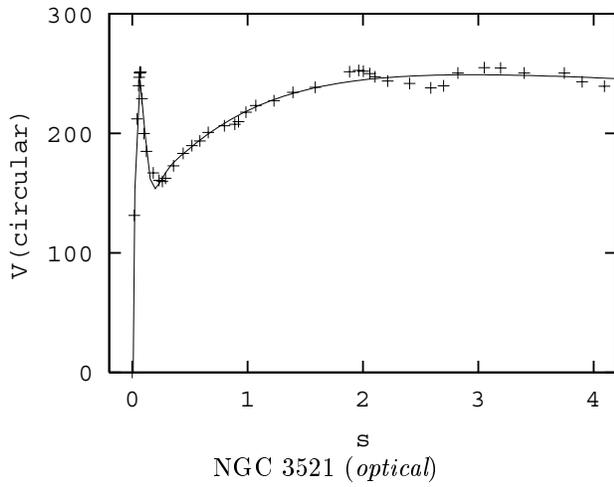
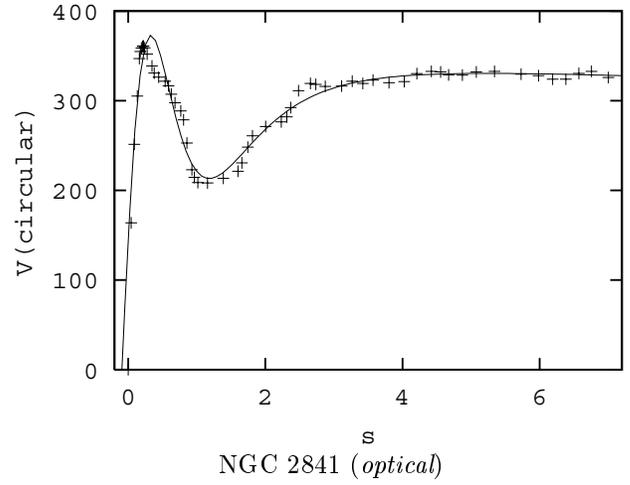
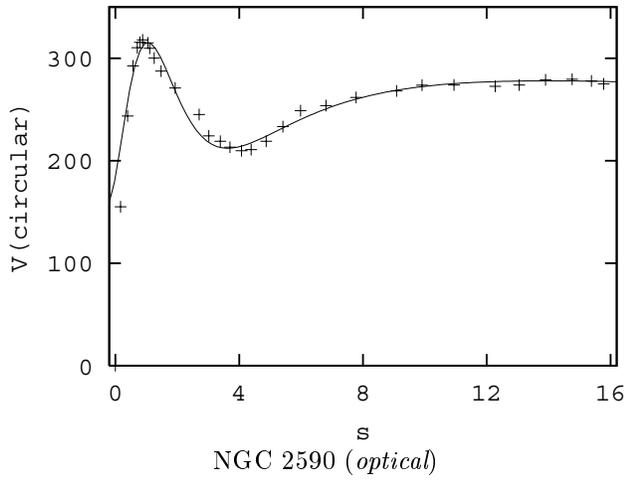


Figura 1. Datos de curvas de rotación y curvas de ajuste para distintas galaxias. Las unidades de la velocidad circular de rotación son  $km/s$ . 's' representa la variable radial y sus unidades son  $kpc$ . Se indica el tipo de datos utilizados, *optical* en estos casos [5].

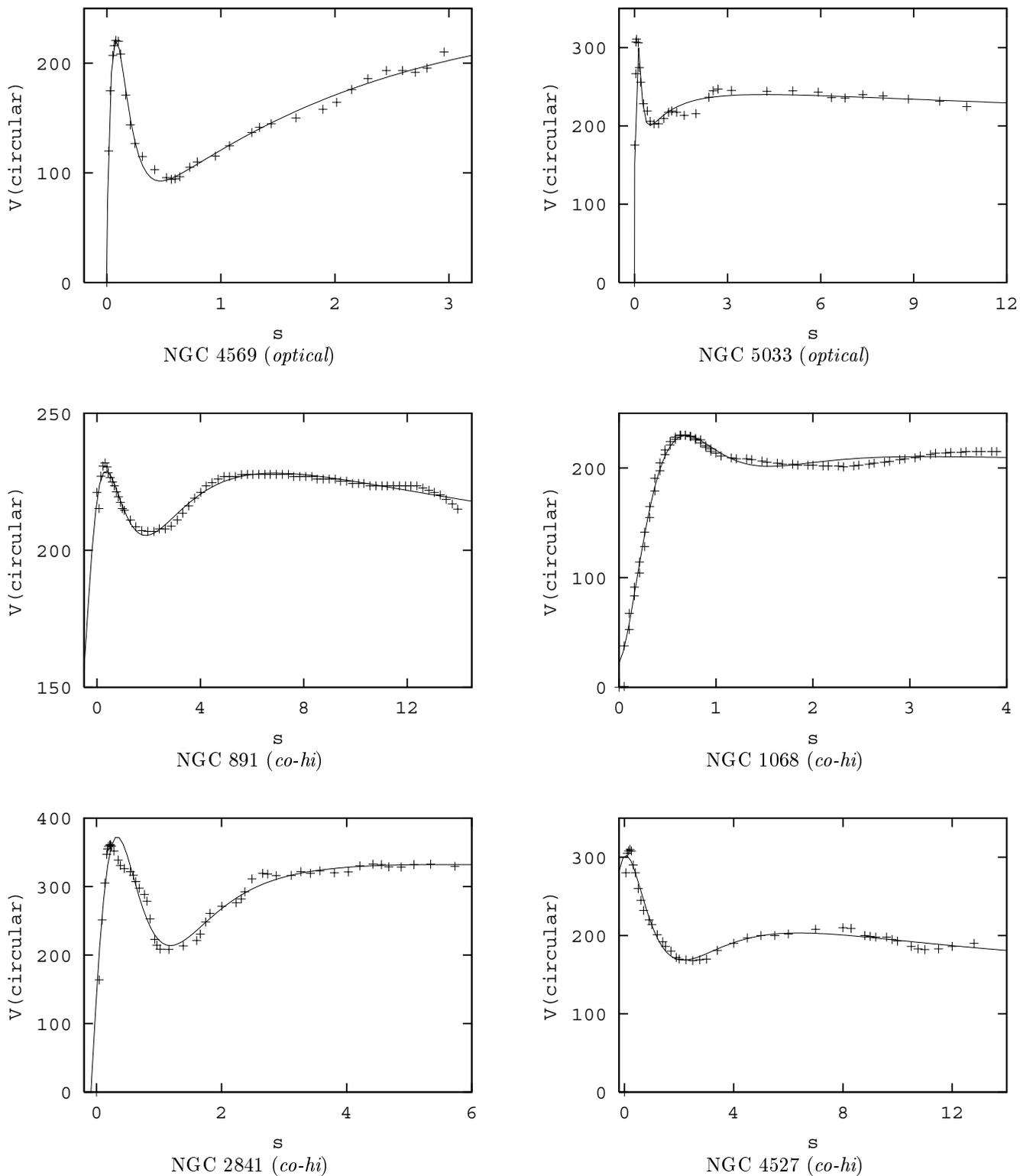


Figura 2. Datos de curvas de rotación y curvas de ajuste para distintas galaxias. Las unidades de la velocidad circular de rotación son  $km/s$ . 's' representa la variable radial y sus unidades son  $kpc$ . Se indica la el tipo de datos utilizados, *optical* o *co-hi* [5].

de 0,1 en casi todos los casos, lo cual tal vez permitiría sugerir que éste es un parámetro más o menos estable de una galaxia a otra. El otro efecto que explicaría las fluctuaciones estaría gobernado por los movimientos polares a través de una amplitud variable de las fluctuaciones oscilatorias. Esta amplitud, como función de  $g$  tiene una forma exponencial, de tipo creciente o decreciente en algunos casos, y de tipo gaussiano en otros. Se encuentra que a mayores valores del parámetro  $\sigma_\theta$ , que cuantifica el orden de magnitud de los movimientos polares respecto del movimiento circular, mayor es la amplitud de las oscilaciones. Los valores de  $\sigma_\theta$  no se muestran estables de una galaxia a otra; según la Tabla 1, en algunos casos el orden de la velocidad polar es cien veces menor que la velocidad circular y en otros llega a ser comparable a ésta.

Los valores de  $\sigma_\lambda$  mostrados en la Tabla 1 son, en general, menores que los de  $\sigma_\theta$ , y aun en el caso en que éstos son comparables, el efecto de los movimientos radiales es mucho menor al efecto de los movimientos polares en la estructura de las curvas de rotación estudiadas. Los bajos valores de  $\sigma_\lambda$  y  $\Omega_0$  determinan pequeños valores del parámetro  $\chi_0^2$ , lo que indicaría que el equilibrio hidrostático en la dirección radial en los objetos bajo estudio estaría establecido como muy buena aproximación.

En lo que se refiere al proceso de la obtención de los ajustes, éste es muy sensible a las variaciones de los valores de los parámetros y se dificulta por el alto número de parámetros a modificar. Como ejemplo se tienen los casos de dos galaxias, NGC 4527 y NGC 2841 para los cuales se disponían de ambos tipos de datos, *optical* y *co-hi*. En el primer caso se encuentran grandes diferencias en los valores de los parámetros para los ajustes a uno y otro tipo de datos (véase Tabla 1) a pesar de que los mismos se muestran razonables en las figuras

correspondientes (véanse figuras 1 y 2). En el segundo caso, por el contrario, se encuentra un excelente acuerdo entre los resultados de los ajustes de ambos tipos de datos. Finalmente, se encuentra un resultado no esperado en los ajustes realizados, pues el parámetro  $a_{10}$  que define el cero de la variable radial y por tanto debería tomar valores suficientemente pequeños, toma valores muy significativos en todos los casos (véanse la Tabla 2 y figuras 1 y 2). En este punto no se puede dar una explicación a este problema y queda como objeto de estudio posterior.

#### REFERENCIAS

- [1] Peebles, P. J. E. 1993, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton: Princeton University Press).
- [2] Bertschinger, E. 1985, *Ap. J. (Supplement Series)*, 58, 39.
- [3] Urzagasti, D. 2001, *Revista Boliviana de Física*, N°7, Vol.1, 34.
- [4] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., *Numerical Recipes in FORTRAN, Second Edition*, Cambridge University Press, 1992.
- [5] Sofue, Y., 1996, 1997. [www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/rotation/data.htm](http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/rotation/data.htm).
- [6] Burbidge, E. M., *The Evolution of Spiral Structure, Structure and Evolution of the Galaxy*, editado por L. N. Mavridis, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1971.
- [7] R. Cowsik & P. Ghosh, *Towards a Physical Model for Galactic Rotation Curves*, *J. Astrophys. Astr.* (1986), 7, 17-28.
- [8] Valluri, M., *Ap.J.*, 430; 101-106, 1994.
- [9] M. Ubriaco and J. Tharrats, *Ap & SS* (1984) 102, 81-95.
- [10] M. Petrou, *M.N.R.A.S.* (1983) 202, 1209-1219.
- [11] A. A. Kirillov and D. Turaev, *M.N.R.A.S.*, 371, L31-L35 (2006).
- [12] Catinella et al., *Template Rotation Curves for Disk Galaxies*, *Ap.J.*, v1, Dec 2005.

# CARACTERIZACIÓN DE MATERIAL MAGNÉTICO EN LAS PARTES DE LA ABEJA SIN AGUIJÓN *S. QUADRIPUNCTATA*: UN ESTUDIO POR RESONANCIA FERROMAGNÉTICA Y MAGNETOMETRÍA SQUID

Marcelo J. Lucano

Instituto de Investigaciones Físicas, UMSA

## RESUMEN

Material magnético en las partes de la abeja sin aguijón *Schwarziana quadripunctata*, cabeza, par de antenas, tórax y abdomen fueron investigados a través de magnetometría SQUID y Resonancia Ferromagnética (RFM). Las magnetizaciones de saturación  $J_S$ , remanencia  $J_R$  y campo coercivo son determinadas de las curvas de histéresis. A partir de los valores de  $H_C$  y  $J_R/J_S$  es estimado el tamaño de las partículas. El valor de  $J_S$  y el área de los espectros de absorción de RFM dan como resultado  $23 \pm 3\%$ ,  $45 \pm 5\%$ ,  $15 \pm 2\%$  y  $19 \pm 4\%$  de contribución de material magnético de la cabeza, par de antenas, tórax y abdomen, respectivamente; similar a aquellos observados en la hormiga migratoria *Pachycondyla marginata*. Este resultado es discutido a la luz de la hipótesis de la antena como estructura magnetoreceptora.

## 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos 30 años, desde la observación de magnetosomas conteniendo nanopartículas de magnetita biomineralizadas en la bacteria magnetotáctica (Blakemore 1975) varios estudios en diferentes campos han sido desarrollados con el propósito de entender la orientación geomagnética en los organismos. Experimentos comportamentales fueron realizados en diferentes especies de animales (Wiltschko & Wiltschko 1995; Vacha & Soukopalova 2004; Wiltschko et al. 2004) intentando comprender el mecanismo que envuelve este fenómeno. En particular, estudios extensivos en insectos se han enfocado en la abeja de miel *Apis mellifera*. La correlación entre el comportamiento de esta abeja y el campo geomagnético fue probado por primera vez en 1968 (Lindauer & Martin 1968). Posteriormente, material magnético fue observado en el cuerpo de esta abeja usando magnetómetros superconductores apuntando a un posible mecanismo conformado por minúsculas partículas actuando como un sensor magnético (Gould et al. 1978). Trofocitos conteniendo hierro fueron encontrados en el cuerpo de abejas adultas (Kuterbach & Walcott 1986), identificados como partículas de magnetita superparamagnética (SPM) (Hsu & Li 1994); sin embargo, este resultado no fue reproducido. Material electrónicamente denso encontrado en los pelos del abdomen de la abeja de miel fueron propuestos como partículas de magnetita monodominio (SD) o superparamagnética (SPM) (Schiff 1991) y una hipótesis de aprendizaje asociativo visual y magnético fue desarrollado (Schiff & Canal 1993). La presencia de partículas de hierro fue reportada por microscopía óptica y electrónica en los trofocitos de la abeja adulta sin aguijón *Scaptotrigona postica* (Cunha et al. 1987). Mas recientemente, fue propuesto que gránulos ricos en hierro encontrados en el cuerpo grasoso de las abejas reina *A. mellifera* e *S. postica* están formadas de moléculas de

holoferritina con fosfato inorgánico y calcio (y magnesio en la *S. postica*) con diámetros menores que aquellos descritos anteriormente en la literatura (Keim et al. 2002).

La motivación para la búsqueda de tal sensor magnético debería ser la confirmación de que el comportamiento de la especie es sensible al campo geomagnético. El primer paso es detectar y localizar las nanopartículas magnéticas como posibles magnetoreceptores, determinando sus propiedades magnéticas. El siguiente paso, más complejo, es entender el proceso fisiológico que esta envuelto en el mecanismo de magnetorecepción. Este parece ser el caso de la abeja *Schwarziana quadripunctata* para la cual los efectos del campo magnético fueron observados en la frecuencia de salida del nido (Nascimento et al. 2001). En este trabajo se presentan las medidas hechas a temperatura ambiente (TA) con las técnicas de magnetometría SQUID y Resonancia Ferromagnética en las partes del cuerpo de la abeja *S. quadripunctata*, apuntando a la existencia de un posible magnetoreceptor.

## 2. MÉTODOS Y MATERIALES

La abeja meliponini *S. quadripunctata* nativa de la Mata Atlántica fue colectada de su nido localizado bajo tierra en Teresópolis, Rio de Janeiro-Brasil, a una altura de 1000 m encima del nivel del mar e intensidad de campo geomagnético 0,238 Oe, inclinación  $-32^\circ$  y declinación  $-20^\circ 30'$ . Forrajeadoras adultas fueron colectadas en el verano de 2004 entre las 8 – 13 h, periodo de máxima actividad e óptimo rango de temperatura de vuelo ( $21-26^\circ\text{C}$ ) (Imperatriz-Fonseca & Darakjian 1994). Las abejas fueron colectadas vivas, colocadas en un refrigerador y después de una semana transferidas a un conservante de tejidos de cacodilato 0,1 M pH 7,4. Diez individuos fueron usados sin los miembros torácicos. Dos grupos de cuatro abejas cada uno fueron separados en

TABLA 1

Parámetros magnéticos de una abeja *S. quadripunctata*\* y partes de su cuerpo#.

	Entera (control)	Cabeza	Antenas	Tórax	Abdómen
$J_s$ ( $10^{-6}$ emu)	$3.3 \pm 0.4$	$1.1 \pm 0.3$	$2.1 \pm 0.3$	$0.7 \pm 0.3$	$0.9 \pm 0.5$
$H_c$ (Oe)	$43 \pm 15$	$32 \pm 8$	$130 \pm 5$	$44 \pm 18$	$90 \pm 20$
$J_r$ ( $10^{-7}$ emu)	$2.0 \pm 0.8$	$1.4 \pm 0.4$	$5 \pm 0.5$	$0.8 \pm 0.1$	$0.8 \pm 0.4$
$\chi$ ( $10^{-9}$ emu/Oe)	$-4.2 \pm 0.5$	$-2 \pm 0.2$	$+0.4 \pm 0.1$	$-3.6 \pm 0.2$	$-1.6 \pm 0.2$
$J_r/J_s$	$0.06 \pm 0.03$	$0.12 \pm 0.06$	$0.24 \pm 0.03$	$0.12 \pm 0.03$	$0.09 \pm 0.03$
Magnético %	—	$44 \pm 4\%$	$23 \pm 3\%$	$15 \pm 2\%$	$19 \pm 4\%^\ominus$
$S$ ( $10^8$ a u.)	—	$2.1 \pm 0.1$	$5 \pm 0.2$	$1.8 \pm 0.1$	$1.7 \pm 0.1$
FMR %	—	$47 \pm 3\%$	$20 \pm 1\%$	$16 \pm 1\%$	$16 \pm 1\%$

\* valor medio de dos abejas

# valor medio de cuatro partes

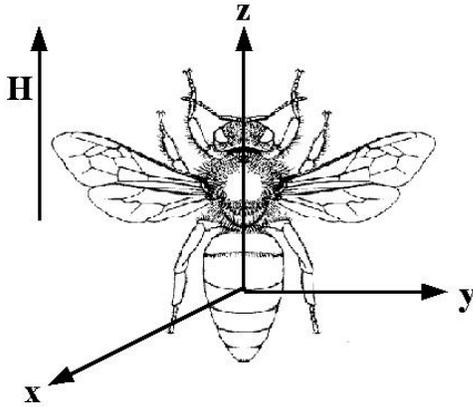
 $\ominus$  tomando el valor de  $J_s$  de las abejas de control, este valor se incrementa a 30 %

Figura 1. Orientación del insecto relativa al campo magnético.

cuatro partes: cabeza, par de antenas, tórax y abdomen para las medidas de SQUID y RFM. Para minimizar la contaminación, fueron utilizados instrumentos inoxidable. Fueron conservadas dos abejas enteras para medidas de control. Solo dos individuos enteros caben en el porta muestras para el magnetómetro SQUID. Antes de todas las medidas, las muestras fueron secadas a  $50^\circ\text{C}$  por una hora. Cuatro unidades de cada parte del cuerpo fueron orientadas una cerca de la otra y fijadas con cinta kapton y sobre un porta muestra de teflón para las medidas de SQUID y RFM respectivamente. Espectros de RFM en la banda-X (Bruker ESP 300E) con potencia de microonda de 4 mW y modulación de amplitud de campo de 2,018 Oe y curvas de histéresis (magnetómetro SQUID MPMS-XL Quantum Design) fueron obtenidos a temperatura ambiente con el campo magnético aplicado paralelo al eje largo del cuerpo del insecto, como mostrado en la Figura 1. Las áreas de los espectros de absorción de RFM (segunda integral de la derivada del espectro)

fueron calculadas con un programa desarrollado usando el lenguaje gráfico LabVIEW<sup>®</sup>, comenzando en campos altos, donde la línea de base está mejor definida.

### 3. RESULTADOS

Las curvas de histéresis presentan una línea recta con pendiente positiva o negativa en campos altos debida a la contribución paramagnética o diamagnética, respectivamente. La abeja entera, cabeza, tórax y abdomen presentan una contribución diamagnética (figura no mostrada) mientras que las antenas presenta una contribución

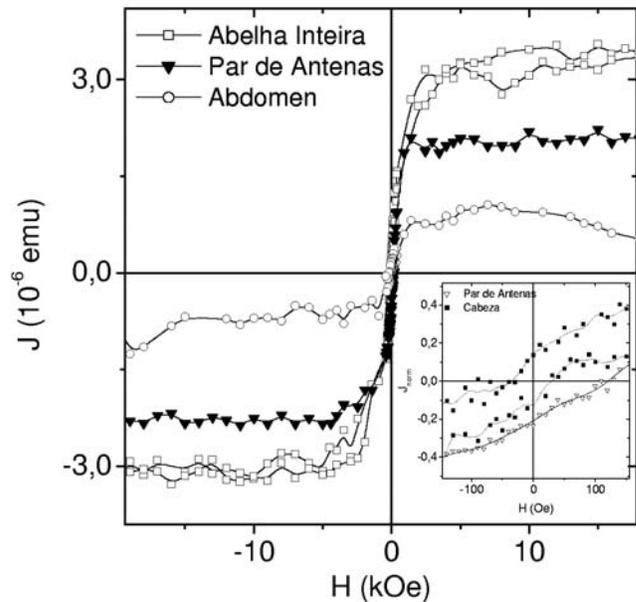


Figura 2. Curvas de histéresis a temperatura ambiente de la abeja entera *S. quadripunctata*, par de antenas y abdomen, orientadas paralelas al campo magnético, normalizadas a un individuo y a una parte. Detalle: región de campo bajo de la cabeza (línea punteada) y de las antenas (línea sólida) normalizadas a las curvas de histéresis.

paramagnética. Las susceptibilidades dia/paramagnéticas (Tabla 1) son obtenidas a través de un ajuste lineal de la curva en valores de campo magnético mayores que aquellos en que se alcanza la saturación ferromagnética y esta contribución es substraída. La Figura 2 presenta las curvas de histéresis a TA normalizadas a una parte y a un individuo, con la mayor contribución proveniente del par de antenas. Por claridad, las curvas del tórax y de la cabeza no se muestran y solo una parte de la curva de las antenas y del abdomen fueron medidas. Los valores de los parámetros magnéticos: magnetización de saturación  $J_S$ , magnetización remanente  $J_R$  y campo coercivo  $H_C$  obtenidos para cada parte del cuerpo y para una abeja están dados en la Tabla 1, incluyendo la razón  $J_R/J_S$ .

La media de la suma de los valores de  $J_S$  de cada parte,  $4,8 \pm 1,4 \cdot 10^{-6}$  emu, fue tomada para calcular la contribución porcentual de  $J_S$  como  $44 \pm 4\%$ ,  $23 \pm 3\%$ ,  $15 \pm 2\%$ ,  $19 \pm 4\%$ , para las antenas, cabeza, tórax y abdomen, respectivamente. Considerando las diferencias de contenido de material magnético entre los individuos y los errores experimentales, el total  $J_S$  está en buen acuerdo con la media  $J_S$  de las dos abejas usadas como control.

La región de campo bajo de las histéresis de la cabeza y de las antenas en la Figura 2, normalizadas a sus valores de  $J_S$ , están dados en el detalle. Las antenas presentan los valores mas altos de  $H_C$  (130 Oe) y razón  $J_R/J_S$  (0,09-0,12) en relación a las otras partes. Considerando la magnetita como el material de las partículas, el tamaño de las partículas en la antena están entre 0,037 y 0,10  $\mu\text{m}$ , mientras que las otras partes del cuerpo son aproximadamente 0,22  $\mu\text{m}$  (Ozdemir et al 2002).

La Figura 3 muestra los espectros de RFM de las partes del cuerpo de la abeja con el campo magnético orientado paralelo al eje largo del cuerpo. El diamagnetismo no contribuye en los espectros de RFM mientras que el paramagnetismo si y no puede ser substraído, como en el caso de las curvas de histéresis. El espectro de las cuatro partes presentan una componente ancha en campo alto CA (ancho de línea 550 – 900 Oe), centrado alrededor de 3000 Oe. La intensidad de la componente en CA de la antena es mayor que en las otras partes del cuerpo. Solo el espectro de la antena claramente presenta otra componente en campo bajo, CB, centrada alrededor de 1300 Oe. Los valores de las áreas de absorción  $S$ , (la segunda integral de la derivada de los espectros de RFM) de las partes de la abeja *S. quadripunctata* están dados en la Tabla 1.

Los valores de  $S$  calculados con el programa de aplicación WINEPR (Bruker) no son preciso cuando una componente se extiende a valores menores de campo cero, como en el caso del espectro de la antena. El programa especialmente desarrollado usado en este trabajo, corrige la suposición de campo de intensidad cero para el primer valor del campo, integrando de valores de campo alto a valores de campo bajo. Aun así, el valor de  $S$  de las antenas es un límite inferior debido a que la línea en CB esta incompleta y la contribución respectiva no

puede ser completamente calculada.

Los valores de  $S$  de las componentes CA a TA están relacionadas a la cantidad de material magnético, como mostrado por su relación lineal con la magnetización de saturación en el caso de las termitas (Oliveira et al. 2005). La correlación entre la intensidad integrada y la magnetización también fue observada en nanopartículas de Si dopadas con ferrihidrita (Seehra et al. 2001). Tomando  $S$  como proporcional al numero de spins resonantes en la muestra, los porcentajes de material magnético en cada parte son  $47 \pm 3\%$ ,  $20 \pm 1\%$ ,  $16 \pm 1\%$  y  $16 \pm 1\%$  en las antenas, cabeza, tórax y abdomen respectivamente. Estos valores están en buen acuerdo con aquellos dados arriba, obtenidos por magnetometria SQUID.

#### 4. DISCUSIÓN

La magnetorecepción es un mecanismo de percepción y transducción de campo usado para la orientación de un organismo. Dos hipótesis se han formulado para explicar este mecanismo: una considerando reacciones bioquímicas moduladas por el magnético y otra a través de la presencia de partículas magnéticas biogénicas que actúan como magnetosensores. Hasta el momento, mucho de lo que es conocido acerca de este mecanismo ha sido acumulado con experimentos comportamentales, propuestas teóricas y unos pocos estudios anatómicos y electrofisiológicos (Lohmann & Johnsen 2000). Los estudios recientes sugieren por lo menos el involucramiento de por lo menos dos tipos de receptores para obtener la in-

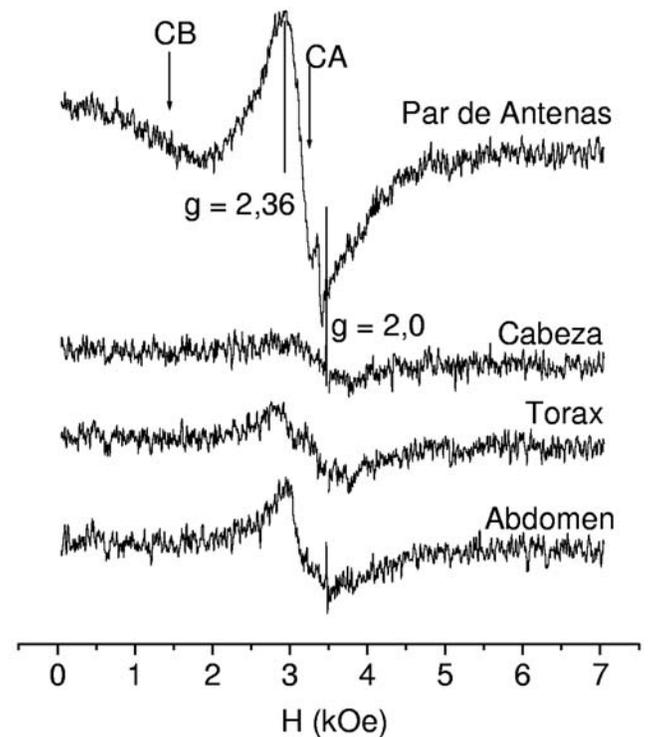


Figura 3. Espectros de resonancia ferromagnética a temperatura ambiente en la banda X de las partes de la abeja *S. quadripunctata*. Las líneas son guías para los ojos.

formación magnética, interactuando estos receptores de una forma compleja (Wiltschko et al. 2004). Partículas biogénicas de magnetita han ganado relevancia ya que su presencia ha sido reportada en varias especies de animales (Wiltschko & Wiltschko 1995; Safarik & Safarikova 2002), pero su conexión a estructuras nerviosas aun debe ser comprobada. A pesar de la dificultad de localizar estos diminutos magnetoreceptores, que pueden estar dispersos en cualquier lugar del cuerpo del animal, la magnetometría SQUID y RFM pueden ser utilizadas para caracterizar sus propiedades en algunos insectos sociales (Wajnberg et al. 2000; El-Jaick et al. 2001; Esquivel et al. 2002; Alves et al. 2004; Esquivel et al. 2004; Wajnberg et al. 2004; Oliveira et al. 2005a).

En este artículo, ambas técnicas fueron utilizadas para estudiar las partes del cuerpo de la abeja *S. quadripunctata*. Las componentes CA e CB de los espectros de RFM presentes en las partes de esta abeja ya han sido observadas en el abdomen de la abeja *A. mellifera* y hormiga *P. marginata* y han sido asociadas a nanopartículas de magnetita aisladas y agregadas respectivamente. (Wajnberg et al. 2000; El-Jaick et al. 2001). Más aun, las cantidades relativas de material magnético obtenidas a través de  $J_S$  y  $S$  están en buen acuerdo, confirmando la utilidad de las técnicas al comparar cantidades de material magnético a temperatura ambiente. El análisis conjunto del material magnético con ambas técnicas en todas las partes del cuerpo da como resultado  $23 \pm 3\%$ ,  $45 \pm 5\%$ ,  $15 \pm 2\%$  y  $19 \pm 4\%$  de contribución de material magnético de la cabeza, antenas, tórax y abdomen, respectivamente. Ambos resultados apuntan a una mayor cantidad de material magnético en las antenas.

Hasta donde se conoce este es el primer estudio de material magnético en todas las partes del cuerpo además de la abeja *Apis mellifera*, la más estudiada, además de observaciones de microscopía óptica y electrónica en abdómenes de la abeja *S. postica* (Cunha et al. 1987; Keim et al. 2002). Pocos resultados previos de RFM (Tagaki 1995), El-Jaick et al. 2001 confirmaron la presencia de material ferromagnético y paramagnético en abdómenes de la abeja *A. mellifera*, sin medir otras partes del cuerpo. Por otro lado, medidas magnéticas de abejas *A. mellifera* enteras (Oliveira et al. 2005a), partes del cuerpo (Tagaki 1995) y particularmente abdómenes (Esquivel et al. 2002) han mostrado la presencia de partículas magnéticas superparamagnéticas y más grandes o agregados en esta parte del cuerpo.

Los tamaños estimados de las partículas en el abdomen de la abeja *S. quadripunctata* ( $\sim 220$  nm) están en buen acuerdo con el rango de tamaño de 40 – 160 nm de los gránulos de hierro encontrados en otra abeja sin aguijón *S. postica* (Cunha et al. 1987), a pesar de haber sido observados gránulos de tipo ferritina como partículas electrodensas midiendo  $2,1 \pm 0,5$  nm en su abdomen (Keim et al. 2002). Debe darse especial atención a la contribución del material ingerido en el tórax y el abdomen, el cual no es biomineralizado, y puede ser la causa de la diferencia de tamaño y concentración de las na-

nopartículas en el abdomen. Por otro lado, el material de la cabeza y de las antenas solo puede ser el resultado de un proceso de biomineralización, que desde un punto de vista evolucionario puede producir partículas de tamaño y geometría más eficiente. También es interesante notar que la hormiga *Pachycondyla marginata*, cuyo comportamiento migratorio fue relacionado al campo geomagnético (Acosta-Avalos et al. 2001) muestra un resultado similar, con  $42 \pm 3\%$  de material magnético en las antenas (Wajnberg et al. 2004).

Hasta donde se conoce, no se han realizado experimentos que conciernan a las antenas como magnetoreceptores para la orientación, sin embargo, fue investigada la sensibilidad de cucarachas y pulgas con y sin antenas a campos electromagnéticos de microondas no uniformes, indicando que estos pueden detectar y responder a la radiación (Ondracek et al. 1976). A pesar de que no necesariamente existe un órgano o estructura específica para la magnetorecepción, las abejas poseen órganos sensoriales complejos, tales como antenas y ojos los cuales deben ser considerados. Las antenas por su vez están compuestas de millones de sensillas, las cuales están conectadas al sistema nervioso central (Dade 1994).

Hace más de una década, partículas de magnetita fueron encontradas en el abdomen de la abeja *A. mellifera* y se sugirió su uso para la orientación magnética (Kirschvink & Walker 1985); sin embargo, la elevada fracción y tamaño de material magnético biomineralizado encontrado en las antenas de la abeja sin aguijón *S. quadripunctata* lleva a especular este órgano como un órgano magnetoreceptor. Estos resultados preliminares deben ser corroborados con más estudios comportamentales y técnicas físicas de caracterización complementares para ser comparados con otras especies de insectos, cuyo comportamiento de orientación se sabe es influenciado por el campo geomagnético.

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco al grupo de Biofísica del Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), por la disponibilidad de los equipos de medición y las muestras.

## REFERENCIAS

- [1] **Acosta-Avalos D, Esquivel DMS, Wajnberg E, Lins de Barros HGP, Oliveira PS, Leal I.** 2001 Seasonal patterns in the orientation system of the migratory ant *Pachycondyla marginata*. *Naturwissenschaften* **88**, 343-6
- [2] **Alves OC, Wajnberg E, Oliveira JF, Esquivel DMS.** 2004 Magnetic material arrangement in oriented termites: a magnetic resonance study. *J Magn Res* **168**, 246-251  
**Blakemore R.** 1975 Magnetotactic Bacteria. *Science* **190**, 377-379
- [3] **Cunha MAS, Walcott B, Sesso A.** 1987 Iron-containing cells in the stingless bee *Scaptotrigona postica* Latreille (Hymenoptera, Apidae). Morphology and ultrastructure. In: Eder J, Rembold H, eds. *Chemistry and Biology of social insects*. Munchen: Verlag: 91.

- [4] **Dade, H. A.** 1994. Anatomy and Dissection of the Honeybee, Cardiff: International Bee Research Association.
- [5] **El-Jaick LJ, Acosta-Avalos D, Esquivel DMS, Wajnberg E, Linhares MP.** 2001 Electron paramagnetic resonance study of honeybee *Apis mellifera* abdomens. *Eur Biophys J* **29**, 579-586
- [6] **Esquivel DMS, Wajnberg E, Cernicchiaro G, Garcia BE, Acosta -Avalos D.** 2002 Magnetic material arrangement in *Apis mellifera* abdomens. *MRS Symposium Proceedings Series* **724**, N7.2.1
- [7] **Gould JL, Kirschvink JL, Deffeyes KS.** 1978 Bees have magnetic remanence. *Science* **201**, 1026-1028
- [8] **Hsu C-Y, Li C-W.** 1994 Magnetoreception in Honeybees. *Science* **265**, 95-96
- [9] **Imperatriz-Fonseca VL, Darakjian P.** 1994 Flight activity of *Schwarziana quadripunctata quadripunctata* (Apidea, Meliponinae): influence of environmental factors. Abstract. In: International Behaviour Ecology Congress, Nottingham (U.K.), 86
- [10] **Keim CN, Cruz-Landim C, Carneiro FG, Farina M.** 2002 Ferritin in iron containing granules from the fat body of the honeybees *Apis mellifera* and *Scaptotrigona postica*. *Micron* **33**, 53-59
- [11] **Kirschvink JL, Walker MM.** 1985 Particle-size considerations for magnetite-based magnetoreceptors. In: Kirschvink JL, Jones DS, MacFadden BJ, eds. *Magnetite Biomineralization and Magnetoreception in Organism. A new biomagnetism*. New York: Plenum Press: 243-254.
- [12] **Kuterbach DA, Walcott B.** 1986 Iron containing cells in the honey-bee (*Apis mellifera*). I. Adult morphology and physiology. *J Exp Biol* **126**, 375-387
- [13] **Lindauer M, Martin H** 1968. Die Schwereorientierung der Biene unter dem Einfluss des Erdmagnetfeldes. *Z Vergl Physiol* **60**, 219-243
- [14] **Lohmann KJ, Johnsen S.** 2000 The neurobiology of magnetoreception in vertebrate animals. *Trends Neurosc* **23** (4), 153-169
- [15] **Nascimento FS, Barbosa MA, Eizemberg R, Wajnberg E, Esquivel DMS.** 2001 Efeitos do campo geomagnético no comportamento de abelhas nativas da Mata Atlântica. Abstract. In: XIX Congresso Brasileiro de Etologia, Juiz de Fora (Br)
- [16] **Ondracek J, Zdarek J, Landa V, Datlov I.** 1976 Importance of antennae for orientation of insects in a non-uniform microwave electromagnetic field. *Nature* **260**, 522-523
- [17] **Oliveira JF, Wajnberg E, Esquivel DMS, Alves OC.** 2005 Magnetic resonance as a technique to magnetic biosensors characterization in *Neocapritermes opacus* termites. *J Magn Magn Mater* (in press doi:10.1016/j.jmmm.2005.03.078)
- [18] **Oliveira JF, Cernicchiaro GR, Winklhofer M, Dutra H, Oliveira PS, Esquivel DMS, Wajnberg E.** 2005a Comparative magnetic measurements in social insects. *J Magn Magn Mater* **289C**, 442-444
- [19] **Ozdemir O, Dunlop DJ, Moskowitz BM** 2002 Changes in remanence, coercivity and domain state at low temperature in magnetite. *Earth Planet Sc Lett* **194**, 343-358
- [20] **Safarik I, Safarikova M.** 2002 Magnetic nanoparticles and Biosciences. *Monatsh Chem* **133**, 737-759
- [21] **Schiff H.** 1991 Modulation of spike frequencies by varying the ambient magnetic field and magnetite candidates in bees (*Apis mellifera*). *Comp Biochem Physiol.* **100 A** (4), 975-985
- [22] **Schiff H, Canal G.** 1993 The magnetic and electric field induced by superparamagnetic magnetite in honeybees. *Biol Cybern* **69**, 7-17
- [23] **Seehra M.S., Punoose A., Roy P., Manivannan A.,** IEEE Trans Magn 37 (2001) 2207
- [24] **Takagi S.** 1995 Paramagnetism of honeybees *J Phys Soc Jpn* **64** (11), 4378-4381
- [25] **Vácha M, Soukopová H.** 2004 Magnetic orientation in the mealworm beetle *Tenebrio* and the effect of light. *J Exp Biol* **207**, 1241-1248
- [26] **Wajnberg E, Cernicchiaro G, Esquivel DMS** 2004. Antennae: the strongest magnetic part of the migratory ant. *Biometals* **17**, 467-470
- [27] **Wajnberg, E, Acosta-Avalos D, El-Jaick LJ, Abraçado L, Coelho JLA, Bazukis AF, Morais PC, Esquivel DMS.** 2000 Electron Paramagnetic Resonance study of the migratory ant *Pachycondyla marginata* abdomens. *Biophys. J* **78**, 1018-1023
- [28] **Wiltschko W, Wiltschko R.** 1995 Magnetic Orientation in Animals, Berlin: Springer-Verlag
- [29] **Wiltschko W, Gesson M, Stapput K, Wiltschko R.** 2004 Light Dependent magnetoreception in birds: interaction of at least two different receptors. *Naturwissenschaften* **91**, 130-134

## LAS CARACTERÍSTICAS DEL VIENTO EN EL VALLE DEL RÍO DE LA PAZ EN EL PERIODO 2003-2004: PARTE I, DESCRIPCIÓN

R. Torrez, F. Ghezzi, E. Palenque

*Laboratorio de Física de la Atmósfera  
Instituto de Investigaciones Físicas. Carrera de Física  
Universidad Mayor de San Andrés  
La Paz—Bolivia*

### RESUMEN

En el marco del proyecto: “Circulación atmosférica en el Altiplano Andino”, realizado en cooperación con el Instituto Meteorológico de Munich, de la Universidad de Munich (Alemania), se vienen registrando con una estación automática, una serie de parámetros meteorológicos en la región de Milluk’atu, en el valle del Río de La Paz, a una tasa de adquisición de 12 datos por hora. Con datos desde julio del año 2003 hasta junio de 2004 se han elaborado una serie de gráficos, que describen el comportamiento de los flujos de aire entre las regiones tropicales y el valle, y de este con la región altiplánica. El análisis muestra un influjo neto de masas de aire caliente y húmedo en ascenso por el valle durante el día, y un reducido reflujos de masas de aire seco y frío durante la noche.

### 1. INTRODUCCIÓN.

El valle de La Paz es el curso natural del Río Choqueyapu, que se origina en el monte Chacaltaya al norte de la ciudad, y que atraviesa ésta por la región de Aranjuez en la zona sud. Desde allí toma el nombre de Río de La Paz, y se interna por un estrecho valle de solo algunos kilómetros de ancho por los poblados de Valencia, Avirk’atu, Milluk’atu, etc. hasta confluír con otros ríos de origen andino similar, denominándose río Beni, y posteriormente río Madera, constituyéndose finalmente en un importante afluente del río Amazonas. El valle de La Paz, se torna entonces en un canal de interacción entre la región tropical y las tierras altas.

