

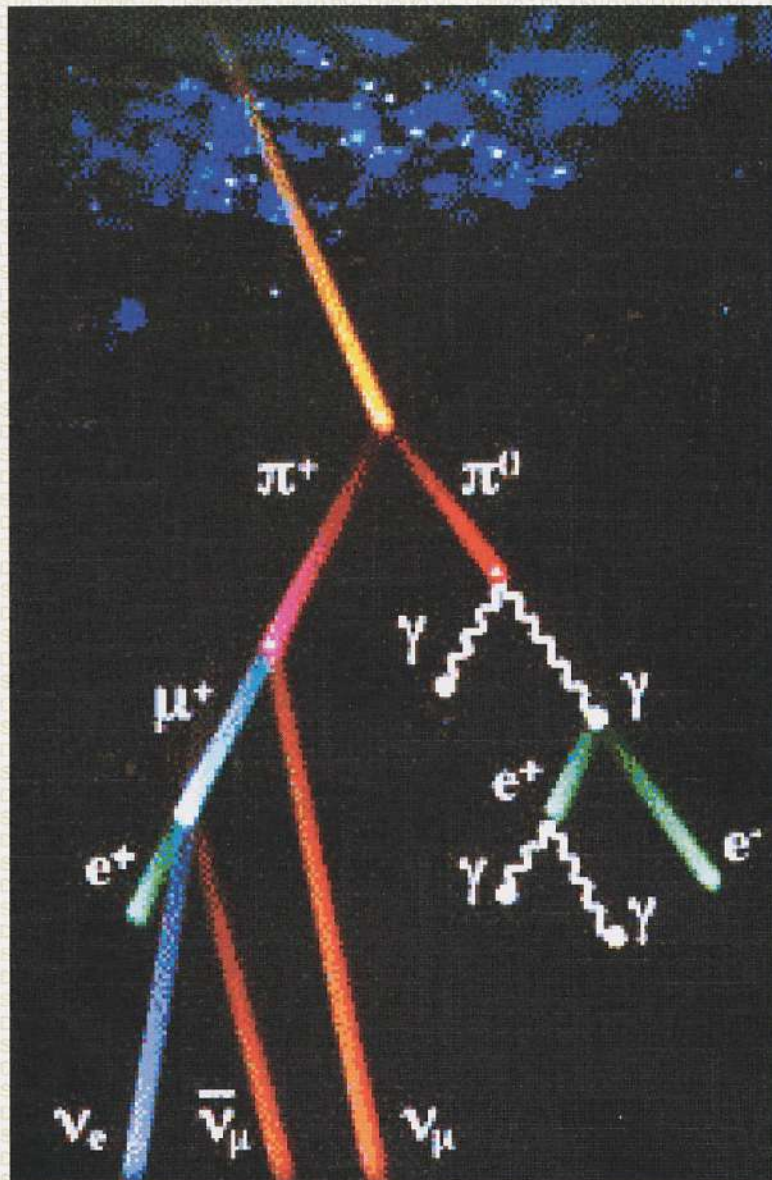
ISSN - 1562 - 3823

También indexada en PERIODICA

# REVISTA BOLIVIANA DE FISICA

NUMERO 10

OCTUBRE 2004 - LA PAZ - BOLIVIA



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FISICAS  
CARRERA DE FISICA - U.M.S.A.

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FISICA  
UNION IBEROAMERICANA DE SOCIEDADES DE FISICA

---

## REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

### COMITÉ EDITORIAL

<b>Sociedad Boliviana de Física</b>	<b>Instituto de Investigaciones Físicas</b>	<b>Carrera de Física</b>
<b>Dr. Eduardo Palenque Vidaurre</b> Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: ozono@mail.megalink.com Tel.: (591-2)2799155 Fax:(591-2)2792622	<b>Lic. Alfonso Velarde Chávez</b> Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: avelarde@fiumsa.edu.bo Tel.: (591-2)2792999 Fax:(591-2)2792622	<b>Lic. Deterlino Urzagasti</b> Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: urza@fiumsa.edu.bo Tel.: (591-2)2792999 Fax:(591-2)2792622

