

EXAMEN de 3º de Secundaria

SOLUCIONES

1. La fuerza constante que debe ejercer el motor de un automóvil de 1500 Kg de masa para aumentar la velocidad de 4 Km/h a 40 Km/h en 8 s es:

a) 290 N b) 167 N c) 2005 N d) 1909 N e) 1875 N f) _____

La variación de la energía cinética es

a) 9920 J b) 51167 N c) 5005 N d) 3395 N e) 415 N f) 91500 J

La potencia promedio del motor es

a) 1930 W b) 99 W c) 88505 W d) 895 W e) 11458 W f) _____

Solución

a) De las ecuaciones básicas de la cinemática

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \quad (1.1)$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (1.2)$$

$$v = v_0 + at \quad (1.3)$$

donde:

$v \rightarrow$ Velocidad [m/s] en cualquier instante de tiempo t

$v_0 \rightarrow$ Velocidad inicial [m/s]

$a \rightarrow$ Aceleración [m/s²]

$x \rightarrow$ Distancia [m]

Podemos usar la ecuación (1.3) para calcular la aceleración del automóvil:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{11.111 - 1.111}{8} \frac{\frac{m}{s}}{s} = 1.250 \left[\frac{m}{s^2} \right] \quad (1.4)$$

luego de la 2ª Ley de Newton: $F = ma$ se puede calcular la fuerza:

$$F = (1500)[Kg] * 1.25 \left[\frac{m}{s^2} \right] = 1875[N]$$

b) La variación de la energía cinética viene dada por la ecuación

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

por lo tanto

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} * 1500[Kg] * (11.111^2 - 1.111^2) \left[\frac{m^2}{s^2} \right] = 91500[J]$$

c) La Potencia promedio del motor viene dada por

$$P = \frac{Energia}{Tiempo} \left[\frac{J}{s} = W \right] = \frac{91500}{8} \left[\frac{J}{s} \right] = 11437.5[W]$$

2. Una molécula de gas que tiene una rapidez de 300 m/s choca en forma elástica contra otra molécula de la misma masa que inicialmente estaba en reposo. Después de la colisión, la primera molécula se mueve formando un ángulo de 30° con su dirección inicial. La rapidez de las dos moléculas después de la colisión es:

Rapidez 1: $260[m/s]$ Rapidez 2: $150[m/s]$

y el ángulo formado por la dirección incidente y la del movimiento posterior de la molécula blanco es:

Ángulo: 60°

Solución

Para el estudio de las colisiones hace falta usar la *Ley de Conservación del Momentum* y la *Ley de Conservación de la Energía*. Las cuales indican que:

Momentum inicial = Momentum Final (Ecuación Vectorial)

Energía inicial = Energía Final (Ecuación Escalar)

La situación puede ser esquematizada en el *GRAFICO 2.1*

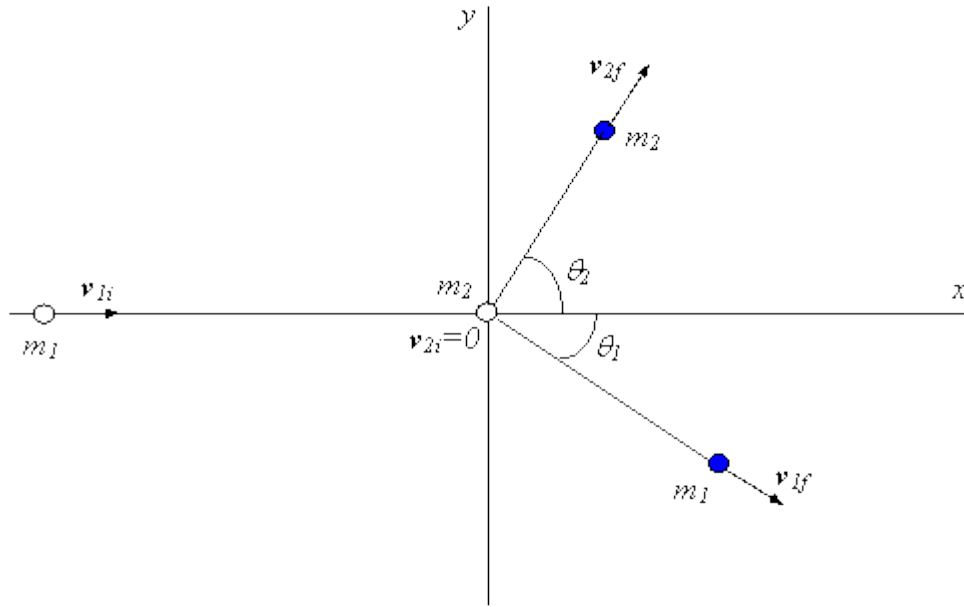


GRAFICO 2.1: Choque de dos partículas m_1 y m_2 . Los círculos blancos indican sus posiciones antes de la colisión. Los círculos azules, las posiciones después de la colisión. La masa m_2 inicialmente está en reposo.

