

EXAMEN de 4º de Secundaria

SOLUCIONES

1. La velocidad mínima necesaria para que un cuerpo de masa m abandone el planeta Tierra es

a) 200 Km/s b) 48 Km/s c) 3 Km/s d) 0.9 Km/s e) 1700 Km/s f) 11.2 Km/s

Ayuda: $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{Kg}^2$, $R_T = 6400 \text{ Km}$

Solución

Veamos en unas cuantas líneas algunos conceptos fundamentales:

Como introducción, Isaac Newton en 1665 escribió acerca de la Gravitación:
“...empecé a pensar que la gravitación se podía extender hasta la órbita de la Luna ... y habiendo comparado, en consecuencia, la fuerza necesaria para mantener a la Luna en su órbita con la fuerza de la gravedad en la superficie de la Tierra, descubrí que la concordancia era muy cercana...”

Johannes Kepler en 1591 descubrió las que ahora se conocen como las tres leyes de Kepler del movimiento planetario:

i. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos

ii. La línea que une a un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

iii. El cuadrado del periodo de cualquier planeta en torno al Sol es proporcional al cubo de la distancia promedio del planeta al Sol.

Isaac Newton descubrió la conocida hoy en día como Ley de la Gravitación Universal: La fuerza entre dos partículas que tienen masas m_1 y m_2 y que están separadas por una distancia r es una atracción que actúa a lo largo de la línea que une las partículas y que tiene por magnitud:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.1)$$

G es la constante Gravitacional y tiene el mismo valor para todos los pares de partículas,:

$$G = \left(6.6720 \times 10^{-11} \pm 0.0006 \times 10^{-11} \right) \left[\frac{Nm^2}{Kg^2} \right] \quad (1.2)$$

Trabajo Se define al trabajo para fuerzas constantes como:

$$T = \vec{F} \bullet \vec{x} = \mathbf{F} \bullet \mathbf{x} [N m = J] \quad (1.3)$$

El trabajo para fuerzas no constantes (variables) se define como*:

$$T = \int_{x_f}^{x_f} \vec{F} \bullet d\vec{x} \quad [N \cdot m = J] \quad (1.4)$$

* Ver apéndice *Calculo* al final de este solucionario.

El Teorema de la Variación de la Energía indica que el trabajo T efectuado por una fuerza resultante $\vec{F}$ que actúa sobre una partícula, cuando esta se mueve de un punto a otro es igual al cambio en la energía cinética E_C :

$$T = \Delta E_C \quad (1.5)$$

donde:

$$E_{C_f} = \frac{1}{2} m_F v_F^2 \quad , \quad E_{C_i} = \frac{1}{2} m_I v_I^2 \quad (1.6)$$

entonces

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} m_F v_F^2 - \frac{1}{2} m_I v_I^2 \quad (1.7)$$

Fuerza Conservativa Una fuerza es conservativa si el trabajo efectuada por ella sobre una partícula que se mueve en cualquier viaje de ida y vuelta es cero. (Ej: la fuerza de la gravedad)

Fuerza No Conservativa Una fuerza es conservativa si el trabajo efectuada por ella sobre una partícula que se mueve en cualquier viaje de ida y vuelta no es cero. (Ej: la fuerza de fricción)

👉 Nota: Si no hay cambio en la energía cinética de una partícula que se mueve en un viaje de ida y vuelta, entonces $\Delta E_C = 0$ y de la ecuación (1.5) $T = 0$ y la fuerza resultante que actúa sobre la partícula debe ser *Conservativa*. De igual manera, si $\Delta E_C \neq 0$, de la ecuación (1.5) se obtiene que $T \neq 0$, y por lo menos una de las fuerzas que actúan en el sistema será *No Conservativa*.

Conservación de la Energía Cuando las fuerzas son Conservativas la energía total E , de la partícula en estudio, permanece constante.

$$E = E_C + E_P = cte. \quad (1.8)$$

donde E_P es la Energía Potencial dada por

$$T = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{x} = E_{P,A} - E_{P,B} \quad (1.9)$$

relación válida si y solo si la fuerza es conservativa. Por ejemplo si $\vec{F} = m\vec{g}$ entonces $E_P = mgh$.