El proyecto “Circulación Atmosférica en el Altiplano Andino – Juipit’aya”, iniciado el año 2003, con una campaña de mediciones y sondeo atmosférico en varios pasos de montaña al oriente y occidente del altiplano, ha permitido detectar un importante influjo diurno de masas de aire tropicales hacia la región altiplánica, y un pequeño flujo de retorno en dirección opuesta durante la noche. Las mediciones que se efectuaron con globos sonda y aviones de aeromodelismo han permitido establecer un flujo de origen convectivo, localizándose la capa límite superficial aproximadamente a la altitud de los cerros que determinan el valle.

### 2. LAS SERIES TEMPORALES DE DATOS

El registro de datos se inicia con la campaña de mediciones en la región de Río Abajo, durante el inicio de la fase principal del proyecto; julio de 2003. En esta región, próxima al pueblo de Milluk’atu se instala una estación meteorológica con una tasa de adquisición de un registro por cada 5 minutos. Con pequeñas correcciones al tiempo del “datalogger” y algunos interrupciones por efecto

de mantenimiento, las series temporales son continuas hasta el presente, sin embargo, para este análisis sólo se ha considerado una serie anual, es decir hasta junio de 2004.

Las estaciones meteorológicas provienen de Fisher Instruments Co. de la República Federal de Alemania, son totalmente automáticas, constan de sensores de temperatura y humedad Vaisala, un radiómetro Kipp and Zonen, anemómetro y veleta Fisher, así como los sistemas de control de carga, adquisición de energía fotovoltaica, datalogger, caja recinto, soporte y sujeción del sistema de la misma compañía. El sistema tiene una autonomía de operación de 120 días para la tasa de adquisición mencionada, de manera que las descargas de datos se efectúan cada tres meses.

Las datos obtenidos han sido depurados, ordenados y compactados, habiéndose desarrollado un software específico para la observación y presentación de los registros. Una muestra de este trabajo permite observar las series temporales anuales de la temperatura y la velocidad del viento.

Así, por ejemplo, la figura 1 permite observar la variación de la temperatura diaria durante el periodo de observación. Puesto que el proyecto se inicia en el periodo invernal. La gráfica permite observar un ascenso regular de la temperatura hasta octubre, donde se presentan los máximos valores de la temperatura en todo el periodo. A partir de este mes y durante el verano, que en esta región es lluviosa, la temperatura oscila apreciablemente, y desciende ligeramente hasta el mes de marzo, que marca el fin de la época húmeda. Finalmente desciende hasta alcanzar sus valores mínimos durante el próximo invierno, en este caso, junio de 2004.

Se puede observar también las fluctuaciones de la

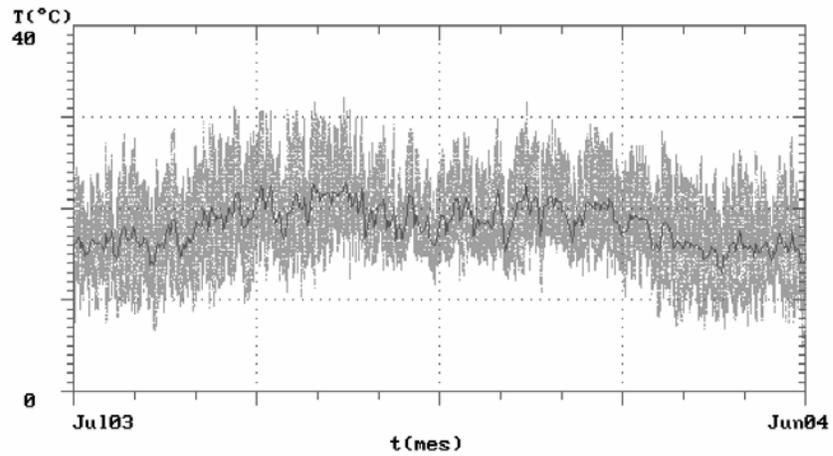


Figura 1. Registro de la temperatura en Milluk'atu durante el periodo julio 2003-junio 2004. El trazo remarcado corresponde a los valores medios diarios.

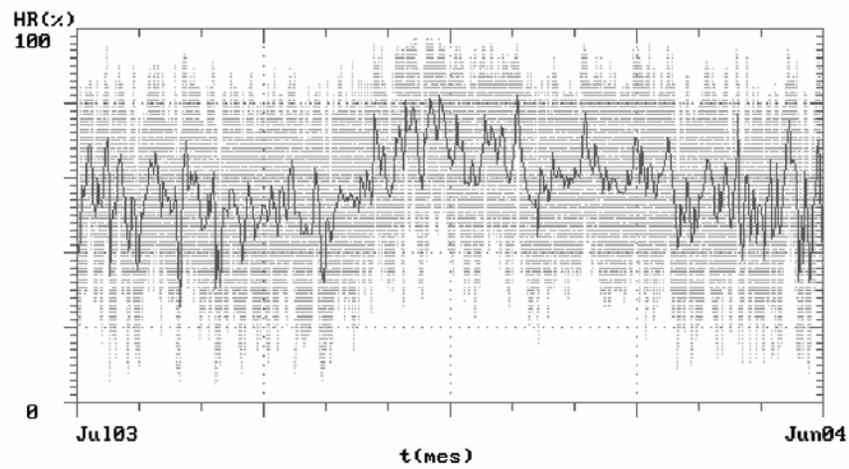


Figura 2. Registro de la humedad relativa. Se puede observar mayor variabilidad y el comportamiento inverso a la temperatura.

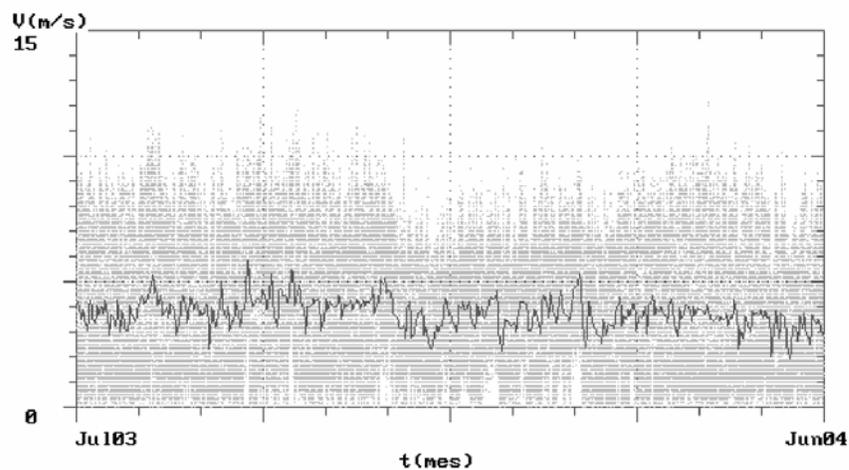


Figura 3. Variación de la velocidad del viento a lo largo del año, se puede observar una ligera reducción hacia el final del invierno.

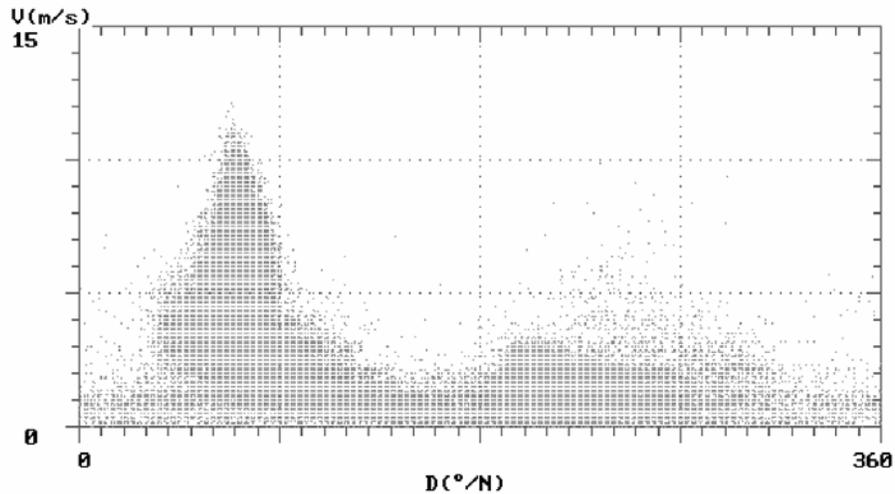


Figura 4. Velocidad del viento según su dirección. Se puede observar la predominancia del influjo diurno de viento hacia arriba del valle.

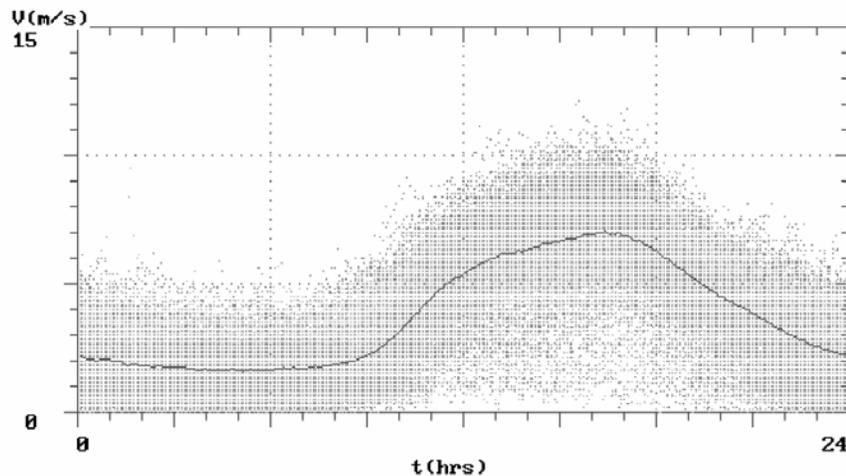


Figura 5. Variación de la Intensidad de viento diaria. Se puede observar que predomina el flujo diurno. El trazo continuo muestra la media instantánea de todo el periodo.

temperatura diaria en todo el periodo. Estas se presentan más o menos constantes en alrededor de  $8\text{ }^{\circ}\text{C}$ , con excepción del verano donde la fluctuación disminuye hasta aproximadamente  $6\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Por el contrario la humedad relativa presenta un comportamiento inverso, disminuye en el periodo primaveral hasta alcanzar sus valores mínimos estacionales, y sube rápidamente al iniciarse el verano alcanzando pronto sus valores máximos. A partir de este punto nuevamente desciende paulatinamente hasta valores similares a los iniciales. Sin embargo, la variabilidad de su comportamiento es más o menos constante y se sitúa alrededor del 10%.

En cuanto al comportamiento de los vientos; tal como se presentó en una primera evaluación (1), se observan dos flujos nítidamente diferenciados. Uno saliente del va-

lle hacia el altiplano, y otro de retorno muy débil.

Situaciones similares ya han sido caracterizados en varios lugares, por ejemplo: en el Gran Cañón en USA, en el altiplano Tibetano, y en algunas mesetas de menores dimensiones geográficas como la cuenca del lago Tekapo en Nueva Zelanda, y la meseta Zugspitzplatt en los Alpes. (2) También se han presentado explicaciones al respecto, por ejemplo; J. Hann (3) lo explica como resultado del calentamiento de la superficie adyacente a las elevaciones, las que aumentarían la presión en la columna de aire, dando lugar a un gradiente de presión hacia la meseta. H. Flohn empleando radiosondas determina un flujo hacia la meseta tibetana a una velocidad  $3.6\text{ m/s}$ , con una altura de capa de mezcla entre  $600$  y  $500\text{ hPa}$ .

La figura 3 muestra la variación de la intensidad de viento durante el periodo de análisis, se puede obser-

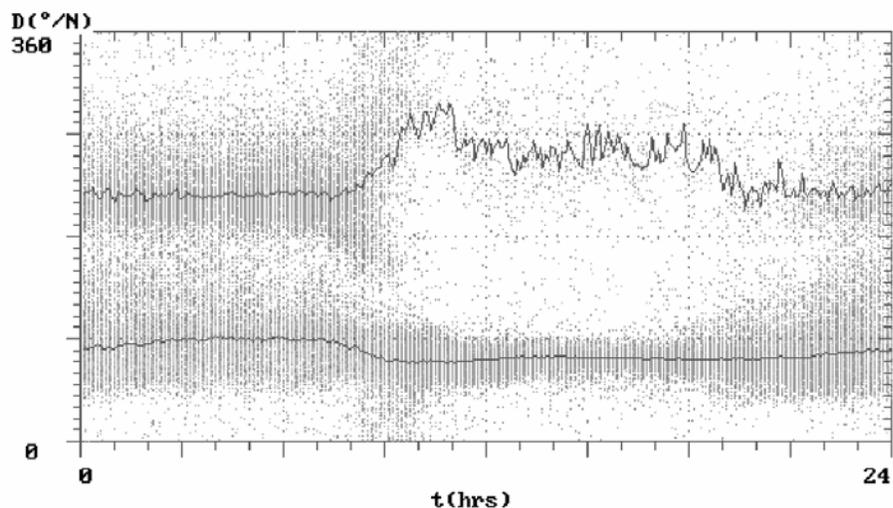


Figura 6. Direcciones predominantes del viento diario en la región de río Abajo. Se puede observar la predominancia del influjo saliente.

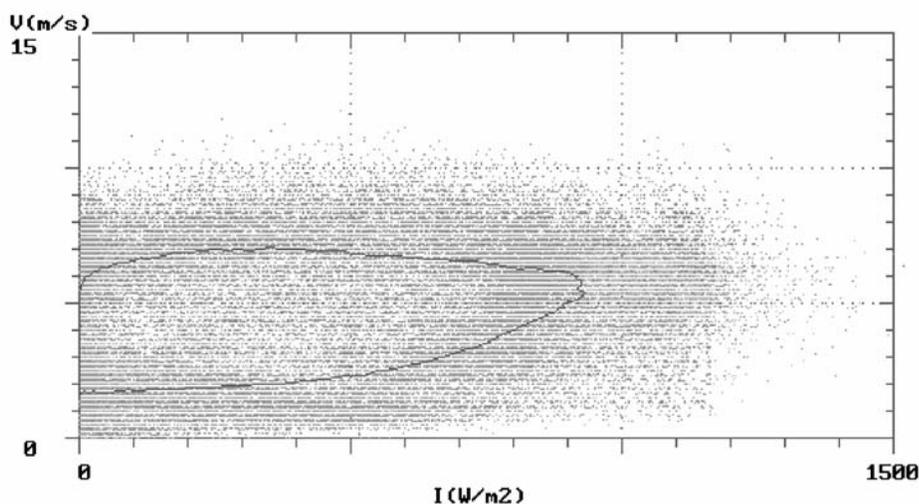


Figura 7. Variación de la velocidad del viento en función de la intensidad de la radiación solar incidente. El trazo continuo corresponde al comportamiento de sus valores medios.

var un régimen de viento casi constante durante todo el año con una media anual aproximada de 3 m/s, con una ligera disminución durante el verano, naturalmente este régimen de viento comprende las peculiares variaciones diarias en intensidad y dirección, de acuerdo a lo explicado anteriormente, de ahí que la variabilidad de la intensidad se extiende hasta aproximadamente los 8 m/s.

El régimen diario de la intensidad de viento es tal que se inicia con la salida del sol, por efecto del calentamiento de las capas inferiores, lo que ocasiona una inestabilidad de la capa superficial. Por los resultados de los experimentos de sondeo vertical de temperatura y humedad en esta región en los inicios del proyecto, Egger et.al (4). determinaron que la capa de mezcla se sitúa aproxima-

damente a 600 m de altitud sobre el fondo del valle, de tal manera que el régimen de viento sigue aproximadamente el curso del valle de este a oeste a nivel de valle, cambiando de orientación a la altitud aproximada de 600 m, para dirigirse hacia el sudoeste.

La variación diaria de intensidad del viento muestra claramente que la dirección predominante del viento corresponde al ciclo diurno. Mientras que el flujo inverso, se manifiesta por la noche, se puede observar que este reflujo no es exactamente contrario al influjo de subida, al parecer por efectos de subsidencia de nevado Illimani.

Se puede observar que las direcciones predominantes están centradas alrededor de 70 °N para el flujo saliente, mientras que el reflujo se sitúa alrededor de 120 °N. Por otra parte, como muestran las figuras 5 y 6, el flu-

jo saliente se manifiesta durante las 24 horas, aunque con menor intensidad durante la noche, mientras que el reflujó tiene carácter únicamente nocturno, y con una intensidad aún mucho menor. Un análisis simple permite determinar que no siendo la dirección del flujo inverso contrario al flujo diurno, se establece que puede estar siendo afectado por el descenso de las masas de aire proveniente de la cordillera del Illimani. Este pequeño flujo local debería estar orientado aproximadamente a  $250^{\circ}$ N, y tener una intensidad aproximada de 2.5 m/s.

Observando las gráficas de correlación entre la radiación solar y las otras variables meteorológicas, se puede establecer una dependencia directa de estas últimas, respecto de la primera.

Así por ejemplo la gráfica cruzada de la velocidad del viento contra la intensidad de la radiación solar muestra nítidamente una forma geométrica perfectamente definida, al igual que la humedad y la presión contra la radiación solar, en especial para los días claros.

Por la ley de números grandes, el comportamiento estadístico de una muestra sometida a perturbaciones aleatorias, dará como resultado en el límite de grandes datos, un comportamiento cada vez más próximo al comportamiento libre de perturbaciones.

Este el caso de los días de cielo completamente limpio. El flujo de viento es completamente regular, la temperatura sigue una variación uniforme, lo mismo que la humedad relativa.

### 3. CONCLUSIONES

Por todo lo analizado, se establece que el influjo de viento de las tierras bajas hacia el valle y posteriormente hacia la meseta altiplánica, tiene como causa principal, a la radiación solar.

Se establece asimismo la existencia de un débil flujo de retorno, como un efecto posterior aún no bien determinado.

### REFERENCIAS

- [1] Torrez R., et.al. Microclima de la región de Rio Abajo. Periodo Invierno-Primavera de 2003
- [2] Wagner A. Hangwind Ausgleichsstromung Berg und Talwind. Meteorzeitschrift, 49.209-217, 1932
- [3] Hann J. Lehrbuch der Meteorologie. Tauchnitz, Leipzig, 446-453, 1915
- [4] Egger J. Valley wind and the diurnal circulation over Plateaus. Monthly Wether Review, 115,2177'

# ANÁLISIS DEL ALGORITMO CUÁNTICO DE FACTORIZACIÓN DE SHOR

C. L. Mayda<sup>1</sup>, J. A. C. Nogales<sup>2</sup>, G. M. Ramírez<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Carrera de Informática Universidad Mayor de San Andrés

<sup>23</sup>Instituto de Investigaciones Físicas Universidad Mayor de San Andrés. Casilla 8635, La Paz-Bolivia

## RESUMEN

Se presenta un análisis del algoritmo de factorización cuántica de Shor en base a pseudo-simulaciones y se explica la comparación con el correspondiente algoritmo clásico.

### 1. INTRODUCCIÓN

Independientemente del tipo de datos que utilice la computadora y de lo complejos que puedan parecer, estos datos solo existen como unos o ceros a los cuales se denominan *bits* (dígito binario). El bit es la unidad mínima de información que puede ser representado por uno de dos diferentes estados, los cuales pueden ser no o si, falso o verdadero, o simplemente 0 ó 1.

El transistor ha podido representar de manera eficiente (ahorro de energía y fiabilidad) los valores del bit. Sin embargo, el nivel de miniaturización de éste componente está llegando a su límite, donde el umbral cuántico se hace presente y los componentes de las computadoras tendrán que reconocer leyes que escapan a la intuición clásica y en las cuales se introduce el *qubit* o bit cuántico.

Análogamente a la computación clásica, el qubit es la unidad mínima de información y puede ser representado por cualquier sistema cuántico (átomos, fotones, etc.) con dos estados discretos cuya notación es  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  (notación de brakets<sup>4</sup>). Sin embargo, a diferencia del bit, el qubit puede existir en una superposición de estados, es decir que puede estar en una superposición de 0 y 1 al mismo tiempo. En la Fig. 1 se puede observar la representación gráfica de un qubit con cuatro estados diferentes.

La superposición de estados está representada por:

$$\Psi = a \cdot |0\rangle + b \cdot |1\rangle,$$

donde  $a$  y  $b$  son números complejos tales que satisfacen la igualdad  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Siendo  $|a|^2$  la probabilidad de observar el valor  $|0\rangle$  y  $|b|^2$  la probabilidad de observar el valor  $|1\rangle$  [2]. Es decir, que al querer observar la información del qubit, este toma el valor de 0 ó 1 con cierta probabilidad. (Fig. 2)

La superposición de estados puede ser explicado de la siguiente manera:

- (1) Desde un punto de vista físico, el qubit es un vector unitario bidimensional en un espacio vectorial

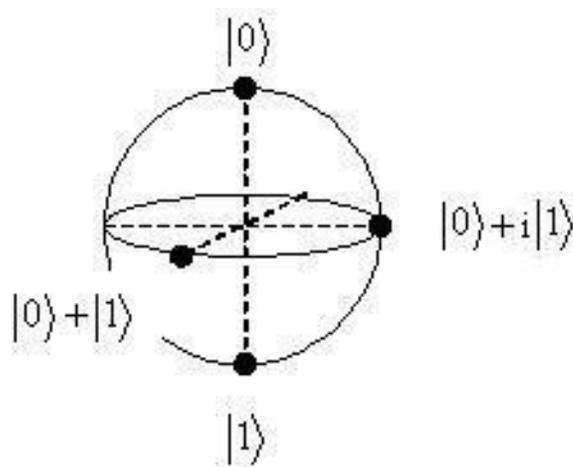


Figura 1. Representación gráfica de cuatro estados de un qubit [1].

complejo, el cual tiene como base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$\text{qubit} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (2) En el álgebra de kets y bras, los *kets* forman un espacio vectorial, donde los elementos del vector son lineales

$$|V\rangle = a_1 |v_1\rangle + a_2 |v_2\rangle + \dots + a_n |v_n\rangle.$$

- (3) Puesto que el qubit es un vector cuya notación está dada por  $|\psi\rangle$  (un *ket*), entonces de (1) y (2) se tiene que los elementos del qubit son lineales, es decir:

$$|\text{qubit}\rangle = a |0\rangle + b |1\rangle,$$

obteniendo así el estado superpuesto del qubit.

El artículo explora primeramente algunos conceptos importantes en la Sec. 2; en la Sec. 3, se plantea el problema de factorización y se explica el algoritmo cuántico de Shor con un análisis previo del correspondiente algoritmo clásico. Asimismo, se muestran los resultados obtenidos en términos de tiempos de ejecución tanto del algoritmo clásico como de la pseudo-simulación del algoritmo cuántico. Finalmente, en Sec. 4 se dan las conclusiones y perspectivas del trabajo.

<sup>1</sup>e-mail: claudiamayda@gmail.com

<sup>2</sup>e-mail: jnogales@hotmail.com

<sup>3</sup>e-mail: gramirez@ulb.ac.be

<sup>4</sup>El álgebra de kets  $|\rangle$  y bras  $\langle|$  fue introducida por Dirac especialmente para la mecánica cuántica.

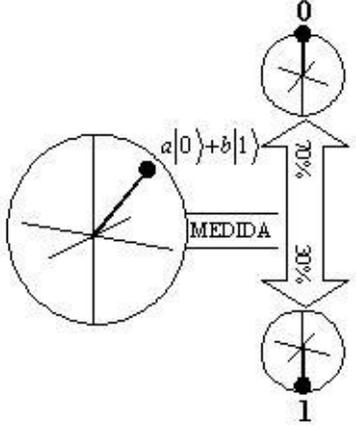


Figura 2. Superposición de estados de un qubit con sus respectivas probabilidades de medida.

## 2. CONCEPTOS DE COMPUTACIÓN CUÁNTICA

Para poder comprender el análisis del algoritmo cuántico, es necesario tener en claro algunos conceptos que se detallan a continuación.

### 2.1. Múltiples qubits

Hasta ahora se ha visto la superposición cuántica en un solo qubit, sin embargo, se puede utilizar esta superposición en valores múltiples. A manera de ejemplo, consideremos un registro clásico de tres bits, el cual en un momento dado puede almacenar uno de los ocho valores siguiente:

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.$$

A diferencia del registro clásico, un registro de tres qubits puede almacenar en un momento dado y simultáneamente los ocho valores anteriores en una superposición cuántica:

$$\Psi = c_0 |000\rangle + c_1 |001\rangle + c_2 |010\rangle + c_3 |011\rangle + c_4 |100\rangle + c_5 |101\rangle + c_6 |110\rangle + c_7 |111\rangle.$$

Adicionando más qubits al registro, la capacidad de almacenamiento crece exponencialmente, es decir, si tres qubits almacenan 8 valores diferentes, 4 pueden almacenar 16, 5 almacenan 32 y así sucesivamente. En general,  $L$  qubits pueden almacenar  $2^L$  números diferentes al mismo tiempo [3]. La mecánica cuántica explica la superposición de estos valores mediante el producto tensorial ( $\otimes$ ). Sean dos espacios vectoriales  $V$  y  $W$  bidimensionales con bases  $\{v_1, v_2\}$  y  $\{w_1, w_2\}$  respectivamente; aplicando el producto tensorial se tiene como base:

$$\{v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, v_2 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2\}.$$

De la misma manera, consideremos dos qubits, cada uno con base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ; realizando la misma operación se tiene:

$$\{|0\rangle, |1\rangle\} \otimes \{|0\rangle, |1\rangle\} = \{|0\rangle \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes |0\rangle, |1\rangle \otimes |1\rangle\}.$$

De manera más compacta  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ . Se obtienen así, las cuatro combinaciones superpuestas ( $2^L = 4$ ) al mismo tiempo [2].

En general, la superposición de estados está dada por [4]:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} a_i |S_i\rangle,$$

donde  $a_i$  son números complejos. Puesto que  $|a_i|^2$  es la probabilidad de medir u observar el estado  $|S_i\rangle$  se cumple que  $\sum_i |a_i|^2 = 1$ .

### 2.2. Paralelismo cuántico

En muchas aplicaciones ejecutadas actualmente con computadoras, es necesario procesarlas a un gran velocidad, puesto que en muchos casos, es preciso obtener el resultado con un tiempo de respuesta lo más corto posible [5]. Actualmente, el procesamiento en paralelo es una forma eficaz de procesar la información, siendo los procesos paralelos los que se producen en diferentes recursos durante el mismo intervalo de tiempo [6]. Haciendo uso de la superposición de estados de los qubits, la computación cuántica ofrece un nuevo enfoque para ejecutar procesamiento en paralelo, donde no es necesario agregar procesadores a la máquina, solo es necesario un sistema de qubits es cido para poder obtener el procesamiento en paralelo (Fig. 3). A manera de ejem-

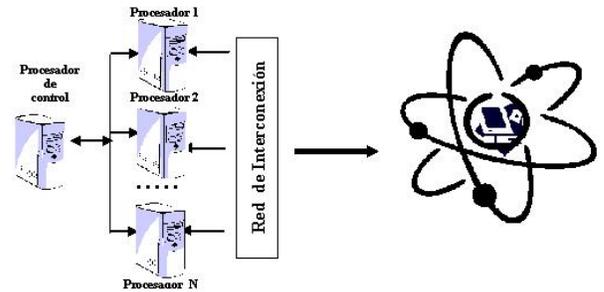


Figura 3. Arquitectura matricial (mod [5]) versus computación cuántica (arquitectura RMN).

plo, se puede considerar un bit al cual se le aplica una función booleana  $f$ :

$$f : x \rightarrow f(x)$$

Puesto que el bit sólo puede ser representado por uno de los dos estados (0 ó 1), es necesario aplicar la función  $f$  dos veces ó utilizar dos procesadores trabajando en paralelo.

$$f : 0 \rightarrow f(0)$$

$$f : 1 \rightarrow f(1)$$

A diferencia del bit, un qubit puede existir en una superposición de estados cuántico:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

y por linealidad de mecánica cuántica la función  $f$  se aplica una sola vez a los dos valores superpuestos 0 y 1.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |f(0)\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |f(1)\rangle.$$

De manera similar, la Fig. 4 muestra cómo se aplica una función  $g$  a un registro de dos qubits, la cual tiene cuatro valores de entrada superpuestos con sus respectivas probabilidades  $c_0, c_1, c_2, c_3$ . En este caso, la función  $g$  evalúa los cuatro valores superpuestos en una sola iteración, lo que su homóloga lo haría en cuatro pasos o utilizando cuatro procesadores en paralelo. Lo mismo sucede si se tiene  $L$  qubits en una superposición cuántica con  $2^L$  valores de entrada; la función  $g$  se aplica a estos valores en un solo paso computacional, evitando así repetir el mismo proceso  $2^L$  veces o utilizar  $2^L$  diferentes procesadores trabajando paralelamente.[3]

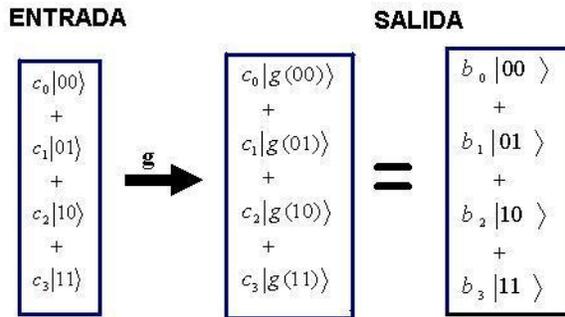


Figura 4. Paralelismo cuántico de un registro de dos qubits [3].

### 2.3. Compuertas cuánticas

Los estados superpuestos de un registro de qubits sólo pueden ser modificados mediante transformaciones unitarias las cuales son utilizadas como compuertas cuánticas. Existe una gran variedad de compuertas cuánticas cuya propiedad es la reversibilidad -se puede obtener el valor de entrada mediante el valor de salida- la cual hace que difieran en mucho de las compuertas clásicas. En este artículo, sólo se hará referencia a la *compuerta de Hadamard* y a la *transformada discreta de Fourier* ya que estas son utilizadas en el algoritmo de factorización cuántico.

#### 2.3.1. La transformada de Hadamard ( $H$ )

La compuerta de Hadamard transforma un registro de qubits en una superposición coherente de estados, según [2]

$$H : \begin{aligned} |0\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \\ |1\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned}$$

Aplicando  $H$  a  $n$  qubits individuales en estado  $|0\rangle$ , se crea una superposición de todos los  $2^n$  estados posibles,

obteniendo así la representación binaria [2] de 0 a  $2^n - 1$ <sup>5</sup>

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle.$$

#### 2.3.2. La Transformada Discreta de Fourier ( $TDF_q$ )

La  $TDF_q$ , es definida como una transformación unitaria en  $q$  dimensiones [7] la cual se denota por:

$$TDF_q : |a\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{c=0}^{q-1} \exp\left(\frac{2\pi ac}{q}\right) |c\rangle$$

La  $TDF_q$  transforma el estado  $|a\rangle$  a un nuevo estado  $|c\rangle$ , para algún  $a$  en el rango  $0 \leq a < q$ , donde el número de qubits de  $q$  es polinomial. Así, un estado con periodo  $r$  se transforma a otro con periodo  $q/r$  [7]

## 3. ALGORITMO DE FACTORIZACIÓN

El algoritmo de factorización ha llamado la atención de varios científicos debido a que los sistemas criptográficos basan su seguridad en la dificultad de factorizar números grandes.

En 1994, es publicado el artículo "Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring" [8], en el cual muestra un nuevo enfoque del algoritmo de factorización, donde se combinan ingeniosamente los principios de la mecánica cuántica con la teoría de números.

El algoritmo de factorización cuántico es fundamental en el avance de la computación cuántica, puesto que con el desarrollo del mismo, la investigación en este campo comenzó a tomar mayor importancia, debido a que este algoritmo pone en riesgo los sistemas criptográficos actuales. Considerando que es un algoritmo con un tiempo de ejecución polinomial, factorizaría un número de 1024 dígitos (número de dígitos que generalmente se usan en sistemas criptográficos) en 4.5 minutos, lo que a su análogo clásico le tomaría 300 millones de años [9].

A continuación se presenta un análisis en base a ejemplos del algoritmo de factorización cuántico con un previo análisis del algoritmo clásico.

#### 3.1. El problema

El problema de factorización se puede resumir en que dado un número impar no primo, se deben encontrar los dos factores primos de  $N$ ,  $fac1$  y  $fac2$  tales que:

$$N = fac1 \cdot fac2.$$

Para poder hallar estos factores, el algoritmo cuántico difiere en mucho del clásico; sin embargo, el análisis del algoritmo clásico permitirá comprender mejor el algoritmo cuántico.

<sup>5</sup>Para más detalles ver ejemplo 2.

### 3.2. Algoritmo clásico

Dado un número  $N$  impar no primo, este algoritmo consta de los siguientes pasos:

- (i) Seleccionar un  $y < N$  tal que  $y$  sea coprimo de  $N$ , es decir,  $\text{mcd}(y, N) = 1$ .<sup>6</sup>
- (ii) Calcular el orden  $r$  de  $y \bmod N$ .
- (iii) Si  $r$  es par y  $y^{r/2} \not\equiv -1 \pmod{N}$ , entonces:  $x = y^{r/2}$ ; caso contrario volver a (i).

1. Calcular los dos factores primos:  
 $\text{fac1} = \text{mcd}(x + 1, N)$   
 $\text{fac2} = \text{mcd}(x - 1, N)$ .

La probabilidad de obtener con éxito los dos factores de  $N$  esta dada por[7]:

$$\text{Prob} \left( r \text{ sea par y } y^{r/2} \not\equiv \pm 1 \pmod{N} \right) \geq 1 - \frac{1}{2^{k-1}},$$

donde  $k$  es el número de factores primos de  $N$ .

A manera de ejemplo, tomemos  $N = 55$  (impar no primo).

1. En este caso los valores de  $y$  coprimos a  $N$  son:  $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 13, \dots, 54\}$  de los cuales tomamos uno al azar, digamos,  $y = 9$ .
2. Debemos hallar el orden  $r$  de  $9 \bmod 55$ . Para esto, se hará uso de la siguiente definición de teoría de números.

“Suponiendo que el  $\text{mcd}(y, N) = 1$ , entonces el orden  $r$  de  $y \bmod N$  es la menor potencia de  $y$  congruente a 1 mod  $N$  ( $y^r \equiv 1 \pmod{N}$ )” [7].

Puesto que  $y = 9$  y sus potencias son:

$$\{9^1, 9^2, 9^3, 9^4, \dots, 9^{10}, \dots\} = \{9, 81, 729, 6561, \dots, 3486784401, \dots\}$$

y cuyos valores de congruencia están dadas por ( $y^i \bmod 55$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$\{9, 26, 14, 16, 34, 31, 4, 36, 49, 1, 9, 26, \dots\},$$

se puede ver que la menor potencia de  $y$  congruente a 1 mod 55 es  $9^{10}$ , es decir  $9^{10} \equiv 1 \pmod{55}$ . En consecuencia  $r = 10$ . En otras palabras, el primer  $y^i \bmod N = 1$  es  $y^{10} \bmod 55$  de donde se obtiene  $r = 10$

3. Dado que  $r$  es par y  $9^{10/2} \not\equiv -1 \pmod{55}$ ,  $x = 9^{10/2} = 59049$ .

En el caso que  $r$  fuera par, pero  $y^{r/2} \equiv -1 \pmod{55}$ , el método falla, debido a que se obtienen factores triviales (1 ó -1); por lo que se tiene que volver a elegir un nuevo  $y$ ; de la misma manera, si  $r$  es impar.

<sup>6</sup>Para obtener eficientemente el mcd (máximo común denominador), se puede hacer uso del algoritmo de Euclides.

4. Lo que resta hallar, son los dos factores primos de 55, los cuales se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= 59049 \\ \text{fac1} &= \text{mcd}(59050, 55) = 5 \\ \text{fac2} &= \text{mcd}(59048, 55) = 11, \end{aligned}$$

donde claramente se puede ver que 5 y 11 son los dos factores primos de 55.

### 3.3. Algoritmo cuántico de Shor

Basado en el algoritmo clásico de factorización, Peter Shor describe un algoritmo cuántico del cual halla el orden  $r$  de  $y \bmod N$  en tiempo polinomial, es decir requiere  $\text{poly}(\log N)$  pasos en su ejecución [7].

Aunque este algoritmo es relativamente complicado, es muy interesante para analizar el nuevo enfoque que la mecánica cuántica da la computación.

A continuación se presenta paso a paso dicho algoritmo, mostrándose las diferencias existentes entre el algoritmo clásico y cuántico, así como las características principales del algoritmo cuántico.

En primer lugar se hará uso de dos registros, uno de  $L$  qubits y otro de  $L'$  qubits de longitud

$$\Psi = |L\rangle |L'\rangle;$$

el primer registro permitirá determinar el orden  $r$  de  $y \bmod N$  y el segundo servirá como auxiliar.

**Paso 1.** Hallar  $L$  y  $L'$ .

Para esto, se escoge un  $q = 2^L$ <sup>7</sup> tal que  $N^2 \leq q < 2 \cdot N^2$  [4].  $L'$  se obtiene hallando la longitud de  $N-1$  en binario [11].

**Ejemplo 1.** Para ver la diferencia con el algoritmo clásico, tomemos nuevamente  $N = 55$  y  $y = 9$ .

Para obtener  $L$ , tomemos  $q = 2^{12} = 4096$ , valor que pertenece al rango  $55^2 \leq q < 2 \cdot 55^2$ , es decir, que la desigualdad  $3025 \leq 4096 < 6050$  se cumple. Dado que  $q = 2^{12}$ ,  $L = 12$ .<sup>8</sup>

El valor de  $L'$  debe ser capaz de almacenar de 0 a 54 en binario, entonces como  $54 = 110110$ ,  $L' = 6$ .

**Paso 2.** Una vez obtenidos  $L$  y  $L'$ , se debe poner la máquina en una superposición de estados cuántica. Para esto, se deben preparar los registros  $L$  y  $L'$  en estado  $|0\rangle$  y luego aplicar la transformada de Hadamard al primer registro, con lo cual se obtiene el siguiente estado de superposición [7].

<sup>7</sup>La elección de  $q$  como potencia de 2 es para asegurar que la  $TDFq$  sea ejecutada eficientemente [7], es decir que se pueda aplicar en un paralelismo cuántico masivo.

<sup>8</sup>Para fines de la reproducción del algoritmo cuántico, el valor de  $L$  se obtuvo de la relación  $L = \frac{\ln(2 \cdot N^2)}{\ln 2}$ , considerando el rango al que pertenece  $q$ .

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=0}^{q-1} |a\rangle |0\rangle, \quad (1)$$

donde  $a$  representa los números binarios de 0 a  $q-1$ .

**Ejemplo 2.** Para ver como se obtiene el estado de superposición (1), en primer lugar, consideremos un registro con solo dos qubits, los cuales estan en estado  $|0\rangle$  [10].

Sabemos que la compuerta de Hadamard ( $H$ ) transforma cada qubit de la siguiente manera:

$$H : |0\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle),$$

aplicando esta compuerta a los dos qubit, el registro cambia a un estado superpuesto de cuatro valores distintos, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) = \\ & \frac{1}{\sqrt{2^2}} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = \\ & \frac{1}{\sqrt{2^2}} \sum_{a=0}^{2^2-1} |a\rangle = \\ & \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=0}^{q-1} |a\rangle. \end{aligned}$$

Donde 00 es el binario de 0, 01 binario de 1, 10 de 2 y 11 de 3. (Para fines de ejemplificación se tomarán números enteros).

De la misma manera, se aplica  $H$  a los 12 qubits del primer registro del ejemplo 1.

$$\Psi = \underbrace{|000000000000\rangle}_{L=12 \text{ qubits}} \underbrace{|000000\rangle}_{L'=6 \text{ qubits}}$$

Obteniendo así, la superposición deseada con  $2^{12} - 1$  valores superpuestos.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2^{12}}} (|0, 0\rangle + |1, 0\rangle + |2, 0\rangle + \dots + |4095, 0\rangle) = \\ & \frac{1}{\sqrt{2^{12}}} \sum_{a=0}^{2^{12}-1} |a\rangle |0\rangle. \end{aligned}$$

**Paso 3.** Calcular la función  $y^a \bmod N$  para cada valor de  $a$  entre 0 y  $q-1$  y almacenar este valor en el segundo registro:

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=0}^{q-1} |a\rangle |y^a \bmod N\rangle \quad (2)$$

A diferencia del algoritmo clásico, que calcula esta función de manera secuencial, el algoritmo cuántico lo hace en una sola iteración, en un paralelismo cuántico másivo, aplicando la función a cada valor de  $a$  al mismo tiempo. (Para más detalles ver Sec. 2).

