

EXAMEN de 2º de Secundaria

SOLUCIONES

1. El área del paralelogramo determinado por los vectores

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{u}_x + 3\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = -\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + 2\mathbf{u}_z$$

es:

- a) 12.12 unidades² b) 34.03 unidades² c) 9.11 unidades² d) 4.99 unidades²

Solución

Existen dos tipos de multiplicación entre vectores:

- Multiplicación Punto o Escalar (Se llama así por que el resultado es un Escalar y el símbolo usado es un punto: $\bullet$)
- Multiplicación Cruz o Vectorial (Se llama así por que el resultado es un Vector y el símbolo usado es una cruz: $\times$)

La Multiplicación Vectorial de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se define como un nuevo vector que es perpendicular al plano formado por los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en la dirección de avance de un tornillo de rosca derecha que ha sido rotado del vector $\mathbf{A}$ hacia el vector $\mathbf{B}$ (GRAFICO 1.1).

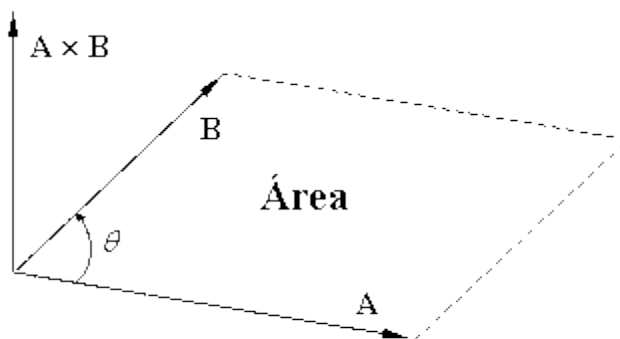


GRAFICO 1.1

El modulo del vector $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es precisamente el área buscada y viene dado por

$$| \mathbf{A} \times \mathbf{B} | = AB \sin(\theta) = \text{Área} \quad (1.1)$$

La Multipliación Escalar de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se define como la cantidad escalar obtenida de:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = AB \cos(\theta) \quad (1.2)$$

Donde θ es el ángulo que existe entre el vector $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{B}$ cuando ambos están comenzando de un mismo punto (*GRAFICO 1.1*).

El vector $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{B}$ pueden ser escritos como:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} = A_x \mathbf{u}_x + A_y \mathbf{u}_y + A_z \mathbf{u}_z \quad (1.3)$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} = B_x \mathbf{u}_x + B_y \mathbf{u}_y + B_z \mathbf{u}_z \quad (1.4)$$

donde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ son los vectores unitarios (*GRAFICO 1.2*) y las A_x , A_y , A_z son las componentes del vector $\mathbf{A}$ (*GRAFICO 1.3*).

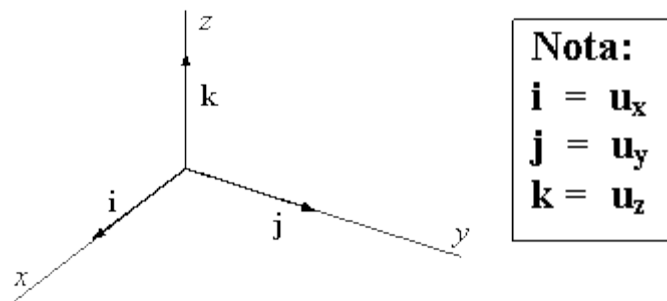


GRAFICO 1.2

Nota: El *GRAFICO 1.2* está amplificado puesto que la magnitud de los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ vale una unidad, es decir: $|\mathbf{i}| = i = 1$, $|\mathbf{j}| = j = 1$, etc...