La ecuación (1.8) significa que

$$\begin{aligned}
E_I &= E_F \\
E_{C,I} + E_{F,I} &= E_{C,F} + E_{F,F} \\
\Delta E_C &= -\Delta E_F
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Por lo tanto la ecuación (1.5) queda:

$$T = \Delta E_C = -\Delta E_P \tag{1.11}$$

o de la ecuación (1.9):

$$\Delta E_P = -T = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{x} \tag{1.12}$$

Bueno, en esta pregunta la parte que nos interesa de la ecuación (1.12) será

$$\Delta E_P = -T = E_{P,B} - E_{P,A} = -T_{AB}$$

de donde

$$E_{P,B} = -T_{AB} + E_{P,A} \tag{1.13}$$

Cuando una partícula de masa m está a una distancia r del centro de la Tierra, la energía potencial del sistema está dada por la ecuación (1.13) como

$$E_P(r) = -T_{AB} + E_P(\infty) \tag{1.14}$$

Si la partícula y la Tierra están separadas por una distancia infinita podemos asignar el valor cero a la energía potencial en esta configuración de fuerza cero, es decir $E_P(\infty) = 0$. Por tanto la ecuación queda:

$$E_p(r) = -T_{\infty,r} \quad (1.15)$$

donde $T_{\infty,r}$ es el trabajo efectuado por la fuerza conservativa (la gravedad) sobre la partícula, cuando ésta se mueve desde el infinito hasta una distancia r del centro de la Tierra.

Suponiendo que la partícula se mueve hacia la Tierra a lo largo de una línea radial r , la magnitud de la fuerza gravitacional $F(r)$ que actúa sobre la partícula (suponiendo que $r > R_T$) será:

$$F(r) = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (1.16)$$

el signo menos indica que es una fuerza atractiva, es decir es una fuerza que tira de la partícula hacia la Tierra. Por tanto podemos calcular la Energía Potencial de la ecuación (1.15) como

$$E_p(r) = -T_{\infty,r} = -\int_{\infty}^r F(r) dr \quad (1.17)$$

reemplazando la ecuación (1.16) en la ecuación (1.17) e integrando *:

$$\begin{aligned} E_p(r) &= -T_{\infty,r} = -\int_{\infty}^r F(r) dr = \int_{\infty}^r \left(-G \frac{Mm}{r^2} \right) dr \\ E_p(r) &= -G \frac{Mm}{r} \Big|_{\infty}^r = -\frac{GMm}{r} \end{aligned} \quad (1.18)$$

* Ver apéndice *Calculo* al final de este solucionario.

El signo menos indica que la energía potencial es negativa para cualquier distancia infinita, es decir, la energía potencial es cero en el infinito y decrece al reducirse la distancia de separación. Esto corresponde al hecho de que la fuerza gravitacional ejercida sobre la partícula por la Tierra es de atracción.

Velocidad de Escape Ahora podemos encontrar la energía potencial gravitacional de una partícula de masa m en la superficie de la Tierra usando la ecuación (1.18):

$$E_P(R_T) = -\frac{GM_T m}{R_T} \quad (1.19)$$

donde R_T es el Radio de la Tierra, M_T es su masa.

La cantidad de Trabajo requerido, ecuación (1.15), para mover el cuerpo desde la superficie de la Tierra hasta el infinito será, usando la ecuación (1.19):

$$E_P(r) = -T_{\infty r} = \frac{GM_T m}{R_T} \quad (1.20)$$

Tomando los siguientes datos:

$$\begin{aligned} G &= (6.6720 \times 10^{-11}) \left[\frac{Nm^2}{Kg^2} \right] \\ M_T &= 5.974 \times 10^{24} [Kg] \\ R_T &= 6.378140 \times 10^6 [m] \end{aligned} \quad (1.21)$$

podemos calcular:

$$E_p(r) = 6.0 \times 10^7 m \left[\frac{J}{Kg} \right] \quad (1.22)$$

Si a un proyectil que se encuentra sobre la superficie de la Tierra le comunicamos más energía que ésta, entonces, despreciando la resistencia de la atmósfera terrestre, escaparía de la Tierra para nunca más volver.