**Ejemplo 3.** Teniendo en cuenta el estado del ejemplo 2,

$$\frac{1}{\sqrt{2^{12}}} (|0, 0\rangle + |1, 0\rangle + |2, 0\rangle + \dots + |10, 0\rangle + \dots + |4095, 0\rangle).$$

Vamos a calcular la función  $9^a \bmod 55$  para cada valor de  $a$  de 0 hasta 4095.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2^{12}}} (|0, 9^0 \bmod 55\rangle + |1, 9^1 \bmod 55\rangle + \dots + \\ & |10, 9^{10} \bmod 55\rangle + \dots + |4095, 9^{4095} \bmod 55\rangle) \end{aligned}$$

teniendo como resultado:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{4096}} (|0, 1\rangle + |1, 9\rangle + |2, 26\rangle + \dots + \\ & |9, 49\rangle + \dots + |10, 1\rangle + \dots + |4095, 34\rangle) = \\ & \frac{1}{\sqrt{4096}} \sum_{a=0}^{4095} |a\rangle |9^a \bmod 55\rangle. \end{aligned}$$

Se nota que los valores obtenidos en el segundo registro son los mismos que los valores de congruencia obtenidos en el algoritmo clásico; con la gran diferencia que los 4096 valores se obtienen en una sola iteración.

Observando el registro y siguiendo la lógica del algoritmo clásico, se diría que  $r = 10$ , obteniendo de esta manera el orden de la función. Sin embargo, si se quiere observar este resultado, por principios de mecánica cuántica, el estado (2) colapsa a un nuevo estado, en donde la información del orden  $r$  se encuentra inmersa. En este sentido, existe otra manera para obtener el resultado, la cual se explica a continuación.

**Paso 4.** Al querer obtener el orden  $r$  del estado (2), este produce un valor  $k$  que es el resultado de alguna potencia de  $y \bmod N$ , es decir,  $k = y^{a_0} \bmod N$  para algún valor menor  $a_0$  (cualquier potencia de  $y \bmod N$  puede ser observada).

En consecuencia el nuevo estado colapsado estará dado por:[7].

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{A+1}} \sum_{d=0}^A |a_0 + d \cdot r, k\rangle,$$

donde  $A$  es el entero más grande menor que  $\frac{q-a_0}{r}$  y  $a_0 \leq r$ .

Para fines de cálculo,  $M = A + 1$ , teniendo como resultado:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{d=0}^{M-1} |a_0 + d \cdot r, k\rangle \quad (3)$$

Donde  $M$  es la longitud de la serie:

$$a_0, a_0 + r, a_0 + 2 \cdot r, \dots, a_0 + (M - 1) \cdot r$$

y se puede obtener de la equivalencia  $M \approx \frac{q}{r}$  [12].

Por otro lado, si  $r$  es el orden de  $y$  mod  $N$ , entonces se cumple que: [7].

$$y^{a_0} \equiv y^{a_0 + d \cdot r}$$

para todo  $d$  desde 0 hasta  $M - 1$

**Ejemplo 4.** Continuando con nuestro ejemplo, veamos lo que sucede al querer observar  $r$  en el estado (2)

$$= \frac{1}{\sqrt{4096}} (|0, 1\rangle + |1, 9\rangle + |2, 26\rangle + |3, 14\rangle + |4, 16\rangle + \dots + |10, 1\rangle + \dots + |4095, 34\rangle).$$

Suponiendo que se obtuvo  $k = 16$  (aunque se puede obtener otro valor),

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{410}} (|4, 16\rangle + |14, 16\rangle + |24, 16\rangle + \dots + |4094, 16\rangle),$$

es decir,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{410}} \sum_{d=0}^{410-1} |4 + d \cdot 10, 16\rangle.$$

Fácilmente se puede ver que  $a_0 = 4$ . Para verificar que  $r = 10$  y  $M = 410$ , comprobemos que  $y^{a_0} \equiv y^{a_0 + d \cdot r} \pmod{N}$ , que no es más que verificar que para un  $r$  dado se cumple:  $\text{mod}(y^{a_0}, N) = \text{mod}(y^{a_0 + d \cdot r}, N) \forall d$  entre 0 y  $M$

es decir, verificar si el residuo de ambas potencias es el mismo. En este caso, se tiene:

$$\text{mod}(9^4, 55) = 16.$$

Entonces se debe comprobar si para un  $r$  dado la igualdad  $\text{mod}(9^4, 55) = \text{mod}(9^{4+d \cdot r}, 55)$  se cumple. En la Tab. 1, se puede observar algunos ejemplos que se tomaron para obtener el valor de  $r$ . Como se puede ver, se realizaron los calculos pertinentes y se verificó que para valores de  $r = 1, 2, \dots, 8, 9, 11, \dots$  la igualdad no se cumple, sin embargo, para  $r = 10$  la igualdad es verdadera, en consecuencia se demostró que el  $r$  buscado es igual a 10. Finalmente, con  $r = 10$  se tiene:

$$M = \frac{q}{r} = \frac{4096}{10} \approx 410$$

**Paso 5. Transformada Discreta de Fourier.** Una vez obtenido el estado (3), lo que se debe hacer es obtener  $r$  (valor inmerso en este estado). Para esto, Peter Shor propuso aplicar la  $TDF_q$  al estado (3), siendo el corazón de este algoritmo, ya que permite obtener la periodicidad (el orden  $r$ ) a partir de una distribución de probabilidades.

Como se vió en Sec.2, la  $TDF_q$  transforma un estado  $|a\rangle$  a un nuevo estado  $|c\rangle$ ,

$$TDF_q : |a\rangle \rightarrow \frac{1}{q^{1/2}} \sum_{c=0}^{q-1} \exp\left(\frac{2\pi i a c}{q}\right) |c\rangle.$$

Aplicando la  $TDF_q$  al estado (3) se tiene:

$$TDF_q |\Phi\rangle = \frac{1}{q^{1/2}} \sum_{c=0}^{q-1} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{d=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi i (a_0 + d r) c}{q}\right) |c, k\rangle$$

y realizando algunas operaciones en función de  $c$  y  $d$ ,

$$TDF_q |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{qM}} \sum_{c=0}^{q-1} \sum_{d=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi i (a_0 + d r) c}{q}\right) |c, k\rangle$$

y

$$TDF_q |\Phi\rangle = \sum_{c=0}^{q-1} \frac{\exp(2\pi i c \cdot a_0 / q)}{\sqrt{qM}} \sum_{d=0}^{M-1} \exp\left(2\pi i \frac{c d r}{q}\right) |c, k\rangle.$$

Finalmente se tiene:

$$TDF_q |\Phi\rangle = \sum_{c=0}^{q-1} \frac{e^{2\pi i c \cdot a_0 / q}}{\sqrt{qM}} \left( \sum_{d=0}^{M-1} \zeta^d \right) |c, k\rangle$$

con  $\zeta = e^{2\pi i c / q}$  [12].

**Ejemplo 5.** Tomando en cuenta el análisis del Paso 5 y aplicando la  $TDF_q$  al estado (3) del Ej. 4,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{410}} \sum_{d=0}^{410-1} |4 + d \cdot 10, 16\rangle,$$

se tiene como resultado:

$$TDF_q |\Phi\rangle = \sum_{c=0}^{4095} \frac{e^{2\pi i c \cdot 4 / 4096}}{\sqrt{4096 \cdot 410}} \left( \sum_{d=0}^{409} \zeta^d \right) |c, 16\rangle$$

con  $\zeta = e^{2\pi i c \cdot 10 / 4096}$

**Paso 6.** Al aplicar la  $TDF_q$  al estado (3), el nuevo estado estará gobernado por una distribución de probabilidades, la cual esta dada por:[7]

$$Prob(c) = \frac{r}{q^2} \left| \sum_{d=0}^{q/r-1} \exp\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot d \cdot (r \cdot c \pmod{q})}{q}\right) \right|^2$$

Con  $M = \frac{q}{r}$  se tiene:

$$Prob(c) = \frac{1}{q \cdot M} \left| \sum_{d=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot d \cdot (r \cdot c \pmod{q})}{q}\right) \right|^2 \quad (4)$$

TABLA 1

Valores obtenidos que comprueban que  $r = 10$  es el orden de  $y \pmod N$ .

$\text{mod}(9^{4+d \cdot r}, 55)$	d=1	d=2	d=3	d=4	d=5	...	d=409
$r = 1$	34	31	4	36	49	...	14
$r = 2$	31	36	1	26	16	...	26
...	...	...	...	...	...	...	...
$r = 8$	26	1	36	31	16	...	31
$r = 9$	14	26	9	1	49	...	34
<b><math>r=10</math></b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>...</b>	<b>16</b>
$r = 11$	34	31	4	36	49	...	14
...	...	...	...	...	...	...	...

Donde  $\text{Prob}(c)$  es la probabilidad de obtener cualquier valor de  $c$  entre 0 y  $q - 1$ .

Dado que existe ciertos valores de  $c$  los cuales tienen una mayor probabilidad de ser observados, estos son cercanos a los múltiplos de  $q/r$  y cumplen con la relación:[8]

$$-\frac{r}{2} \leq r \cdot c \pmod q \leq \frac{r}{2} \tag{5}$$

Hay precisamente  $r$  valores de  $c \pmod q$  que satisfacen la ecuación y la probabilidad de ver un estado  $c$  será de al menos  $1/3 \cdot r^2$ . [8]

**Ejemplo 6.** La Fig.5 muestra la distribución de probabilidades para nuestro ejemplo. Donde los valores de  $c$  y sus probabilidades son:

$c$ : 0, 410, 819, 1229, 1638, 2048, 2458, 2867, 3277, 3686.

$\text{prob}(c)$ : 0,100, 0,057, 0,087, 0,087, 0,057, 0,100, 0,057, 0,087, 0,087, 0,057.

Como se podrá observar, los valores de  $c$  con mayor probabilidad son cercanos a los múltiplos de 410 ( $\frac{q}{r} = 409,6$ ) y hay exactamente 10 ( $r = 10$ ) valores de  $c$  que cumplen con la relación (5).

A manera de ejemplo, veamos si  $-\frac{r}{2} \leq r \cdot c \pmod q \leq \frac{r}{2}$  se cumple para  $c=1638$  y  $c=2458$ .

En el caso de  $c=1638$  se tiene:

$$-\frac{10}{2} \leq 10 \cdot 1638 \pmod{4096} \leq \frac{10}{2}$$

$$-5 \leq -4 < 5.$$

En este caso, se tiene un valor negativo (-4), con esto se puede notar que la relación de desigualdad hace referencia a valores congruentes tanto negativos como positivos.

Para  $c=2458$  se tiene:

Distribución de Probabilidades

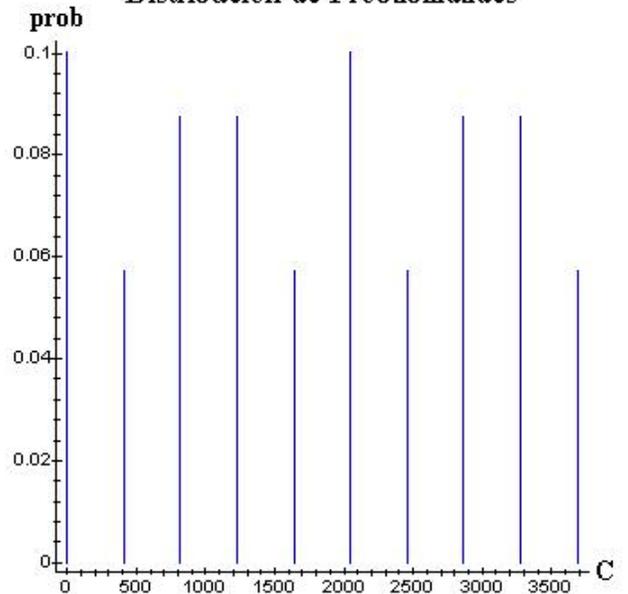


Figura 5. Distribución de probabilidades para  $N=55$ , con  $q = 4096$  y  $r = 10$ .

$$-\frac{10}{2} \leq 10 \cdot 2458 \pmod{4096} \leq \frac{10}{2}$$

$$-5 \leq 4 < 5.$$

En ambos casos se comprueba la desigualdad.

**Paso 7.** Una vez obtenido los valores de  $c$ , se escoge uno aleatoriamente y se halla un valor  $d$  el cual debe satisfacer la relación:

$$-\frac{1}{2q} \leq \frac{c}{q} - \frac{d}{r} \leq \frac{1}{1q}$$

Para algún  $d$  entre  $0 \leq d \leq r - 1$ .

La fracción  $\frac{d}{r}$  puede ser hallada eficientemente usando la expansión de fracciones continuas de  $\frac{c}{q}$  como uno de sus convergentes.

**Ejemplo.7** Para nuestro ejemplo, tomemos  $c=2458$  para hallar  $\frac{d}{r}$  mediante la expansión de fracciones continuas.

$$\frac{c}{q} = \frac{2458}{4096} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{409}}}}}$$

cuyas convergentes son:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} &= 1 \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} &= \frac{2}{3} \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} &= \frac{3}{5} \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{409}}}}} &= \frac{1229}{2048} \end{aligned}$$

De aquí se tiene que  $\frac{d}{r} = \frac{3}{5}$ , ya que el denominador no excede a 55 ( $N = 55$ ).

El orden  $r$  de  $y$  mod  $N$  es un múltiplo de  $r = 5$ . La Tab. 2 muestra como se comprueba la igualdad  $y^a \equiv 1$ ,

TABLA 2

Múltiplos de 5 con los cuales se comprueba que  $r = 10$ .

$a$	$y^a \bmod N = 9^a \bmod 55$
5	34
<b>10</b>	<b>1</b>
15	34

donde  $a$  es un múltiplo de 55. Obteniendo así el orden  $r$ , el cual nos permitirá obtener los dos factores primos de 55.

$$\begin{aligned} x &= y^{r/2} = 9^{10/2} = 59049 \\ \text{fac1} &= \text{mcd}(59050, 55) = 5 \\ \text{fac2} &= \text{mcd}(59048, 55) = 11 \end{aligned}$$

### 3.4. Tiempos de ejecución

Una forma de comparar los resultados que se obtienen utilizando ambos algoritmos, es obtener los tiempos de ejecución [13]: estos se muestran en las Figs. 6 y 7 para los casos clásico y cuántico respectivamente.

Como se puede observar en la Fig 6, en promedio, el tiempo de ejecución crece con el número  $N$  a factorizar.

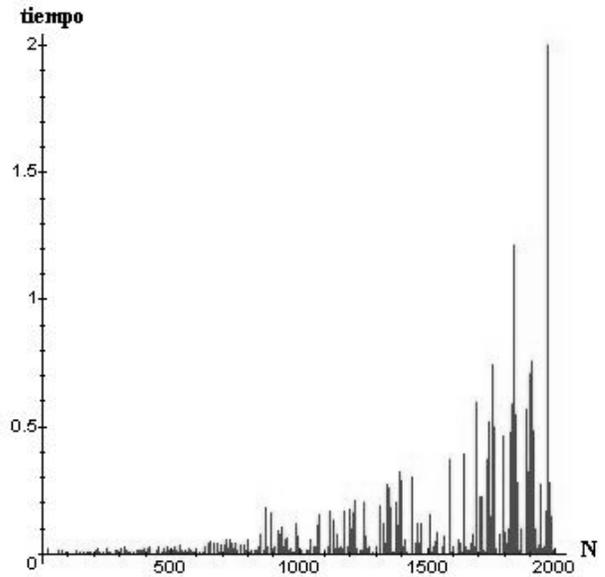


Figura 6. Tiempo de ejecución para la factorización de números impares no primos entre 15 y 2000, utilizando el algoritmo clásico.

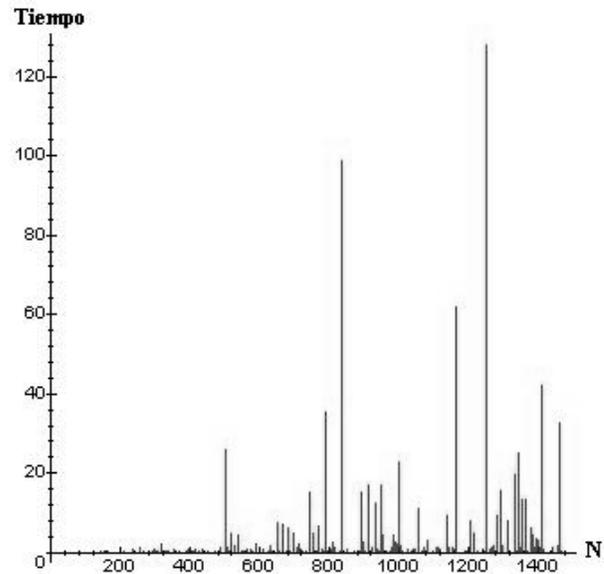


Figura 7. Tiempo de ejecución de la pseudo-simulación del algoritmo cuántico para los números impares no primos entre 15 y 1500.

Similar comportamiento (salvo algunos casos patológicos) se tiene en la Fig. 7, con la diferencia de que los tiempos de ejecución son mucho mayores. Lo último, no debe sorprendernos, puesto que para la aplicación del algoritmo cuántico se tuvo que hacer una pseudo-simulación (muchos más pasos en el programa) y además, que se trabajó con una computadora clásica<sup>9</sup>.

<sup>9</sup>Los resultados fueron obtenidos utilizando una computadora con 224 Mb de memoria RAM con un procesador de 1.7 GHz de velocidad

## 4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

La importancia de este trabajo radica en el hecho de haber demostrado que es posible implementar un algoritmo cuántico de factorización. Si bien, los tiempos de ejecución son mucho mayores a los que se tienen trabajando con el algoritmo clásico, esto no refleja la verdadera potencialidad del algoritmo cuántico debido a que no se contó con una computadora cuántica. De aplicarse el algoritmo de Shor en una computadora cuántica, se prevé una reducción exponencial del tiempo de procesamiento, lo que proporciona una forma nueva de enfocar el problema de factorización. En base a lo anterior, se puede afirmar que la aplicación de este algoritmo podría poner en riesgo los sistemas criptográficos actuales. Por otro lado, la aplicación de la computación cuántica abre posibilidades antes no imaginadas, como el manejo de bits superpuestos, procesamiento de información en paralelo sin necesidad de procesadores adicionales, lo que trae consigo una reducción exponencial de recursos computacionales.

## REFERENCIAS

- [1] M.L. Steffen, L.M.K. Vandersypen, I.L. Chuang, Toward quantum computation: a five-qubit quantum processor. *IEEE*, (2001) 24–34.
- [2] E. Rieffel, W. Polak. An introduction to quantum computing for non-physicists, *ACM Computing Surveys (CSUR)*, **32** 3, (2000) 300–335.
- [3] A. Barenco, A. Ekert, A. Sanpera, C. Machiavello, A short introduction to quantum computation. (1996) <http://www.qubit.org/index.html>, Acceso: marzo, 2005
- [4] P.W. Shor, Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer, *SIAM Journal on Computing* **26** 5 (1997) 1484–1509.
- [5] E. Alcalde, F. Ormachea, J. Portillo, F. Garcia Mera-yo. *Arquitectura de Ordenadores*. McGraw Hill Interamericana de España S.A., (1991).
- [6] H. Hwang, F.A. Briggs, *Arquitectura de computadoras y procesamiento en paralelo*. McGraw-Hill, (1998)
- [7] A. Ekert, R. Jozsa. Quantum computation and Shor's factoring algorithm. *Review of modern Physics*, **68** 3, (1996) 733–753.
- [8] P.W. Shor, Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. *Proc 35th Ann. Symp. on found of Comp. Sci.*, (1994) 124–134.
- [9] R.J. Hughes, Cryptography, quantum computation and trapped ions, *arXiv.quant-ph/9712054*, (1997).
- [10] A. Ekert, *Quantum cryptoanalysis-Introduction*, (1995) <http://www.qubit.org/index.html>, Acceso: marzo, 2005
- [11] J.F Schneiderman, M.E. Stanley, P.K. Aravind, *A pseudo-simulation of Shor's quantum factoring algorithm*. Department of Physics, Worcester Polytechnic Institute.
- [12] G.E. Moorhouse, U.W. Math, *Shor's algorithm for Factoring Large Integer*
- [13] C.L. Mayda, *Efectos de la computación cuántica en la tecnología*, Tesis de grado Carrera Informática, Universidad Mayor de San Andrés, (2004).

**XVII REUNIÓN NACIONAL DE LA SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA  
DEL 27 AL 29 DE OCTUBRE DE 2005  
COCHABAMBA-BOLIVIA**

Sociedad Boliviana de Física

*La Paz—Bolivia*

**RESUMEN**

Se presenta la lista de las exposiciones de la XVII Reunión Nacional de Física realizada en Cochabamba entre el 27 y el 29 de Octubre de 2005.

**TÍTULO:**

**SINCRONIZACIÓN DE OSCILADORES FOTOCONTROLADOS LOCALMENTE ACOPLADOS**

**AUTOR:**

Marcelo Ramírez Ávila

**RESUMEN:**

Se estudian osciladores fotocontrolados (LCDs) acoplados en configuración lineal y bajo condiciones de borde periódicas y no periódicas. Se consideran dos criterios de sincronización, uno basado en la diferencia de fases y otro en el período del sistema de osciladores. Finalmente, se investiga la situación en la que los osciladores se asemejan a osciladores de integración y disparo.

**TÍTULO:**

**ESTUDIO DEL PÉNDULO IMPULSADO EN EL PUNTO CRÍTICO**

**AUTOR:**

Armando Reynaldo Ticona Bustillos

**RESUMEN:**

El péndulo impulsado presenta, en su diagrama de fases, una transición de regular a caótico. En este punto crítico el comportamiento del sistema obedece a la estadística de Tsallis. Se estudia el sistema y se determina el valor del exponente “q” en este punto crítico.

**TÍTULO:**

**EL MISTERIO DEL TIEMPO**

**AUTOR:**

Dr. Santiago Sologuren

**RESUMEN:**

Desde la antigüedad, el tiempo ha subyugado a la mente humana. Ya en la Grecia de Parménides se cuestionaba la naturaleza del tiempo. Posteriormente, numerosos filósofos han especulado sobre el particular, entre ellos: Zenon de Elea, Aristóteles, San Agustín, Kant, y otros. Isaac Newton, sostenía la existencia de una simultaneidad de eventos en el universo, es decir, que el tiempo es absoluto. Varios siglos pasaron, hasta que hace 100 años, Einstein demostró la relatividad del tiempo. En el presente trabajo se explicarán posibles extensiones de la concepción einsteniana del tiempo. También se analizará la posibilidad de la existencia de “átomos” de espacio y de tiempo. Sin lugar a dudas el tiempo sigue siendo un misterio.

**TÍTULO:**

**EINSTEIN; ASCENSO Y ESPLENDOR: SUS TRABAJOS DE 1905 Y EL ECLIPSE DE 1919**

**AUTOR:**

Diego Sanjinés Castedo

**RESUMEN:**

En homenaje al “Annus Mirabilis” de Einstein, se presenta una descripción breve sobre los artículos que publicó Einstein en 1905, así como las consecuencias más relevantes de su teoría especial de la relatividad, lo que llevó a la elaboración de la teoría general de la relatividad y su espectacular confirmación experimental en ocasión del eclipse de 1919.

**TÍTULO:**

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD**

**AUTOR:**

Dr. Rosendo Ochoa

**RESUMEN:**

El intento de unir la mecánica clásica y el electromagnetismo por Lorentz y Poincare, tuvo como resultado una nueva teoría, que fue terminada por Einstein y es conocida como la teoría de la relatividad especial. Pero al mismo tiempo varios conceptos matemáticos fueron utilizados para poder explicar y desarrollar esta teoría. Mas adelante Einstein en la búsqueda de una nueva forma de describir el campo gravitatorio, propone la teoría general de la relatividad basado en la geometría de Riemann. Estos sucesos alentaron a los matemáticos de la época como Weyl, Cartan, Hilbert y otros a profundizar más en la geometría diferencial dando una base matemática sólida a la teoría de Einstein.

**TÍTULO:**

**OBSERVATORIO GEOMAGNÉTICO DE VILLA REMEDIOS**

**AUTOR:**

Pedro Miranda Loza

**RESUMEN:**

Es necesario dar a conocer los objetivos de la existencia de un observatorio en el altiplano boliviano y mostrar los resultados preliminares de dos gestiones y las ampliaciones que se tendrá en el futuro.

**TÍTULO:**

EMISIÓN GALÁCTICA EN 30 GHZ Y 41,5 GHZ

**AUTOR:**

Mirko Raljevic Ergueta

**RESUMEN:**

La emisión galáctica en microondas es importante para el estudio de los componentes que contaminan la señal de la radiación cósmica de fondo. Usando un método de correlación cruzada determinamos la contribución galáctica en mapas de RCF en 30 GHZ y 41,5 GHZ. Estudiamos también el exceso de emisión correlacionado con emisión de polvo. Comparamos los índices espectrales con los modelos de emisión galáctica aceptados.

**TÍTULO:**

MEDIDAS DE ALBEDO EN EL SALAR DE UYUNI

**AUTOR:**

Francesco Zaratti Sachetti

**RESUMEN:**

En mayo de 2005 el Laboratorio de Física de la Atmósfera - U.M.S.A. juntamente al Instituto de Meteorología de la Universidad de Munich, realizó una campaña de mediciones de la RUV en el Salar de Uyuni. En esta conferencia se presentan los resultados preliminares correspondientes a medidas de albedo en el Salar y al efecto del contorno en las medidas de albedo. Asimismo se comentan algunos efectos físicos y climáticos relacionados con el albedo.

**TÍTULO:**

CORRELACIÓN DE LA DOSIS SOLAR UV-A CON LA VARIACIÓN DE COLOR DE CINTAS

**AUTOR:**

Freddy Flores Flores

**RESUMEN:**

Mediante el Centro de Aguas y Saneamiento Ambiental (C.A.S.A.) de la U.M.S.S. y la fundación Sodis se cuenta con cintas (Nº. 1,2,9) en forma de plásticos que cambian de color cuando sobre estos incide radiación electromagnética de distintas intensidades. El objetivo principal de este trabajo de investigación es el de la correlación de la dosis solar UV-A con la variación de color de cintas para su aplicación en el método de desinfección del agua a través de radiación solar. Las cintas cambian de color cuando reciben distintas cantidades de dosis, unas cambian más rápido que otras. Se elaboró una tabla de colores con sus respectivas dosis a la que adquieren dichos colores. Los datos de radiación solar UV-A y global fueron obtenidos con un radiómetro del C.A.S.A. Se ha realizado un estudio óptico de las cintas para determinar sus propiedades ópticas como ser su transmitancia, absorbanza, etc., esto con un espectrofotómetro con la que cuenta el centro de aguas.

**TÍTULO:**

GLACIALES

**AUTOR:**

Lic. Hans Muller

**RESUMEN:**

Una de las aplicaciones más importantes del estudio de glaciales consiste en comprender mejor la evolución climática de las regiones polares. Los movimientos y curvas de temperatura indican las tendencias generales del clima. La ponencia aborda la descripción de la dinámica de un glaciar en régimen estacionario, a partir de las leyes de Nye para glaciales, que llevan a la formulación de un problema en que intervienen ecuaciones a derivadas parciales y condiciones de contorno. Mediante una transformación de coordenadas el glaciar se transforma en un dominio rectangular y la solución del problema se la realiza mediante una discretización en líneas, conduciendo a un problema diferencial con valores en la frontera, cuya solución se obtiene con la técnica del shooting. Para concluir, se presenta los resultados para un glaciar de Groenlandia, se discute los alcances del método de solución y las corrientes actuales en el modelamiento de glaciales.

**TÍTULO:**

ESPACIO - TIEMPO DISCRETO

**AUTOR:**

Adolfo Aramayo García

**RESUMEN:**

Esta es una revisión de los esfuerzos recientes por discretizar la estructura espacio-temporal. Una discretización tal podría conducir a una mejor comprensión de las diversas posibilidades en cuanto a una gravitación cuántica se refiere. El trabajo consiste en sí en el método matemático a seguir en la discretización y la manera de aplicar ésta a problemas en sistemas cuánticos. Se discuten también algunas posibilidades fenomenológicas o experimentales.

**TÍTULO:**

SOLUCIONES NUMÉRICAS PARA ALGUNOS PROBLEMAS FÍSICOS COMUNES

**AUTOR:**

Mayra Alfaro Medinaceli

**RESUMEN:**

Las situaciones físicas que contienen más de una variables independientes se expresan por medio de ecuaciones en las que intervienen derivadas parciales (ecuaciones diferenciales parciales o EDP's). En este trabajo se presenta una breve introducción a algunos de los métodos numéricos disponibles para aproximar la solución de estas EDP's con dos variables, mostrando cómo podemos aplicarlas a algunos problemas físicos comunes. Se considerarán las ecuaciones del Poisson, Laplace, de la onda y la del calor o difusión. Luego se propondrá algunos esquemas numéricos como ser el método de diferencias regresivas, y el método de Crank-Nicolson, que aproximarán la solución de estas EDP's de forma eficiente.

**TÍTULO:**

OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA 1997 - 2005

**AUTOR:**

Roy O. Bustos Espinoza

**RESUMEN:**

Evolución de la Olimpiada Boliviana de Física. 8 años de desarrollo sostenido.

**TÍTULO:**

EXTENSIÓN DEL PROCESO DE ORNSTEIN - UHLENBECK A LA DESCRIPCIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LA POBLACIÓN SUJETA A LA AMENAZA DELINCUENCIAL

**AUTOR:**

Martín A. Subieta Vásquez

**RESUMEN:**

Se describe un modelo socioeconómico en base al proceso de Ornstein-Uhlenbeck, el cual es descrito por una ecuación de Langevin. Dicha ecuación representa el cambio de comportamiento en el tiempo de una población sujeta a la amenaza delincriminal. De esta manera la amenaza delincriminal se traduce como la fuerza social estocástica la cual origina un campo social que es responsable del comportamiento de la población que puede ser vista como el grado de tolerancia de la población frente a la amenaza delincriminal. En este sentido se hallan las soluciones del modelo, siendo esta densidad de probabilidades dependientes e independientes del tiempo. La solución dependiente del tiempo nos conduce a una densidad de transición de probabilidades del comportamiento de la población, que se puede interpretar como las probabilidades que se tendrán de que en un momento dado la población cambie de un grado de tolerancia a otro. La solución independiente del tiempo nos conduce a una densidad de probabilidades estacionaria, la cual describe el comportamiento de la población en el estado estacionario del sistema, lo cual a su vez nos conduce a un estado intolerable de la población frente a la amenaza. Finalmente se realizan simulaciones con el objetivo de poder modelar distintos escenarios.

**TÍTULO:**

MANCHAS SOLARES Y VARIABLES CLIMÁTICAS

**AUTOR:**

Lic. Milka Mónica Torrico Troche

Lic. Ivan Ruíz Ucumari

**RESUMEN:**

Las manchas solares son regiones oscuras que aparecen en la superficie del sol debido a la actividad solar. El diámetro de las manchas solares varía entre 1000 km y 1000000 km. La actividad solar no es constante, sino también varía llegando a tener periodos de actividad solar máxima donde se puede llegar a ver más de 100 manchas solares, mientras que durante la actividad solar mínima no se observan manchas solares. El periodo entre los máximos de actividad solar se presenta es de 11 años aproximadamente. Se ha estudiado que existe una correlación entre los parámetros atmosféricos y la actividad solar, entonces también debe existir una correlación entre las manchas solares y cualquier otro parámetro climatológico. En este trabajo lo que se pretende es estudiar la correlación entre parámetros climatológicos y el número de manchas solares. Esta correlación puede ser positiva, negativa o inexistente dependiendo del lugar donde se efectúen las mediciones climatológicas. Para realizar este estudio sólo se considera inicialmente datos de temperatura para, en una segunda etapa, aplicar la metodología a datos de precipitación pluvial; lamentablemente no se cuenta con datos de GEI para ver la correlación. Los datos constituyen la herramienta principal para realizar cualquier trabajo de investigación. En este caso, los datos del número de manchas solares se obtuvieron del observatorio astronómico de Zurich y los datos de temperatura del SENAMHI, que es una institución del Estado. Debido a las características del periodo en el número de manchas solares, este análisis se debe realizar en periodos largos (de por lo menos 25 años). En la metodología usada se contemplan básicamente tres formas de ver la existencia de la correlación, que son: el método gráfico, promedios móviles y transformada de Fourier. Finalmente, se determina una correlación positiva entre el número de manchas solares y los datos de temperatura media, considerando estaciones de nuestro país.

# UNA DISCUSIÓN SOBRE LA CONFIABILIDAD DE LA TÉCNICA DE EXTRAPOLACIÓN DE LÍNEAS RECTAS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA DE ERRORES

Wilton Pereira da Silva<sup>1</sup>, Cleide M. D. P. S. e Silva<sup>1</sup>, Jürgen w. Precker<sup>1</sup>,  
Diogo D. P. S. e Silva<sup>2</sup> e Cleiton D. P. S. e Silva<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Universidade Federal de Campina Grande, Depto. Física,  
Campina Grande, Paraíba, Brasil*

<sup>2</sup> *Universidade Federal de Campina Grande, Depto. Matemática,  
Campina Grande, Paraíba, Brasil*

<sup>3</sup> *Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Depto. Sistemas e Controle,  
São José dos Campos, São Paulo, Brasil*

## RESUMEN

El siguiente podría ser un experimento típico en el laboratorio de pregrado: la presión del aire es medida como función de la temperatura a volumen constante y en un rango definido de temperatura; luego, los resultados son representados gráficamente. Entonces, una línea recta es ajustada de forma visual (o por mínimos cuadrados) a los datos experimentales y ésta es extrapolada al valor de presión cero con la esperanza de encontrar el cero absoluto de temperatura. Pero, ¿se puede confiar en la información obtenida de tal extrapolación? Investigamos aquí este problema de una manera general utilizando métodos estadísticos para el ajuste con una línea recta, y aplicamos los resultados al problema del experimento descrito arriba.

## 1. INTRODUCCIÓN

Una técnica usada en física para obtener información a partir de un conjunto de datos experimentales es su representación gráfica. Una práctica común es extender la interpretación de los datos experimentales más allá del intervalo en el que fueron observados. De aquí el nombre “extrapolación”.

Como ejemplo se tiene la estimación experimental de la temperatura de cero absoluto midiendo la presión de un gas a volumen constante como función de la temperatura [1], y de aquí, la extrapolación para una presión  $P=0$  del gas, una vez que la escala de temperatura absoluta ha sido definida para el gas ideal [2]. La validez de este procedimiento se da por sentada no solamente para  $P=0$ , sino para cualquier otro valor  $P$  de la presión.

Aunque esta técnica de extrapolación nació junto con las ciencias experimentales, recién algunas cuestiones sobre la precisión absoluta y relativa de los resultados se pueden contestar eficientemente en la actualidad. Junto a la expansión del uso de las computadoras, varios programas surgieron y permiten responder a estas cuestiones a través del análisis estadístico para un conjunto amplio de funciones (MATLAB, Origin, TableCurve, LAB Fit, etc.)

En este artículo investigamos cuán confidente es la técnica de extrapolación desde el punto de vista estadístico, siempre que el objeto de estudio se pueda representar por una línea recta. Por lo tanto, debemos revisar brevemente el ajuste de mínimos cuadrados de un

conjunto de datos  $(x_i, y_i)$  a una función  $y = ax + b$ , si las incertidumbres de  $y_i$  son desconocidas. Asimismo, necesitamos asociar las incertidumbres a la función de ajuste de tal forma que ésta se exprese finalmente de la forma  $y(x) = y(x)_m \pm \sigma_{y(x)_m}$ , donde  $y(x)_m = ax + b$  es el valor medio de la función de ajuste y  $\sigma_{y(x)_m}$  es su desviación estándar.

Restringiremos nuestra discusión a los errores estadísticos, e.g., supondremos que se puede despreciar errores sistemáticos de los datos (si no, vea la ref. [3]), y que la extrapolación no se saldrá del rango válido para el modelo físico en cuestión. Bajo estas restricciones, mostramos que la técnica de extrapolación produce resultados satisfactorios y confiables en el caso de un ajuste de línea recta y que estos resultados son comparables a aquellos obtenidos por interpolación.

## 2. ASPECTOS TEÓRICOS RELEVANTES

Antes de abordar los aspectos teóricos relevantes de este artículo, aceptaremos las siguientes hipótesis para la discusión a lo largo de todo el artículo:

- 1) los errores sistemáticos de las mediciones se pueden considerar despreciables;
- 2) la propagación de errores se puede calcular usando aproximaciones de primer orden;
- 3) la fluctuación de los puntos en torno a la función de ajuste se puede considerar gaussiana;
- 4) la ley física que es objeto de la extrapolación es válida en todo el intervalo de estudio;
- 5) la variable  $x$  no tiene errores.

<sup>1</sup> Email: wiltonps@uol.com.br

Dado un conjunto de  $N$  puntos  $(x_i, y_i \pm \sigma_{ymi})$ , donde  $x_i$  y  $y_i$  son los valores medios de la abscisa y ordenada del  $i$ -ésimo punto respectivamente, y las  $\sigma_{ymi}$  son las incertidumbres de  $y_i$ , el ajuste de la función  $y = ax + b$  se puede encontrar por las expresiones [4, 5, 6]:

$$a = \frac{1}{D} \left[ \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_{ymi}^2} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{ymi}^2} \right) - \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_{ymi}^2} \right) \right] \quad (1)$$

y

$$b = \frac{1}{D} \left[ \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_{ymi}^2} \right) - \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_{ymi}^2} \right) \right], \quad (2)$$

donde

$$D = \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{ymi}^2} \right) - \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \right)^2. \quad (3)$$

Las incertidumbres de los parámetros  $a$  y  $b$ , así como su covarianza están dados por

$$\sigma_{am} = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}, \quad (4)$$

$$\sigma_{bm} = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2}}, \quad (5)$$

$$\text{cov}(a, b) = -\frac{1}{D} \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \right), \quad (6)$$

donde  $D$  es la misma variable que en (3).

Para el caso en el que se desconozca las incertidumbres de los datos experimentales, e.g., tenemos puntos del tipo  $(x_i, y_i)$ , se puede asociar una incertidumbre común a cada uno de ellos de la siguiente forma: primero, sustituimos las incertidumbres desconocidas por el valor artificial 1, esto es, fijamos  $\sigma_{ymi} = 1$  en (1) y (2), y determinamos los parámetros  $a$  y  $b$  por un pre-ajuste  $y(x)$ ; luego, podemos determinar la varianza asociada a la función ajustada  $y(x)$  por la siguiente expresión [7]:

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i)]^2. \quad (7)$$

Ya que la raíz cuadrada de la varianza nos proporciona una indicación de la fluctuación de los datos experimentales en torno a la línea recta ajustada, es razonable admitir que las incertidumbres desconocidas de  $y_i$  son iguales a  $\sigma_{y(x)}$ . Así, las ecs. (4), (5) y (6) se reducen a:

$$\sigma_{am} = \sigma_{y(x)} \sqrt{\frac{N}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2}}, \quad (8)$$

$$\sigma_{bm} = \sigma_{y(x)} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2}} \quad (9)$$

y

$$\text{cov}(a, b) = -\frac{\sigma_{y(x)}^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (10)$$

Podemos determinar la incertidumbre de la función ajustada  $y(x) = ax + b$  a partir de las ecs. (8), (9) y (10) por medio de propagación de errores. Para esto, recordemos que la propagación de la desviación estándar para una función  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  debido a las incertidumbres de los  $n$  parámetros  $z$  de  $f$  está dada por [8]:

$$\sigma_{fm} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} \frac{\partial f}{\partial z_k} \text{cov}(z_j, z_k)}. \quad (11)$$

Para una función  $f$  de dos parámetros, digamos  $a$  y  $b$ , (11) se puede escribir como

$$\sigma_{fm} = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial a} \sigma_{am} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial b} \sigma_{bm} \right)^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial b} \text{cov}(a, b)}. \quad (12)$$

En el caso de una línea recta ajustada a puntos experimentales, y considerando los  $x_i$  libres de error, el error de la función  $y(x) = ax + b$  ocurre debido a las incertidumbres de  $a$  y  $b$ , incluyendo la covarianza entre ellos. Así, de (12) se tiene la línea recta:

$$\sigma_{y(x)m} = \sqrt{(x \sigma_{am})^2 + \sigma_{bm}^2 + 2x \text{cov}(a, b)}. \quad (13)$$

Podemos por lo tanto escribir la función completa de ajuste como:

$$y(x) = (ax + b) \pm \sqrt{\sigma_{am}^2 x^2 + 2 \text{cov}(a, b)x + \sigma_{bm}^2}. \quad (14)$$

TABLA 1

Presión  $P$  del aire como una función de la temperatura  $t$  a volumen constante.

	1	2	3	4	5
$P$ (cm Hg)	72,7	75,0	75,9	77,3	78,4
$t$ ( $^{\circ}C$ )	30,0	38,0	42,3	48,0	54,0

De esta manera, la representación gráfica de la función de ajuste consiste de tres líneas: la línea interior representa el valor medio de la función dado por  $y(x)_m = ax + b$ , mientras que las dos líneas exteriores dan los límites inferior y superior de la banda de confiabilidad defida por  $\pm\sigma_{y(x)_m}$  y calculada por medio de (13).

A continuación investigaremos si el resultado obtenido de (14) y extrapolado más allá del rango de los puntos experimentales es confiable, o si las incertidumbres crecen de tal forma que los límites aceptables de precisión se ven comprometidos. Para esto, apliquemos las ecuaciones referidas arriba a un conjunto de datos experimentales.