Para la componente x del movimiento, se tiene:

$$m_1 v_{1i} + m_2(0) = m_1 v_{1f} \cos(\theta_1) + m_2 v_{2f} \cos(\theta_2) \quad (2.1)$$

y para la componente y,

$$0 = m_1 v_{1f} \sin(\theta_1) - m_2 v_{2f} \sin(\theta_2) \quad (2.2)$$

debido a que la colisión es elástica podemos obtener la siguiente ecuación de la conservación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2}m_1v_u^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \quad (2.3)$$

En esta situación: $m_1 = m_2$, $v_{1i}=300[m/s]$, $\theta_1=30^\circ$

Haciendo $m_1 = m_2$ en las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) obtenemos

$$v_{1i} = v_{1f} \cos(\theta_1) + v_{2f} \cos(\theta_2) \quad (2.4)$$

$$v_{1f} \sin(\theta_1) = v_{2f} \sin(\theta_2) \quad (2.5)$$

$$v_u^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \quad (2.6)$$

De este conjunto de ecuaciones podemos despejar v_{1f} , v_{2f} , θ_2 :

De la ecuación (2.4):

$$v_{1i} - v_{1f} \cos(\theta_1) = v_{2f} \cos(\theta_2) \quad (2.7)$$

elevando al cuadrado la ecuación (2.7) y la ecuación (2.5):

$$(v_{1i} - v_{1f} \cos(\theta_1))^2 = v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos(\theta_1) + v_{1f}^2 \cos^2(\theta_1) = v_{2f}^2 \cos^2(\theta_2) \quad (2.8)$$

$$v_{1f}^2 \sin^2(\theta_1) = v_{2f}^2 \sin^2(\theta_2) \quad (2.9)$$

Sumando (2.8) + (2.9), teniendo en cuenta que:

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad (2.10)$$

obtenemos

$$v_{1i}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos(\theta_1) + v_{1f}^2\cos^2(\theta_1) + v_{1f}^2\sin^2(\theta_1) = v_{2f}^2\cos^2(\theta_2) + v_{2f}^2\cos^2(\theta_2)$$

$$v_{1i}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos(\theta_1) + v_{1f}^2[\cos^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_1)] = v_{2f}^2[\cos^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_2)]$$

$$v_{1i}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos(\theta_1) + v_{1f}^2 = v_{2f}^2 \quad (2.11)$$

Reemplazando la ecuación (2.6) en la ecuación (2.11), obtenemos:

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos(\theta_1) + v_{1f}^2 = v_{2f}^2$$

de donde

$$2v_{1f}^2 = 2v_{1i}v_{1f}\cos(\theta_1)$$

$$v_{1f} = v_{1i}\cos(\theta_1) = 300\left[\frac{m}{s}\right]\cos(30) \quad \Rightarrow \quad v_{1f} = 260\left[\frac{m}{s}\right]$$

de la ecuación (2.6):

$$v_{2f}^2 = v_i^2 - v_{1f}^2 = \left[300 \left[\frac{m}{s} \right] \right]^2 - \left[260 \left[\frac{m}{s} \right] \right]^2 \Rightarrow v_{2f} = 150 \left[\frac{m}{s} \right]$$

finalmente de la ecuación (2.5) calculamos θ_2 :

$$\sin(\theta_2) = \frac{v_{1f}}{v_{2f}} \sin(\theta_1) = \frac{260}{150} \sin(30) = 0.866 \Rightarrow \theta_2 = 60^\circ$$

Lo más interesante es que las dos moléculas, después del choque, se mueven perpendicularmente entre si, es decir a $90^\circ = \theta_1 + \theta_2$.

3. Que fracción del volumen de un témpano de hielo esta descubierta?

a) 92.1% b) 91.0 % c) 93.1 % d) 87.0 % e) 89.3 % f) 10.7%

Ayuda: $\rho_A = 1.03g/cc$, $\rho_H = 0.92g/cc$

Solución

La densidad ρ de cualquier cuerpo de masa m y volumen V es:

$$\rho = \frac{m}{V} \left[\frac{Kg}{m^3} \right] \Rightarrow m = \rho V [Kg] \quad (3.1)$$

El peso del témpano de hielo es:

$$P_H = m_H g = \rho_H V_H g \quad (3.2)$$

donde:

$P_H \rightarrow$ Peso del Hielo [N]

$m_H \rightarrow$ Masa del Hielo [Kg]

$V_H \rightarrow$ Volumen del Hielo [m^3]

$g \rightarrow$ Gravedad [m/s^2]

👉 Nota: Peso y Masa son conceptos distintos. Repasemos La 2ª Ley de la Mecánica:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad (3.3)$$

Esta ecuación es valida si y solo si la masa es una constante.