Al suceder esto, su energía cinética decrece en tanto que su energía potencial aumenta, pero su velocidad nunca se reduce a cero. La Velocidad de Escape v_0 , para que el proyectil no regrese a la Tierra, está dada por

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{GM_T m}{R_T} \quad (1.23)$$

de cuya ecuación podemos despejar v_0 :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11.2 \left[\frac{Km}{s} \right]$$

2. Si consideramos al planeta Tierra como un conductor esférico de 6400 Km de radio la capacitancia será:

a) 0.00712 C b) 0.0712 F c) 0.000712 F d) 0.00000712 C e) _____

$$\varepsilon_o = 8.8544 \times 10^{-12} \left[\frac{C^2}{Nm^2} \right]$$

Ayuda:

Solución

De la relación $C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_o R_T$ hallamos que $C = 0.000712 F$

3. Cuando 1.00 g de agua, que ocupa un volumen de 1.00 cc, hierve a presión atmosférica, se transforma en 1671 cc de vapor. El calor de vaporización del agua es de 539 cal/g a 1 atm. El cambio en la energía interna del sistema es:

a) 2000 cal b) 45788 cal c) 0.0333 cal d) 498 cal e) 17 cal f) _____

Ayuda: 1 cal = 4.186 J

Solución

Calor de Vaporización C_v es el calor necesario C para que una masa unitaria de sustancia m pase del estado líquido al estado gaseoso manteniendo constantes la Temperatura y la Presión. Es decir:

$$C_v = \frac{C}{m} \left[\frac{cal}{g} \right] \Rightarrow C = C_v m [cal] \quad (3.1)$$

Presión

La Presión es una manera de describir la Fuerza que actúa sobre un fluido. Se define como la magnitud de la Fuerza Normal por unidad de Superficie.

$$p = \frac{F}{S} \quad \Rightarrow \quad F = pS \quad (3.2)$$

Trabajo

$$T = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \bullet d\vec{x}$$

De la ecuación (1.4) de este solucionario , podemos escribir

$$dT = \vec{F} \bullet d\vec{x} = Fdx \cos(0) = Fdx = (pS)dx = p(Sdx) = pdV \quad (3.3)$$

entonces

$$T = \int_{V_1}^{V_2} pdV \quad (3.4)$$

si p es una constante

$$T = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) \quad (3.5)$$

1ª Ley de la Termodinámica Si un sistema cambia desde un estado de equilibrio inicial i hasta un estado de equilibrio final f de una manera definida, Si el calor absorbido por el sistema es C , el trabajo efectuado por el sistema es T y el cambio en la Energía interna del sistema es ΔE_I entonces:

$$\Delta E_I = C - T \quad (3.6)$$

Ahora si reemplazamos las ecuaciones (3.1) y (3.5) en la ecuación (3.6) obtenemos:

$$\Delta E_I = mC_v - p(V_2 - V_1) \quad (3.7)$$

En nuestro caso

V_2 es el volumen del Vapor

V_1 es el volumen del Liquido

Reemplazando datos:

$$\Delta E_I = 1[g]539 \left[\frac{cal}{g} \right] - 1.03 \times 10^5 \left[\frac{N}{m^2} \right] (1671 - 1) \times 10^{-6} [m^3] = 498 [cal]$$

El hecho de que esta cantidad sea positiva significa que la energía interna del sistema aumenta durante el proceso. Es decir de las 539 [cal] necesarias para hacer hervir 1[g] de agua 41 [cal] se invierten en el trabajo externo de la dilatación y 498[cal] quedan como energía interna agregada al sistema.