### 3. APLICACIÓN A UN CONJUNTO DE DATOS: DETERMINACIÓN DEL CERO ABSOLUTO Y UNA GENERALIZACIÓN DE LA TÉCNICA DE EXTRAPOLACIÓN

A fin de evaluar la técnica de extrapolación, apliquémosla a un experimento en el que se determine el cero absoluto de la temperatura. El experimento consiste de un bulbo con aire que contiene a un termómetro. El bulbo está inmerso en un recipiente con agua colocado sobre un calentador. Este sistema se conecta a un manómetro; el volumen de aire en el bulbo se mantiene constante durante las mediciones. Ya que este experimento es común en los laboratorios de pregrado, no entraremos en detalles sino más bien presentaremos los resultados experimentales. Además, nuestro interés principal comprende el análisis de datos desde el punto de vista de la teoría de errores, y no así el experimento en sí. La tabla 1 muestra los valores medidos de la presión absoluta del aire dentro del bulbo como una función de la temperatura.

Naturalmente, la temperatura  $t$  se tomaría como una variable independiente, pero ya que queremos hallar la temperatura a la cual la presión es cero, entonces ajustaremos la función  $t(P) = aP + b$  a los datos de la tabla 1.

De (1) y (2), y estableciendo  $\sigma_{ymi} = 1$ , obtenemos  $a \cong 4,1809$  y  $b \cong -274,70$ . Con estos valores, se obtiene  $\sigma_{y(x)} \cong 0,912416$  a partir de (7), y de (8), (9) y (10) obtenemos  $\sigma_{am} \cong 0,207948$ ,  $\sigma_{bm} \cong 15,7802$  y  $cov(a,b) \cong -3,28037$ . En consecuencia,  $a = (4,18 \pm 0,21) ^{\circ}C/cm\ Hg$  y  $b = (-275 \pm 16) ^{\circ}C$ , así que finalmente podemos escribir

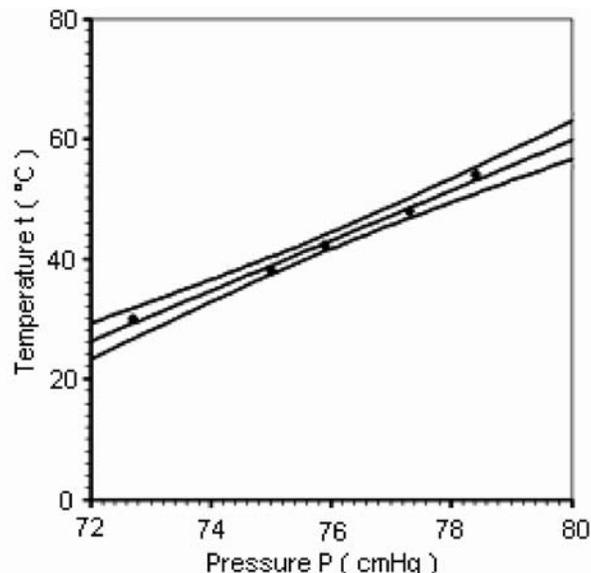


Figura 1. Función dada por (15) ajustada a los valores experimentales. La línea central representa el valor medio de la función, mientras las líneas inferior y superior limitan el 95 % de la banda de confiabilidad.

$$t(P) = (4.18P - 275) \pm$$

$$2.87 \sqrt{4,32424 \times 10^{-2}P^2 - 6,56074P + 249,015091}, \tag{15}$$

donde la incertidumbre fue calculada a partir de (13). El factor 2,87 que aparece delante de la raíz en (15) –que describe la incertidumbre– asegura que la banda de confiabilidad de la función que se ajustó solamente a 5 datos es del 95 %, habiéndose probado que los datos están distribuidos de manera normal en torno a la función de ajuste. Estableciendo  $P=0\ cm\ Hg$  in (15), tenemos que  $t = (-275 \pm 45) ^{\circ}C$ . Es interesante observar que la precisión es mucho mayor que la correspondiente al cero absoluto. Naturalmente, esta determinación de la temperatura  $t$  para el valor específico de presión cero, no necesita tomar en cuenta la covarianza entre los parámetros ajustados  $a$  y  $b$  para el cálculo de la propagación de errores. Para este caso, que está ya discutido por Taylor [9],  $t(0)$  es la constante  $b$ . Sin embargo, la covarianza debe considerarse para la determinación de  $t$  para cualquier otra presión  $P$  diferente de cero; es esta generalización la cuestión de nuestra discusión. Aún más: deseamos investigar si los resultados para  $t(P)$  en la región extrapolada tienen una precisión compatible con los resultados dentro de la región apropiada. Si es así, podríamos admitir, desde un punto de vista estadístico, que los resultados de una extrapolación tienen la misma confiabilidad que aquellos obtenidos por interpolación, siempre que se respete nuestras hipótesis. Si, por otra parte, la incertidumbre relativa de  $t(P)$  crece a medida que nos alejamos de la región de datos, los resultados obtenidos via extrapolación no serían acreedores a la misma confiabilidad que aquellos dentro de la región de datos.

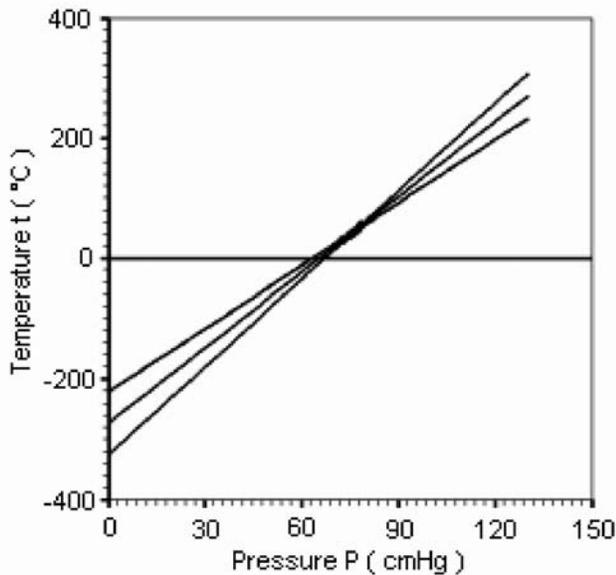


Figura 2. Función ajusta dada por (15), extrapolada desde  $P = 72,7 \text{ cmHg}$  hasta  $P = 0 \text{ cmHg}$ , y de  $P = 78,4 \text{ cmHg}$  hasta  $130 \text{ cmHg}$ . La banda muestra en 95% de confiabilidad.

En la Fig. 1 se muestra la temperatura versus la presión dada por (15). Se puede ver que la banda de confiabilidad se dispersa a medida que se acerca a los extremos de la región de datos.

La Fig. 2 muestra el comportamiento de la incertidumbre de  $t$  entre 0 y  $130 \text{ cmHg}$ ; podemos ver que la incertidumbre crece fuertemente si nos alejamos de la región de datos en ambas direcciones.

La Fig. 3 muestra la incertidumbre de la temperatura  $t$ ,

$$\sigma_{t(P)_m} = 2,87 \sqrt{4,32424 \times 10^{-2} P^2 - 6,56074 P + 249,015091}, \quad (16)$$

dentro de la región de datos.

La incertidumbre es mínima en el valor promedio  $P=75,86 \text{ cmHg}$ , y crece en ambas direcciones a medida que nos alejamos de dicho valor. En nuestro caso, donde todas las mediciones tiene el mismo error común, el mínimo ocurre en la media aritmética. Si no, el mínimo aparecería en la media pesada estadísticamente.

La Fig. 4 muestra la incertidumbre de la temperatura  $t$  entre 0 y  $130 \text{ cmHg}$ ; podemos ver que la incertidumbre crece rápidamente más allá de la región de datos, lo que no resulta muy alentador.

Así, a fin de averiguar si la técnica de extrapolación es confiable, consideremos –a pesar de la creciente incertidumbre absoluta– la incertidumbre relativa  $\sigma_r$  de la temperatura  $t$ :

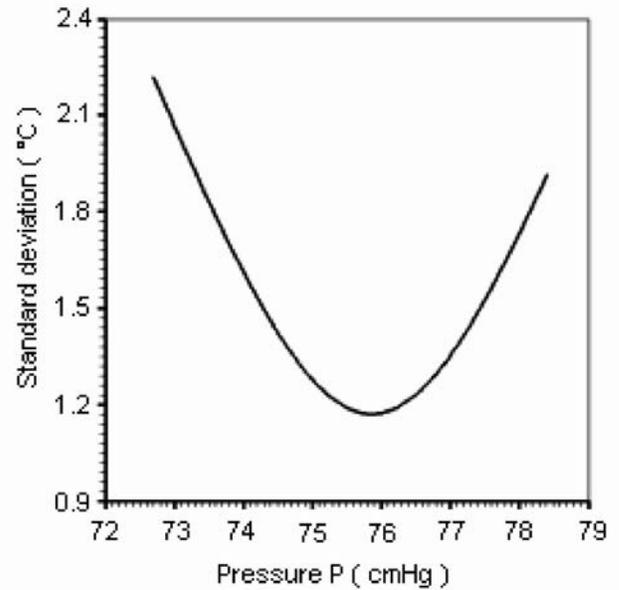


Figura 3. Desviación estándar de la función ajustada dada por (16), dentro de la región de datos. El mínimo ocurre en el valor promedio  $P = 75,86 \text{ cmHg}$ .

$$\sigma_r = 2,87 \sqrt{\frac{4,32424 \times 10^{-2} P^2 - 6,56074 P + 249,015091}{(4,18 P - 275)^2}}. \quad (17)$$

La Fig. 5 muestra que la incertidumbre relativa también crece mientras va del centro hacia los extremos de la región de datos. Hasta donde se puede apreciar, las cifras indican que la técnica de extrapolación no parece ser confiable.

Ya que tenemos una singularidad en  $P=65,8 \text{ cmHg}$ , la presión a la que la temperatura  $t$  toma el valor cero, dividimos el gráfico en dos regiones: desde  $P = 0 \text{ cmHg}$  hasta  $P = 60 \text{ cmHg}$ , y desde  $P = 70 \text{ cmHg}$  hasta  $P = 130 \text{ cmHg}$ . De manera interesante, vemos que la desviación estándar relativa se hace constante lejos de la región de datos. Primeramente, vemos que para  $x(=P) > 78,4 \text{ cmHg}$ , podemos entender este comportamiento a partir de (13): escribimos para la desviación estándar relativa

$$\frac{\sigma_{y(x)_m}}{y(x)_m} = 2,87 \sqrt{\frac{(x\sigma_{am})^2 + 2x\text{cov}(a, b) + \sigma_{bm}^2}{(ax + b)^2}}, \quad (18)$$

lo que nos da

$$\sigma_r = 2,87 \sigma_{ymi} / y(x)_m \rightarrow 2,87 \sigma_{am} / a \quad (19a)$$

en el límite  $x \rightarrow \infty$ . Sustituyendo  $\sigma_{am} = 0,207948$  y  $a = 4,1809$  en esta expresión obtenemos  $\sigma_r = 0,143$ , que se muestra como la línea segmentada en la Fig. 6. Para  $x(=P) = 0$  tenemos

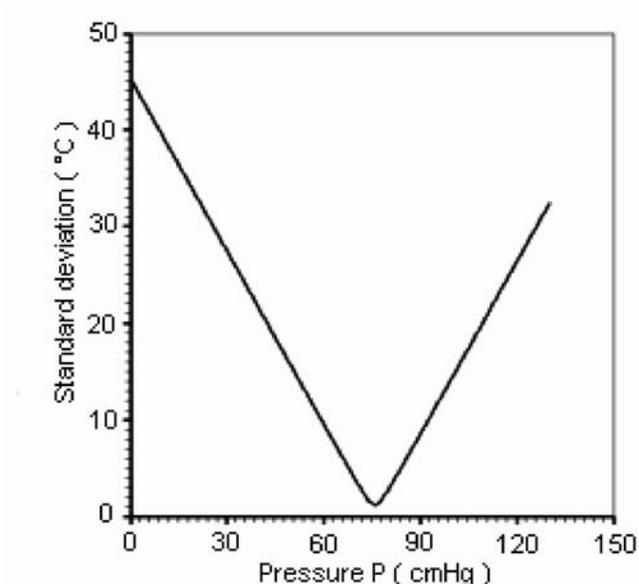


Figura 4. Desviación estándar de la función de ajuste dada por (16), extrapolada desde  $P = 72,7$  hasta  $P = 0$  cmHg , y desde  $P = 78,4$  cmHg hasta 130 cmHg.

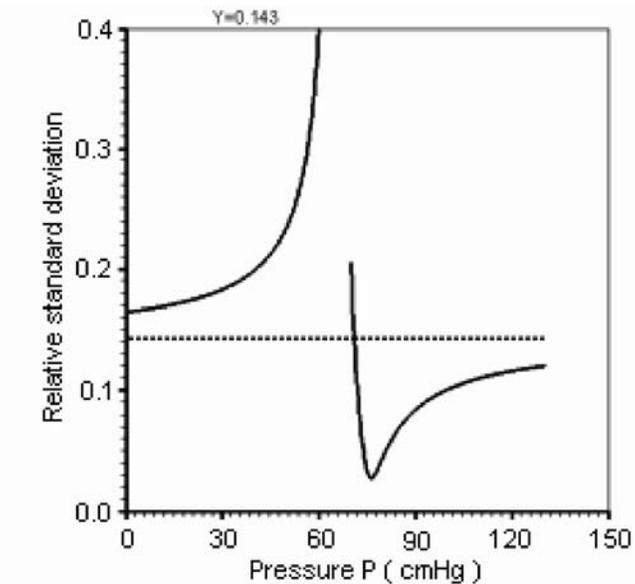


Figura 6. Desviación estándar relativa de la función ajustada de acuerdo a (17), Extrapolada desde  $P = 60$  cmHg hasta  $P = 0$  cmHg, y desde  $P = 70$  cmHg hasta  $P=130$  cmHg.

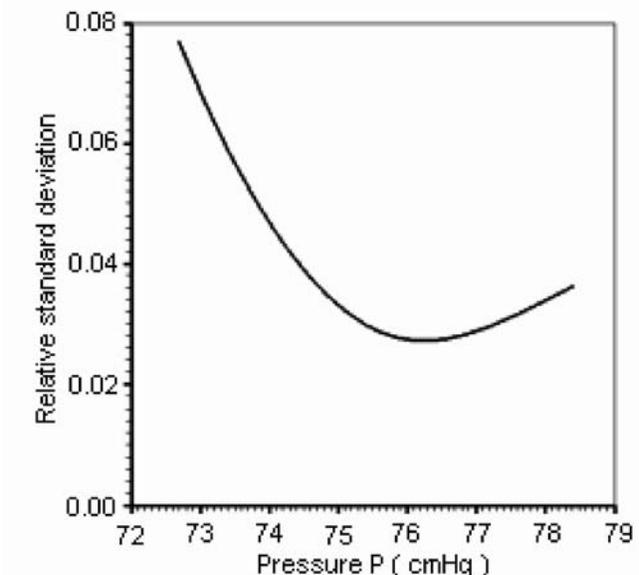


Figura 5. Desviación estándar relativa de la función ajustada de acuerdo a (17), dentro de la región de datos. Si se aplica (17) desde 0 cmHg hasta 130 cmHg, obtenemos el resultado que se muestra en la Fig. 6.

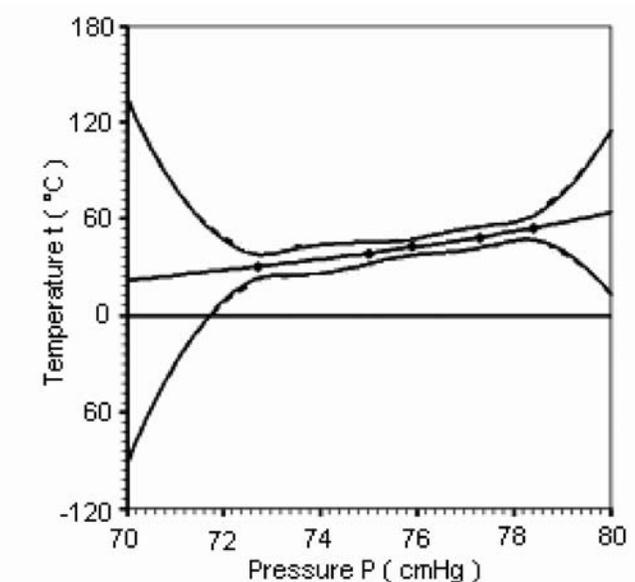


Figura 7. Función de tercer grado ajustada a los mismos datos experimentales dados en la Tabla 1. Una pequeña extrapolación ya crea incertidumbres tan grandes que ninguna información se puede extraer desde el exterior de la región de datos.

$$\sigma_r = 2,87\sigma_{y_{mi}}/y(x)_m \rightarrow 2,87\sigma_{b_m}/b, \quad (19b)$$

cuyo resultado es  $\sigma_r = 0,165$ .

Esto significa que si estamos lejos de la región de datos hacia la derecha (o bien si P puede tomar un valor mucho menor que cero), la pendiente de la línea recta es el parámetro dominante y, en consecuencia, la covarianza entre los parámetros se vuelve despreciable. Este comportamiento está de acuerdo con la referencia [10],

donde se discute sobre la covarianza de un par de variables correlacionadas.

Para una presión  $P = 68,5$  cmHg, la temperatura toma el valor  $t=0$  °C y su incertidumbre relativa es infinita. Pero, tal como muestra la Fig. 4, la incertidumbre relativa de la temperatura es finita y completamente aceptable al compararse con los valores involucrados. Esta singularidad es pues una consecuencia de la escala de temperatura elegida.

#### 4. DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

De las Figs. 3 y 4, que muestran las desviaciones estándar según (16), podemos concluir que las incertidumbres más pequeñas para una función de primer orden con dos parámetros ajustados, están dentro de la región de datos, con un mínimo en la presión promedio  $P = 75,86 \text{ cm Hg}$ . Al alejarse de la región de datos, la incertidumbre absoluta crece en ambas direcciones.

Por otra parte, de las Figs. 5 y 6, que muestran las desviaciones estándar según (17), podemos ver que las incertidumbres relativas se comportan razonablemente tanto dentro como fuera de la región de datos, excluyendo el intervalo en torno a la singularidad para  $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ , lo que es una peculiaridad de la escala de temperaturas usada.

Como se puede ver de (18), (19) y la Fig. 6, a medida que nos alejamos de la región de datos, la precisión relativa de la función ajustada depende menos del parámetro  $b$  y de la covarianza entre  $a$  y  $b$ . Por lo tanto, la confiabilidad de un resultado extrapolado obtenido por  $y(x)_m$ , para valores de  $x$  suficientemente alejados de la región de datos, puede indicarse por la precisión relativa del coeficiente angular  $a$  de la línea recta.

Tomando asimismo en cuenta que la incertidumbre absoluta de la recta ajustada es finita en toda la región analizada, tal como se muestra en las Figs. 3 y 4, podemos concluir que la aplicación de la técnica de extrapolación produce resultados tan satisfactorios como los de la interpolación. Naturalmente, esta conclusión tiene exclusivamente por base los errores estadísticos y no así los errores sistemáticos. Aunque esta conclusión pueda parecer algo obvia, no es válida para cualquier función ajustada, como se muestra, por ejemplo, en la Fig. 7 para el caso de un polinomio de tercer grado: una interpolación sería aceptable pero ya no una extrapolación.

Desde luego, no podemos probar que la información extraída de la línea recta extrapolada es verdadera. Pero al menos, si uno está dispuesto a seguir nuestra argumentación, podemos concluir que desde el punto de vista

de la estadística, no hay objeción para extrapolar líneas rectas y explorarlas en busca de información. Además, podemos cuantificar las incertidumbres involucradas en la extrapolación de una línea recta. Aunque hemos restringido nuestra investigación a los puntos sujetos a una línea recta, sería interesante estudiar la confiabilidad de extrapolaciones de otros tipos de funciones que se saben sujetas a un conjunto dado de datos experimentales.

#### REFERENCIAS

- [1] Frederick J. Keller, W. Edward Gettys and Malcolm J. Skove, *Physics*, (McGraw-Hill, Inc., 1993), 2da. ed., vol. 1, capítulo 16.
- [2] David Halliday, Robert Resnick and John Merrill, *Fundamentals of Physics*, (John Wiley & Sons, Inc., 1988), 3ra. ed., vol. 2, capítulo 19.
- [3] John Bechhoefer, Curve fits in the Presence of Random and Systematic Error, *Am. J. Phys.* **68** (5) 424-429 (2000).
- [4] P. R. Bevington and D. K. Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, (McGraw-Hill, New York, 1992) 2da. ed., pp 96-114.
- [5] W. H. Press, S. A. Teukolski, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*, (Cambridge U. P., Cambridge, 1992) 2da. ed., pp 650-659.
- [6] Silva, Wilton P. and Silva, Cleide M. D. P. S., *Tratamento de Dados Experimentais*, (UFPB/Editora Universitária, João Pessoa, PB, 1998), 2da. ed., pp 152-163.
- [7] Silva, Wilton P. et al., Geração de Incertezas de Funções Redutíveis ao Primeiro Grau Ajustadas pelo Método dos Mínimos Quadrados, *Rev. Bras. Ensino de Física*, **21**, nº 3, setembro, 1999
- [8] Helene, Otaviano A. M. e Vanin, Vitor R., *Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental*, (Ed. Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1981), pp. 49-54.
- [9] John R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis* 2nd Edition, p.192, University Science Books, Sausalito, California (1997)
- [10] John R. Taylor, Simple Examples of Correlations in Error Propagation, *Am. J. Phys.* **53** (7), 663-667 (1985)

## CALIBRACIÓN ESPECTRAL DE UN ESPECTROFOTÓMETRO

A. Pecka V.

Universidad Mayor de San Andrés  
La Paz – Bolivia

### RESUMEN

Se realizó la calibración espectral de un espectrofotómetro utilizando un haz láser de He-Ne y una lámpara de vapor de Hidrógeno, obteniéndose una recta de calibración de la longitud de onda en función del número de canal de los espectros de emisión de las fuentes. La recta de calibración corresponde a la ecuación  $\lambda = 0,99 N + 200$  donde los coeficientes de la regresión presentan errores porcentuales menores al 5 %.

### 1. INTRODUCCIÓN

En cualquier investigación científica que implique procesos experimentales para la toma de datos por medio de un sistema de detección, se hace necesaria e imprescindible la calibración previa del sistema para que las medidas a tomar presenten confiabilidad y la mejor aproximación de la realidad que se pretende analizar.

La calibración del sistema de detección, en este caso de un espectrofotómetro, puede ser espectral y de intensidad, pero dada la falta de unidades patrón de calibración en intensidad, y tomando en cuenta que las medidas tomadas con dicho instrumento tuvieron por base porcentajes de flujo de energía (como la reflectancia), la calibración en intensidad no fue necesaria, por lo que el espectrofotómetro usado sólo fue calibrado espectralmente. La calibración realizada para este espectrofotómetro fue usada en la tesis “Análisis de la Reflectancia, Fluorescencia y Solarización de la Laca Carmín de Cochinilla” (A. Pecka V., UMSA, 2005).

### 2. MONTAJE EXPERIMENTAL

La calibración espectral del espectrofotómetro fue realizada empleando dos tipos de fuentes de emisiones espectrales: un haz de rayos láser de He-Ne y una lámpara de vapor de hidrógeno.

Primero se realizó la calibración espectral con el haz de rayos láser, con la ayuda del montaje experimental ilustrado en la figura 1, donde, a la derecha, se puede apreciar al espectrofotómetro, constituido por la fibra óptica, el monocromador, el fotomultiplicador y el computador con el sistema de adquisición de datos; a la

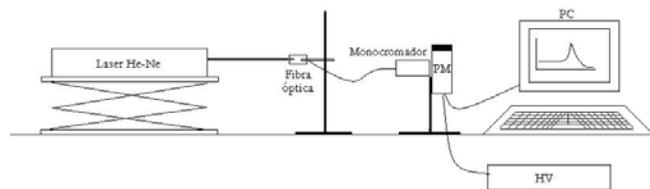


Figura 1. Esquema del montaje experimental realizado para calibrar el espectrofotómetro utilizando un haz láser de He-Ne.

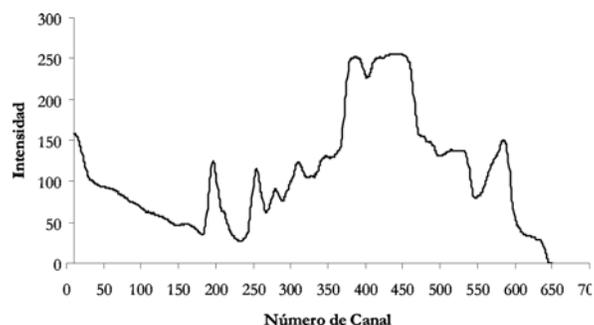


Figura 2. Espectro del haz láser de He-Ne determinado en una primera etapa de calibración del monocromador.

izquierda se aprecia la fuente de emisión espectral correspondiente a un láser de He-Ne ( $\lambda=632.8 \text{ nm}$ )<sup>1</sup>. El espectro obtenido mediante el arreglo mostrado en el anterior montaje experimental se ilustra en la figura 2. Se debe aclarar que tanto el espectro de la figura 2 así como todos los espectros que se analizarán en el presente artículo, fueron suavizados usando una media móvil de 20 puntos.

En el gráfico de la anterior figura se puede observar que el espectro presenta una serie de picos que no concuerdan con el espectro del haz láser, los cuales son atribuidos al ruido de fondo recibido en el fotomultiplicador. Analizando estos picos, se puede apreciar que el pico presente en el canal 250 correspondería a la longitud de onda de 450 nm aproximadamente (tomando en cuenta que el espectrofotómetro recorre el espectro desde los 200 nm hasta los 800 nm), longitud de onda que corresponde al color azul; este color es detectado por el espectrofotómetro ya que la fibra óptica se encuentra frontalmente dirigida al haz láser y por lo tanto puede detectar la luz de coloración azulada emitida por el tubo de descarga del láser. En el pico que correspondería a la longitud de onda del haz del rayo láser, en la banda formada desde el canal 400 hasta el canal 450, la intensidad no presenta un valor definido puesto que llega a su nivel máximo, lo que indica que la fibra óptica y el

<sup>1</sup>Láser He-Ne Leybold-Heraeus, 220 V/50-60 Hz, DIN 58126KL2.

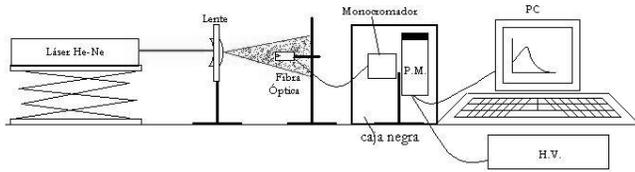


Figura 3. Montaje experimental mejorado de calibración del monocromador utilizando una lente cóncavo-convexa de 5 mm de distancia focal.

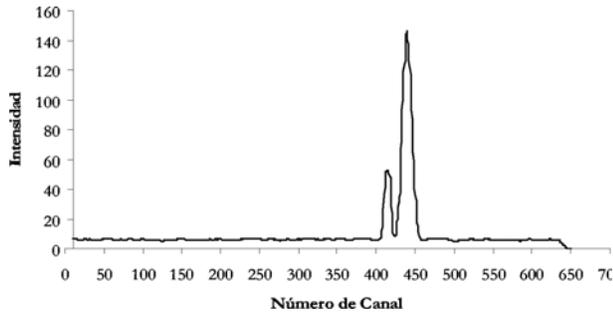


Figura 4. Espectro del haz de rayos láser de He-Ne determinado mediante la disminución del ruido de fondo y la intensidad del haz con una lente cóncavo-convexa de 5 mm de distancia focal. Se observan dos picos: el primero corresponde a la difracción causada por la incidencia del haz en el aparato espectral y el segundo corresponde a la longitud de onda del láser.

fotomultiplicador fueron sobreexpostos a la intensidad del haz haciendo que el pico se sature.

Para corregir el espectro del haz láser fue necesario atenuar primero el espectro creado por el ruido de fondo, lo que se logró mediante la construcción y el uso de una pequeña caja fabricada con cartulina negra que bloquea la entrada de luz al fotomultiplicador evitando que éste se sature. Además, para corregir la saturación del pico del haz láser, fue necesario mejorar el montaje experimental mostrado en la figura 1, añadiendo una lente cóncavo-convexa de 5 mm de distancia focal, que tiene como objeto principal dispersar el haz del rayo láser, tal como se indica en el esquema de la figura 3. Mediante el montaje del anterior esquema se pudo disminuir la intensidad de los picos provenientes del láser y del ruido de fondo<sup>2</sup>, pero el espectro obtenido presenta dos picos, uno de los cuales corresponde a la longitud de onda del láser de He-Ne (632.8 nm) y un segundo pico, situado aproximadamente en el canal 420, que se debe a un fenómeno de difracción del aparato espectral, en este caso del monocromador<sup>3</sup>, tal como se ilustra en la figura 4.

Para atenuar la intensidad del primer pico ilustrado en la figura 4 se añadió al montaje experimental un par de polarizadores, de manera que colocándolos en ángulos diferentes se pueda tener una reducción de intensidad considerable para el primer pico sin reducir más el

<sup>2</sup>Aunque el ruido de fondo fue disminuido, es evidente la presencia del mismo, por lo que en las posteriores gráficas se encuentra restado de las medidas realizadas.

<sup>3</sup>Véase Záidel, Ostróvskaya, Ostrovski, *Técnica y práctica de espectroscopía*, Ed. MIR, Moscú, 1976.

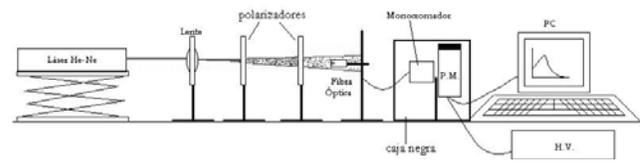


Figura 5. Esquema del montaje experimental realizado añadiendo un juego de polarizadores para reducir la intensidad del espectro producido por un haz de rayo láser de He-Ne.

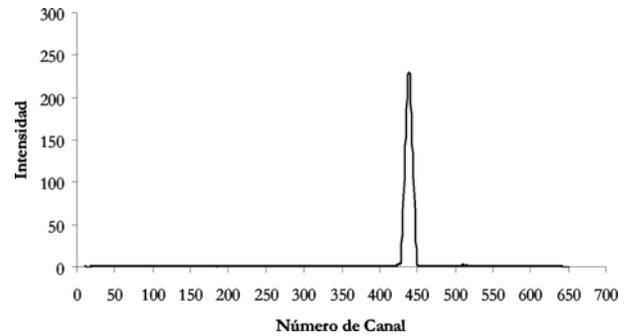


Figura 6. Espectro del haz de rayo láser obtenido para calibrar el monocromador utilizado como espectrofotómetro.

segundo. El esquema mejorado se encuentra ilustrado en la figura 5. Al añadir el juego de polarizadores creando un ángulo de  $65^\circ$  entre ellos se redujo la intensidad del primer pico y, disminuyendo el error de paralaje existente entre la fibra óptica y el haz de rayos láser, se pudo intensificar más el pico correspondiente al haz, tal como se ilustra en la gráfica de la figura 6. Para determinar el número de canal correspondiente a la longitud de onda del haz láser de He-Ne se debe tomar en cuenta el promedio del ancho de banda del espectro obtenido. De acuerdo a los datos tratados, el número de canal se encuentra en la posición 441.

A fin de completar la calibración espectral del monocromador se empleó la segunda fuente patrón de emisión espectral, correspondiente a una lámpara de vapor de hidrógeno, mediante el montaje experimental que se ilustra en la figura 7. En este caso, el uso de una lente plano-convexa fue necesario para poder enfocar la luz de la lámpara de hidrógeno sobre la fibra óptica, contando con la ayuda de los polarizadores para que el espectro del hidrógeno presente las mismas condiciones que las utilizadas con el haz láser. El espectro obtenido se encuentra graficado en la figura 8. En dicho espectro se observa la presencia de las líneas  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$  y  $H_\gamma$  correspondientes a la serie de Balmer del hidrógeno. Se debe tomar en cuenta que en el caso del espectro del hidrógeno, los picos se encuentran bien definidos y no fue necesario determinar el promedio del ancho de banda de cada uno de ellos. Además, es necesario señalar que el espectro graficado en la figura 8 se presenta con corrección de ruido de fondo.

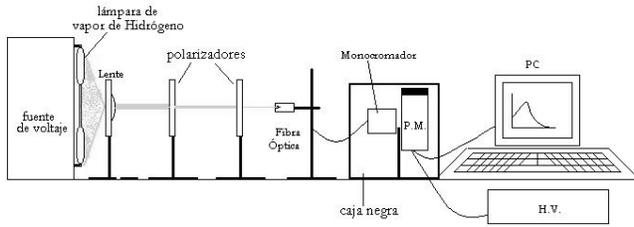


Figura 7. Esquema del montaje experimental realizado para calibrar espectralmente un monocromador mediante el uso de una lámpara de vapor de hidrógeno.

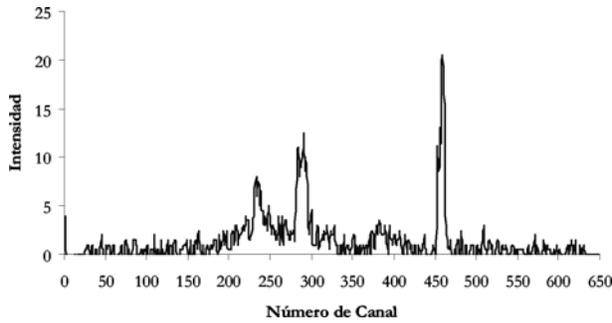


Figura 8. Espectro de luz de una lámpara de vapor de hidrógeno, en ella se observa la presencia de tres picos que corresponderían a las líneas  $H_{\alpha}$ ,  $H_{\beta}$  y  $H_{\gamma}$  de la serie de Balmer del hidrógeno.

### 3. RESULTADOS

En la tabla 1 se muestran los valores de las longitudes de onda del espectro del hidrógeno y del láser de He-Ne; asimismo se muestran los canales correspondientes a dichas longitudes de onda.

Mediante los datos de los números de canal y las longitudes de onda de los espectros del láser de He-Ne y de la lámpara de vapor de hidrógeno se realizó una regresión lineal donde se determinó la recta de calibración graficada en la figura 9.

La regresión lineal efectuada nos conduce a la ecuación  $\lambda = aN + b$ , donde los coeficientes de la regresión son:

$$a = (0,99 \pm 0,02) \text{ nm/canal,}$$

$$b = (200 \pm 6) \text{ nm.}$$

TABLA 1

Longitudes de onda correspondientes a los picos de la serie de Balmer del espectro de hidrógeno y canales correspondientes al espectro de la lámpara de vapor de hidrógeno utilizada para la calibración del monocromador.

	Longitud de onda (nm)	Nº de Canal
$H_{\alpha}$	434,05	236
$H_{\beta}$	486,13	291
$H_{\gamma}$	656,28	459
Láser He-Ne	632,8	441

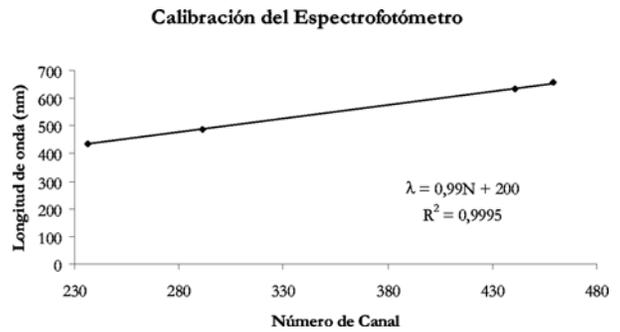


Figura 9. Regresión lineal efectuada con los pares de datos de las longitudes de onda y los números de canal de los espectros de un láser de He-Ne y una lámpara de vapor de hidrógeno para calibrar el monocromador.

### 4. CONCLUSIONES

Se realizó la calibración espectral de un espectrofotómetro mediante el empleo de dos tipos de fuentes de emisiones espectrales: un haz de rayos láser de He-Ne y una lámpara de vapor de hidrógeno, obteniéndose una recta de calibración de la longitud de onda en función del número de canal de los espectros de emisión de las fuentes. La recta de calibración corresponde a la ecuación  $\lambda = 0.99N + 200$  donde los coeficientes de la regresión presentan errores porcentuales menores al 5%, además de un coeficiente de correlación cuadrático  $R^2 = 0.9995$ , lo que indica una buena correlación entre los pares de datos. Debe tomarse en cuenta que el primer canal del espectrofotómetro corresponde a una longitud de onda de 200 nm, lo que significa  $N = 0$  en la ecuación  $\lambda = aN + b$ .

**11<sup>ava</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA  
EXAMEN NACIONAL  
8<sup>vo</sup> DE PRIMARIA, 1<sup>ro</sup>, 2<sup>do</sup>, 3<sup>ro</sup> Y 4<sup>to</sup> DE SECUNDARIA 2006**

Bustos R.<sup>1</sup>, Gutiérrez V. H.<sup>2</sup>, Guaygua T.<sup>3</sup>, Jemio C.<sup>3</sup>, Burgos J.<sup>3</sup>, Mamani N.<sup>3</sup>, Portugal R.<sup>4</sup>,  
Huallpa R.<sup>5</sup>, Mamani R.<sup>5</sup>, Tavera W.<sup>6</sup>, Martínez L.<sup>7</sup>, Taquichiri M.<sup>8</sup>, Humérez A.<sup>9</sup>

<sup>1</sup> *Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), Carrera de Física, La Paz*

<sup>2</sup> *Universidad Mayor, Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCH) Facultad de  
Tecnología — Carrera de Ingeniería de Sistemas, Sucre*

<sup>3</sup> *Universidad Técnica de Oruro (UTO), Facultad Nacional de Ingeniería (FNI), Oruro*

<sup>4</sup> *Universidad Mayor de San Simón, Facultad de Ciencia y Tecnología, Cochabamba*

<sup>5</sup> *Universidad Autónoma Tomás Frías (UATF), Carrera de Física, Potosí*

<sup>6</sup> *Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)*

<sup>7</sup> *Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra, UPSA, Santa Cruz*

<sup>8</sup> *Universidad Autónoma Juan Misael Saracho, UAJMS, Tarija*

<sup>9</sup> *Universidad Amazónica de Pando, UAP, Pando*

**RESUMEN**

Se presentan las soluciones de los exámenes tomados en la 11<sup>ava</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA (11<sup>ava</sup> OBF) de los cinco cursos participantes: 8<sup>vo</sup> de Primaria, 1<sup>ro</sup>, 2<sup>do</sup>, 3<sup>ro</sup> y 4<sup>to</sup> de Secundaria. El evento se llevó a cabo los días 28, 29 y 30 de Junio de 2006 en los predios de la Universidad Técnica de Oruro (UTO), Facultad Nacional de Ingeniería (FNI), Oruro.

La Página Internet del proyecto es: <http://www.fiumsa.edu.bo/olimpiada/>



**8° de Primaria****SOLUCIÓN: PARTE CONCEPTUAL (40%)**

1. ¿Cuál es el significado del *sistema MKS* y del *sistema CGS*?

Sol.-

MKS: Metro Kilogramo Segundo

CGS: Centímetro Gramo Segundo

En realidad el sistema más usado es el MKS que forma la base del Sistema Internacional de Unidades compuesto del Metro, Kilogramo, Segundo, Ampere, Kelvin, Mol y la Candela.

2. De los siguientes ejemplos diga cuales son constantes y cuales son variables:
- |   |       |           |
|---|-------|-----------|
| a. La cantidad de agua en una caldera que está hirviendo.             | Sol.- | Variable  |
| b. La masa de arena que está en una carretilla que tiene un orificio. | Sol.- | Variable  |
| c. El numero de hojas de un libro.                                    | Sol.- | Constante |
| d. El tiempo de vida que Ud. tiene.                                   | Sol.- | Variable  |
| e. La cantidad de tinta de una impresora que se está usando.          | Sol.- | Variable  |
3. Indique si es cierto o falso que el método científico consta de los siguientes pasos:
- Observación de un fenómeno de la naturaleza
  - Análisis de los aspectos esenciales del fenómeno
  - Reunir todos los datos posibles mediante la *experimentación*
  - Formulación de una *hipótesis* que explique lo observado
  - Con otros experimentos verificar la valides de nuestra *hipótesis*
  - Si la *hipótesis* es valida elevarla al rango de *teoría*
  - Definir el rango de aplicación de la *teoría*

Si es cierto.

4. Coloque la numeración que indique el orden correcto de los planetas del Sistema Solar (Ayuda: Mercurio es el primer planeta):
- |               |                 |                |                |              |
|---------------|-----------------|----------------|----------------|--------------|
| a. Plutón (9) | b. Saturno (6)  | c. Tierra (3)  | d. Júpiter (5) | e. Marte (4) |
| f. Urano (7)  | g. Mercurio (1) | h. Neptuno (8) | i. Venus (2)   |              |
5. ¿En que “estados” se puede encontrar al agua? ¿Que se entiende por *punto de ebullición* y que se entiende por *punto de congelamiento* del agua?