- La Fuerza no es consecuencia de la aceleración, sino lo contrario, la aceleración es un resultado de la fuerza
- Al cuerpo le comunican aceleración todas las fuerzas aplicadas a él (aunque no se excluye que algunas de ellas se anulen mutuamente), es decir $\mathbf{F}$ indica “la resultante de todas las fuerzas”.

- Debido a que la Fuerza y la Aceleración son magnitudes vectoriales estas se caracterizan no solamente por su valor numérico (magnitud) sino también por su dirección y sentido.

Tomando en cuenta estas importantes observaciones podemos formular la 2ª Ley de Newton como: *la Aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la resultante de todas las Fuerzas aplicadas a dicho cuerpo y dirigida a lo largo de la resultante de las Fuerzas.*

Si la masa no fuera constante (ej: la masa de la tiza del profesor, un cohete abandonando el planeta Tierra, etc.) la 2ª ley de la Mecánica viene dada por:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \quad (3.4)$$

donde $\vec{q}$ es el vector Momentum, introducido por Isaac Newton en sus famosos *Principia* (1678),

$$\vec{q} = m\vec{v} \text{ [Kg m/s]} \quad (3.5)$$

Volvamos a los conceptos de masa m y peso $\mathbf{P}$:

Usando la 2ª Ley de Newton (3.3) podemos escribir

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} \quad (3.6)$$

de donde el peso (vector) $\mathbf{P}$ se mide en $[Kg \ m/s^2 = N]$

y la masa (escalar) se mide en $[Kg]$

Por ejemplo si una persona tiene una masa $m = 66 [Kg]$ su peso en la ciudad de La Paz será:

$$P = m g = (66 [Kg]) (9,775[m/s^2])$$

$$P = 645.15 [N]$$

👉 Nota:

La gravedad en la ciudad de La Paz vale $9.775 [m/s^2]$

La gravedad a nivel del mar vale $9.810 [m/s^2]$

Volvamos al calculo de la fracción del volumen de un témpano de hielo que está descubierta

El peso calculado del témpano de hielo es:

$$P_H = m_H g = \rho_H V_H g \quad (3.2)$$

y el peso del volumen V_A del agua de mar desplazada será

$$P_A = m_A g = \rho_A V_A g \quad (3.7)$$

pero este peso debe ser igual al peso del témpano de hielo (Principio de Arquímedes)

De este modo

$$\rho_H V_H g = \rho_A V_A g \quad (3.8)$$

de donde

$$\frac{V_A}{V_H} = \frac{\rho_H}{\rho_A} = \frac{0.92}{1.03} = 89.3\%$$

Esta es la parte sumergida del témpano de hielo, por lo tanto la parte que sobresale será 10.7 %

👉 Nota: *Principio de Arquímedes: Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido es empujado hacia arriba con una fuerza que es igual al peso del fluido desplazado por dicho cuerpo. Esta fuerza actúa verticalmente a través del centro de gravedad del cuerpo.*

4. Una escalera de 60 *pies*, que pesa 100 *lb*, está apoyada sobre una pared en un punto que está a 48 *pies* por encima del piso. El centro de gravedad de la escalera está en un tercio de la longitud respecto del piso. Un hombre de 160 *lb* sube hasta la mitad de la escalera. Suponiendo que no hay fricción con la pared y el coeficiente de fricción estática entre el suelo y la escalera es $\mu_e = 0.40$. ¿Cuánto puede subir el hombre por la escalera antes de que esta empiece a resbalar?

- a) 55.0 pies b) 59.8 pies c) 15.1 pies d) 39.5 pies e) 7.2 pies f) _____

Ayuda: $3.28 \text{ pies} = 1 \text{ m}$; $1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N}$

Solución

Encontremos primero las fuerzas ejercidas por el sistema sobre el piso y sobre la pared.