4. Considérese un cilindro sólido, de masa M y radio R , que rueda sin resbalar hacia abajo por un plano inclinado, la inercia del cilindro es $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. La velocidad de su centro de masa cuando el cilindro llega a la parte más baja del plano es:

a) $\sqrt{\frac{4}{3}gh}$ b) $\sqrt{\frac{3}{4}gh}$ c) $\sqrt{2gh}$ d) $\sqrt{\frac{2}{5}gh}$ e) $\sqrt{\frac{2M}{3R}gh}$ f) _____

Solución

Este es un problema de Dinámica Rotacional. Veamos los siguientes conceptos:

Cuerpo Rígido Cuerpo donde las partículas que lo conforman mantienen siempre la misma posición entre si.

Si un Cuerpo Rígido gira con una velocidad angular ω cada partícula del cuerpo en rotación tiene una cierta cantidad de energía cinética.

Una partícula de masa m , que se encuentra a una distancia r del eje de rotación se mueve en un círculo de radio r con una rapidez angular ω alrededor de este eje y tiene una rapidez lineal dada por

$$v = r\omega \quad (4.1)$$

Por lo tanto su Energía Cinética es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \quad (4.2)$$

La Energía Cinética total del cuerpo será la suma de las Energías Cinéticas de cada una de sus partículas constituyentes.

Si el Cuerpo es Rígido entonces todas las partículas tienen la misma velocidad angular ω , pero cada partícula podrá tener un radio r distinto. Por lo tanto la Energía Cinética Total del Cuerpo Rígido Rotatorio será:

$$\begin{aligned} E_{cTOTAL} &= \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_3r_3^2\omega^2 + \dots + \frac{1}{2}m_nr_n^2\omega^2 \\ E_{cTOTAL} &= \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \dots + m_nr_n^2)\omega^2 \\ E_{cTOTAL} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2\right)\omega^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde n indica la cantidad total de masas que forman el sistema.

Inercia Rotacional La inercia Rotacional, denotada por I , juega el mismo papel en el Movimiento Rotacional que el desempeñado por la Masa M en el Movimiento Trasnacional. Se define como

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad [Kg m^2] \quad (4.4)$$

Notemos que la Inercia Rotacional de un cuerpo depende del eje particular sobre el cual está girando, lo mismo que la forma del cuerpo y de la manera en que está distribuida su masa.

Reemplazando la ecuación (4.4) en la ecuación (4.3) obtenemos la Energía Cinética de Rotación E_{CR} :

$$E_{CR} = E_{CTOTAL} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$E_{CR} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (4.5)$$

Centro de Masas

En la Física siempre se tratan a los objetos como si fuesen simples partículas que tienen masa pero no tamaño. Debido a que en el movimiento de traslación cada partícula del cuerpo sufre el mismo desplazamiento que cualquier otro entonces el movimiento de una partícula representa el movimiento de todo el cuerpo.

Aun cuando el cuerpo gire al moverse o vibre hay un punto en dicho cuerpo, llamado *Centro de Masas* que se mueve de la misma manera que lo haría una partícula sujeta a las mismas fuerzas.

La Posición del Centro de Masas de un conjunto de masas que están en una recta o en el plano o en el espacio viene dada por:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i y_i$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i y_i \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \sum m_i z_i$$

Ahora analicemos el problema planteado tomando en cuenta la Ley de Conservación de la Energía:

Inicialmente el cilindro está en reposo a una altura h del nivel del piso apoyado en el extremo superior del plano inclinado (*GRAFICO 4.1*)