Sol.- Sólido, liquido y gaseoso. El *punto de ebullición* es el estado en el que el agua pasa del estado liquido al estado gaseoso. El *punto de congelamiento* es el estado en el que el agua pasa del estado liquido al estado sólido

**8° de Primaria**  
**SOLUCIÓN: PARTE PRÁCTICA (60%)**

1. De un ejemplo de *energía almacenada* y otro ejemplo de *energía en acción*

Sol.-

Ejemplos de *energía almacenada*:

- Petróleo
- Gas Natural

Ejemplos de *energía en acción*:

- Cualquier objeto en Movimiento posee una *energía cinética*
- Cualquier objeto alejado de la tierra posee una *energía potencial*

2. Un basquetbolista mide 2,25 [m]. Indique su estatura en pulgadas. (Ayuda: 1[pulg] = 2,54 [cm]).

Sol.-

$$h = 2.25[m] \times \frac{100[cm]}{1[m]} \times \frac{1[pulg]}{2.54[cm]} = 88,582677[pulg] \cong 88,58[pulg]$$

3. Si el volumen de un pozo petrolero está calculado en  $75,344 \times 10^{13} [m^3]$  y cada día se extraen  $55,551 \times 10^3 [m^3]$  en cuantos meses se acabara el combustible?

Sol.-

$$75,344 \times 10^{13} [m^3] \times \frac{1[día]}{55,551 \times 10^3 [m^3]} \times \frac{1[mes]}{30[días]} = 452,435 \times 10^6 [meses]$$

4. El volcán inactivo *Olimpus* del planeta Marte alcanza una altura  $H = 26,55 [Km]$ , un Diámetro en su base igual a  $D = 600 [Km]$  y tiene forma cónica. La densidad promedio del planeta es de  $4,01 [g/cc]$ . Calcule la masa total del volcán en [Kg]. Ayuda: El volumen de un cono es

$$V = \frac{\pi}{12} D^2 H \text{ y la densidad de un cuerpo es } \rho = \frac{m}{V}$$

Sol.-

$$\text{Como } \rho = \frac{m}{V} \text{ entonces } m = \rho V = \rho \left( \frac{\pi}{12} D^2 H \right) \quad (1)$$

Ahora todas las cantidades usadas deben estar en un mismo sistema. Escojamos el sistema MKS:

$$\rho = 4,01 \left[ \frac{g}{cc} \right] \times \frac{(100[cm])^3}{(1[m])^3} \times \frac{1[Kg]}{1000[g]} = 4010 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right] \quad (2)$$

Reemplazando los valores dados más el resultado obtenido en la ecuación (2) se obtiene finalmente:

$$m = 4010 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right] \left( \frac{3,14159}{12} \times (600 \times 10^3 [m])^2 \times 26,55 \times 10^3 [m] \right) = 1,0034 \times 10^{19} [Kg]$$

**1° de Secundaria****SOLUCIÓN: PARTE CONCEPTUAL (40%)**

1. De los siguientes ejemplos diga cuales son constantes y cuales son variables:
- |  |       |           |
|--|-------|-----------|
| a. La cantidad de vapor de agua en una nube de donde está lloviendo. | Sol.- | Variable  |
| b. La masa de un camión arenero que tiene un hueco en su contenedor. | Sol.- | Variable  |
| c. El numero de ladrillos de una pared.                              | Sol.- | Constante |
| d. El tiempo de vida que Ud. tiene.                                  | Sol.- | Variable  |
| e. El numero de habitantes en un país.                               | Sol.- | Variable  |
2. Coloque la numeración que indique el orden correcto de los planetas del Sistema Solar (Ayuda: Mercurio es el primero):
- |               |                 |                |                |              |
|---------------|-----------------|----------------|----------------|--------------|
| a. Plutón (9) | b. Saturno (6)  | c. Tierra (3)  | d. Júpiter (5) | e. Marte (4) |
| f. Urano (7)  | g. Mercurio (1) | h. Neptuno (8) | i. Venus (2)   |              |

3. ¿Como está conformada la estructura interna de nuestro planeta Tierra?

Sol.-

Inicialmente la Tierra era una masa fundida a altísima temperatura rodeada de una capa gaseosa, luego se desplazaron al centro los materiales más pesados. Debido a una siguiente fase de enfriamiento, la corteza se fue solidificando en varias fases formando la corteza oceánica conocida como *basáltica* y la corteza continental conocida como *granítica*. Estas capas se dividen hoy en día en un núcleo, un manto y una corteza.

La corteza tiene un espesor promedio de 35 [Km], que alcanza los 75 [Km] bajo las montañas y solo unos 10 [Km] bajo los océanos.

El manto está separado de la corteza por una discontinuidad uniforme que se capta por la variación en aumento que experimenta la velocidad de las ondas sísmicas, se extiende hasta los 2900 [Km]

El núcleo, que se encuentra separado del manto por otra discontinuidad, es más fluido y tiene un espesor de 3400 [Km], está constituido por hierro y níquel, de densidades 7,9[g/cc] y 9[g/cc] respectivamente, que dan a nuestro planeta la alta densidad que conocemos.

4. ¿Que se entiende por *calor* y qué se entiende por *temperatura*?

Sol.-

*Temperatura:* Es una propiedad tal que su valor final es el mismo que el de otros sistemas, cuando todos ellos se ponen en contacto. Cotidianamente se la entiende como una medida de lo caliente o de lo frío que está un sistema. Todos los objetos que están en contacto durante un tiempo suficiente llegar a estar a una misma temperatura que viene a ser una condición necesaria para que exista un *equilibrio térmico*.

*Calor:* Es aquello que se transfiere entre un sistema y su medio ambiente en virtud, solamente, de su diferencia de temperaturas. Es una forma de energía siendo la unidad más utilizada la *caloría*.

5. ¿Que es un *vector*? ¿Cómo se suman y restan los *vectores*?

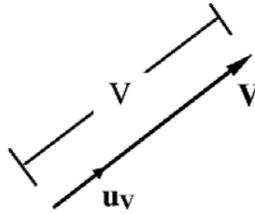
Sol.-

Es un elemento matemático que, además de modulo, posee dirección y sentido

No olvides que para cualquier vector en general se puede escribir:  $\mathbf{V} = V \mathbf{u}_V$ , donde:

$\mathbf{V}$  : Vector;  $V$  : Magnitud del Vector (Tamaño o modulo);  $\mathbf{u}_V$ : Vector Unidad

elementos que se los puede apreciar en el **GRÁFICO 5.1**

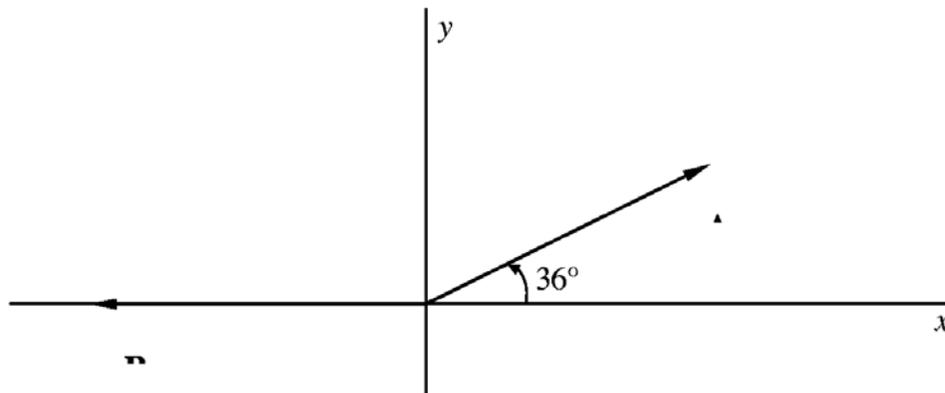


**GRÁFICO 5.1**

Como ejemplo de suma de vectores veamos el siguiente caso:

Sean dos vectores **A** de 6 unidades haciendo un ángulo de  $+36^\circ$  con el eje  $x$ ; **B** de 7 unidades que está en la dirección negativa del eje  $x$ . Calculemos el modulo de la suma de los dos vectores y el ángulo de la dirección del vector suma con el eje  $x$ :

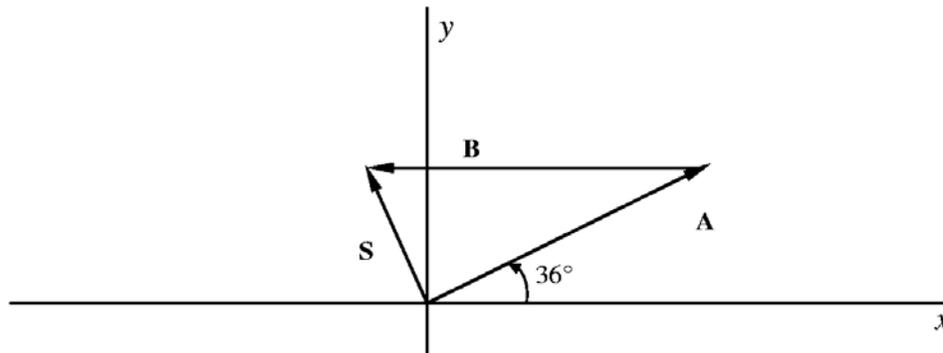
Dibujemos los vectores en un plano Euclidiano (**GRÁFICO 5.2**):



**GRÁFICO 5.2**

Los vectores son desplazables, por eso notemos que podemos trasladar el comienzo del vector **B** al “final” del vector **A**.

El vector suma será aquel vector que empieza donde empieza el vector **A** y finaliza donde finaliza el vector **B**:



**GRÁFICO 5.3**

Resaltemos este **GRÁFICO** en magnitudes:

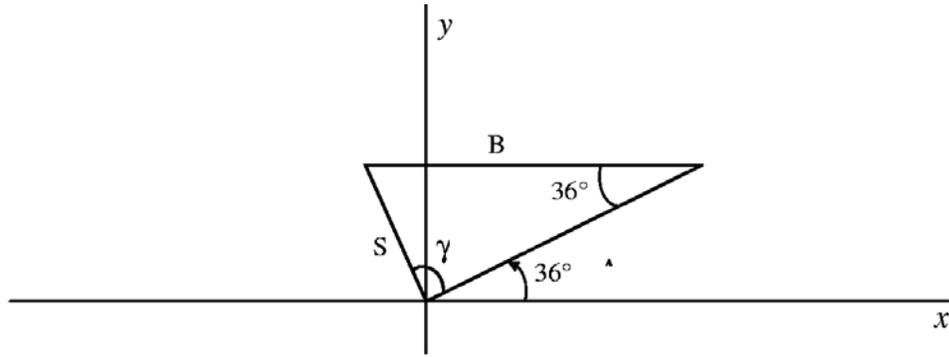


GRÁFICO 5.4

De la *ley de los cosenos*  $S = \sqrt{6^2 + 7^2 - 2(6)(7)\cos(36)}$  obtenemos que el módulo del vector suma es  $S = 4.128$  unidades.

De la *ley de los senos*:  $\frac{S}{\sin(36)} = \frac{B}{\sin(\gamma)}$  obtenemos que  $\gamma \cong 85^\circ$  y finalmente el ángulo del vector suma con el eje  $x$  es:  $36^\circ + \gamma = 121^\circ$

**PRACTICA:** Calcula la magnitud del vector resta  $A - B$  así como también el ángulo que este vector resta tiene con el eje  $x$ .

### 1° de Secundaria

#### SOLUCIÓN: PARTE PRÁCTICA (60%)

- El diámetro ecuatorial de la Tierra es de 12756 [Km]. En cuanto tiempo un avión que vuela a una velocidad de 1000 [Km/h] completará una vuelta al planeta por la línea del ecuador?

Sol.-

El perímetro de una circunferencia, en este caso el de la línea del ecuador, es

$$2\pi \times R = 2\pi \times \left(\frac{D}{2}\right) = 2 \times 3,14159 \times \left(\frac{12756[\text{Km}]}{2}\right) = 40074,15589[\text{Km}]$$

Como la velocidad del avión es constante entonces se cumple la relación más simple de la cinemática:

$$v = \frac{\text{DISTANCIA}}{\text{TIEMPO}} = \frac{l \left[ \frac{\text{Km}}{\text{h}} \right]}{t}$$

de donde

$$t = \frac{l \left[ \frac{\text{Km}}{\text{h}} \right]}{v} = \frac{l}{v} [\text{h}] = \frac{40074,15589}{1000} [\text{h}] = 40,07416[\text{h}]$$

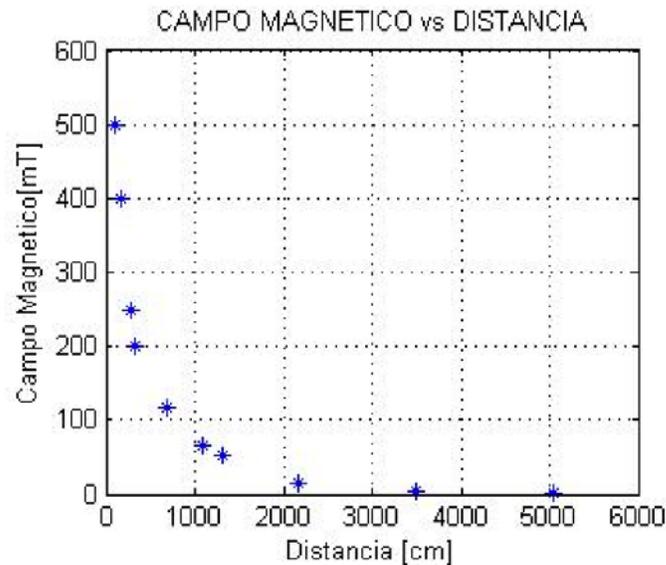
2. El *Campo Magnético*, cuyo símbolo es  $B$ , y se mide en [Teslas = T] es una medida de cuan intenso es un imán. La *corriente*, cuyo símbolo es  $I$  y se mide en [Amperes = A] es una medida de la *carga eléctrica* de las *partículas* que pasan por un cable en un *tiempo* dado. La *carga eléctrica* es un equivalente a la masa de las *partículas* pero en realidad es una *masa eléctrica* que se mide en [Coulombs = C]. Las *partículas* que forman las corrientes más comunes son los *electrones*. André Marie Ampere (1775 – 1836) encontró que una corriente  $I$  que pasa por un cable genera en el espacio circundante un campo magnético  $B$ . En un experimento se ha medido el *Campo Magnético*  $B$ , a una distancia  $R$  de un cable por el que pasa una *corriente*  $I$ , habiéndose obtenido los siguientes datos:

$B$ [miliTeslas]	5050	3490	2160	1310	1090	680	330	270	170	110	30
$R$ [centímetros]	1	5	15	53	67	117	200	250	400	500	600

- Grafique en un plano euclidiano este fenómeno.
- ¿Le parece correcto afirmar, analizando su gráfico, que el campo magnético  $B$  es cada vez más pequeño a medida que uno se va alejando de la corriente  $I$ ?
- ¿Es cierto que el campo magnético es más intenso muy cerca del cable?

Sol.-

a.



- Si
- Si

3. ¿Cuál es el *error relativo* y el *error porcentual* de la masa de un electrón que vale  $9,109381 \times 10^{-31} \pm 0,000004$  [Kg]?

Sol.-

Un resultado generalmente se expresa como:  $x = \bar{x} \pm \Delta x$

donde  $\bar{x}$  es el valor promedio y  $\Delta x$  es el error del valor promedio en  $x$ , entonces:

$$\text{Error Relativo} = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

$$\text{Error porcentual} = \text{Error Relativo} \times 100$$

En este caso:  $m = \bar{m} \pm \Delta m$

donde  $\bar{m}$  es la masa promedio y  $\Delta m$  es el error del valor promedio de la masa  $m$ , por lo tanto:

$$\text{Error Relativo} = \frac{\Delta m}{\bar{m}} = \frac{0,000004[\text{Kg}]}{9,109381 \times 10^{-31}[\text{Kg}]} = 4,39 \times 10^{-7}$$

$$\text{Error porcentual} = \text{Error Relativo} \times 100 = 4,39 \times 10^{-5}$$

4. Una barra de cobre mide 270 [mm] a 18 [°C]. Calcule su nueva longitud si se calienta la barra hasta 99 [°C]. El coeficiente de dilatación lineal del cobre vale  $17 \times 10^{-6} [^{\circ}\text{C}]^{-1}$ .

Sol.-

Sabemos que al calentar un cuerpo este experimenta un incremento en sus dimensiones; el aumento en su longitud ( $\Delta l$ ) es aproximadamente proporcional a su longitud inicial y al incremento de temperatura experimentado ( $\Delta t$ ), es decir:

$$\Delta l = (\alpha)(l_1)\Delta t \quad (4.1)$$

donde

$$\Delta l = l_{\text{Final}} - l_{\text{Inicial}} \quad (4.2)$$

$$\Delta t = t_{\text{Final}} - t_{\text{Inicial}} \quad (4.3)$$

$$\alpha = \text{coeficiente de dilatación lineal} \left[ \frac{1}{^{\circ}\text{C}} \right] \quad (4.4)$$

Por lo tanto usando las ecuaciones (4.1) y (4.3):

$$\Delta l = (\alpha)(l_1)\Delta t = (1,7 \times 10^{-6} [^{\circ}\text{C}]^{-1})(270[\text{mm}](99 - 18)[^{\circ}\text{C}]) = 0,0372[\text{mm}]$$

Y finalmente de la relación (4.2):

$$l_{\text{Final}} = l_{\text{Inicial}} + \Delta l = 270,0000 + 0,0372 = 270,0372[\text{mm}]$$

**2° de Secundaria**  
**SOLUCIÓN: PARTE CONCEPTUAL (40%)**

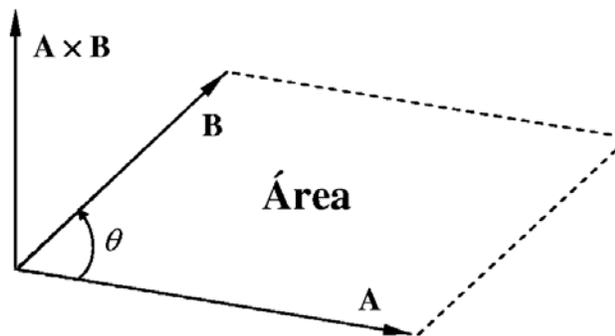
1. ¿Cuántos y cuáles tipos de multiplicación vectorial existen?

Sol.-

Existen dos tipos de multiplicación entre vectores:

- Multiplicación Punto o Escalar (Se llama así por que el resultado es un Escalar y el símbolo usado es un punto:  $\bullet$ )
- Multiplicación Cruz o Vectorial (Se llama así por que el resultado es un Vector y el símbolo usado es una cruz:  $\times$ )

La Multiplicación Vectorial de los vectores **A** y **B** se define como un nuevo vector que es perpendicular al plano formado por los vectores **A** y **B** en la dirección de avance de un tornillo de rosca derecha que ha sido rotado del vector **A** hacia el vector **B** (*GRÁFICO 1.1*).



*GRÁFICO 1.1*

Lo más interesante en este tipo de multiplicación es que el módulo del vector  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es el área del paralelogramo formado por los módulos  $A$  y  $B$  y viene dada por

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin(\theta) = \text{Área} \quad (1.1)$$

La Multiplicación Escalar de los vectores **A** y **B** se define como la cantidad escalar obtenida de:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = AB \cos(\theta) \quad (1.2)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo que existe entre el vector **A** y el vector **B** cuando ambos están comenzando de un mismo punto (*GRÁFICO 1.1*).

El vector **A** y el vector **B** pueden ser escritos como:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} = A_x \mathbf{u}_x + A_y \mathbf{u}_y + A_z \mathbf{u}_z \quad (1.3)$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} = B_x \mathbf{u}_x + B_y \mathbf{u}_y + B_z \mathbf{u}_z \quad (1.4)$$

donde **i**, **j**, **k** son vectores unitarios, es decir vectores cuyo módulo vale la unidad y están orientados hacia el lado positivo de cada uno de los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (*GRÁFICO 1.2*) y las  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  son las componentes del vector **A** (*GRÁFICO 1.3*).

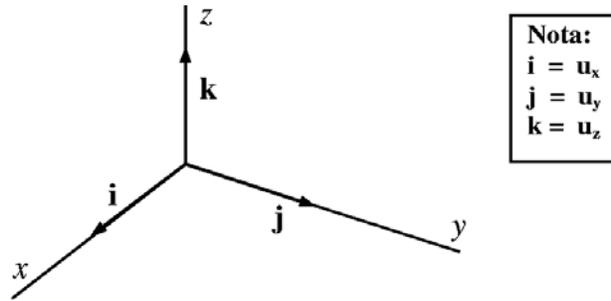


GRÁFICO 1.2

Nota: La magnitud de los vectores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  vale una unidad, es decir:  $|\mathbf{i}| = i = 1$ ,  $|\mathbf{j}| = j = 1$ , etc...

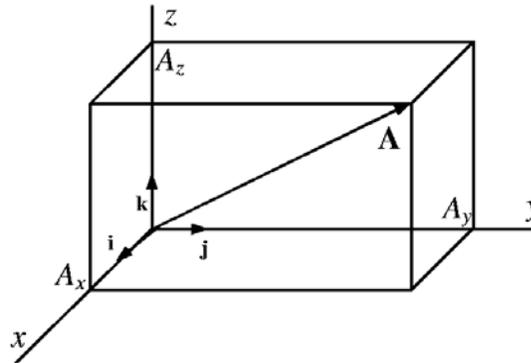


GRÁFICO 1.3

Nota: Para el vector  $\mathbf{B}$  el gráfico de las componentes  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  será equivalente al GRÁFICO 1.3, lo que variará será el módulo, la dirección y el sentido del vector  $\mathbf{B}$  en consecuencia también las magnitudes de sus componentes.

Si se aplica la definición dada por la ecuación (1.2) se obtiene

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.5)$$

Este resultado es un escalar (un número) puesto que no contiene ningún vector unitario.

Si  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  entonces  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = AA \cos(\theta) = AA = A^2$  (El ángulo entre el vector  $\mathbf{A}$  y el mismo vector  $\mathbf{A}$  es cero), es decir el módulo del vector  $\mathbf{A}$  vendrá dado por:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.6)$$

De igual modo es evidente que el módulo del vector  $\mathbf{B}$  viene dado por:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (1.7)$$

De la definición de Multiplicación Escalar, ecuación (1.2), y de las relaciones (1.5), (1.6) y (1.7) se puede despejar y calcular por ejemplo el ángulo  $\theta$ :

$$\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / AB) = \cos^{-1} \left( \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\left( \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2} \right) \left( \sqrt{(B_x)^2 + (B_y)^2 + (B_z)^2} \right)} \right)$$

2. De un ejemplo de una *onda longitudinal* y otro ejemplo de una *onda transversal*.

Sol.-

Ejemplos de *onda longitudinal*

- El sonido
- Un resorte oscilando en la dirección y

Ejemplos de *onda transversal*

- La luz
- Las Ondas Electromagnéticas en general
- Una cuerda amarrada a una pared en la que se realiza un movimiento de vaivén.

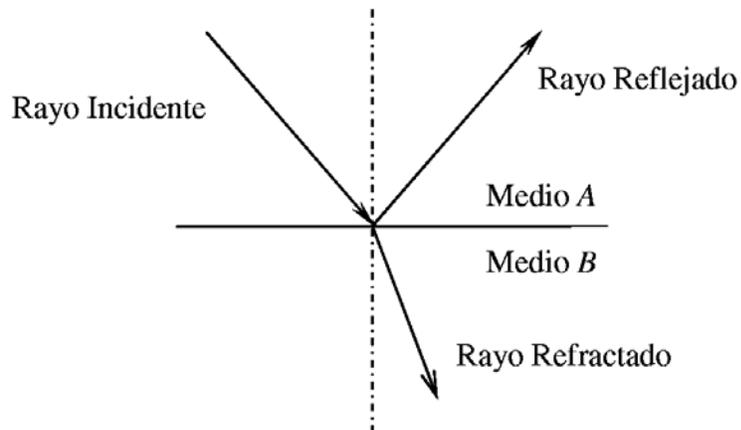
3. ¿Que es el eco? Use palabras como *onda*, *velocidad*, *reflexión*, etc.

Sol.-

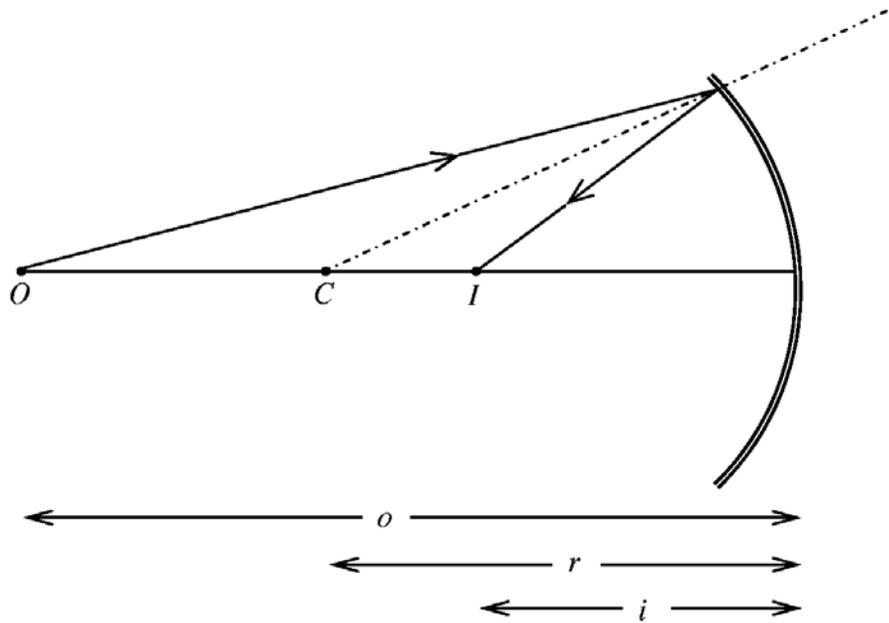
Una Onda de Sonido con velocidad constante que se refleja en una superficie dada que puede ser una montaña, un cerro, un monte, etc., retorna también como onda, con prácticamente la misma velocidad, a su lugar de origen percibiendo en el observador el fenómeno conocido como el *eco*.

4. ¿Cual es la diferencia entre *reflexión* y *refracción*?

Cuando una onda de luz llega de un medio 1 a un medio 2 oblicuamente a la superficie de separación entre ambos medios parte de la onda se refleja, es decir vuelve al medio A, y parte se refracta, es decir pasa al medio B.



5. ¿Como se forma una imagen en un espejo esférico? (grafique)



Un rayo de luz proveniente de un objeto puntual  $O$  incide sobre un espejo esférico cóncavo cuyo radio de curvatura es  $r$ .

El eje de referencia es una línea que pasa a través de  $O$  y que está centrada en el centro de curvatura  $C$ .

La ecuación:  $\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}$ , relaciona la distancia objeto  $o$  y la distancia imagen  $i$  en función del radio de curvatura  $r$ .

## 2° de Secundaria

### SOLUCIÓN: PARTE PRÁCTICA (60%)

1. Se ha medido el tiempo de viaje que una persona realiza entre dos puntos fijos:

#	1	2	3	4	5	6	7
T[minutos]	12,3	12,9	15,1	11,8	13,0	14,5	13,9

- Calcule  $t = \bar{t} \pm \Delta t$
- Calcule el *error porcentual*

Sol.-

**Teoría** Veamos algunos conceptos básicos sobre estadística:

### Tipos de Errores

- Fortuitos o aleatorios.- Están presentes en cualquier medición que se realice, se puede decir que son parte de la naturaleza.
- Sistemáticos.- Están presentes cuando los equipos de medida están mal calibrados, o sea son repetitivos.
- Gruesos.- Son descuidos (falta de atención) en la toma de datos.

### Error de una sola medición

La ecuación que resalta el resultado medido es:

$$x = x_{Medido} \pm \Delta x_{Mínimo}$$

donde:

$x_{Medido}$  es la variable medida, que puede ser cualquier cantidad física como por ejemplo: longitud, masa, tiempo, densidad, peso, volumen, corriente, resistencia, etc...

$\Delta x_{Mínimo}$  es la MÍNIMA lectura visible del instrumento utilizado para la medición.

#### Ejemplo 1

Se midió la longitud de un marcador con una regla común (que mide hasta los milímetros):

$$l_{Medido} = 11.9[cm]$$

La mínima lectura visible en la regla usada es de:

$$1[mm] = 0.1[cm]$$

Por lo tanto el resultado final es:

$$l = 11.9 \pm 0.1[cm]$$

#### Ejemplo 2

Se midió el tiempo de viaje de un estudiante entre dos puntos fijos con un cronometro común (que mide hasta la centésima de segundo):

$$t_{Medido} = 45.36[s]$$

La mínima lectura visible en el cronometro usado es de:

$$0.01[s]$$

Por lo tanto el resultado final es:

$$t = 45.36 \pm 0.01[s]$$

#### Ejemplo 3

Se midió la masa de un objeto con una balanza común (que mide hasta la décima de Kilogramo):

$$M_{Medida} = 0.3[Kg]$$

La mínima lectura visible en la balanza usada es de:

$$0.1[Kg]$$

Por lo tanto el resultado final es:

$$M = 0.3 \pm 0.1[Kg]$$

**Error de varias mediciones (Pregunta)**

Los datos tomados se colocan en una tabla:

# de dato	1	2	3	4	5	6	...	$n$
$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	...	$x_n$

La ecuación del resultado final es:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{p=n} x_p$$

es el valor promedio

$n$  es el número de datos

$$\Delta x = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

es el error fortuito resultante del conjunto de mediciones

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^n (x_p - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Desviación Típica de una Muestra

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^n (x_p - \bar{x})^2}{n}}$$

Desviación Típica de una Población (se usa para muchos datos: >1000)

Estas variables estadísticas pueden ser calculadas directamente por cualquier calculadora científica.

**Uso de la Calculadora Científica**

- Habilite el modo SD (Standard Desviation): MODE SD
- Limpie la memoria: SHIFT CLR SCL =
- Verifique la limpieza: SHIFT  $x \sigma_{n-1}$  =  
Debería verse en la pantalla el mensaje: *Math ERROR*
- Introduzca sus Datos:  $x_1 DT$   $x_2 DT$   $x_3 DT$   $x_4 DT$  ...
- Calcule la desviación típica de una muestra: SHIFT  $x \sigma_{n-1}$  =
- Calcule el valor promedio: SHIFT  $\bar{x}$  =

Nota: Los distintos modelos de calculadoras científicas pueden diferir levemente. Consulte con su manual de propietario para cualquier duda.

**Ejemplo 4 (Solución a la pregunta)** Se ha medido el tiempo de viaje de un estudiante entre dos puntos fijos 8 veces habiéndose obtenido los siguientes resultados:

#	1	2	3	4	5	6	7
T[minutos]	12,3	12,9	15,1	11,8	13,0	14,5	13,9

Sol.-

$$\sigma_{n-1} = 1,191437707$$

$$\bar{t} = 13,35714286[m]$$

Por lo tanto 
$$\Delta t = \frac{1,191437707}{\sqrt{7}} = 0,450321125[s]$$

Entonces: 
$$t = 13,35714286 \pm 0,450321125[s]$$

Sin embargo debemos redondear este resultado, en este caso a un solo decimal:

$$t = 13,4 \pm 0,5[s]$$

Note que el redondeo se lo realiza hasta el dígito indicado por el error fortuito  $\Delta t$ , en este caso hasta la décima.

### Error Relativo y Error Porcentual

Se define el error relativo como:

$$E_R = \frac{|\Delta x|}{x}$$

Y el error porcentual como:

$$E_{\%} = E_R \times 100$$

En el caso en que se conozca el valor exacto de la cantidad física que se está midiendo:  $x_{Exacto}$  se define el error relativo como:

$$E_R = \left| \frac{x_{Exacto} - x_{Medido}}{x_{Exacto}} \right|$$

Ecuación que se aplica para una sola medición como también para varias mediciones. El error porcentual se define de la misma manera.

Note que ambas cantidades son adimensionales.

Ahora debemos usar estas relaciones para hallar el *error porcentual* pedido:

$$E_R = \frac{|\Delta t|}{t}$$

$$E_{\%} = E_R \times 100 = \frac{|0,5|}{13,4} \times 100 \cong 3,73\%$$

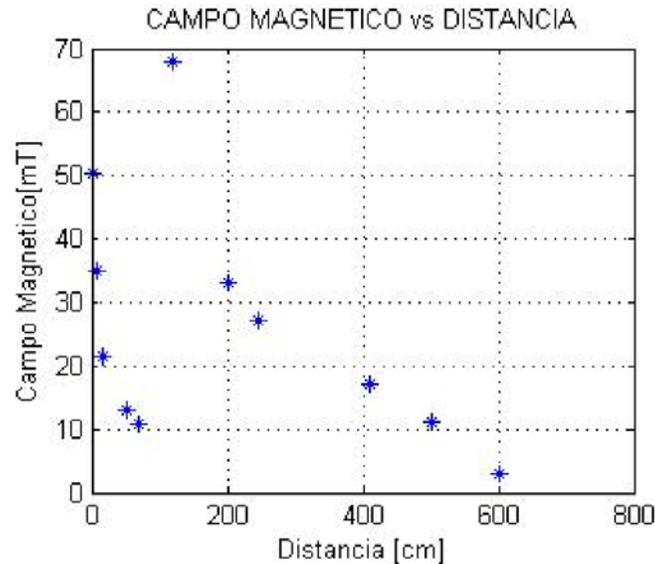
2. El *Campo Magnético*, cuyo símbolo es  $B$ , y se mide en [Teslas = T] es una medida de cuan intenso es un imán. La *corriente*, cuyo símbolo es  $I$  y se mide en [Amperes = A] es una medida de la *carga eléctrica* de las *partículas* que pasan por un cable en un *tiempo* dado. La *carga eléctrica* es un equivalente a la masa de las *partículas* pero en realidad es una *masa eléctrica* que se mide en [Coulombs = C]. Las *partículas* que forman las corrientes más comunes son los *electrones*. André Marie Ampere (1775 – 1836) encontró que una corriente  $I$  que pasa por un cable genera en el espacio circundante un campo magnético  $B$ . En un experimento se ha medido el *Campo Magnético*  $B$ , a una distancia  $R$  de un cable por el que pasa una *corriente*  $I$ , habiéndose obtenido los siguientes datos:

$R$ [centímetros]	1	6	15	52	68	118	202	247	411	502	601
$B$ [miliTeslas]	50,5	34,9	21,6	13,1	10,9	68,1	33,2	27,0	17,1	11,2	3,1

- Grafique en un plano euclidiano este fenómeno.
- ¿Le parece correcto afirmar, analizando su gráfico, que el campo magnético  $B$  es cada vez menos intenso a medida que uno se va alejando del cable?
- ¿Es cierto que el campo magnético es más débil muy cerca del cable?

Sol.-

a.



- Verdadero
- Falso

Nota: A una distancia entre a y 2 metros existe una anomalía existiendo un incremento en  $B$  abrupto para luego ir descendiendo a medida que nos vamos alejando del cable.

3. Un oscilador armónico se describe por la ecuación  $x = (5)\text{sen}(3t)$ , donde todas las cantidades se expresan en unidades MKS. Encontrar:
- La *Amplitud*, el *Periodo*, la *Frecuencia* y la *Fase Inicial* de la oscilación.
  - La posición para un tiempo de 15 s.
  - Graficar en un mismo plano:  $x = (5)\text{sen}(3t)$ ,  $x = (10)\text{sen}(3t)$  y  $x = (5)\text{sen}(t)$

Solución

a. Una onda puede ser expresada según la siguiente ecuación

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \quad (3.1)$$

donde

- $A \rightarrow$  Amplitud [m]
- $\omega \rightarrow$  Frecuencia Angular o Velocidad Angular [rad/s]
- $\phi \rightarrow$  Fase Inicial [rad]
- $t \rightarrow$  Tiempo [s]
- $x \rightarrow$  Distancia Variable vertical [m]
- $(\omega t + \phi) \rightarrow$  Fase del Movimiento [rad]

se cumple que:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{P} \quad (3.2)$$

donde

- $f \rightarrow$  Frecuencia [1/s=Hz (Hertz)]  
(Numero de repeticiones por unidad de tiempo)
- $P \rightarrow$  Periodo [s] (Tiempo en el cual la función se repite a si misma)

Por lo tanto usando la ecuación (3.1) podemos calcular:

La Amplitud:

$$A = 5$$

y la Frecuencia Angular:

$$\omega = 3.0 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

El Periodo  $P$  se puede calcular de la ecuación (3.2)

$$\omega = 2 = \frac{2\pi}{P} \Rightarrow P = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

y la frecuencia  $f$  sale también de la ecuación (3.2):

$$\omega = 2\pi f = 2 \Rightarrow f = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} [\text{Hz}]$$

Finalmente, la fase inicial será:  $\phi = 0[\text{rad}]$

b. La Posición para un tiempo de 5 [s] se puede calcular simplemente reemplazando en la ecuación original este tiempo:

$$x = 5 \text{sen}(3t) = 5 \text{sen}(45)$$

$$x = 5 \text{sen}(3 * 15) = 4,25452[m]$$

Nota: Tenga cuidado con las unidades. En su calculadora debe habilitar la opción de "radianes" (Rad) para que halles el resultado correcto. Existen otras dos opciones: Grados (Deg[°]) y Gradianes (Grad). La equivalencia es

$$2\pi[\text{rad}] = 360[^\circ] = 400[\text{Grad}]$$

c.

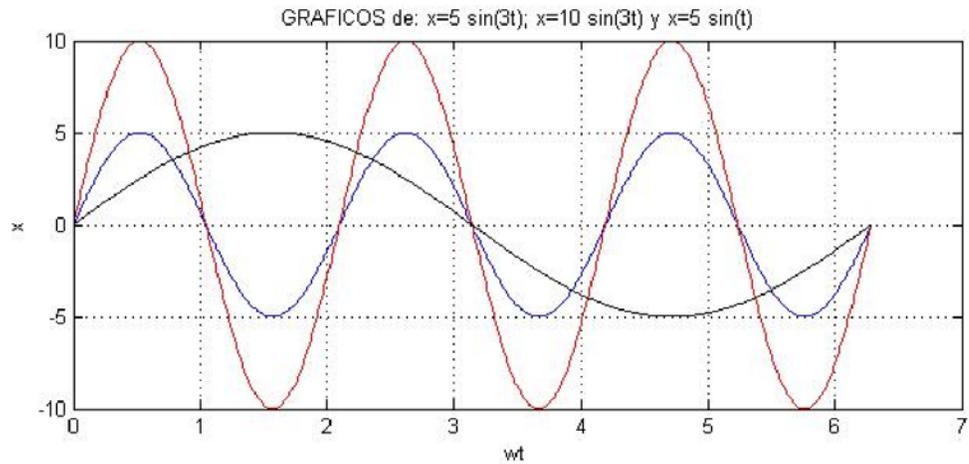


GRÁFICO 3.1

4. ¿A qué profundidad se ve una moneda que está en el fondo de una piscina de profundidad  $H$ ? El coeficiente de refracción del agua vale 1,33.

Sol.-

La moneda parecerá que está a una profundidad menor a  $H$ . Sea esa profundidad:  $h$ . *Figura (4.1)*

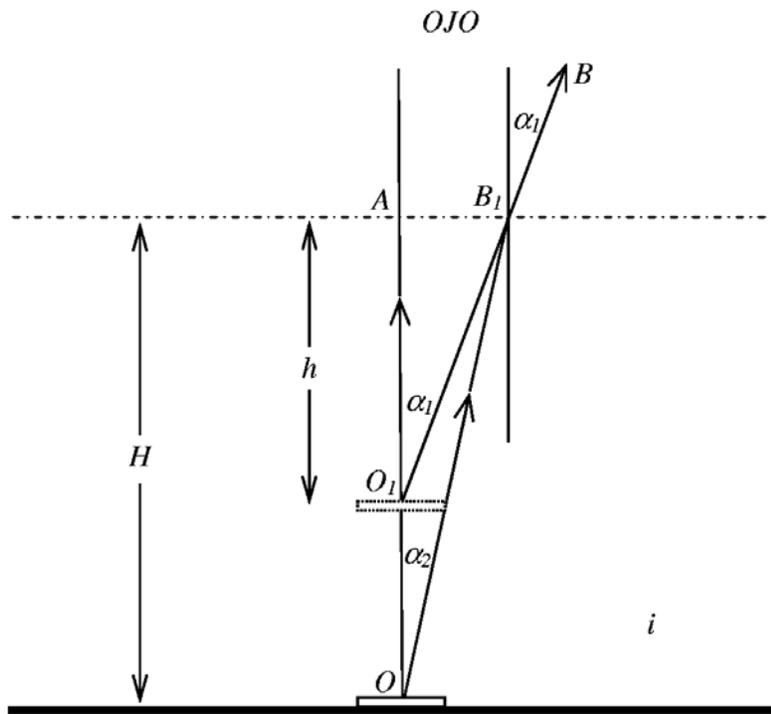


GRÁFICO 4.1

Notemos que en el gráfico (4.1) el rayo  $OA$  no se refracta por que es vertical, mientras que el rayo  $OB_1B$  se refracta. Supongamos que estos dos rayos divergentes llegan al OJO humano, el ojo ve la imagen de la moneda en el punto donde se cortan los rayos divergentes  $AO$  y  $BB_1$ , es decir, en el punto  $O_1$ . De la figura (4.1) se ve que la distancia que buscamos  $h$  está relacionada con la profundidad  $H$  según la relación:

$$(h) \tan(\alpha_1) = (H) \tan(\alpha_2) \quad (4.1)$$

De donde

$$h = H \frac{\tan(\alpha_2)}{\tan(\alpha_1)} \quad (4.2)$$

Notemos que los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son pequeños por lo tanto podemos utilizar la relación válida para ángulos pequeños:

$$\tan(\alpha) \approx \sin(\alpha) \quad (4.3)$$

Por lo tanto reemplazando (4.3) en la relación (4.2) para cada ángulo:

$$h = H \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} \quad (4.4)$$

La *ley de refracción* se escribe como:

$$(n_{\text{Agua}}) \sin(\alpha_2) = (n_{\text{Aire}}) \sin(\alpha_1) \quad (4.4)$$

Donde

$$\begin{aligned} n_{\text{Aire}} &= 1 \\ n_{\text{Agua}} &= 1,33 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Finalmente:

$$h = H \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)} = H \frac{1}{1,33}$$

Es decir si por ejemplo  $H = 1,33 [m]$  entonces  $h = 1[m]$

**3° de Secundaria****SOLUCIÓN: PARTE CONCEPTUAL (40%)**

1. ¿Cuáles son las leyes de Kepler? Grafique donde sea necesario.