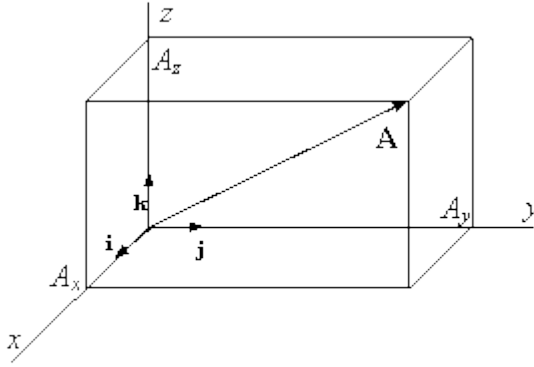


GRAFICO 1.3

Nota: Para el vector **B** el grafico de las componentes B_x , B_y , B_z será equivalente al *GRAFICO 1.3*, lo que variará será el modulo, la dirección y el sentido del vector **B** en consecuencia también las magnitudes de sus componentes.

Si se aplica la definición dada por la ecuación (1.2) se obtiene

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.5)$$

Si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ entonces $\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = AA \cos(0) = AA = A^2$ (El ángulo entre el vector **A** y el mismo vector **A** es cero), es decir el modulo del vector **A** vendrá dado por:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.6)$$

De igual modo es evidente que el modulo del vector **B** viene dado por:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (1.7)$$

De la definición de Multiplicación Escalar, ecuación (1.2), se puede despejar y calcular el ángulo θ :

$$\theta = \cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / AB) = \cos^{-1} \left(\frac{(2)(-1) + (3)(1) + (-1)(2)}{\left(\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2} \right) \left(\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (2)^2} \right)} \right) = 96.3^\circ$$

Reemplazando este valor en la ecuación (1.1) además de calcular los módulos de ambos vectores, usando las ecuaciones (1.6) y (1.7) y de igual modo reemplazarlos en la ecuación (1.1) se obtiene:

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin(\theta) = \left(\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2} \right) \left(\sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (2)^2} \right) \sin(96.3)$$

de donde finalmente,

$$\text{Área} = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 9.11 \text{ unidades cuadradas}$$

2. Un oscilador armónico simple es descrito por la ecuación $x = 4 \text{sen}(0.1t + 0.5)$, donde todas las cantidades se expresan en unidades MKS. Encontrar:

a.

Amplitud: _____ Periodo: _____ Frecuencia: _____ Fase Inicial: _____

b. La posición para un tiempo de 5 s.

c. Graficar x vs t :

Solución

- a. Una onda puede ser expresada según la siguiente ecuación

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \quad (2.1)$$

donde

$A \rightarrow$ Amplitud [m]

$\omega \rightarrow$ Frecuencia Angular o Velocidad Angular [rad/s]

$\phi \rightarrow$ Fase Inicial [rad]

$t \rightarrow$ Tiempo [s]

$x \rightarrow$ Distancia Variable vertical [m]

$(\omega t + \phi) \rightarrow$ Fase del Movimiento [rad]

se cumple que:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{P} \quad (2.2)$$

donde

$f \rightarrow$ Frecuencia [1/s=Hz (Hertz)]

(Numero de repeticiones por unidad de tiempo)

$P \rightarrow$ Periodo [s]

(Tiempo en el cual la función se repite a si misma)

Por lo tanto usando la ecuación (2.1) podemos calcular:

La Amplitud:

$$A = 4$$

y la Frecuencia Angular:

$$\omega = 0.1 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

El Periodo P se puede calcular de la ecuación (2.2)

$$\omega = 0.1 = \frac{1}{10} = \frac{2\pi}{P} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{2\pi}{0.1} = 20\pi,$$

y la frecuencia f sale también de la ecuación (2.2):

$$\omega = 2\pi f = 0.1 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{0.1}{2\pi} = \frac{1}{20\pi} [Hz]$$

finalmente, la fase inicial será

$$\phi = 0.5 [rad]$$

- b.** La Posición para un tiempo de 5 [s] se puede calcular simplemente reemplazando en la ecuación original este tiempo:

$$x = 4\text{sen}(0.1t + 0.5)$$

$$x = 4\text{sen}(0.1*5 + 0.5) = 3.3659[m]$$

Nota: Ten cuidado con las unidades. En tu calculadora debes habilitar la opción de radianes (Rad) para que halles el resultado correcto. Existen otras dos opciones: Grados (Deg[°]) y Gradianes (Grad). La equivalencia es

$$2\pi[\text{rad}] = 360[^\circ] = 400[\text{Grad}]$$

c.