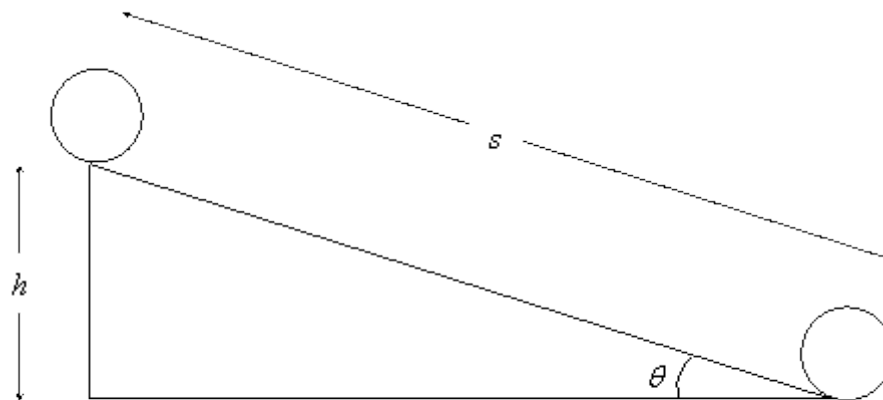


GRAFICO 4.1

Al rodar por el plano inclinado el cilindro pierde una Energía Potencial igual a

$$E_p = Mgh \quad (4.6)$$

En su movimiento el cilindro debe ganar una Energía Cinética igual a

$$E_c = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2 \quad (4.7)$$

donde

$v \rightarrow$ Rapidez lineal del Centro de Masas

$\omega \rightarrow$ Rapidez Angular en torno al Centro de Masas

Por lo tanto de la Conservación de la Energía se tiene:

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2 \quad (4.8)$$

además sabemos que: $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$ y $\omega = \frac{v}{R}$. Entonces reemplazando en la ecuación (4.8):

$$\begin{aligned} Mgh &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \left(\frac{v}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} Mv^2 \\ Mgh &= \frac{1}{4} Mv^2 + \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{3}{4} Mv^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

de donde despejando v obtenemos finalmente que:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

* Apéndice *Cálculo*.

Cálculo El Cálculo Diferencial es una importante herramienta matemática para el análisis de los sistemas Físicos. No es algo complicado, simplemente usa algunas ideas conocidas (ej.: Δ , Σ) y las aplica a un mundo pequeño (ej.: d , $\square$), infinitamente pequeño o en palabras del propio cálculo: infinitesimal.

Veamos sus ideas más importantes:

Plano Euclidiano Lugar geométrico representado por:

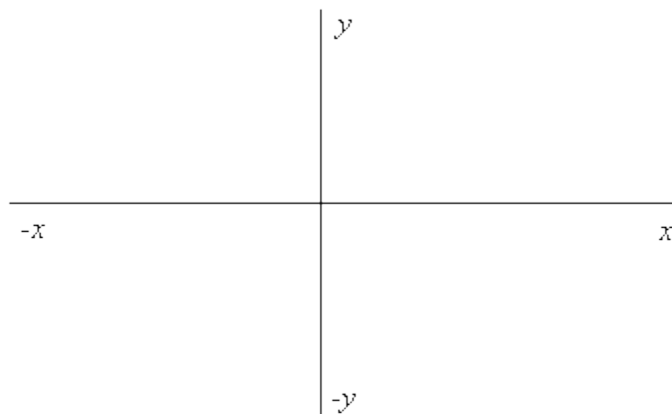


GRAFICO C.1

Variable que cambia, que varia, se denota por x

El cambio que se debe tener en cuenta es el siguiente

$$\Delta \equiv d$$

$$\Sigma \equiv \int$$

Delta: Δ es un símbolo usado para denotar una diferencia entre un valor final y un valor inicial, por ejemplo $\Delta x = x_F - x_I$

Diferencial: d es igual que el *delta* solo que es un delta súper pequeño, infinitamente pequeño, infinitesimal.

Sumatoria: Σ es un símbolo matemático usado para denotar suma, por ejemplo se usa para denotar la suma de todos los alumnos de un colegio o la cantidad de ladrillos con la que se ha construido una casa, etc.

Integral: $\int$ es un símbolo matemático usado para denotar suma (igual que Σ), solo que se usa por ejemplo para denotar la suma de la cantidad de átomos de oxígeno que hay en una habitación, o el número de gotas de agua que tiene un océano, etc.

Función Es una relación que existe entre los elementos (puntos) del conjunto x con los elementos (puntos) del conjunto y . Se usa el símbolo $y = f(x)$ para denotar una función.