---

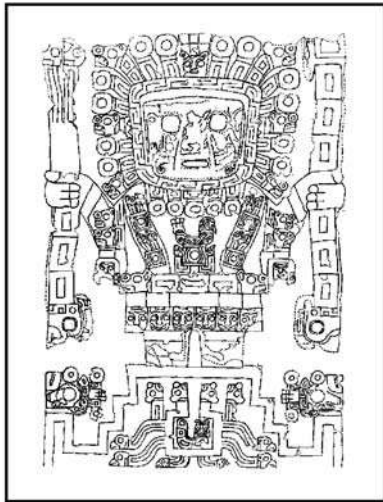
### CONSEJO EDITORIAL

<b>Dr. Ramiro de La Reza</b> Observatorio Nacional CNPq Rua General Bruce 586 20921-400 Rio de Janeiro-Brasil e-mail: delareza@danp6.on.br	<b>Dr. Paulo Murilo Castro de Oliveira</b> Instituto de Física Universidade Federal Fluminense C.P. 1002966, Niteroi, RJ-Brasil e-mail: pmco@regulus.if.uff.br
<b>Dr. Juan C. Muzzio</b> Facultad de Ciencias Astrnómicas y Geofísicas Universidad Nacional de La Plata La Plata-Argentina e-mail: jmuzzio@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar	<b>Dr. Carlos Navia</b> Instituto de Física Universidade Federal Fluminense Av. Gen. Milton Tavares de Souza 24210-340, Niteroi, RJ-Brasil e-mail: gfcnoj@portela.if.uff.br
<b>Dr. Oscar Antonio Rondón</b> Institute of Nuclear and Particle Physics University of Virginia McCormick Road, Charlottesville, VA 22901 804 924-6787, USA e-mail: or@virginia.edu	<b>Dr. Oscar Saavedra</b> Dipartimento di Fisica Generale Universita di Torino, Italia e-mail: saavedra@to.infn.it
<b>Dr. Edison H. Shibuya</b> Instituto de Fisica Gleb Wataghin Universidade Estadual de Campinas C.P. 6165, 13.083-970 Campinas, SP-Brasil e-mail: shibuya@ifi.unicamp.br	<b>Dr. Guillermo G. Cabrera</b> Instituto de Fisica Gleb Wataghin Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP e-mail: cabrera@ifi.unicamp.br
<b>Dr. Piero Galeotti</b> Dipartimento di Fisica Generale Universita di Torino, Italia e-mail: galeotti@to.infn.it	<b>Dr. Hector Vucetich</b> Departamento de Física Fac. de Ciencias Exactas - Univ. Nac. de La Plata. C.C. N 67 - 1900 La Plata - Argentina e-mail: vucetich@venus.fisica.unlp.edu.ar, vucetich@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar
<b>Dr. Marco Billó</b> Dept. of Theoretical Physics University of Turin e-mail: billo@to.infn.it	<b>Dr. Newton Figueiredo</b> Universidade Federal de Itajubá C.P.50-CEP:37500-903, Itajubá-MG-Brasil e-mail: newton@efei.br
<b>Dr. Diego García Lambas</b> IATE - OAC Laprida 854, 5000-Córdoba-Argentina e-mail: dgl@mail.oac.uncor.edu	<b>Dr. Thyrso Villela</b> INPE, C.P. 515 12201-970 SJ dos Campos, SP-Brasil e-mail: villela@gemini.das2.inpe.br

---

ISSN 1562-3823

También indexada en PERIODICA



# Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS  
CARRERA DE FÍSICA  
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS  
Y  
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 10  
OCTUBRE DE 2004

## **Revista Boliviana de Física**

**ISSN 1562-3823**

**También indexada en PERIODICA**

<http://biblioweb.dgsca.unam.mx/latindex>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.  
Casilla 8635, La Paz, Bolivia

*Editores:* Alfonso Velarde Ch., Eduardo Palenque V. y Deterlino Urzagasti.

*Dirección:* Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.  
Tel: (591 2)2792999; FAX: (591 2)2792622.

*Portada:* Cascada de rayos cósmicos.

IMPRESO EN BOLIVIA - PRINTED IN BOLIVIA

## CONTENIDO

### A. ARTÍCULOS

ESTUDIO DE LA SINCRONIZACIÓN EN UN SISTEMA DE DOS OSCILADORES IDÉNTICOS CONTROLADOS POR LUZ <i>G.M. Ramírez Ávila, J.L. Guisset, J.L. Deneubourg</i>	1
LA ENERGÍA LIBRE EN LA REGIÓN METAESTABLE (Versión en inglés aceptada en el <i>Journal of Chemical Physics</i> .) <i>Armando Ticona Bustillos, D. W. Heermann, C. E. Cordeiro</i>	8
RADIACIÓN GRAVITACIONAL DURANTE EL PROCESO DE COLISIÓN EN UN SISTEMA BINARIO <i>J.A.C. Nogales, V. Subieta</i>	15
EXTENSIÓN DEL ESQUEMA DE INTEGRADORES SIMPLÉCTICOS EN EL MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL <i>Diego Sanjinés C.</i>	20
LA RADIACIÓN ULTRAVIOLETA B DIFUSA MEDICIONES EN COTA COTA, LA PAZ (3420 msnm) <i>R. Torrez</i>	24
DETERMINACIÓN DEL ESPESOR ÓPTICO DE LA ATMÓSFERA EN LA CIUDAD DE LA PAZ <i>R. Torrez, E. Palenque</i>	27
UN EVENTO DE TIPO HALO DETECTADO CON CÁMARA DE EMULSIONES Y ARREGLO PARA CHUBASCOS EN EL MONTE CHACALTAYA <i>H. Aoki, K. Hashimoto, K. Honda, N. Inoue, N. Kawasumi, N. Martinic, C. Navia, N. Ochi, N. Ohmori, A. Ohsawa, L.C.Oliveira, K.Shinozaki, M.Tamada, R.Ticona, I.Tsushima</i>	31