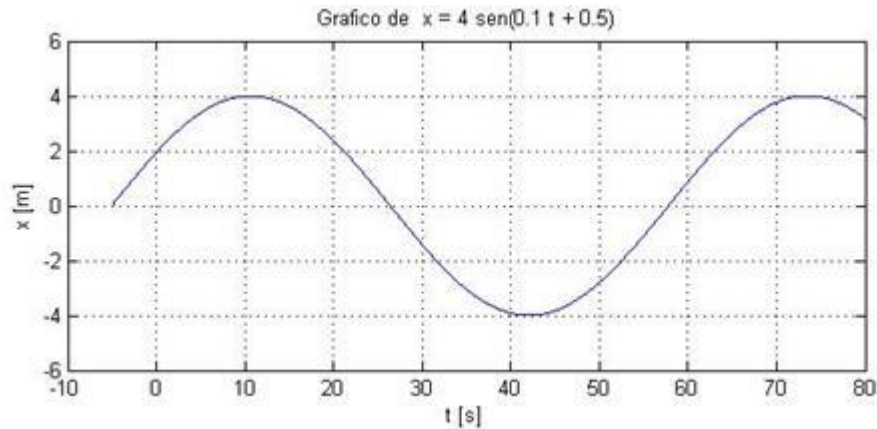


GRAFICO2.1

3. Si Ud. ve un rayo y escucha su sonido 12 s después, la distancia a la que cayó este relámpago es:

a) 276 m b) 27.6 m c) 2761 m d) 39756. m e) 3975.6 m f) 88.2 m

Ayuda: La velocidad del sonido en el aire es: $v_s = 331.3 \text{ m/s}$

Solución

$$v_s = \frac{DISTANCLIA}{TIEMPO} \left[\frac{m}{s} \right]$$

de donde

$$DISTANCLIA = v_s \times TIEMPO = 331.3 \times 12 = 3975.6[m]$$

4. La mínima altura de un espejo vertical para que una persona de 1.68 m de altura sea capaz de observar su imagen completa es:

a) 84 cm b) 27 cm c) 61 cm d) 39 cm e) 114 cm f) 100 cm g) _____

Ayuda: Suponga que los ojos se encuentran a 10 cm por debajo de la parte más alta de la cabeza

Solución

El *GRAFICO 4.1* muestra las trayectorias de los rayos que dejan la parte superior de la cabeza del individuo y la punta de sus pies. Estos rayos escogidos de tal forma que entren al ojo después de la reflexión, inciden en el espejo vertical en los puntos *a* y *b* respectivamente. El espejo necesita ocupar solamente aquella región entre estos dos puntos. Proyectando los rayos que llegan al ojo hacia el lugar donde se forman la imagen en el espejo se ve que este deberá poseer la mitad de la altura del individuo, es decir 3 pies.

Nota: La altura es independiente de la distancia a la que se encuentra la persona del espejo.

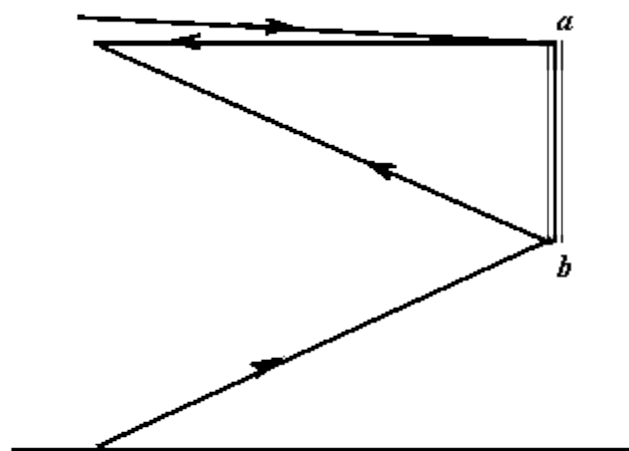


GRAFICO 4.1