Las fuerzas que actúan en el sistema se pueden apreciar en el *GRAFICO 4.1*

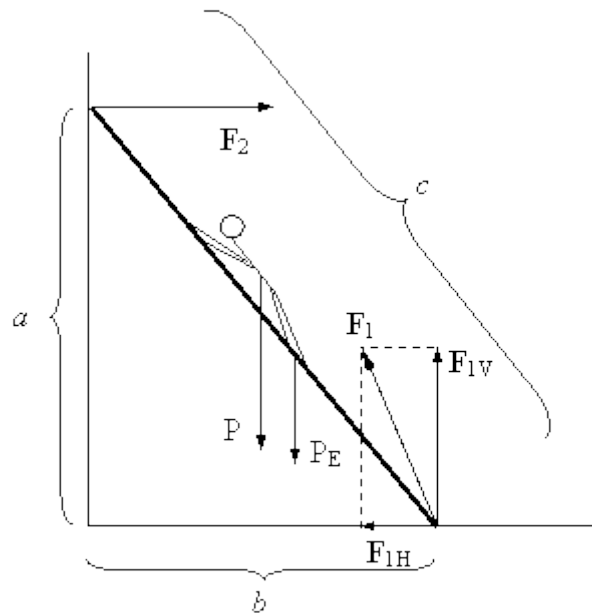


GRAFICO 4.1

Donde

$\mathbf{P}$ → Peso del hombre que está en la escalera [*lb*]

$\mathbf{P_E}$ → Peso de la escalera [*lb*]

$\mathbf{F_1}$ → Fuerza que el suelo ejerce sobre la escalera [*lb*]

$\mathbf{F_{1V}}$ → Componente Vertical de $\mathbf{F_1}$ [*lb*]

$\mathbf{F_{1H}}$ → Componente Horizontal de $\mathbf{F_1}$ [*lb*]

$\mathbf{F_2}$ → Fuerza que la pared ejerce sobre la escalera [*lb*]

Datos

$$\mathbf{P} = 160 \text{ [lb]}$$

$$\mathbf{P_E} = 100 \text{ [lb]}$$

$$a = 48 \text{ [pies]}$$

$$c = 60 \text{ [pies]}$$

Es fácil calcular b (*Pitágoras*):

$$b = 36 \text{ [pies]}$$

La línea de acción de $\mathbf{P}$ interseca al suelo a una distancia $b/2$ de la pared.

La línea de acción de $\mathbf{P_E}$ interseca al suelo a una distancia $2b/3$ de la pared.

El equilibrio trasnacional existirá si y solo si la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio debe ser cero

$$\mathbf{F} = 0 \qquad (4.1)$$

donde $\mathbf{F}$ es la resultante de las fuerzas.

El equilibrio rotacional existirá si y solo si la suma vectorial de todos los torques externos que actúan sobre un cuerpo en equilibrio debe ser cero:

$$\boldsymbol{\tau} = 0 \quad (4.2)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el resultante de los torques.

Para que haya equilibrio trasnacional usemos la ecuación (4.1) para obtener:

$$F_2 - F_{1H} = 0 \quad (4.3)$$

$$F_{1V} - P - F_E = 0 \quad (4.4)$$

Para que exista equilibrio rotacional, escojamos un eje que pase por el punto de contacto con el suelo, y usando la ecuación (4.2) obtenemos:

$$F_2 a - P \frac{b}{2} - F_E \frac{b}{3} = 0 \quad (4.5)$$

reemplazando los datos en las ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.5) podemos obtener F_2 , F_{1H} y F_{1V} :

$$F_2 = 85 \text{ [lb]}$$

$$F_{1H} = F_2 = 85 \text{ [lb]}$$

$$F_{1V} = P + P_E = 260 \text{ [lb]}$$

Ahora analicemos el sistema tomando en cuenta el coeficiente de fricción estática $\mu_e = 0.40$ entre el suelo y la escalera:

Sea x la fracción de la longitud total de la escalera antes de que este empiece a resbalar. Entonces las condiciones de equilibrio son:

$$F_2 - F_{1H} = 0 \quad (4.3)$$

$$F_{1V} - P - P_E = 0 \quad (4.4)$$

$$F_2 a - P b x - P_E \frac{b}{3} = 0 \quad (4.6)$$

reemplazando los datos en las ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.6) podemos obtener

$$F_2 = (120 x + 25) \text{ [lb]} \quad (4.7)$$

$$F_{1H} = (120 x + 25) \text{ [lb]} \quad (4.8)$$

$$F_{1V} = 260 \text{ [lb]} \quad (4.9)$$

La fuerza maxima de fricción estática está dada por

$$F_{1H} = \mu_e N \quad (4.10)$$

pero

$$N = F_{1V} \quad (4.11)$$

entonces

$$F_{1H} = \mu_e F_{1V} = (0.4)(260) = 104[lb] \quad (4.12)$$

y (4.12) = (4.8), entonces:

$$F_{1H} = 104[lb] = (120x + 25)[lb]$$

de donde podemos despejar x :

$$x = 79/120$$

Finalmente, el hombre puede trepar por la escalera

$$60x [pies] = 39.5 [pies]$$

antes de que este empiece a resbalar.