Sol.- Johannes Kepler (1571 – 1630) analizo e interpreto como asistente de Tycho Brahe (1546 – 1601) los datos acumulados por este por más de veinte años descubriendo regularidades importantes en el movimiento planetario. Sus resultados son conocidos hoy en día como las leyes de Kepler:

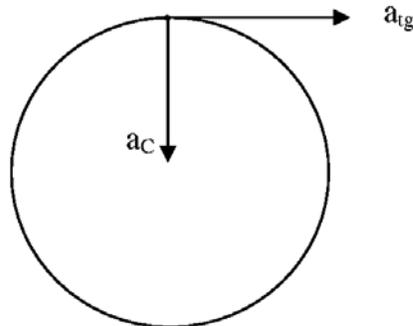
Ley de las órbitas: *Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos*

Ley de las áreas: *La línea que une a un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.*

Ley de los periodos: *El cuadrado del periodo de cualquier planeta en torno al Sol es proporcional al cubo de la distancia promedio del planeta al Sol.*

2. Dibuje en un punto cualquiera de un círculo los vectores *aceleración centrípeta* y *aceleración tangencial*.

Sol.-



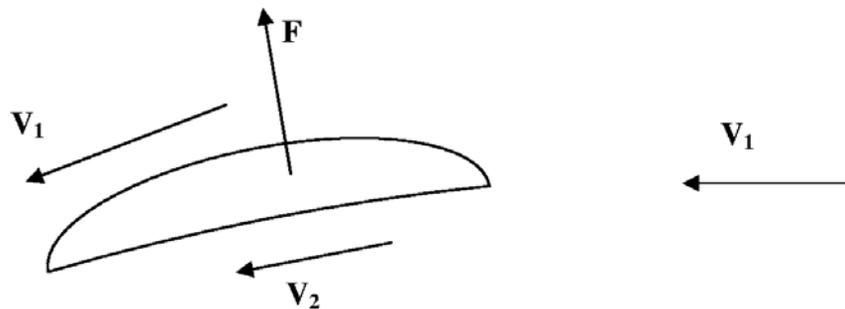
3. ¿Se cumple la *ley de Arquímedes* dentro de una nave cósmica? Explique.

Sol.-

La *ley de Arquímedes* resalta el hecho de que debido a la diferencia de las densidades de un cuerpo dado y un líquido (tomando volúmenes iguales) se requieren diferentes trabajos para levantarlos a una misma altura. En el estado de imponderabilidad (ausencia de gravedad) la diferencia entre los mencionados trabajos no debe existir, ya que el trabajo para levantar un cuerpo como el trabajo para levantar un volumen igual de líquido es nulo. En resumen en ese estado sobre un cuerpo sumergido en un líquido no existe la fuerza de empuje.

4. Explique, usando la *ecuación de continuidad* y la *ecuación de Bernoulli*, por que las alas de los aviones o de los pájaros experimentan una fuerza ascensional hacia arriba la que facilita su vuelo.

Sol.-



El ángulo de ataque del ala produce una desviación del aire hacia abajo. De la tercera ley de Newton, la reacción a esta fuerza descendente del ala sobre el aire es una fuerza ascendente  $\mathbf{F}$ , o empuje, ejercida por el aire sobre el ala.

Encima del ala, en el punto 1 las líneas de flujo están más concentradas que lo que están por debajo del ala, en el punto 2, Por lo tanto  $V_1 > V_2$  ya que la cantidad de aire que entra por la derecha al ala debe ser la misma cantidad de aire que sale finalmente por la izquierda (principio de continuidad) y, de la ecuación de Bernoulli  $p_1 < p_2$ , lo que debe ocurrir si ha de haber un empuje ascendente, responsable de facilitar el vuelo.

5. ¿Qué leyes de conservación conoce? ¿Qué nos dice cada una de ellas? De un ejemplo de cada una.

Sol.-

Para cualquier sistema cerrado (aislado) se pueden indicar algunas magnitudes físicas como la energía o el momentum cuyos valores numéricos no varían con el tiempo, o, como se dice, se conservan.

#### **Ley de Conservación de la Energía**

La energía de un sistema aislado, cualesquiera sean las transformaciones de este sistema, no varía. La energía puede pasar de una forma a otra, pero si se tienen en cuenta todas las formas de energía en las cuales el sistema aislado existe en el instante dado, y sumar sus expresiones numéricas, resulta que para cualquier instante esta suma debe permanecer constante. Esta tesis se denomina *ley de la conservación de la energía*.

Según la física teórica, la ley de la conservación de la energía es una consecuencia de la suposición natural sobre la homogeneidad del tiempo, es decir, de la independencia de las leyes naturales respecto del instante, en el que Ud. empieza a verificarlas. Se supone que todos los instantes son equivalentes.

Como ejemplo de la conservación de la energía podemos citar a las oscilaciones de un péndulo donde la energía cinética se transforma en energía potencial.

#### **Ley de Conservación del Momentum**

La otra ley conocida es la de conservación de la cantidad de movimiento o momentum  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Esta ley es una consecuencia de la homogeneidad del espacio, o sea, de la independencia de las leyes de la naturaleza respecto del punto concreto del espacio donde ellas se manifiestan.

A diferencia de la energía que es una cantidad escalar, el momentum es una cantidad vectorial, por eso la conservación del momentum o impulso significa la invariabilidad no solo de su valor numérico, sino también de su dirección.

La ley de la conservación del impulso, igual que la de la conservación de la energía, es una ley de conservación precisa (absoluta) que siempre para todas las interacciones es justa. Por ahora no se ha descubierto ni un solo fenómeno en el cual no se cumpliera estas leyes de conservación. Al contrario, la firme creencia en las leyes de conservación de la energía y del momentum permite en muchos experimentos indirectos pronosticar la existencia de partículas nuevas mucho antes de que éstas se descubran en experimentos directos.

#### **Ley de Conservación del Momentum Angular**

Esta ley es una consecuencia de la isotropía del espacio, es decir, de la equivalencia de todas sus direcciones.

Figúrese que usted está dando vueltas por encima de su cabeza, en plano horizontal, a una pesa de masa  $m$  amarrada al extremo de una cuerda de longitud  $r$ . La velocidad con que la pesa se mueve por la circunferencia es igual a  $v$ . En este caso, usted advierte (por la fuerza con que reacciona sobre la mano la cuerda con la masa) que el estado de rotación depende tanto de la velocidad de movimiento como de la longitud de la cuerda. Como característica de la rotación se considera la magnitud  $mvr$ , la cual se llama *momentum angular* de la pesa respecto del eje vertical que pasa por la mano.

El momentum angular es también una cantidad vectorial.

**Ley de Conservación de la carga eléctrica**

Al electrizar cuerpos por frotamiento, éstos adquieren cargas eléctricas de magnitudes iguales y de signos contrarios, cuya suma es igual a cero, es decir, a la carga sumaria inicial de ambos cuerpos antes de la electrización. Lo mismo sucede durante la electrización por influencia o inducción.

De todos los cálculos relacionados con la transmisión de la carga eléctrica de un cuerpo a otro usted siempre considera que la carga sumaria permanece invariable.

**Ley de Conservación de la paridad**

Las interacciones fuertes y electromagnéticas se caracterizan por la conservación de la magnitud cuántica – mecánica específica que se denomina *paridad de la función de onda*.

Resulta que la función de onda  $\Psi(x, y, z)$  que describe el estado de un núcleo atómico o de una partícula elemental posee una propiedad que representa una especie de simetría tal que se cumple  $\Psi(x, y, z) = \Psi(-x, -y, -z)$  o bien cambia solo de signo:  $-\Psi(x, y, z) = \Psi(-x, -y, -z)$ . Las funciones de primer tipo son llamadas *pares* y las funciones de segundo tipo son *impares*. Algunos estados del núcleo atómico son pares y otros son impares.

La conservación de la paridad en las interacciones fuertes y electromagnéticas significa que el carácter de paridad de la función de onda que describe la partícula que está en interacción no varía en estas interacciones. Es decir si una función es impar en el instante inicial se mantendrá impar en los sucesivos momentos de tiempo.

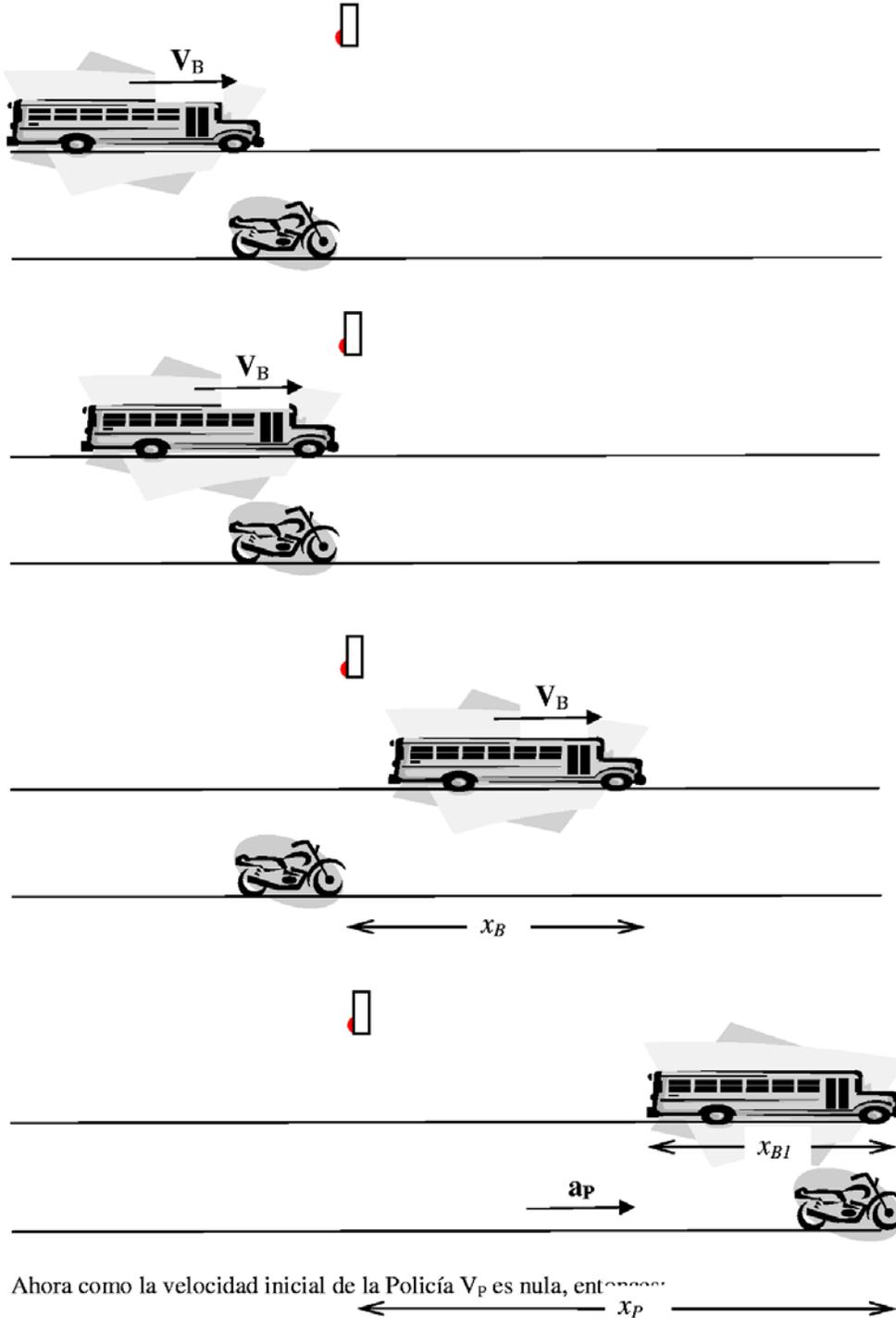
**Ley de Conservación del espín isotópico**

Es una ley de conservación que es válida solo para las interacciones fuertes (nucleares) e indica que la identidad de las propiedades del protón y del neutrón puede ser descrita con ayuda de un vector cuántico – mecánico conocido como el espín isotópico el cual tiene valores iguales para ambos nucleones.

**SOLUCIÓN: PARTE PRÁCTICA (60%)**

1. Un auto policial está detenido en un semáforo. Un auto particular que viaja a velocidad constante de  $10[m/s]$  pasa al auto policía, cruzando por supuesto, la luz roja. Tres segundos después el auto policía parte con una aceleración constante de  $2.28 [m/s^2]$ , para alcanzar al carro infractor. ¿En cuánto tiempo alcanzará el policía al carro infractor?

Sol.- Veamos la siguiente secuencia de gráficos:



Ahora como la velocidad inicial de la Policía  $V_p$  es nula, entonces:

$$x_p = \frac{1}{2}at^2 \quad (1.1)$$

La siguiente relación es evidente de la figura:

$$x_p = x_B + x_{B1} \quad (1.2)$$

De igual modo de la relación más básica de la cinemática (cuando no existe cambio en la velocidad):

$$V = \frac{\text{Espacio}}{\text{Tiempo}} \quad (1.3)$$

Despejamos el espacio:

$$x_{B1} = V_B t \quad (1.4)$$

Ecuación que se cumple para cualquier tiempo:

$$x_B = V_B \times 3 \quad (1.5)$$

Reemplazando (1.1), (1.4) y (1.5) en (1.2):

$$\frac{1}{2}at^2 = 3V_B + V_B t$$

Rescribiendo esta última expresión:

$$\frac{1}{2}at^2 - V_B t - 3V_B = 0$$

Cuya solución es fácil de hallar:

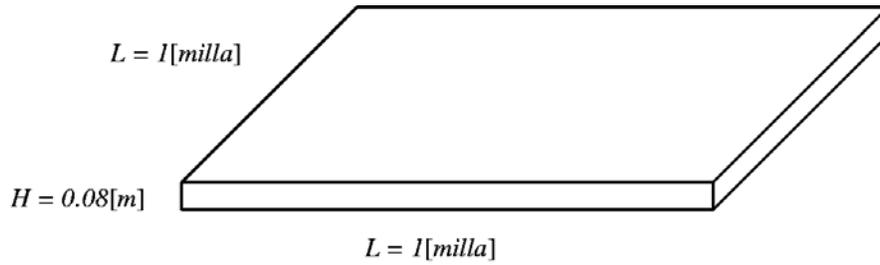
$$t = \frac{-(-V_B) \pm \sqrt{(-V_B)^2 - 4\left(\frac{1}{2}a\right)(-3V_B)}}{2\left(\frac{1}{2}a\right)}$$

Finalmente reemplazando datos hallamos que  $t = 11,1$  [s] (El tiempo negativo no se lo toma en cuenta)

2. Durante una fuerte tormenta se registro una lluvia de 0.08 [m]. ¿Qué cantidad de agua cayo en una milla cuadrada? Expresé su resultado en litros. (Ayuda: 1 [milla] = 1,609 [Km], 1[m<sup>3</sup>] = 1000 [lt])

Sol.-

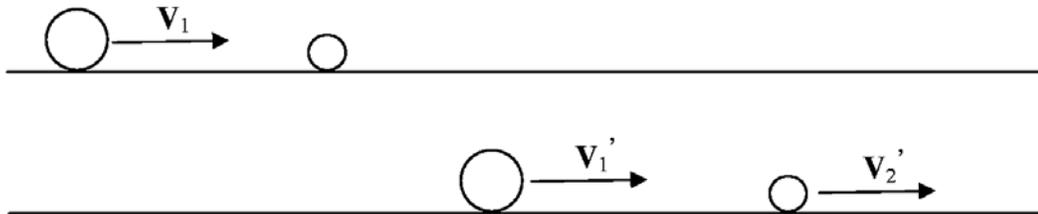
Lo que se debe calcular es el volumen de agua caída en un gran recipiente rectangular



$$V = (H)(L)(L) = 0,08[\text{m}] \times 1[\text{milla}]^2 \times \frac{(1,609[\text{Km}])^2}{1[\text{milla}]^2} \times \frac{(10^3[\text{m}])^2}{(1[\text{Km}])^2} \times \frac{1[\text{lt}]}{1[\text{m}]^3} = 2,1 \times 10^8 [\text{lt}]$$

3. Un cuerpo de masa 2,0 [Kg] efectúa un choque elástico contra otro cuerpo que está en reposo y después sigue moviéndose en el sentido que llevaba originalmente pero con una velocidad de la cuarta parte. ¿Cuál es la masa del cuerpo que recibió el golpe?

Sol.-



En un choque elástico el Momentum se conserva:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1' + m_2 V_2'$$

y

$$V_2 = 0$$

$$V_1' = \frac{1}{4} V_1$$

Entonces

$$m_2 V_2' = \frac{3}{4} m_1 V_1 \quad (3.1)$$

Además como el choque es elástico se cumple que

$$V_2' - V_1' = V_1 - V_2$$

$$V_2' - \frac{1}{4} V_1 = V_1 - 0$$

$$V_2' = \frac{5}{4} V_1$$

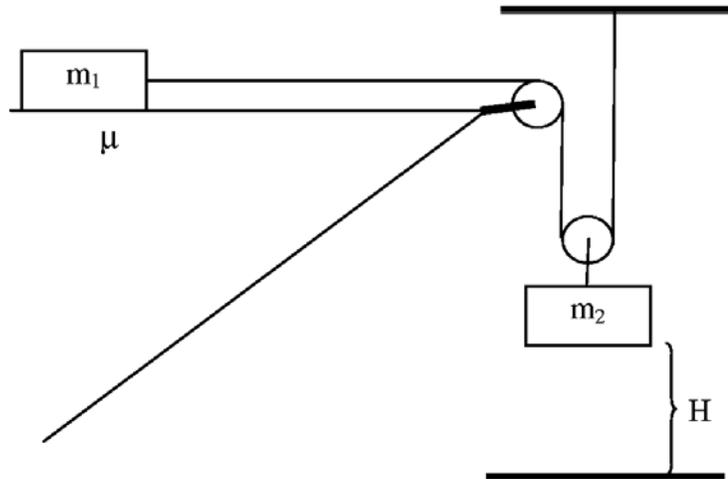
(3.2)

Reemplazando la ecuación (3.2) en la ecuación (3.1) y colocando datos:

$$m_2 \frac{5}{4} V_1 = \frac{3}{4} m_1 V_1$$

$$m_2 = \frac{3}{5} m_1 = \frac{3}{5} (2) [Kg] = 1,2 [Kg]$$

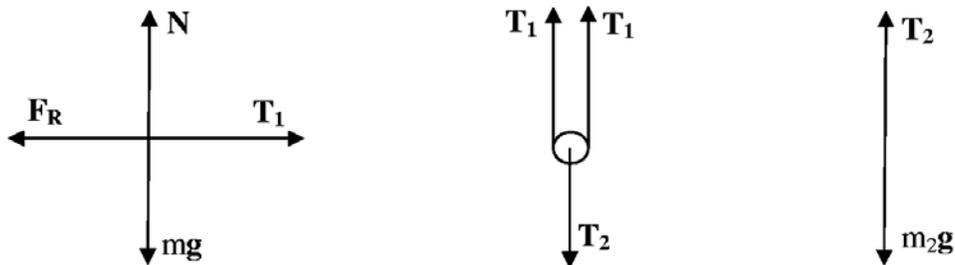
4. Sea el siguiente sistema dinámico ¿En cuanto tiempo la masa  $m_2 = 2 [Kg]$  llegará a tocar el piso?  $H = 87 [cm]$ ,  $m_1 = 1,2 [Kg]$ ,  $\mu = 0,77$ ,  $v_o = 0 [m/s]$ . Desprecie las masas de las poleas y de los hilos.



Sol.-

Lo importante es notar que las dos masas se mueven a aceleraciones distintas debido a que la distancia que avanza la masa  $m_1$  en el tiempo  $t$  es distinta a la distancia que avanza la masa  $m_2$  en el mismo tiempo  $t$ , en realidad la masa  $m_2$  se mueve la mitad de la distancia que recorre la masa  $m_1$  (el hilo uno se divide en dos por la polea móvil).

Realicemos un diagrama de cuerpo libre para la masa  $m_1$ , para la polea móvil y para la masa  $m_2$ :



De cuyos diagramas podemos escribir las ecuaciones:

$$\begin{aligned} N - m_1 g &= 0 \\ T_1 - F_R &= m_1 a_1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} 2T_1 - T_2 &= m_{Polea} a_2 = 0 \\ 2T_1 &= T_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$T_2 - m_2 g = -m_2 a_2 \quad (4.3)$$

Note que como la masa de la polea  $m_{Polea}$  es despreciable entonces directamente:  $m_{Polea} = 0$   
Sabemos además que la fuerza de rozamiento es:

$$F_R = \mu N \quad (4.4)$$

De la ecuación (4.1.a):

$$N = mg \quad (4.5)$$

Reemplazando la ecuación (4.5) en la ecuación (4.4):

$$F_R = \mu m_1 g \quad (4.6)$$

Reemplazando la ecuación (4.6) en la ecuación (4.1.b):

$$T_1 - \mu m_1 g = m_1 a_1 \quad (4.7)$$

Ahora reemplazando la ecuación (4.2) en la ecuación (4.3):

$$2T_1 - m_2 g = -m_2 a_2 \quad (4.8)$$

Realicemos un análisis cinemático del movimiento de las masas. Tenemos como dato que el sistema empieza su movimiento desde el reposo, esto es  $v_o = 0$  [m/s]. Entonces podemos escribir que la distancia que avanza la masa  $m_1$  en el tiempo  $t$  es:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 \quad (4.9)$$

En el mismo tiempo la masa  $m_2$  avanza una distancia  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 \quad (4.10)$$

Pero note que:

$$x_1 = 2x_2 \quad (4.11)$$

Si reemplazamos las ecuaciones (4.9) y (4.10) en la ecuación (4.11) y simplificamos obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a_1 t^2 &= a_2 t^2 \\ a_1 &= 2a_2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

O sea la masa  $m_1$  se mueve al doble de aceleración que la masa  $m_2$ .

Ahora reemplazando la ecuación (4.12) en la ecuación (4.7)

$$T_1 - \mu m_1 g = 2m_1 a_2 \quad (4.13)$$

Multiplicando esta ecuación (4.13) por 2:

$$2T_1 - 2\mu m_1 g = 4m_1 a_2 \quad (4.14)$$

Rescribiendo la ecuación (4.8):

$$2T_1 - m_2 g = -m_2 a_2 \quad (4.8)$$

Restando la ecuación (4.14) – la ecuación (4.8):

$$\begin{aligned} 2T_1 - 2\mu m_1 g - 2T_1 - (-m_2 g) &= 4m_1 a_2 - (-m_2 a_2) \\ m_2 g - 2\mu m_1 g &= (4m_1 + m_2) a_2 \\ a_2 &= \left( \frac{m_2 - 2\mu m_1}{4m_1 + m_2} \right) g \end{aligned}$$

$$a_2 = \left( \frac{m_2 - 2\mu m_1}{4m_1 + m_2} \right) g = \left( \frac{2 - 2(0.77)(1,2)}{4(1,2) + 2} \right) 9,775 = 0,2185 \left[ \frac{m}{s^2} \right] \quad (4.15)$$

Nota: El valor de la gravedad en la ciudad de La Paz y a nivel del Mar:

$$g_{LaPaz} = 9,775 \left[ \frac{m}{s^2} \right], \quad g_{ValorExactoANivelDelMar} = 9,80665 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Ahora para calcular el tiempo total de caída de la masa  $m_2$  usemos la relación cinemática:

$$H = \frac{1}{2} a_2 t_T^2$$

de donde

$$t_T = \sqrt{\frac{2H}{a_2}} = \sqrt{\frac{(2)(0,87[m])}{0,2185[ms^{-2}]}} = 2,82[s]$$

**4° de Secundaria****SOLUCIÓN: PARTE CONCEPTUAL (40%)**

1. ¿Cuáles son los conceptos y las unidades de:  
*Campo Eléctrico*  $\left[\frac{V}{m}\right] = \left[\frac{N}{C}\right]$ , *Momentum Dipolar Eléctrico*  $\left[Kg \frac{m}{s}\right]$ , *Densidad de energía del Campo Eléctrico*  $\left[\frac{J}{m^3}\right]$ , *Presión*  $[Pa] \equiv \left[\frac{N}{m^2}\right] \equiv [atm]$ , *Momentum Angular*  $\left[Kg \frac{m^2}{s}\right]$  e *Inercia*  $[Kgm^2]$ ?
2. De un ejemplo de:  
 ➤ procesos *reversibles, irreversibles, adiabáticos e isotérmicos*  
 ➤ aplicación de la *1ª y 2ª ley de la Termodinámica*
3. Explique que es el *ciclo de Carnot*
4. ¿Qué *leyes de conservación* conoce? ¿Qué nos dice cada una de ellas? De un ejemplo de cada una.

Sol.-

*Ver la respuesta en el examen de 3° de Secundario, pregunta conceptual #5*

5. ¿Cómo se puede calcular la *energía cinética de rotación* de una esfera girando por un eje fijo?

Sol.- Calculando la relación  $mvr$  donde  $m$  es la masa de la esfera,  $v$  es su velocidad tangencial y  $r$  es la distancia desde el eje hasta la posición de la masa

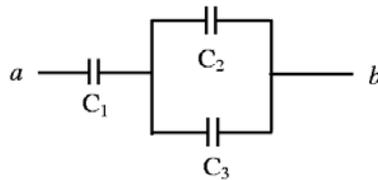
**4° de Secundaria****SOLUCIÓN: PARTE PRÁCTICA (60%)**

1. Sea el siguiente sistema dinámico ¿En cuánto tiempo la masa  $m_2 = 8 \text{ [Kg]}$  llegará a tocar el piso?  $H = 56 \text{ [cm]}$ ,  $m_1 = 5,2 \text{ [Kg]}$ ,  $\mu = 0,67$ ,  $v_0 = 0 \text{ [m/s]}$ . Desprecie las masas de las poleas y de los hilos.

Sol.-

*Ver la solución en el examen de 3° de Secundario, pregunta conceptual #4*

2. En la siguiente disposición de capacitores  $C_1 = 3 \text{ [\mu F]}$ ,  $C_2 = 2 \text{ [\mu F]}$ ,  $C_3 = 4 \text{ [\mu F]}$ . El voltaje aplicado entre los puntos  $a$  y  $b$  es de  $300 \text{ [V]}$ . Hallar:
- La carga y la diferencia de potencial de cada capacitor
  - La energía del sistema



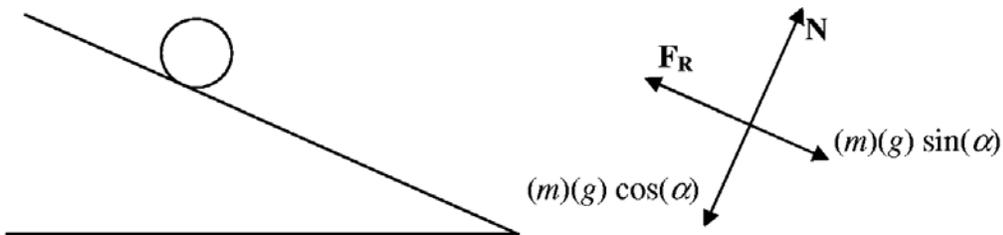
Respuestas.-

- $C_1 = 6 \times 10^{-4} \text{ [C]}$ ,  $200 \text{ [V]}$ ;  $C_2 = 2 \times 10^{-4} \text{ [C]}$ ,  $100 \text{ [V]}$ ;  $C_3 = 4 \times 10^{-4} \text{ [C]}$ ,  $100 \text{ [V]}$
- Energía =  $9 \times 10^{-2} \text{ [J]}$

*Demuéstralas!*

3. Demostrar que un cilindro resbalará sobre un plano que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, si el coeficiente de rozamiento estático entre el plano y el cilindro es menor que  $(1/3) \tan(\alpha)$ . (Ayuda: El momento de Inercia del cilindro es:  $I = MR^2/2$ , siendo  $M$  su masa y  $R$  su radio).

Sol.-



$$I = \frac{1}{2} MR^2 \quad (3.1)$$

$$\alpha = \frac{a}{R} \quad (3.2)$$

$$F_R = \mu N \quad (3.3)$$

$$N = (m)(g) \cos(\alpha) \quad (3.4)$$

$$(m)(g) \sin(\alpha) - F_R = ma \quad (3.5)$$

$$\tau = I\alpha \quad (3.6)$$

$$\tau = F_R R \quad (3.7)$$

Reemplazando la ecuación (3.4) en la ecuación (3.3):

$$F_R = (\mu mg) \cos(\alpha) \quad (3.8)$$

Reemplazando la ecuación (3.8) en la ecuación (3.5):

$$(m)(g) \sin(\alpha) - (\mu mg) \cos(\alpha) = ma \quad (3.9)$$

Reemplazando la ecuación (3.7), (3.8) y la ecuación (3.1) en la ecuación (3.6):

$$F_R R = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2} m R a \quad (3.10)$$

$$(\mu mg) \cos(\alpha) R = \frac{1}{2} m R a$$

Multiplicando la ecuación (3.9) por  $\frac{R}{2}$ :

$$(m)(g) \sin(\alpha) \frac{R}{2} - (\mu mg) \cos(\alpha) \frac{R}{2} = ma \frac{R}{2} \quad (3.11)$$

Restando la ecuación (3.10) de la ecuación (3.11):

$$mg \sin(\alpha) \frac{R}{2} - \mu mg \cos(\alpha) R \left( \frac{3}{2} \right) = 0$$

de donde finalmente hallamos que  $\mu = 3 \tan(\alpha)$

Es decir si el coeficiente  $\mu$  es menor a este valor no existirá torque y en consecuencia el cilindro resbalará.

## 1<sup>ra</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA 7 Y 8 DE OCTUBRE DE 2006

Bustos R.<sup>1</sup>, Miranda P.<sup>1</sup>, Ticona R.<sup>1</sup>,  
Velarde A.<sup>1</sup>, Blanco V. H.<sup>1</sup>, Velarde F.<sup>1</sup>,  
Muñoz R.<sup>2</sup>, Pereira G.<sup>2</sup>, Gutiérrez V. H.<sup>3</sup>,  
Guaygua T.<sup>4</sup>, Jemio C.<sup>4</sup>, Portugal R.<sup>5</sup>, Mamani R.<sup>6</sup>,  
Martínez L.<sup>7</sup>, Taquichiri M.<sup>8</sup>, Tavera W.<sup>9</sup>, Raljevic M.<sup>9</sup>,  
Copa O.<sup>10</sup>, Flores J.<sup>11</sup>, Rojas D.<sup>11</sup>

<sup>1</sup> Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), Carrera de Física, La Paz

<sup>2</sup> Planetario Max Schreier, Carrera de Física, UMSA, La Paz

<sup>3</sup> Universidad Mayor, Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCH) Facultad de Tecnología – Carrera de Ingeniería de Sistemas, Sucre

<sup>4</sup> Universidad Técnica de Oruro (UTO), Facultad Nacional de Ingeniería (FNI), Oruro

<sup>5</sup> Universidad Mayor de San Simón, Facultad de Ciencia y Tecnología, Cochabamba

<sup>6</sup> Universidad Autónoma Tomás Frías (UATF), Carrera de Física, Potosí

<sup>7</sup> Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra, UPSA, Santa Cruz

<sup>8</sup> Universidad Autónoma Juan Misael Saracho, UAJMS, Tarija

<sup>9</sup> Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)

<sup>10</sup> Colegio Domingo Savio, Sucre.

<sup>11</sup> Colegio BEREÁ, Santa Cruz

### RESUMEN

Se presentan los exámenes resueltos de 3<sup>ro</sup> y 4<sup>to</sup> de Secundaria tomados en la 1<sup>ra</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA (1<sup>ra</sup> OBA) así como también los ganadores en cada categoría. El evento se llevo a cabo los días 7 y 8 de Octubre de 2006 en los predios de la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), La Paz.

La Página Internet del proyecto es: <http://www.fiumsa.edu.bo/olimpiada/>



## **PREMIOS**

Se contó con la participación de los siguientes departamentos Bolivianos (7): Chuquisaca, Cochabamba, La Paz, Oruro, Potosí, Santa Cruz y Tarija. Cada delegación constaba de un máximo de 6 estudiantes (3 de 3° de Sec. y 3 de 4° de Sec.) más un profesor líder.

La clasificación final quedo de la siguiente manera:

### 4° de Secundaria:

Premio	Nombre	Colegio	Ciudad
Medalla de Oro:	Jiménez Durán Luis	Belgrano	Tarija
Medalla de Plata:	Córdova Salazar Estela	Berea	Santa Cruz
Medalla de Bronce:	Frías Del Carpio Isabel	Los Pinos	La Paz

### 3° de Secundaria:

Premio	Nombre	Colegio	Ciudad
Primer lugar:	Guzmán Mamani Gabriela	Isabel Saavedra	Santa Cruz
Segundo lugar:	Sánchez Sainz César	Santa Eufrasia	La Paz
Tercer lugar:	Santalla Quispe Iván	Villamil	La Paz
Cuarto lugar:	Peralta Núñez Rodolfo	La Salle	Santa Cruz
Quinto lugar:	Birhuett M. Enrique	Bancario	Cochabamba

Los tres primeros lugares de la categoría de 4° de Secundaria tienen como principal premio el ingreso directo a la carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), a la Universidad Privada de Santa Cruz (UPSA) y se está gestionando el ingreso directo a la Universidad Autónoma Juan Misael Saracho (UAJMS) así como también a cualquier Universidad estatal Boliviana. Los cinco estudiantes ganadores de 3° de Secundaria forman la selección Boliviana de Astronomía que representará al país en la **1ª Olimpiada Andina de Astronomía y Astrofísica** a llevarse a cabo en Julio de 2007 en la ciudad de La Paz, Bolivia. Así como también representarán al país en la **1ª Olimpiada Internacional de Astronomía y Astrofísica** a llevarse a cabo en Noviembre de 2007 en Tailandia. (Nota: los pasajes aéreos no están asegurados)

**1ª OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA****3º de Secundaria**

*Notas: El examen contiene tres partes; I.- Problemas conceptuales y pequeños ejercicios (40 puntos), II.- Problemas Teóricos (30 puntos) y III.- Problemas prácticos (30 puntos).*

**I.- PROBLEMAS CONCEPTUALES – 3º de Secundaria**

**I-1.-**Indique la diferencia entre telescopios refractores y reflectores (5 puntos).

**R. I-1.-**El reflector usa un espejo cóncavo, la luz es desviada a un foco mediante otros espejos hasta el ocular. El refractor usa una lente convexa, la luz llega directamente al ocular.

**I-2.-** ¿De qué manera afecta la atmósfera a la medición de las radiaciones del espectro electromagnético? ¿Qué bandas son afectadas? (5 puntos)

**R.I-2.-** La atmósfera refleja a las ondas de baja frecuencia (menores a 20Mhz), absorbe a las ondas de alta frecuencia como ser; gamma, Rx, UV, atenúa y dispersa a las ondas del rango visible.

**I-3.-** ¿Por qué los grandes observatorios del mundo se concentran en solamente algunos puntos de la superficie de la tierra? (5 puntos)

**R.I-3.-** Por que la atmósfera de esos sitios permite una extraordinaria resolución en la imagen. Estos lugares son: Hawai (USA), Atacama (Chile), Islas Canarias (España).

**I-4.-** Enuncie la nueva definición de Planeta, y en consecuencia describa los objetos del Sistema Solar (5 puntos)

**R.I-4.-** La definición aceptada actualmente por la International Union of Astronomy (IUA) para *planeta* en nuestro Sistema Solar es:

“Un cuerpo celeste que (a) está en órbita alrededor del Sol, (b) Tiene suficiente masa para que su propia gravedad al convertirlo en un cuerpo rígido lo haya forzado para que esta asuma la forma de equilibrio hidrostático (aproximadamente esférico) y (c) haya limpiado el vecindario en torno a su órbita.

La decisión establece tres principales categorías de objetos en nuestro Sistema Solar:

- Planetas: los ocho mundos desde Mercurio hasta Neptuno.
- Planetas Enanos: Plutón y cualquier objeto esférico que no “haya limpiado el vecindario entorno a su órbita, y que no sea un satélite.”
- Pequeños cuerpos del Sistema solar: Todos los demás objetos que orbitan el Sol.

**I-5.-** ¿Por qué son tan extremas las estaciones en Urano? (5 puntos).

**R.I-5.-** Debido a la fuerte inclinación de su eje de rotación: 98 grados.

**I-6.-** El Sol está en una galaxia que llamamos Vía Láctea. El Sol está a una distancia de 27700 años-luz del centro de la Galaxia. El Sol se mueve a una velocidad de 250 [Km/s] en una órbita circular alrededor del centro galáctico.

**a)** ¿En cuanto tiempo (años terrestres) el Sol completa una órbita alrededor del centro de la Vía Láctea? (5 puntos)

**b) ¿Cuántas vueltas alrededor del centro galáctico el Sol ya dio desde que fue formado? (5 puntos)**

Datos: Tome a la velocidad de la luz  $c = 300000 \text{ [Km/s]}$

**R.I-6.a)**

$$T = (2 \pi R) / V = (2 \times 3,14 \times 2,6 \times 10^{17} \text{ km}) / (250 \text{ km/s}) = 6,5 \times 10^{15} \text{ s.}$$

$$T = 6,5 \times 10^{15} \text{ s} / 31.536.000 \text{ (s/año)} = 206 \times 10^6 \text{ años} = 206 \text{ millones de años!} = 206 \times 10^6 \text{ [años]}$$

**R.I-6. b)**  $4,5 \times 10^9 \text{ años} / 206 \times 10^6 \text{ años} = 22 \text{ vueltas}$

**I-7.-** Tres cuerpos idénticos de masa  $m$  están situados en los vértices de un triángulo equilátero de lado  $L$ . Cada uno de los cuerpos se puede mover en una órbita circular circunscrita al triángulo original. Si las únicas fuerzas que actúan sobre los cuerpos son las atracciones gravitacionales mutuas, ¿Cuál será la rapidez de su movimiento? (5 puntos).

**R.I-7.-** Las masas giran en círculo de radio  $r$ , estando en los vértices del triángulo equilátero resulta  $r = L/2 \cos(30^\circ)$ . Cada masa es atraída por la fuerza gravitacional de las dos masas hacia el centro, resultando:

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mm}{L^2} \cos(30^\circ) + G \frac{mm}{L^2} \cos(30^\circ)$$

Remplazando  $r$  y simplificando, tenemos:

$$v = \sqrt{G \frac{m}{L}}$$

## II.- PROBLEMAS TEORICOS – 3° de Secundaria

**II-1.** Un cohete espacial con masa  $M = 12$  [T] esta moviéndose al rededor de la Luna en una órbita circular de altura  $h = 100$  [Km]. Los motores son activados por corto tiempo para pasar a la órbita de alunizaje. La velocidad de expulsión de gases es  $u = 10^4$  [m/s]. El radio de la luna es  $R_M = 1,7 \cdot 10^3$  [Km], la aceleración gravitacional cerca la superficie de la Luna es  $g_M = 1.7$  [m/s<sup>2</sup>]

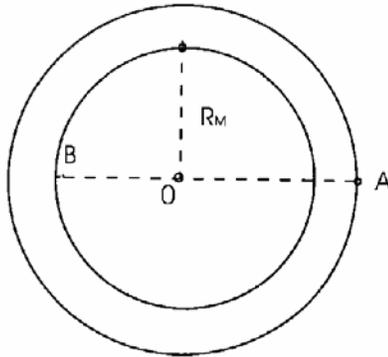


Fig. II.1.1

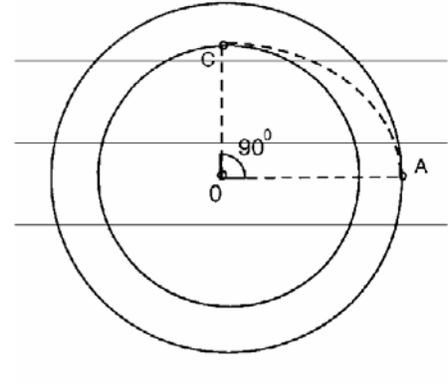


Fig. II.1.2

- 1) ¿Qué cantidad de combustible se consumirá para que activando los motores de frenado en el punto A de la trayectoria, el cohete pueda alunizar sobre la Luna en el punto B (Fig. II.1.1)? (8 puntos).
- 2) En el Segundo escenario de alunizaje, en el punto A, el cohete se impulsa dirigiéndose hacia el centro de la Luna, Para poner el cohete al encuentro de la superficie de la Luna en el punto C (Fig. II.1.2). ¿Que cantidad de combustible se requerirá en este caso? (7 puntos).