Por ejemplo en el plano euclidiano positivo una función puede ser:

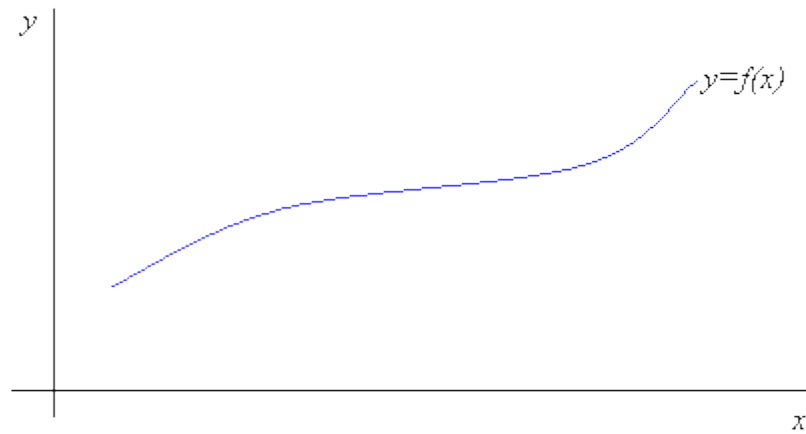


GRAFICO C.2

Si tomamos dos puntos en el eje x, a estos les corresponden otros puntos en el eje y:

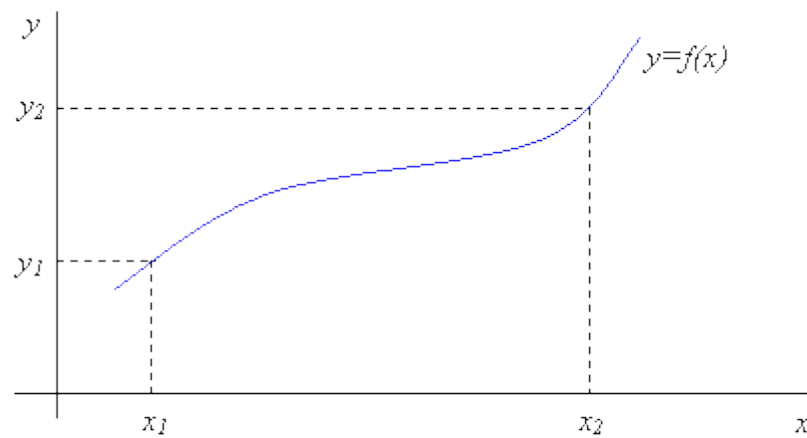


GRAFICO C.3

Sabemos que *Delta x* y *Delta y* se definen como: $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$

Estos *Deltas* pueden ser representados en el plano euclidiano:

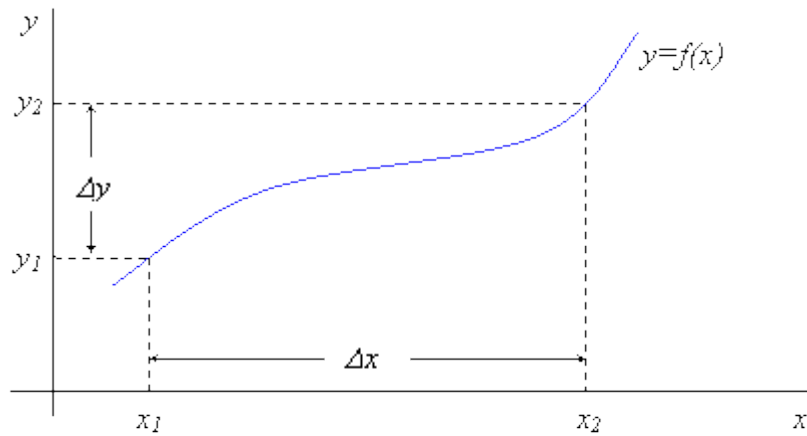


GRAFICO C.4

Razón Media Se define a la razón media como

$$\bar{v} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

que en Física es precisamente la *velocidad media*.