### Solución Problema II-1.

- 1) Durante el movimiento del cohete alrededor de la órbita circular este experimenta una aceleración centrípeta debida a la fuerza gravitacional de la Luna:

$$G \frac{MM_M}{R^2} = \frac{Mv_0^2}{R},$$

donde  $R = R_M + h$  es el primer radio de la orbita,  $v_0$  es la velocidad del cohete en la órbita circular. Por tanto,

$$v_0 = \sqrt{G \frac{M_M}{R}}$$

dada la relación:  $g_M = G \frac{M_M}{R_M^2}$ , resulta:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g_M R_M^2}{R}} = R_M \sqrt{\frac{g_M}{R_M + h}} \quad (1)$$

La velocidad del cohete permanecerá perpendicular al radio-vector OA después de que el motor de frenado envía un momentum tangencial al cohete (Fig.1). El cohete debe moverse en una trayectoria elíptica con el foco en el centro de la Luna.

Denotando la velocidad del cohete en los puntos A y B como  $v_A$  y  $v_B$  escribimos la ecuación para la conservación de energía y el momentum de la forma:

$$\frac{Mv_A^2}{2} - G \frac{MM_M}{R} = \frac{Mv_B^2}{2} - G \frac{MM_M}{R_M} \quad (2)$$

$$Mv_A R = Mv_B R_M \quad (3)$$

Resolviendo las ecuaciones (2) y (3) encontramos

$$v_A = \sqrt{2G \frac{M_M R_M}{R(R + R_M)}}$$

Tomando en cuenta (1), tenemos

$$v_A = v_0 \sqrt{\frac{2R_M}{R + R_M}}$$

De donde el cambio de velocidad  $\Delta v$  en el punto A debe ser

$$\Delta v = v_0 - v_A = v_0 \left( 1 - \sqrt{\frac{2R_M}{R + R_M}} \right) = v_0 \left( 1 - \sqrt{\frac{2R_M}{2R_M + h}} \right) = 24[m/s]$$

De la ley de conservación del momentum en el sistema “cohete-combustible” se puede escribir que

$$(M - m_1)\Delta v = m_1 u$$

Donde  $m_1$  es la masa del combustible (fluido) quemado. De donde resulta

$$m_1 = \frac{\Delta v}{u + \Delta v} M$$

Aproximando para  $\Delta v \ll u$  encontramos finalmente que  $m_1 \approx \frac{\Delta v}{u} M = 29[\text{Kg}]$

- 2) En el Segundo caso el vector  $\vec{v}_2$  está dirigido perpendicularmente al vector  $|\vec{v}_0|$ , por tanto:

$$|\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v}_2, \quad v_A = \sqrt{v_0^2 + \Delta v_2^2} .$$

Basándonos en la ley de conservación de energía en este caso la ecuación puede ser escrita como

$$\frac{M(v_0^2 + \Delta v_2^2)}{2} - \frac{GMM_M}{R} = \frac{Mv_C^2}{2} - \frac{GMM_M}{R_M} \quad (4)$$

Y por la ley de conservación de momentum

$$Mv_0R = Mv_C R_M . \quad (5)$$

Resolviendo las ecuaciones (4) y (5) tomando en cuenta (1) encontramos

$$\Delta v_2 = \sqrt{g_M \frac{(R - R_M)^2}{R}} = h \sqrt{\frac{g_M}{R_M + h}} \approx 97[\text{m/s}] .$$

Usando la ley de conservación del momentum obtenemos.

$$m_2 = \frac{\Delta v_2}{u} M \approx 116[\text{Kg}] .$$

**Problema No. II-2****Eclipse Total de Luna.**

**II-2.1.-** Un eclipse de Luna se produce cuando la Luna atraviesa el cono de sombra de la Tierra. Debido a que la Tierra tiene atmósfera, la luz solar se refracta en ella iluminando a la Luna. Es por eso que podemos observar a la Luna durante la fase total (umbral) del eclipse. Un modelo simplificado de este fenómeno sería considerar a la atmósfera como si fuera un medio con una superficie esférica y con índice de refracción  $n_{atm}$  que refracta los rayos solares para que lleguen hasta la posición donde se encuentra la Luna. Este índice depende de la longitud de onda de la luz. Consideremos que el índice varía de la forma:

$$n_{atm} = \frac{q}{\lambda},$$

donde  $q = 1.67$  [nm] es un coeficiente y  $\lambda$  es la longitud de onda.

Además, conocemos que la distancia Tierra-Sol es 1 Unidad Astronómica y podemos tomar la distancia Tierra-Luna igual a 384000 [Km] (Fig. II.2.1)

a) Determine la longitud de onda de la luz que ilumina a la Luna durante el eclipse (5 puntos)

b) ¿De qué color aparecerá la Luna durante el eclipse? (2 puntos)

Recuerde que la ley de Snell de la refracción está dada por

$n_i \text{sen} \theta_i = n_r \text{sen} \theta_r$  y que el índice de refracción en el vacío es 1.

Considere que para ángulos pequeños  $\text{sen} \theta \approx \theta$ .

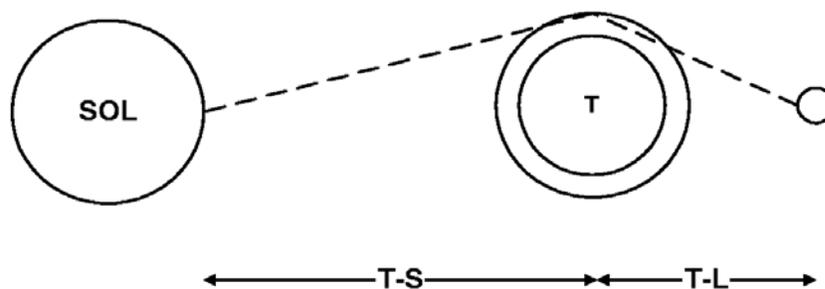


Fig. II.2.1

**II-2.2.-** Durante la fase umbral del eclipse de Luna, el cono de sombra que atraviesa la Luna tiene la configuración de la Figura II.2.1.

c) Si se conocen los diámetros del Sol y de la Tierra y las distancias Sol-Tierra y Tierra-Luna. Calcular la extensión de la órbita que está dentro del cono de sombra (5 puntos)

d) Si el período de revolución de la Luna es de 29.5 días. ¿Qué tiempo demora la Luna en atravesar el cono de sombra? (3 puntos)

Datos: Radio solar =  $6.96 \times 10^8$  [m]

Radio terrestre =  $6.37 \times 10^6$  [m]

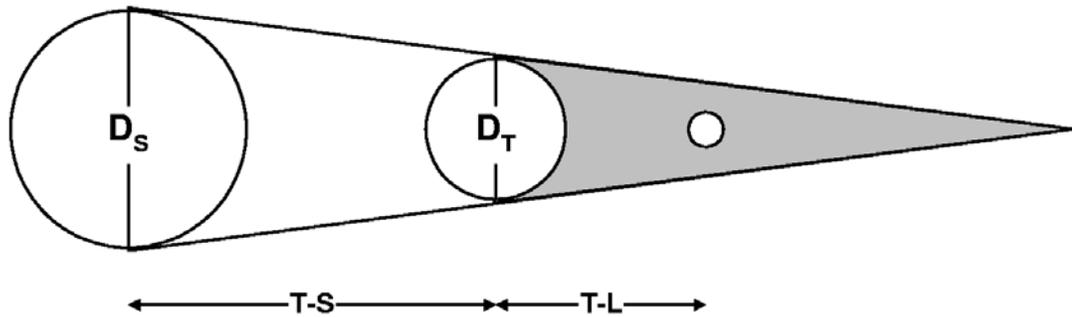


Fig. II.2.2

**R.II-2a)**

$$n_i \text{sen} \theta_i = n_r \text{sen} \theta_r$$

$$\text{sen} \theta \approx \theta$$

$$\theta_i = n_r \theta_r$$

Suponiendo modelo simple  $n_r = q \cdot 1/\lambda$

Simplificando  $\theta_i = \frac{q}{\lambda} \theta_{r_\lambda}$

$$\theta_i = \frac{R_T}{d_{TS}}, \theta_{r_\lambda} = \frac{R_T}{d_{TL}}$$

$$\lambda = q \frac{\theta_{r_\lambda}}{\theta_i} \quad \lambda = q \frac{R_T d_{TS}}{d_{TL} R_T} \quad \lambda = q \frac{d_{TS}}{d_{TL}}$$

Sustituyendo valores el resultado es:  $\lambda = 650$ [nm].

**R.II-2b)** Esta longitud de onda corresponde al color rojo.

**R.II-2c)** Sacando proporciones entre diámetros y distancias para el cono de sombra, se obtiene que:

$$\alpha = \frac{s}{x} = \frac{D_T}{d_{TL} + x} = \frac{D_S}{d_{TS} + d_{TL} + x}$$

De la proporción 2 y 3 despejamos  $x$  y obtenemos:

$$x = \frac{D_T(d_{TS} + d_{TL}) - D_S * d_{TL}}{D_S - D_T}$$

$$\mathbf{X = 1005257 [Km]}$$

De las proporciones 1 y 2 obtenemos s:  $s = \frac{D_T * x}{d_{TL} + x}$

Por tanto la longitud de la orbita lunar dentro de la sombra resulta:

$$\mathbf{. S=9243 [Km]}$$

**R.II-2d)** El ángulo dentro de la sombra se obtiene de:

$$\theta = \frac{s}{d_{TL}} = 0.024 [Rad] = 1^{\circ}37'$$

Conocemos el periodo orbital lunar y su radio de la orbita. Del concepto de velocidad angular obtenemos:

$$t = \frac{\theta}{2\pi} T = 2.7 [horas]$$

Considerando a la Luna como objeto puntual.

Si consideramos además que la luna debe estar dentro de la sombra este valor cambia para  $t=1.9$  [horas]. Ver Figura II.2.3.

Nota: Cualquier enfoque aproximado es válido.

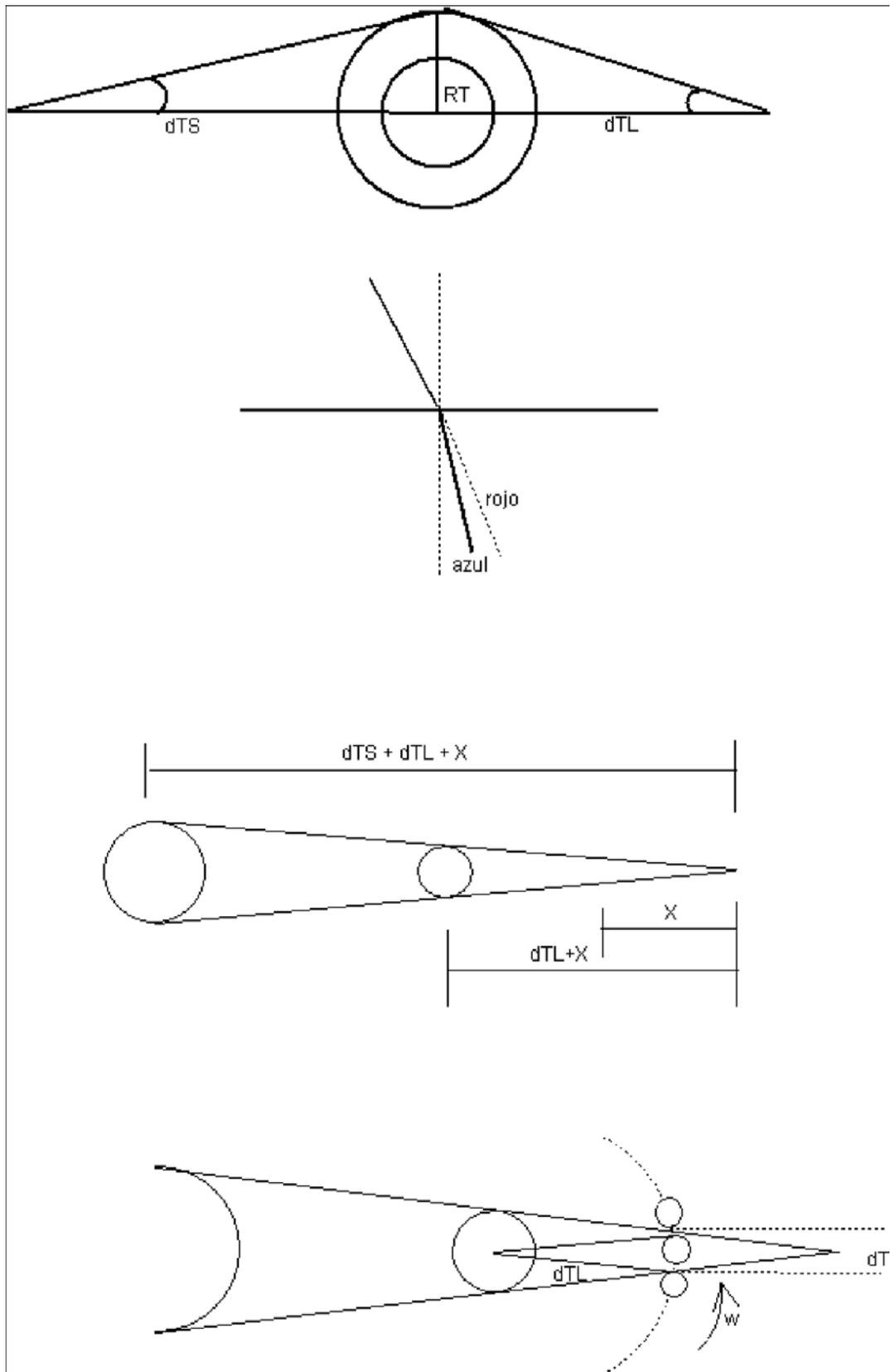


Figura II.2.3

**III.- PROBLEMAS PRACTICOS – 3º de Secundaria**

**III-1.-** Conociendo las coordenadas geográficas de la ciudad de Cobija (Lat.  $11^{\circ}2' S$ , ong.  $68^{\circ}43' O$ ) indicar cual será la altura del Polo Sur Celeste para esta ciudad. (3 puntos)

R.-  $11^{\circ}2'$

**III-2.-** En la carta adjunta marcar:

La posición en la que sale la Luna Llena más próxima al solsticio de diciembre (5 puntos)

La posición de la Luna a media noche en la fase de Cuarto Menguante más próxima al solsticio de diciembre (5 puntos).

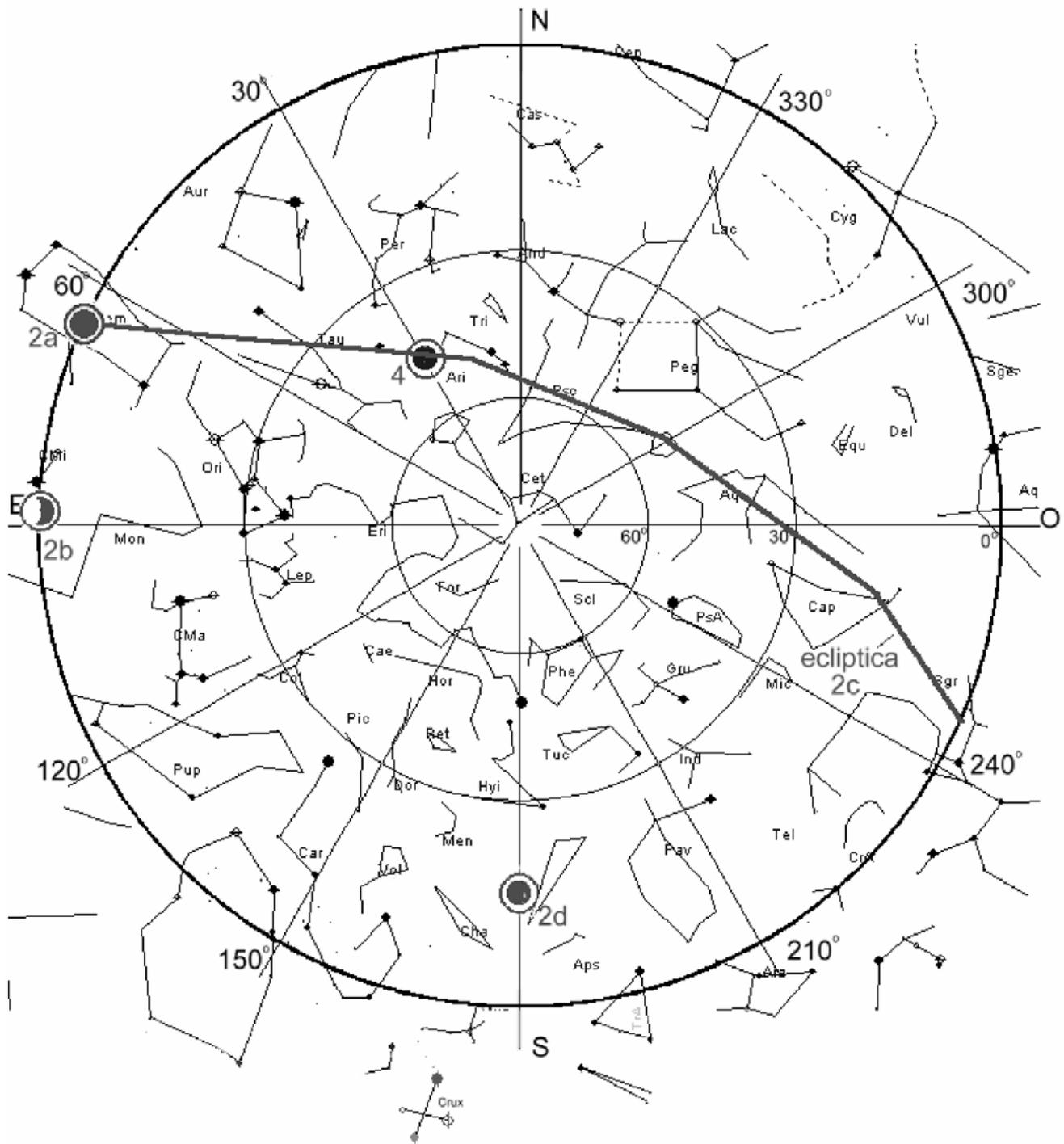
La trayectoria aproximada de la Eclíptica (3 puntos).

La posición del Polo Sur Celeste (3 puntos).

**III-3.-** Refiriéndonos nuevamente a la Carta , ¿Cuántas horas faltan para que la constelación de Orión culmine?. (5 puntos).

R.- 2 horas    3 horas    4 horas    5 horas    6 horas

**III-4.-** Suponiendo que esta carta se hubiera elaborado para las 22:00 horas de la fecha de la oposición de Marte. Marcar en la carta la posición de Marte. (6 puntos).



**1ª OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA****4º de Secundaria**

*Notas: El examen contiene tres partes; I.- Problemas conceptuales y pequeños ejercicios (40 puntos), II.- Problemas Teóricos (30 puntos) y III.- Problemas prácticos (30 puntos).*

**I.- PROBLEMAS CONCEPTUALES – 4º de Secundaria**

*Nota: Los problemas I-1 al I-5 están resueltos en el examen de 3º de Sec.*

**I-6.-** La luz solar tarda 8,33 minutos en llegar a la Tierra y 43,3 minutos en alcanzar Júpiter.

a) ¿Cuál es el período de rotación de Júpiter alrededor del Sol? (5 puntos)

b) Calcule la masa del Sol. (5 puntos).

$$(G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2})$$

**R.I-6.-** a) Por la Tercera Ley de Kepler se tiene:  $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$

donde  $T_1$  y  $T_2$  son, respectivamente, los periodos de rotación de la Tierra y de Júpiter;  $r_1$  y  $r_2$  son los correspondientes radios de las órbitas. Si las consideramos circulares, entonces,

$$T_2 = \sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}} T_1$$

para calcular los radios  $r_1$  y  $r_2$ :

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{ct_2}{ct_1} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{41.6 \text{ min}}{8.33 \text{ min}} = 4.99$$

como  $T_1=1$  [año] entonces: **a)  $T_2 = 11.2$  [años]**

b) Considerando la órbita circular, la fuerza centrípeta es igual a la fuerza gravitacional:

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2}$$

donde  $M$  es la masa del Sol,  $m$  es la masa de un planeta,  $r$  es el radio de la órbita,  $\omega$  es la velocidad angular del planeta, y  $G$  es la constante de gravitación universal. Entonces:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G}$$

Para el caso de la Tierra,  $T = 1$  [año] =  $3.15 \times 10^7$  [s];  $r = 1.50 \times 10^{11}$  [m]

De donde  $M = 2.01 \times 10^{30}$  [Kg].

**I-7.-** Tres cuerpos idénticos de masa  $m$  están situados en los vértices de un triángulo equilátero de lados  $L$ . Cada uno de los cuerpos se puede mover en una órbita circular circunscrita al triángulo original. Si las únicas fuerzas que actúan sobre los cuerpos son las atracciones gravitacionales mutuas, ¿Cuál será la rapidez de su movimiento? (5 puntos).

**R.I-7.-** Las masas giran en círculo de radio  $r$ , estando en los vértices del triángulo equilátero resulta  $r = L/2 \cos(30^\circ)$ . Cada masa es atraída por la fuerza gravitacional de las dos masas hacia el centro, resultando:

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mm}{L^2} \cos(30^\circ) + G \frac{mm}{L^2} \cos(30^\circ)$$

Remplazando  $r$  y simplificando, obtenemos finalmente:

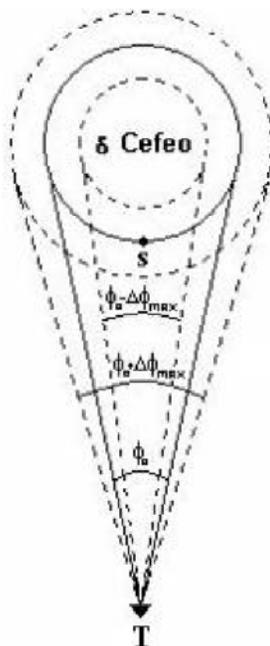
$$v = \sqrt{G \frac{m}{L}}$$

## II.- PROBLEMAS TEORICOS – 4º de Secundaria

*Nota: El problema II-1 está resuelto en el examen de 3º de Sec.*

### Problema No. II-2

Observando la estrella  $\delta$  Cefeo



La estrella  $\delta$  Cefeo es una representante típica del numeroso grupo de estrellas pulsantes conocidas como cefeidas clásicas. Estas estrellas se caracterizan por variaciones periódicas del brillo, asociadas a pequeñas oscilaciones de sus radios. Se conoce que el período de estas oscilaciones para  $\delta$  Cefeo es  $t$ , y que en este proceso el diámetro angular, medido desde un observatorio T en la Tierra, varía entre  $\phi_0 - \Delta\phi_{max}$  y  $\phi_0 + \Delta\phi_{max}$  (ver Figura II.2.a), todos ángulos muy pequeños. Se conoce también que debido al conocido efecto Doppler, la luz de longitud de onda  $\lambda$ , correspondiente a cierta transición en el átomo de helio, y que es emitida desde el punto S en la superficie de la estrella en el instante en que la velocidad de expansión es máxima, está desplazada en  $\Delta\lambda$ . Con estos datos, veremos que es posible determinar la masa M de

Figura II.2.a  $\delta$  Cefeo y la distancia L a la que la estrella se encuentra

de nosotros. Para esto, consideraremos a  $\delta$  Cefeo como una esfera de gas caliente que se dilata y contrae adiabáticamente y despreciaremos tanto el movimiento de la Tierra como cualquier efecto relativista.

#### II-2.1

Suponga que el movimiento pulsatorio de  $\delta$  Cefeo puede considerarse armónico simple. Determine la distancia L desde el centro de esta estrella hasta el observatorio terrestre a partir del desplazamiento Doppler  $\Delta\lambda$  de la línea  $\lambda$  en función de parámetros observados desde T y la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ . Tenga en cuenta que para el desplazamiento Doppler de una señal luminosa emitida por una fuente que se acerca o aleja del receptor a una

velocidad  $v$ , se cumple la expresión  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$ . [5 puntos]

Para responder las siguientes preguntas, concentre su atención en la expresión de la 2a Ley de Newton para un pequeñísimo volumen de la estrella que encierra una pequeña masa  $m$ , ubicado muy cerca de la superficie de la estrella. Sobre este volumen actúa una fuerza  $PA$ ,

correspondiente a la presión  $P$  que le empuja hacia fuera, y la atracción de prácticamente toda la masa  $M$  de la estrella. Tenga en cuenta que el área de la sección del pequeño volumen es  $A = \Omega R^2$ , donde  $R$  es la posición radial de la masa  $m$  y  $\Omega$  es una constante.

### II-2.2

Denotemos por un subíndice "0" las magnitudes correspondientes a la posición de equilibrio de la estrella. Obtenga una expresión para la presión en el equilibrio,  $P_0$  en función de  $m$ ,  $\phi_0$ ,  $\Omega \Delta \lambda$ ,  $\lambda$ ,  $M$  y la constante gravitacional  $G$ . (5 puntos).

### II-2.3

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en II-2.1) y II-2.2), halle una expresión para la frecuencia de oscilación de  $\delta$  Cefeo en función de  $M$ ,  $L$ ,  $\phi_0$ , el exponente adiabático  $\gamma$  y la constante de gravitación universal  $G$ . A partir de esta expresión, determine la masa  $M$  de  $\delta$  Cefeo en función de  $\gamma$ ,  $G$ ,  $c$  y los parámetros observados descritos en el segundo párrafo del enunciado. (5 puntos).

Si  $\Delta R = R - R_0$ , y teniendo en cuenta que las oscilaciones son pequeñas,

utilice la aproximación  $\left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right)^\alpha \approx 1 + \alpha \frac{\Delta R}{R_0}$ .

Considere que en un proceso adiabático se cumple que  $PV^\gamma$  es constante, donde  $P$  y  $V$  son la presión y el volumen del gas, respectivamente.

### Respuesta al ejercicio II-2.1

El radio  $R$  de la estrella está relacionado con el diámetro angular y la distancia a la estrella  $L$  según (simples consideraciones geométricas)

$$R = L \sin \frac{\phi}{2} \approx \frac{\phi}{2} L \quad (\text{RII-2.1.1})$$

donde se tuvo en cuenta la pequeñez de los ángulos en consideración. Consecuentemente, la amplitud de la oscilación del radio  $\Delta R_{\max}$  de la estrella estará dada por

$$\Delta R_{\max} = \frac{L \Delta \phi_{\max}}{2} \quad (\text{RII-2.1.2})$$

Conociendo las características de los movimientos armónicos, tendremos que la velocidad máxima de expansión de la superficie de la estrella tendrá la expresión

$$v_{\max} = \omega \Delta R_{\max} = \frac{\pi L \Delta \phi_{\max}}{\tau} \quad (\text{RII-2.1.3})$$

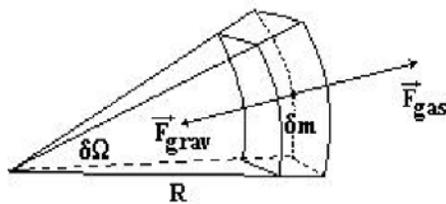
donde se tuvo en cuenta que  $\omega=2\pi/\tau$ . Fórmulas para el efecto Doppler longitudinal demasiado estándares como para demostrar aquí dicen que

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_{\max}}{c} \quad (\text{RII-2.1.4})$$

Finalmente, hallamos

$$L = \frac{c\tau}{\pi\Delta\phi_{\max}} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \quad (\text{RII-2.1.5})$$

### Respuesta al ejercicio II-2.2



Está claro que en el equilibrio

$$0 = P_0 \cdot \Omega \cdot R_0^2 - G \frac{Mm}{R_0^2} \quad (\text{RII-2.2.1})$$

de donde

$$P_0 = G \frac{mM}{\Omega R_0^4} = \frac{GmM}{\Omega \phi_0^4 L^4} \quad (\text{RII-2.2.2})$$

sustituyendo (RII-2.1.5) en (RII-2.2.2) se llega a

$$P_0 = \frac{GmM}{\Omega} \left( \frac{\pi\Delta\phi_{\max}}{c\tau} \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right)^4 \quad (\text{RII-2.2.3})$$

### Respuesta al ejercicio II-2.3

La ecuación de movimiento para el pequeño volumen de gas que estamos considerando es solución de

$$m \cdot a = P \cdot \Omega \cdot R^2 - G \frac{Mm}{R^2} \quad (\text{RII-2.3.1})$$

Teniendo en cuenta que el volumen es proporcional al cubo de las dimensiones lineales y que en procesos adiabáticos  $PV^\gamma$  es constante, tendremos que  $\left[ PR^{3\gamma} = P_0 R_0^{3\gamma} \right]$ . De donde se sigue que

$$P = \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-3\gamma} P_0 \quad (\text{RII-2.3.2})$$

Sustituyendo estos resultados y la expresión (RII-2.2.2) en la ecuación de movimiento se obtiene, después de eliminar el factor común en ambos miembros  $m$ ,

$$a = G \frac{M}{R_0^2} \left\{ \left( 1 + \frac{\Delta R}{R_0} \right)^{2-3\gamma} - \left( 1 + \frac{\Delta R}{R_0} \right)^{-2} \right\} \quad (\text{RII-2.3.3})$$

donde hemos definido  $\Delta R = R - R_0$  la variación del radio de la estrella respecto al equilibrio. Teniendo en cuenta que esta variación es pequeña y utilizando la igualdad aproximada  $(1+x)^n \approx 1 + nx$  obtenemos

$$a = -G \frac{M}{R_0^3} (3\gamma - 4) \Delta R \quad (\text{RII-2.3.4})$$

El coeficiente de  $\Delta R$  en el segundo miembro es precisamente el cuadrado de la frecuencia buscada, o sea,

$$\omega = \sqrt{G \frac{M}{R_0^3} (3\gamma - 4)} \quad (\text{RII-2.3.5})$$

Como ya vimos en la solución a la Pregunta 1,  $R_0 = L \phi_0 / 2$ , con lo cual

$$\omega = \sqrt{8G \frac{M}{\phi_0^3 L^3} (3\gamma - 4)} \quad (\text{RII-2.3.6})$$

Teniendo en cuenta finalmente que  $\omega = 2\pi/\tau$  y la expresión para  $L$  hallada en la Pregunta II-2.1, encontramos para la masa de  $\delta$  Cefeo la expresión

$$M = \frac{1}{2\pi} \frac{c^3 \phi_0^3 \tau}{G(3\gamma - 4) \Delta \phi_{\max}^3} \left( \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right)^3 \quad (\text{RII-2.3.7})$$

**III.- PROBLEMAS PRACTICOS – 4º de Secundaria**

*Nota: Estos problemas están resueltos en el examen de 3º de Sec.*

**III-1.-** Conociendo las coordenadas geográficas de la ciudad de Cobija (Lat. 11°2' S, Long. 68°43' O) indicar cual será la altura del Polo Sur Celeste para esta ciudad. (3 puntos)

**III-2.- En la carta adjunta marcar:**

- a) La posición e la que sale la Luna Llena más próxima al solsticio de diciembre (5 puntos)
- b) La posición de la Luna a media noche en la fase de Cuarto Menguante más próxima al solsticio de diciembre (5 puntos).
- c) La trayectoria aproximada de la Eclíptica (3 puntos).
- d) La posición del Polo Sur Celeste (3 puntos).

**III-3.-** Refiriéndonos nuevamente a la Carta , ¿Cuántas horas faltan para que la constelación de Orión culmine?. (5 puntos).

R.- 2 horas      3 horas      4 horas      5 horas      6 horas

**III-4.-** Suponiendo que esta carta se hubiera elaborado para las 22:00 horas de la fecha de la oposición de Marte. Marcar en la carta la posición de Marte. (6 puntos).

## NECESIDAD DE ENSEÑAR Y APRENDER CIENCIAS NATURALES Y LAS TENDENCIAS EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

René Gutiérrez Colque

*Carrera de Física*  
*Universidad Mayor de San Andrés*  
*Casilla 8635, La Paz—Bolivia*

La formación escolarizada tanto del nivel primario como del secundario tiene por objetivo último la formación de ciudadanos que descubren sus potencialidades para poderlas desarrollar en beneficio propio y de su nación. La educación general que todo ciudadano debe poseer está integrada por diversos conocimientos universales, entre ellos, los de tipo científico. La ciencia forma parte del bagaje cultural de la humanidad y las nuevas generaciones tienen derecho a conocerla para descubrir el placer de ver, comprender y explicar los fenómenos naturales del mundo, desde su perspectiva y las posibilidades de intervención sobre el mismo.

La situación actual del mundo, reclama la construcción colectiva de nuevas formas de sentir, pensar y actuar que posibiliten a toda la ciudadanía del planeta alcanzar una vida digna en un entorno sostenible, así como también nuevas formas de abordar las relaciones entre personas y de éstas con la naturaleza. La educación científica debe aportar a esas nuevas formas de sentir, pensar y actuar, posibilitando un mundo más justo y sostenible. La actual insostenibilidad ecológica requiere que la naturaleza no sea vista exclusivamente como un recurso al servicio de la humanidad, sino comprender que todo ser vivo, incluidos nosotros, es interdependiente de los demás y tiene un papel concreto en la naturaleza, sin que ello signifique que el individuo sea mejor ni peor, sino simplemente distinto y complementario.

Un objetivo general de la educación es promover la adquisición de la autonomía personal, lo cual es un elemento esencial para el ejercicio de la libertad solidaria. Esta libertad puede ser fortalecida por el conocimiento científico que permite participar en las decisiones que afectan a la colectividad. Aprender la forma de “pensar”, de “hacer” y de “hablar” características de la ciencia conlleva un desarrollo cognitivo y procedimental específico. El pensamiento científico implica formular ideas, reflexionar sobre ellas, contrastarlas y comprobarlas; exige justificar y argumentar en base a razonamientos que relacionen el hecho estudiado con otros, requiere encontrar datos que sean lo más precisos y cuantificables posibles. Todo ello son características que no suelen estar presentes en el pensamiento cotidiano, que acostumbra ser superficial, general, cualitativo, intuitivo, subjetivo e íntimamente relacionado con el contexto concreto en el que se expresa. Observar los fenómenos desde el punto de vista de la ciencia, enriquece a la propia persona y a

la sociedad en general. El espíritu científico nace de la curiosidad. La tarea científica precisa de la creatividad y la imaginación, así como del rigor y la perseverancia. Es así que, la educación científica puede potenciar el desarrollo de actitudes distintas y contrarias a la apatía, individualismo, competición y deshonestidad.

Como se ha señalado, es importante comprender que la dinámica del mundo natural, e incluso social, está basada en las interacciones de los objetos-sujetos. Por tanto, las preguntas academicistas, desmarcadas de un contexto, difícilmente ayudan a comprender la interdependencia entre los elementos de la naturaleza. Es así que la educación científica debe incorporar un enfoque integrador de las partes, o sea, dejar de lado el estudio de los componentes por aislado y más bien estudiar sus interrelaciones e interdependencias, lo que mostrará que la cooperación solidaria es más útil para la dinámica de conjunto. Esto se complementa con la diacronía-sincronía de los objetos o sujetos; es decir visualizar los objetos-sujetos en su pasado y futuro versus una visualización en un momento de su existencia. Este enfoque de diacronía, permite ver las interacciones en la evolución del objeto-sujeto. El enfoque de conocimientos no debe ser sumativo, puesto que el enfoque sumativo es de visión dogmática, memorística, descriptiva y acumulativa del conocimiento, dificultando la visualización de las interrelaciones e interdependencias.

Existe la creencia que enseñar ciencias es más transmitir un conocimiento elaborado que impulsar la evolución y construcción de las ideas propias del estudiante. Debe seguirse un modelo inductivo, donde se es consciente que el conocimiento científico proviene de la observación y experimentación y por tanto en clase deben ejecutarse actividades o experiencias prácticas paralelamente al desarrollo de nuevo vocabulario, el de tipo científico. Lo importante es encontrar actividades que permitan promover la expresión de las propias ideas sobre el tema de estudio, el contraste de ideas y el planteamiento de preguntas significativas; y así convertir las clases de ciencias en una fuente de descubrimiento que permite elaborar explicaciones racionales de los fenómenos naturales.

Dentro de la perspectiva de entender la dinámica del mundo sobre la base de las interacciones, la educación científica debe promover el trabajo en grupo, ya que se asumiría la importancia de que una responsabilidad soli-

daria posibilita el crecimiento diferenciado de cada individuo a partir de sus propias capacidades y condicionamientos. En ese trabajo de grupo, la educación científica debe enseñar a cooperar y trabajar en equipo, promover el desarrollo de los lenguajes, oral, escrito, gráfico, etc. y procurar el aprender a aprender. La educación científica debe crear una dinámica que active simultáneamente el “pensar”, el “hacer” y el “hablar” sobre los hechos y fenómenos del mundo natural y físico.

El proceso de enseñanza de las ciencias debe construir el conocimiento sobre la base de los modelos mentales que el individuo tiene de los fenómenos; puesto que las personas, desde el inicio de su vida, crean “maneras de ver” el mundo natural, es decir, elaboran modelos sobre los fenómenos físicos y naturales. Los científicos, como cualquier sujeto, tienen sus propios modelos mentales sobre los sistemas naturales y físicos, pero tratan de crear una representación externa acorde al conocimiento científico que la comunidad científica tiene, de modo que generan un nuevo modelo mental que se denomina *modelo conceptual*. Entonces, la tarea del maestro de ciencias será dejar de enseñar exclusivamente resultados de la ciencia y más bien lograr que el estudiante amplíe y evolucione su modelo mental individual, a través de nuevas experiencias e informaciones, hacia un modelo más próximo al modelo conceptual que la ciencia ha elaborado. Dicha transformación del modelo mental, se fundamenta en el conflicto consciente para el estudiante entre los diferentes modelos interpretativos de la realidad a la luz de los conocimientos actuales, y para ello el lenguaje es una herramienta fundamental.

El lenguaje resulta ser primordial en el proceso de transformación y evolución del modelo mental individual, puesto que el estudiante puede “hablar” de su modelo mental de pensamiento, a través de la expresión de dicha representación interna por medio del lenguaje. Sólo cuando su modelo mental individual es expresado hacia el exterior, el maestro estará en condiciones de realizar las actividades y preguntas más pertinentes para transformar ese modelo, hacia el modelo conceptual científico aceptado como correcto. Por otro lado, debe eliminarse la imagen del científico como “hombre muy inteligente”, “muy trabajador y esforzado” que transmite la idea de ciencia como poder, al alcance de sectores minoritarios. Por lo contrario, debe transmitirse la idea de que el aprendizaje es una aventura intelectual interesante. Además, la educación científica no puede desvincularse de la realidad y debe incorporar el diálogo entre las ciencias sociales y naturales. Esto puede lograrse con una revisión histórica para evidenciar que muchos descubri-

mientos científicos fueron provocados por situaciones sociales, económicas y hasta situaciones bélicas concretas. Del mismo modo, puede analizarse cómo en la actualidad existe el vínculo entre ciencia, tecnología y desarrollo económico.

Asimismo, la educación científica debe sostener puntos de encuentro entre ciencia y arte, puesto que ambas requieren de creatividad o imaginación, emoción, sentimiento e intuición. En el caso particular de enseñanza de la Física, los modelos tradicionales de enseñanza deben ser mejorados, puesto que dichos modelos presentan a la Física como una ciencia decimonónica, al punto que, en los estudios del nivel secundario, no se consigue siquiera comentar los actuales campos de investigación y aplicación de esta ciencia. Se debe proponer una visión y organización de contenidos que muestre unidad, como conjunto coherente y armónico, entre las tradicionales ramas de la Física, haciendo énfasis en los conceptos unificadores básicos: partículas, campos, ondas e interacciones. Sin dividir a la Física en Clásica y Moderna, lo cual da la impresión de tener dos clases diferentes de Física; en todo caso, resultaría más prudente hacer una diferenciación entre microfísica y macrofísica, para transmitir la idea que se tienen dos niveles de análisis que se complementan y relacionan para explicar la naturaleza.

Otra deficiencia de los enfoques tradicionales de la enseñanza de la Física, es hablar de ella como una ciencia acabada, cuyas leyes son perpetuas e inmutables. Es preciso resaltar el carácter dinámico que tiene la Física, señalando las rupturas de paradigmas científicos más importantes y que dieron origen a nuevas teorías y aplicaciones tecnológicas; en particular, se debe hablar, enseñar y reflexionar sobre la teoría de la relatividad y la teoría cuántica. Finalmente, el uso de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación tiene que representar una modernización metodológica y estratégica en el proceso mismo de la enseñanza-aprendizaje. De manera particular, el empleo de algunas aplicaciones informáticas específicas, propiciarían un escenario adecuado para la comprensión de la construcción y utilización de modelos, que la Física realiza para describir, interpretar y predecir los fenómenos del mundo natural.

#### REFERENCIAS

- [1] Pujol, R.M. (2003); *Didáctica de las ciencias en la educación primaria*. (España. Síntesis Educación).
- [2] Alonso, M. (1998); *¿Somos muy conservadores en la Enseñanza de la Física?* (Servicio de Publicaciones de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, España).
- [3] Krauss, L.M. (1996); *Miedo a la Física-Una guía para perplejos* (Chile. Editorial Andrés Bello).