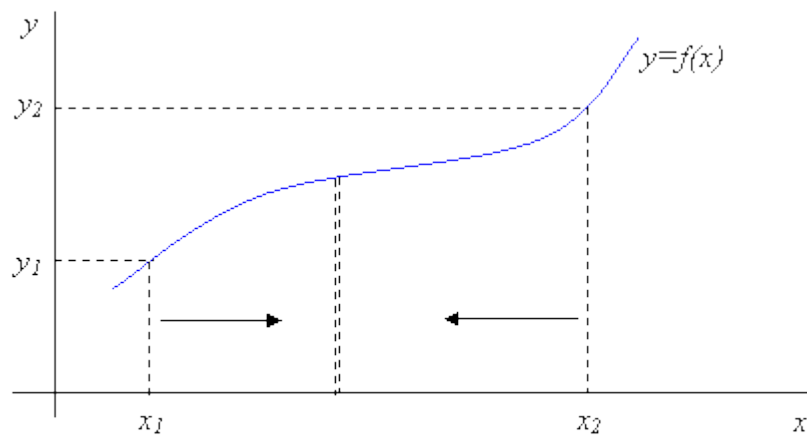
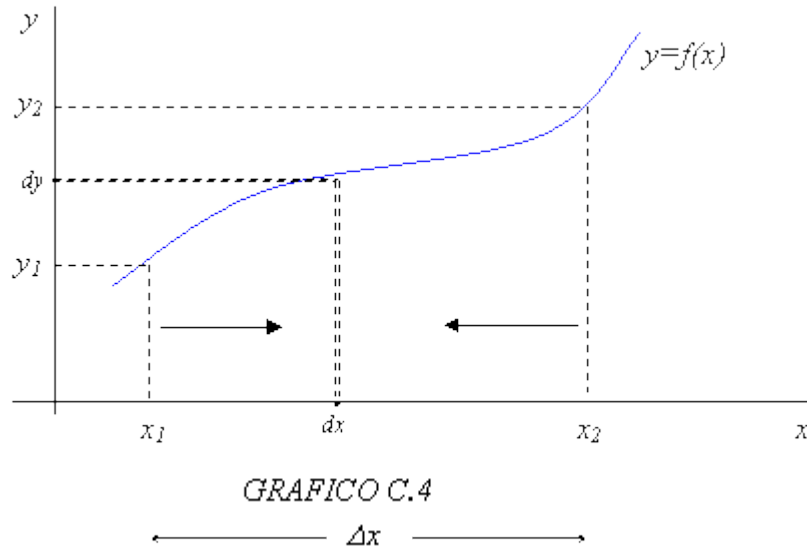


GRAFICO C.4

Límite Si hacemos que por ejemplo el Δx se haga muy pero muy pequeño, haciendo que cada línea horizontal se encuentre, pero sin tocarse:

Lo que obtenemos finalmente es un punto al que denotamos por dx . Evidentemente a este punto le corresponde el punto dy :



Ahora en notación lo que se ha realizado es un límite. El límite aplicado a la razón media o velocidad media

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{dy}{dx}$$

O sea d sigue siendo un Δ solo que muy pequeño. Y

$$\frac{dy}{dx} = v$$

Es conocida como la velocidad instantánea.

Y estas dos últimas ecuaciones definen lo que en cálculo se conoce como DERIVADA.

Viendo el *GRAFICO C.4* la Pregunta es: ¿Cuántos puntos dx existen entre x_1 y x_2 ?...

Muchos no? Y que pasa si los sumamos? Estas de acuerdo en que obtenemos Δx ? Claro! Por supuesto que si.

Lo que acabas de darte cuenta se conoce como el **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO**:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \Delta x = x_2 - x_1$$

Bueno...

Otras reglas útiles son (sin demostración, pero esperamos que te hayas motivado lo suficiente para que tú investigues más acerca de la Física y el cálculo diferencial):

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{n+1} \left(x_2^{n+1} - x_1^{n+1} \right)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} k f(x) dx = k \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

donde k es una constante.