# EL INGENIOMÁTICO: UNA FORMA DE UNIR TEORÍA Y PRÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LA FÍSICA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Javier Saire Ibáñez

## 1. INTRODUCCIÓN

El año 1998, el Instituto Americano de la ciudad de La Paz<sup>1</sup> desarrolló una experiencia innovadora en la asignatura de Física, que pone a prueba los conocimientos aprendidos en el aula en el funcionamiento de un sistema de mecanismos, diseñados y contruidos por los estudiantes, denominado “ingeniomático”. Éste es el nombre convenido para caracterizar a una máquina, pues se diferencia de las demás máquinas en la forma como se construye, los materiales que se usan y la función que cumple. Además, el conocimiento aplicado en ella se limita a los contenidos establecidos para el nivel de educación secundaria. Esta experiencia emergió ante la necesidad de unir la teoría y la práctica en la enseñanza y aprendizaje de la Física, así como para consolidar los conocimientos de los estudiantes y construir otros en función de las necesidades generadas durante el proceso de construcción de la máquina. El ingeniomático está orientado hacia el desarrollo de capacidades genéricas, en el marco de una formación integral del estudiante.

Se desea pues difundir esta experiencia para contribuir a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Física en la educación secundaria, de modo que promueva al profesorado a abandonar la “Física formulística”<sup>2</sup> e inclinarse hacia una efectiva construcción de conocimientos, así como convertirse en un verdadero facilitador del aprendizaje de los estudiantes, que orienta y reajusta el proceso educativo hasta alcanzar el propósito pedagógico fijado en la asignatura.

## 2. LA NECESIDAD DE UNIR TEORÍA Y PRÁCTICA EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA FÍSICA

La Física es una ciencia empírica (Sears, Zemansky, Young), lo que significa que sus leyes y principios (teoría) deben ser probados en su aplicación práctica. A su vez, la práctica debe ser sustentada por la teoría. Siendo una ciencia experimental, entra en contradicción metodológica con la enseñanza expositiva, con tiza, pizarra y discurso, que origina en el estudiante una percepción de conocimientos inaplicables en la vida cotidiana. Además, induce a la memorización mecánica de la teoría, que posteriormente es olvidada fácilmente. Así, el aprendizaje de

las leyes y principios físicos sin saber cómo aplicarlos, carece de sentido, pues sólo es posible conocer la validez de una ley cuando ésta está probada en la práctica. En la aplicación de las leyes se comprende sus alcances y sus límites.

El conocimiento se construye a partir de la interacción entre teoría y práctica. Es un proceso paulatino que empieza con los receptores sensoriales (vista, oído, tacto, etc.) hasta la posibilidad del pensamiento abstracto (Castell). La teoría puesta en práctica es capaz de generar una nueva teoría. Es así como progresa el conocimiento, de manera que la teoría en sí misma, sin práctica, no sirve ni como teoría.

## 3. EL INGENIOMÁTICO

El ingeniomático (o máquina ingeniosa) fue concebido en la línea de unir teoría y práctica en la enseñanza y aprendizaje de la Física en el nivel de educación secundaria. En el proceso de su construcción se aplican conceptos, principios y leyes de la Física de manera tal que promueva a los estudiantes a recurrir al uso de los conocimientos de la disciplina y elaboren otros conocimientos. Los estudiantes diseñan y construyen una máquina compleja con materiales de desecho o de bajo costo, para que ésta realice una tarea sencilla. Se acopla entre sí mecanismos o dispositivos que cumplen funciones intermedias, con el propósito de que el conjunto de ellos permita a la máquina realizar una función principal de manera automatizada.

Entre sus características se distingue varias etapas y efectos encadenados, que se desarrollan automáticamente de manera secuencial, en diferentes tiempos o al mismo tiempo, hasta finalizar con la función concreta para la cual se diseñó el ingeniomático. Una vez producido el primer efecto, no se requiere de intervención manual, sino que los dispositivos intermedios se van activando ya sea de forma secuencial o bien de forma paralela, dependiendo de los sucesos programados, hasta concluir todas las operaciones anticipadas.

### 3.1. *El ingeniomático como un medio para el aprendizaje de la Física*

Una vez diseñado el ingeniomático en correspondencia a la función principal, los estudiantes orientados por el docente organizan los contenidos de la asignatura de Física conforme a los requerimientos de conocimientos necesarios para determinar las magnitudes físicas correspondientes a cada etapa y dispositivo. Por ejemplo, se

<sup>1</sup>Establecimiento educativo de carácter privado, a la vez público de convenio, ambos atendidos en su mayoría con los mismos profesores y bajo el mismo programa educativo.

<sup>2</sup>Expresiones matemáticas de leyes de la Física, denominadas “fórmulas”.

MAQUINA PARA ENCENDER UNA BOMBILLA

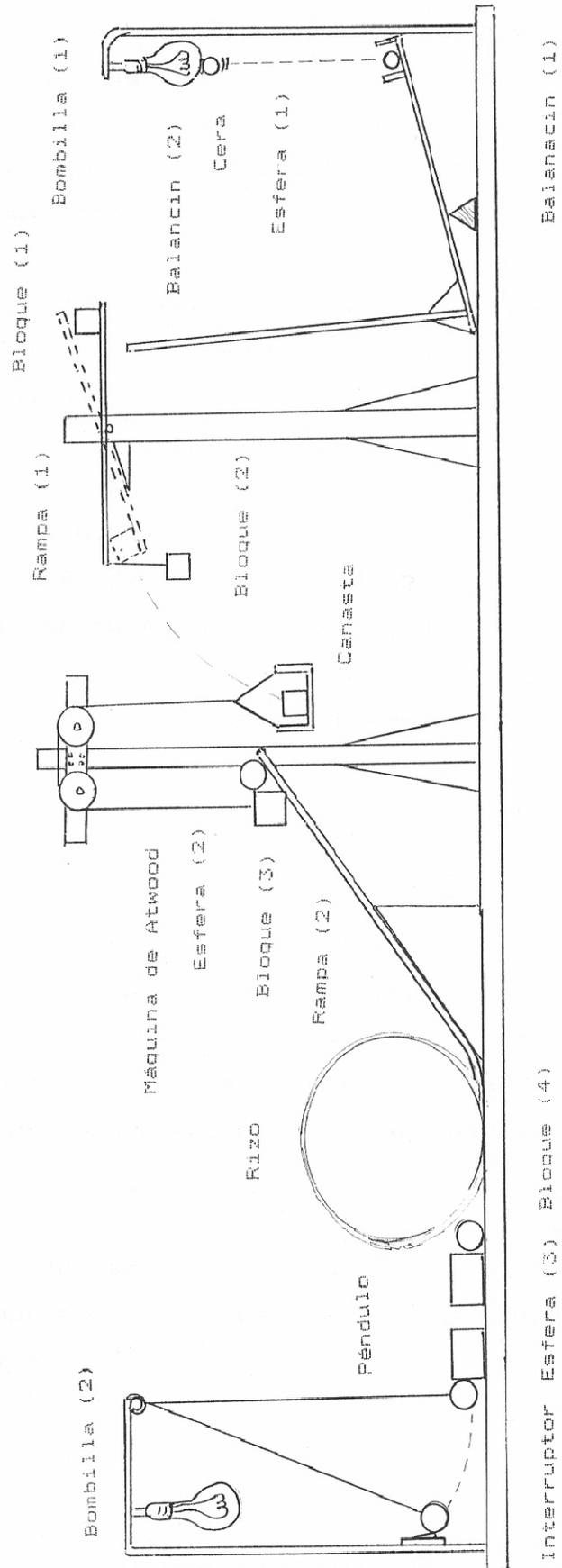


Figura 1.

TABLA 1  
RELACIÓN DE EFECTOS Y CONTENIDOS

N°	EFECTOS Y ETAPAS	CONTENIDO DE ESTUDIO
1	La bombilla (1) una vez encendida eleva su temperatura, funde la cera y deja caer el perdigón (1).	Ley de Joule – Lenz. Calorimetría.
2	El perdigón en su caída libre recorre una determinada altura en un cierto tiempo y cae sobre un balancín (1).	Cinemática: Movimiento vertical. Caída libre.
3	El balancín (1) entra en movimiento.	Dinámica de rotación.
4	El balancín (2) hace un movimiento rotacional hasta convertirse en una rampa (1).	Dinámica de rotación.
5	La rampa o plano inclinado (1) permite el deslizamiento del bloque (1).	Cinemática, dinámica, trabajo y energía.
6	El bloque (1) sale de la rampa (1) con una velocidad y una dirección tomando una trayectoria parabólica hasta introducirse a la canasta de la máquina de Atwood.	Cinemática: movimiento parabólico.
7	La máquina de Atwood al ponerse en movimiento libera al perdigón (2).	Dinámica lineal.
8	El perdigón (2) rueda por la rampa o plano inclinado (2).	Teorema del trabajo y la energía o conservación de la energía. Dinámica de rotación y momento de inercia.
9	El perdigón (2) posteriormente entra al rizo, da un giro completo y choca contra el bloque (4).	Teorema del trabajo y energía o conservación de la energía, dinámica de rotación, momento de inercia. Conservación de la cantidad de movimiento lineal.
10	Después del choque, el bloque (4) se desliza por un plano horizontal hasta colisionar con el perdigón (3) que cuelga perpendicularmente.	Conservación de la cantidad de movimiento lineal.
11	El perdigón (3), después del choque, sube hasta accionar el interruptor.	Conservación de la energía.
12	Finalmente la bombilla (2) se enciende.	

puede calcular el tiempo teórico de acuerdo al diseño y luego verificar experimentalmente el tiempo empleado por la máquina en una situación real. El funcionamiento de cada etapa de la máquina es fundamentada con claridad con base en los principios, leyes y conceptos que intervienen, empleando argumentos y conclusiones procedentes de la obtención o construcción de conocimientos, del diálogo conceptual con el docente, de la indagación de información en otros medios, así como de la determinación de magnitudes y constantes encontradas en el laboratorio.

Los datos necesarios para resolver los problemas se obtienen por mediciones precisas de las magnitudes físicas sobre el diseño y la máquina, empleando instrumentos pertinentes. En muchos casos se determinan constantes físicas mediante procedimientos de investigación científica en el laboratorio, de tal manera que, cuando los resultados obtenidos no son los esperados, el equipo de estudiantes discute y reflexiona utilizando para ello argumentos técnicos sólidamente fundamentados, hasta llegar a conclusiones que son comprobadas en la práctica.

Un ejemplo de ingeniomático se presenta en la Fig. 1, donde la función principal de la máquina es encender una bombilla eléctrica. El aparato consta de 12 efectos encañados por combinaciones de movimientos, que están relacionados con la mecánica.

Como se dijo, a partir de la descripción de los efectos y etapas de la máquina se formulan contenidos de estudio que son organizados por los estudiantes según sus necesidades. Estos contenidos son tentativos; pueden surgir otros en el momento de su aplicación.

### 3.2. *El ingeniomático como un medio para desarrollar capacidades generales*

La tarea que debe cumplir la a máquina a construir se discutida en equipo respetando las ideas de cada estudiante, hasta llegar a un consenso sobre la función de la máquina, el modelo ideal de la máquina y las etapas que ésta realizará. En este proceso, los estudiantes se organizan y delegan responsabilidades al equipo, de modo que el trabajo en grupo y el trabajo individual adquieren importancia. Elaborado el diseño, se seleccionan los materiales analizando sus propiedades de manera tal que responda a las características de la máquina. Del mismo modo, se emplean herramientas e instrumentos en la construcción de los mecanismos y dispositivos.

El ingeniomático construido no siempre obedece al diseño original, ya que se hacen modificaciones y nuevos cálculos mientras se comprueba el funcionamiento de cada etapa junto a la interpretación de los fenómenos que intervienen, y mientras se realiza el análisis crítico de los alcances y limitaciones de las leyes físicas. De esta manera, se evalúan los cálculos realizados, reconociendo los errores cometidos (si es el caso) para modificar el procedimiento hasta lograr el resultado correcto.

### 3.3. *El ingeniomático como un medio para reajustar el aprendizaje*

Durante la construcción del ingeniomático interesa averiguar por qué la teoría no se cumple en la práctica (si es que no se cumple), a través de una reflexión, análisis, comprensión y verificación de los conceptos, principios y leyes de la Física, a fin de reajustar el proceso de aprendizaje.

Si la máquina no funciona o no cumple con la teoría, tanto el docente como los estudiantes se ponen a evaluar los inconvenientes en el proceso. Este momento es aprovechado por el docente, que mediante la observación del trabajo y el diálogo con los estudiantes, efectúa un diagnóstico del aprendizaje de cada estudiante, detectando conocimientos, procesos, procedimientos, actitudes y aptitudes, tales como: conocimientos previos, errores sistemáticos de medición, interpretación de los fenómenos, manejo conceptual, aplicación pertinente de una ley Física, dificultades en el empleo de la matemática al realizar cálculos, manejo adecuado de la máquina de calcular, así como la honestidad en la información, habilidades manuales, creatividad y el trabajo en equipo, entre otros.

La única finalidad del diagnóstico es obtener información para afirmar y orientar el desarrollo de habilidades mentales, destrezas manuales y actitudes personales; por ningún motivo se asigna una calificación a las fortalezas o debilidades de los estudiantes, es decir, el diagnóstico permanente y el consecuente reajuste de los aprendizajes debe permitir alcanzar los propósitos educativos de la asignatura. En ese marco, si el ingeniomático funciona y el tiempo de operación calculado es igual al tiempo de operación experimental, entonces ello se interpreta como que los estudiantes que diseñaron y construyeron la máquina “saben” Física.

## 4. CONCLUSIONES

El ingeniomático no es una máquina para resolver una necesidad de tipo tecnológico, sino que su finalidad se orienta desde el punto de vista de una pedagogía centrada en el aprendizaje del estudiante, donde a través del estudio de conceptos y fenómenos procedentes de la Física se desarrollen capacidades intelectuales y manuales. En ese sentido cabe señalar:

- La enseñanza de la Física del tipo lineal (libro-pizarra-cuaderno) aísla los conocimientos de la Física de su aplicación a situaciones reales y restringe su utilidad tan sólo para que el estudiante replique la clase y resuelva ejercicios irreales en el examen -que casi siempre es escrito-. Esta enseñanza es cuestionada totalmente con la incorporación del ingeniomático, que brinda espacios más apropiados para aprender, construir conocimientos y desarrollar capacidades. Es decir, los estudiantes no sólo aprenden Física, sino que se forman integralmente.

- La necesidad de articular los contenidos de la Física con los intereses prácticos de los alumnos y la búsqueda de lograr la enseñanza comprometida con las transformaciones técnico-científicas actuales, ha sido el centro de las atenciones y preocupaciones de las investigacio-

nes en didáctica de la enseñanza de la Física (Campelo). Al respecto, la experiencia del ingeniomático demuestra cómo es posible lograr que los conocimientos de la Física de la educación secundaria tenga su aplicación práctica a situaciones reales, orientada hacia la creación de tecnología<sup>3</sup>. Por otra parte, la relación permanente entre teoría y práctica durante el proceso de construcción del ingeniomático permite a los estudiantes una asimilación crítica de los conocimientos, de modo que lo aprendido a través de la experiencia manual, como consecuencia de un razonamiento mental, hace más significativo y duradero el aprendizaje.

•La vieja concepción de jerarquizar los contenidos y establecer prerrequisitos es superada mediante la organización de contenidos en función de las necesidades del estudiante, de forma que es el estudiante quien decide sobre la secuencia de contenidos. Además, éstos no son contenidos aislados, sino que se articulan en cada etapa, estableciéndose una cadena de contenidos interrelacionados e interdisciplinarios.

•A diferencia del profesor que sólo enseña (o más bien informa conocimientos) y que hace una representación formulística de las leyes en la pizarra, en este caso es un facilitador quien atiende y orienta a los estudiantes para elaborar conjeturas y teorías, consolidar conceptos relevantes y dar significado a lo que el estudiante construye con sus manos. Se trata pues de un aprendizaje asistido<sup>4</sup>, donde el profesor es un verdadero consejero que se mimetiza en el trabajo del estudiante durante el diseño, la construcción y el funcionamiento de la máquina. El profesor es un miembro más del equipo.

•Un aspecto importante que se debe tomar en cuenta, es que el examen tradicional que sólo sirve para medir conocimientos memorizados y que marca como débil mental al estudiante que reprueba el mismo, es sustituido por un diagnóstico permanente, que identifica y evalúa el grado de progreso del logro de capacidades, para asistir al estudiante hasta el desarrollo pleno las mismas.

#### REFERENCIAS

- [1] BAIGORI, BACHS, CISNEROS, GONZALES, MANZANO, PENALBA. *Enseñar y Aprender Tecnología en la Educación Secundaria* (Editorial HORSORI, Barcelona, 1997).
- [2] CAMPELO J. R. *Un modelo didáctico para enseñanza aprendizaje de la Física*. Revista Brasileira de Ensino de Física. Vol.25, N°1 (São Paulo, Brasil, 2003).
- [3] CASTELL A. *Apuntes sobre el concepto marxista de la teoría del conocimiento*. Cuadernos Marxistas N°2 (1987).
- [4] GÓMEZ LUÍS, SILVA FRANCISCO. *Tecnología 2: Sistemas técnicos y operadores tecnológicos* (McGraw-Hill, 1994).
- [5] POZO J. I. *Psicología de la Instrucción: La enseñanza y el aprendizaje en la Educación Secundaria*. Capítulo II: Aprendizaje de Contenidos y Desarrollo de Capacidades en la Educación Secundaria (Editorial ICE/HORSORI, Barcelona, 1999).
- [6] SEARS, ZEMANSKY, YOUNG. *Física Universitaria* (Addison-Wesley Iberoamericana, Sexta edición).
- [7] SERWAY R. *Física* (McGraw-Hill, cuarta edición. 1999).
- [8] WOOLFOLK, A. *Psicología Educativa* (Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. sexta edición).

<sup>3</sup>La tecnología ha sido, y es hoy, el resultado de aplicar los conocimientos científicos a situaciones prácticas (L. Gonzáles).

<sup>4</sup>Dar ayuda estratégica en los pasos iniciales del aprendizaje, disminuyéndolo en forma gradual conforme los estudiantes adquieren independencia (Anita E. Woolfolk).

## SOL Y TEMPERATURA DESDE EL COLEGIO “FRANCISCANO”

Wilson Fuentes M.

Colegio Franciscano  
Potosí, Bolivia

*“Educar es depositar en cada hombre toda la obra humana que le ha antecedido; es hacer a cada hombre resumen del mundo viviente, hasta el día en que vive; es ponerlo a nivel de su tiempo, para que flote sobre él y no dejarlo debajo de su tiempo, con lo que no podrá salir a flote; es preparar al hombre para la vida” José Martí (Nov.-1883)*

El año pasado, varios alumnos y alumnas de la asignatura de Física de Primero, Segundo y Tercero de Secundaria del Colegio Franciscano (Potosí, Bolivia), participaron del “Proyecto Internacional de Sol y Temperatura” (*Stevens Institute of Technology*, <http://k12science.ati.stevens-tech.edu/collabprojs.html>).

Éste es un proyecto multidisciplinario que enriquece las experiencias de aprendizaje de los estudiantes por medio de aplicaciones de tecnología educativa. En particular, el proyecto utiliza algunas de las aplicaciones emocionantes de Internet en educación y hace que un gran número de estudiantes colaboren a distancia para determinar cómo la proximidad de una región al ecuador terrestre afecta la temperatura promedio y las horas de luz solar. El proyecto comprende cuatro actividades principales que enseñan a los estudiantes cómo aplicar su conocimiento y habilidades de razonamiento de matemáticas, ciencias y tecnología para explicar fenómenos del mundo real. Específicamente, los estudiantes determinan las coordenadas de latitud y longitud de la ciudad donde viven, miden y registran la temperatura y los minutos de luz solar, grafican y analizarán los datos, finalmente plantean conclusiones con base en los datos de Internet y comunican sus resultados. Los estudiantes también tienen la oportunidad de interactuar con otros estudiantes de todo el mundo y de estudiar su ubicación geográfica, cultura y medio ambiente.

En la enseñanza de la Física y habilidades colaterales, esta experiencia es una alternativa para plantear contenidos en ámbitos “no tradicionales”, y con medios educativos que son utilizados por los estudiantes con fines que a veces son educativos.

A continuación nos permitimos presentar dos gráficos que son fruto de la colaboración entre varios colegios de secundaria del mundo que participaron del proyecto. En la fig.1 podemos observar la relación lineal de la latitud con la temperatura, lo cual se puede explicar considerando que en esta temporada los rayos del sol inciden directamente sobre el hemisferio norte de la Tierra, debido a la declinación de la misma. El último gráfico

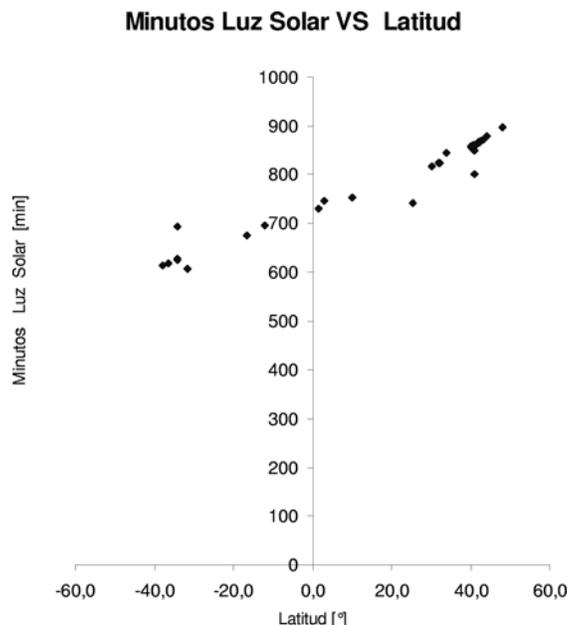


Figura 1.

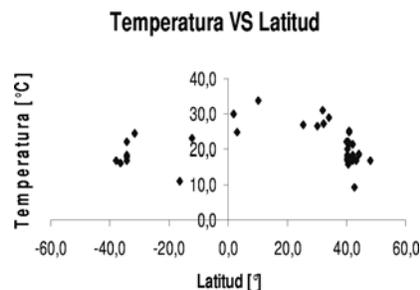


Figura 2.

(fig.2) -aunque con varias discrepancias- revela que las ciudades más cercanas al ecuador tienen temperaturas más altas. Deseamos resaltar que el punto cercano a  $-20^\circ$  (latitud sur), representa a la temperatura de nuestra ciudad ( $11^\circ\text{C}$ ); este valor sale de la tendencia general de la curva, ya que la ciudad de Potosí está situada a 4000 msnm y debido a ello el clima es “frío”, a pesar de la relativa cercanía de Potosí al ecuador.

Deseo felicitar al Prof. David Huallpa, a sus alumnos y alumnas de Primero de Secundaria, a los estudiantes de Segundo y Tercero de Secundaria, que participaron del proyecto, haciendo del lema de nuestro querido Colegio, “disciplina y trabajo”, una práctica.

## COHETES IMPULSADOS POR PROPULSIÓN DE AGUA

Roger Apaza Vásquez

Carrera de Física  
 Universidad Mayor de San Andrés  
 Casilla 8635, La Paz—Bolivia

### RESUMEN

El presente artículo trata sobre el estudio de cohetes propulsados por agua o por algún fluido no compresible. Es necesario recordar que el así denominado “coquete de agua”, no funciona por combustión química sino por una reacción mecánica. El estudio que se realiza en este artículo es sobre la cantidad de presión que necesita un cohete de agua para poder elevarse, y determinar el tiempo en el cual dicho fluido termina de vaciarse del recipiente a medida que éste se impulsa. Muchas personas que realizan este experimento, todavía no conocen la explicación matemática y física de estos sistemas propulsados.

### 1. INTRODUCCIÓN

Actualmente los cohetes de agua, además de ser usados por los aficionados a la “coheteria *amateur*”, solamente se usan como un modelo de explicación para ilustrar los principios físicos comprendidos en la propulsión de los cohetes de combustión química de gran tamaño. Pero en sí esta clase de cohetes —también llamados *water rockets* [1]— encierran mucha matemática para su explicación física, por lo que el objetivo de estudio sobre este tema es enseñar y explicar la propulsión de cohetes mediante fluidos no compresibles, así como la necesidad de hacer notar que aunque los *water rockets* son experimentos divertidos para la enseñanza de ciertas leyes físicas, éstos también encierran una gran complejidad que muchas veces es ignorada por aquellos que fabrican y diseñan este tipo de cohetes.

Para iniciar el estudio del cohete de agua nos referiremos al material teórico básico comprendido en cualquier texto de Física, por ejemplo, *Física* de Resnick, Halliday y Krane [2] (capítulo de Dinámica de Fluidos), a fin de aplicar las leyes usuales de la mecánica (teorema de trabajo-energía, variación del momentum, conservación de la masa) a un fluido ideal que sirve como agente propulsor del cohete. El contexto de la aplicación de estas leyes es el referido por Finney [1] en su extenso análisis sobre los cohetes de agua. En este artículo se presentan algunas consideraciones alternativas a las expuestas en [1] y se sugieren otras investigaciones que no fueron señaladas en dicha referencia.

### 2. FÍSICA APLICADA A LA PROPULSIÓN DE COHETES DE AGUA

Consideremos un recipiente cerrado que contiene una parte de agua y otra parte de aire. El agua expulsada ejerce una fuerza de empuje similar a la que experimenta un cohete al expulsar los gases del combustible quemado por sus toberas. Antes de empezar la explicación, cabe recalcar que atribuimos al aire las propiedades de un gas

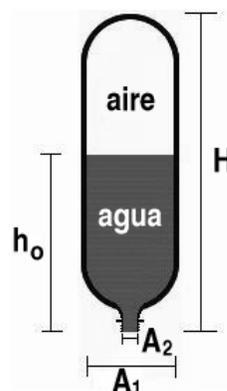


Figura 1. Recipiente que contiene cierta proporción de agua o algún fluido incompresible.

ideal, pues éste reúne dentro de una buena aproximación las condiciones de densidad, presión y temperatura con la que se trabaja. También se desprecian los efectos de condensación.

La forma del recipiente se supone cilíndrica, con una sección transversal de área  $A_1$ . Es necesario aclarar que no se considera el cambio de temperatura al introducir el aire, i.e., la transformación que sufra el gas será isotérmica. A continuación se explicará algunos de los estudios teóricos que se realizaron con los cohetes de agua.

### 3. LLENADO DE AIRE

Primeramente estudiemos el caso de la cantidad de presión que necesitan estos cohetes para poder propulsarse, tratando de encontrar una ecuación para la presión en función del número de veces que accionamos una bomba de aire.

Imaginemos a continuación el sistema mostrado en la Fig. 3. Como se puede observar, se tiene un émbolo que representa a la bomba de aire de una bicicleta u otro mecanismo similar para insuflar aire; éste se encuentra conectado al recipiente cerrado y parcialmente lleno de

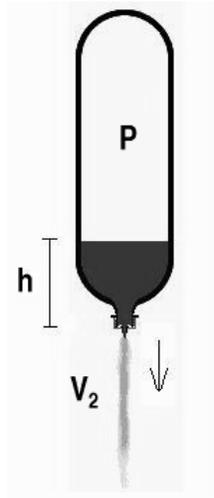


Figura 2. Recipiente expulsando la proporción de agua que contenía.

agua. Podemos observar que conectado al recipiente se encuentra un manómetro que nos determinará la presión inicial del aire. Antes de accionar la mencionada bomba de aire, tenemos en el recipiente (cohete)  $n_0$  moles de aire a presión atmosférica  $P_a$  y a temperatura ambiente  $T$ .

Entonces de la ley de los gases ideales obtenemos la siguiente ecuación (Fig. 1):

$$P_a A_1 (H - h_0) = n_0 RT. \quad (1)$$

Cada vez que accionamos la bomba de volumen  $V_b$ , introducimos en el recipiente  $n$  moles de aire a la misma temperatura  $T$ , por tanto, aplicando nuevamente la ley de los gases, tenemos la siguiente ecuación:

$$P_a V_b = n RT. \quad (2)$$

Si accionamos la bomba de aire  $N$  veces, tendremos que la presión  $P_0$  del aire contenido en el recipiente es:

$$P_0 A_1 (H - h_0) = (n_0 + nN) RT. \quad (3)$$

El manómetro marcará una presión  $P_0$  dada por la siguiente ecuación despejada de (3):

$$P_0 = \frac{(n_0 + nN) RT}{A_1 (H - h_0)}. \quad (4)$$

De (1) y (2) obtenemos una nueva ecuación:

$$P_0 = \frac{P_a A_1 (H - h_0) + P_a V_b N}{A_1 (H - h_0)}. \quad (5)$$

Finalmente, factorizando  $P_a$  queda:

$$P_0 = P_a \left( 1 + \frac{V_b N}{A_1 (H - h_0)} \right). \quad (6)$$

Este valor de  $P_0$  corresponde a la presión *inicial* durante la fase de propulsión del cohete.

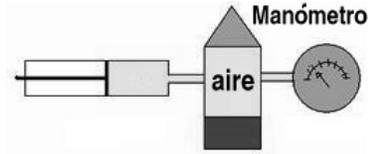


Figura 3. Esquema de una bomba de aire conectada a un recipiente y a un manómetro.

#### 4. TIEMPO DE VACIADO DEL AGUA

El volumen inicial de aire que tenemos en el recipiente es:

$$V_0 = A_1 (H - h_0). \quad (7)$$

Luego, el volumen final de aire una vez que termina de salir toda el agua del recipiente es:

$$V = A_1 H. \quad (8)$$

Ya que la transformación del gas (aire) se ha supuesto isotérmica, entonces:

$$P_0 A_1 (H - h_0) = P A_1 H. \quad (9)$$

Si la sección del recipiente  $A_1$  es mucho mayor que la sección del orificio de salida  $A_2$ , entonces, en vista de la ecuación de conservación del flujo:  $A_1 v_1 = A_2 v_2$ , la velocidad  $v_1$  es muy pequeña comparada con  $v_2$ , y se puede despreciar.

La presión debida a la altura del fluido

$$P = \rho gh \quad (10)$$

también puede considerarse pequeña respecto a la presión del aire en el interior del recipiente. Así, la ecuación de Bernoulli se simplifica:

$$P = P_a + \frac{1}{2} \rho v_2^2. \quad (11)$$

Al salir el agua por el orificio de sección  $A_2$ , el volumen del aire  $V$  en el interior del recipiente aumenta con el tiempo:

$$A_2 V_2 = \frac{dV}{dt}. \quad (12)$$

Suponiendo que la velocidad de escape del aire no es tan grande como para invalidar la aproximación de un proceso isotérmico, entonces

$$P_0 V_0 = P V, \quad (13)$$

donde  $P_0$  es la presión inicial del aire y  $V_0$  es el volumen inicial.

Despejando  $V$  de (13),  $V_2$  de (11), y reemplazándolos en (12), obtenemos:

$$\frac{d \left( \frac{P_0 V_0}{P} \right)}{dt} = A_2 \sqrt{\frac{2(P - P_a)}{\rho}}. \quad (14)$$

Observando la ecuación (14), podemos ver la derivada de un cociente, donde  $P_0 V_0$  es una constante; así, aplicando las propiedades de la derivada, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{P^2}{P_0 V_0} A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P - P_a)}. \quad (15)$$

Luego, integrando (15) y acomodando términos tendremos la solución para el tiempo en el que se vacía el agua de la botella. Debe recordarse que éste es el tiempo de vaciado que es mucho menor que el tiempo de vuelo del cohete. El tiempo de vaciado es:

$$t = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \frac{P_0 V_0}{P_a A_2} \left( D(P) + \frac{E(P)}{\sqrt{P_a}} \right), \quad (16)$$

donde:

$$D(P) = \frac{\sqrt{P_0 - P_a}}{P_0} - \frac{\sqrt{P - P_a}}{P},$$

$$E(P) = \arctan \left( \sqrt{\frac{P_0 - P_a}{P_0}} \right) - \arctan \left( \sqrt{\frac{P - P_a}{P}} \right).$$

Finalmente, podemos decir que la ecuación (16) nos da el tiempo de vaciado del agua del recipiente durante la fase de propulsión. Para ilustrar esta ecuación, tomemos algunos datos típicos de este tipo de cohetes de agua. Para una botella de 2 litros, tenemos los siguientes datos:  $A_1 = 7,85 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $A_2 = 3,80 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $V_b = 3,05 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ . El porcentaje de agua dentro de la botella es del 33% del volumen total de la botella; ésta tiene una altura de 0,28 m; la bomba de aire se acciona 4 veces. Con estos datos, la ecuación (16) da un tiempo de vaciado de 0,20 segundos.

Otra manera de estudiar este mismo problema es resolver (15) mediante el uso de ecuaciones paramétricas. Entonces usamos la ecuación (15), y la transformamos en la siguiente ecuación

$$\frac{dP}{dt} = -CP^2 \sqrt{P - P_a}, \quad (17)$$

donde:

$$C = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \frac{A_2}{P_0 V_0}.$$

Los límites de integración son los siguientes:

$$P_a \leq P \leq 4P_a,$$

$$0 \leq Z \leq \sqrt{3P_a},$$

donde se definió  $Z \equiv \sqrt{P - P_a}$ .

Debido a que  $Z$  depende de la presión  $P$ , y ésta a su vez depende del tiempo, obtenemos la derivada de  $Z$  con respecto a  $t$ , y la combinamos con (17):

$$\frac{dP}{dt} = 2Z \frac{dZ}{dt} = -CP^2 Z,$$

$$2Z \frac{dZ}{dt} = -C(P_a + Z^2)^2 Z.$$

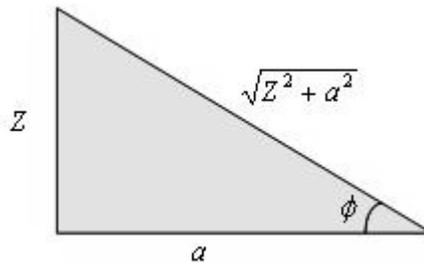


Figura 4. Triángulo construido para resolver la integral trigonométrica de la ecuación (20).

Separando variables y definiendo  $a = \sqrt{P_a}$  integramos la anterior ecuación:

$$\xi = \int_{a\sqrt{3}}^{Z(t)} \frac{dZ}{(Z^2 + a^2)^2} = -\frac{C}{2} \int_0^t dt. \quad (18)$$

Esta integral se puede resolver por sustitución trigonométrica (figura 4), con  $Z = a \tan \phi$ , por lo que  $dZ = a \sec^2 \phi d\phi$ . De la Fig. 4 tenemos que:

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{Z^2 + a^2}}.$$

Así, tenemos que

$$\xi = (1/a^3) \int_{\pi/3}^{\phi(t)} \cos^2 \phi d\phi,$$

donde  $0 \leq \phi(t) \leq \pi/3$ . Evaluando esta última integral tenemos:

$$\xi = \frac{1}{2a^3} \left( \phi(t) + \sin \phi(t) \cos \phi(t) - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \right)$$

Sustituyendo lo anterior en (18) queda la función paramétrica  $t(\phi)$  para el tiempo:

$$t \cong \frac{1}{Ca^3} (1,48 - \phi - \sin \phi \cos \phi). \quad (19)$$

Después reacomodando algunos términos tendremos la presión en función de  $\phi$ :

$$P = \frac{a^2}{\cos^2 \phi}. \quad (20)$$

El instante inicial  $t=0$  para el que  $P=4P_a$ , corresponde a  $\phi=\pi/3$ , mientras que el instante final  $t \cong 1,48/(Ca^3)$  para el que  $P=P_a$  corresponde a  $\phi=0$ . Esto es interesante en sí, pues aunque el agua dentro del cohete se vacía por una diferencia de presiones que tiende a cero, y por lo tanto el flujo de salida de agua es cada vez menor, aun así la cantidad total de agua se vacía en un lapso finito. Para ilustrar estos cálculos, se construyó la gráfica  $P(t)$  mostrada en la Fig.5.

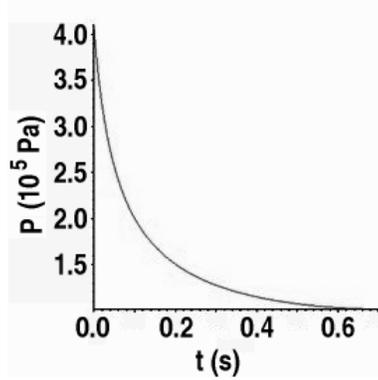


Figura 5. Gráfica de presión (en  $10^5$  pascales) vs. tiempo (s), usando los valores numéricos de los parámetros ya referidos para una botella de 2 litros.

## 5. CONCLUSIONES

Una de las conclusiones más importantes de este estudio es que los fluidos pueden ser usados como propulsores en cohetes *amateur*. En el caso de los cohetes de agua el empuje que estos desarrollan es muy pequeño, y por ello estos cohetes generalmente no alcanzan alturas mayores a los 100 metros. Sin embargo, los cohetes de agua brindan una buena oportunidad para comprender la naturaleza física de los mecanismos de propulsión a pequeña y a gran escala.

Es importante aclarar que en la sección 3 (Llenado de aire) se calculó la presión que la bomba de aire genera hasta el instante en que el cohete sale propulsado por el agua. El propósito de la sección 4 (Tiempo de vaciado del agua) fue obtener la ecuación (16) que permite, teniendo en cuenta las condiciones iniciales del sistema (por ejemplo, el área del recipiente y la densidad del fluido a utilizar), estimar de manera aproximada el tiempo total de vaciado del agua durante la fase de propulsión del cohete. A continuación, el cohete se eleva por el impulso desarrollado en la fase anterior hasta alcanzar su altura máxima. La ecuación (17) es la ecuación diferencial para la presión  $P(t)$  como función del tiempo  $t$ . Se supone  $P_a \leq P(t) \leq P_0$ , donde  $P_a$  es la presión atmosférica y la presión inicial  $P_0$  (Llenado de aire) normalmente no debe sobrepasar 4 atm, que es el límite de resistencia del material plástico con el que se fabrica este tipo de botellas.

La integración de (17) se expresa en (20) y (21) de forma paramétrica, i.e.,  $t=t(\phi)$  y  $P=P(\phi)$  donde los límites de  $0 \leq \phi \leq \pi/3$  corresponden al instante inicial ( $t=0$ ) en el que  $P(\phi=\pi/3)=P_0$  y el instante final ( $t=T$ ) en el que  $P(\phi=0)=P_a$ . Nótese que esta integración paramétrica —a diferencia de la que llevó a (16)— ya no requiere de la función multivaluada  $E(P)$  que está definida a menos de  $n\pi$ , un múltiplo entero de  $\pi$ . Si no se especifica lo

contrario, se debe entender que  $n=0$ , lo que resulta innecesario en los pasos que llevan a (17). Por otra parte, se observa que el tiempo total de vaciado  $T$  es finito:

$$T = \frac{1}{CP_a^{3/2}} \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right),$$

donde la constante  $C$  se definió a continuación de (17). Para los parámetros físicos de este problema, el tiempo de vaciado resulta ser  $T=0,2$  segundos. En el caso de tener un volumen inicial de agua menor que el requerido para vaciarse en el tiempo  $T$  de tal forma que se igualen las presiones interna y externa ( $P(T)=P_a$ ), entonces después del vaciado de este menor volumen de agua, habrá una diferencia de presiones de adentro hacia afuera del cohete, lo que provoca el escape de una masa de aire, que ya no es relevante para efectos del impulso del cohete. Esto último es lo que considera Finney [1] en su análisis: la cantidad inicial de agua es relativamente pequeña, así que ésta se expulsa en un tiempo de unos 0,15 s y luego el cohete —ya libre de la masa de agua— se eleva por el impulso ganado en la fase anterior “de quemado”. Esto nos invita a preguntarnos si acaso no se puede utilizar una cantidad mayor de agua a fin de aprovechar la diferencia de presiones de adentro hacia fuera hasta que dicha diferencia sea cero, con lo que se lograría una fase de impulso de mayor duración. Obviamente, mientras ello sucede, el agua que aún queda en el interior del cohete es un “lastre” que se debe arrastrar mientras el cohete asciende. Lo que se tiene que hacer pues es plantear un problema de extremos: ¿cuál es la cantidad ideal de agua que se puede aprovechar por la diferencia de presiones sin que ello retarde significativamente el impulso? La magnitud física que se debe “maximizar” será entonces la velocidad final que se alcanza durante esta etapa de “quemado”; esta velocidad es la velocidad inicial durante la fase de ascenso “libre” ya sin agua (combustible) que arrastrar. Obviamente, a mayor velocidad, mayor será la altura que alcance el cohete. Este análisis que sugerimos como un complemento al trabajo de Finney [1] se publicará próximamente.

Para concluir, es importante mencionar que no sólo el agua puede ser usada para propulsar este tipo de cohetes. El hecho de usar por lo general agua obviamente se debe a que es más económica, accesible, y no presenta riesgo alguno en este tipo de experimentos caseros de bajo costo.

## REFERENCIAS

- [1] Finney G.A., Analysis of water-propelled rocket: A problem in honors physics. Am. J. Phys. 68 (3) March 2000, pp. 223-227.
- [2] Resnick, Halliday y Krane., Física Vol 1. Dinámica de los Fluidos.