### B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

REACCIONES DE BELOUSOV-ZHABOTINSKY Y SU COMPROBACIÓN EXPERIMENTAL <i>Oporto S.A., Ramírez G.M.</i>	45
EL TIEMPO A TRAVÉS DEL TIEMPO <i>Aramayo A.</i>	50
DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN SIMULADOR DE MICROCOMPUTADOR EN UNA PLATAFORMA NO CONVENCIONAL <i>J. A. León Cano</i>	57

## CONTENIDO

### C. MEMORIAS DE LA REUNIÓN ANUAL DE LA SOBOFI U OTRAS REUNIONES DE FÍSICA

PRIMER CURSO DE RAYOS CÓSMICOS Y ASTROFÍSICA <i>Ticona R., Velarde A., Ticona Bustillos A.</i>	61
---	----

### D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS: UNA DEDUCCIÓN ALTERNATIVA (The Method of the Least Squares: An Alternative De- duction) <i>Wilton P. Silva et. al.</i>	63
---	----

9 <sup>NA</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA <i>Bustos R., Velarde A., Paz J., Guaygua T., Jemio C., Mamani N., Choqueticlla T.</i>	71
---	----

# ESTUDIO DE LA SINCRONIZACIÓN EN UN SISTEMA DE DOS OSCILADORES IDÉNTICOS CONTROLADOS POR LUZ

G.M. Ramírez Ávila<sup>(I),(II)1</sup>, J.L. Guisset<sup>(I)</sup>, J.L. Deneubourg<sup>(I)</sup>

<sup>(I)</sup>Center for Nonlinear Phenomena and Complex Systems  
Université Libre de Bruxelles  
Campus Plaine CP231, 1050  
Brussels, Belgium

<sup>(II)</sup>Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
Casilla 8635  
La Paz, Bolivia

## RESUMEN

El análisis de un sistema de dos osciladores controlados por luz (LCOs) es realizado. Se comparan dos modelos diferentes y se demuestra que en el modelo más próximo al montaje experimental se encuentran resultados que están estrechamente relacionados con las medidas efectuadas experimentalmente. Se muestra analíticamente que el sistema de dos LCOs idénticos siempre sincroniza ya sea en fase o en antifase.

## 1. INTRODUCCIÓN

La sincronización, que puede ser entendida como el ajuste de ritmos entre dos o más osciladores debido a sus interacciones [1], es un fenómeno omnipresente tanto en sistemas naturales como artificiales y es un típico ejemplo de auto-organización. Este fenómeno descrito por primera vez por el científico holandés Christian Huygens en 1673 [2], quien observó sincronización en dos péndulos acoplados, permaneció durante más de dos siglos sin ser estudiado seriamente y es sólo en los años 20 del siglo pasado en que los trabajos de Eccles, Vincent [3], Appleton [4] y van der Pol [5], que observaron sincronización en generadores eléctricos, impulsaron a los científicos de la época a estudiar este fenómeno con mayor profundidad; principalmente por los que luego constituyeron la “escuela soviética”, entre los que destacan Blekhman [6], Arnol’d [7], Shilnikov, Afraimovich [8], Pikovsky [9], etc. quienes estudiaron tanto experimental como teóricamente la sincronización en diversos sistemas. El estudio de este fenómeno cobra popularidad hace aproximadamente 20 años, tiempo en el cual se produjeron diversidad de artículos y libros que tratan de una u otra manera sobre la sincronización en sistemas que van desde los biológicos (luciérnagas, grillos, cigarras, hormigas, sistemas ecológicos, diferentes comportamientos en poblaciones humanas, células cardíacas, neuronas, etc.) pasando por sistemas químicos (por ej. reacciones de Belousov–Zhabotinsky, osciladores bioquímicos) y llegando a sistemas artificiales como láseres, circuitos electrónicos, etc. En el presente artículo, primeramente presentamos en §2 el sistema de nuestro interés y los correspondientes modelos para su descripción. En §3, analiza-

mos los modelos propuestos y comparamos los resultados analíticos con las soluciones numéricas. Finalmente, en §4 damos a conocer las perspectivas de nuestra investigación actual.

## 2. DESCRIPCIÓN DE UN LCO Y MODELOS PARA SU COMPORTAMIENTO

Básicamente, un LCO es un oscilador de relajación en el sentido que posee dos escalas de tiempo caracterizadas por la variable de estado  $\epsilon(t)$ , una correspondiente al movimiento rápido que en el caso de nuestro LCO está asociada con el proceso de carga en la que  $\epsilon(t) = 1$  y la otra de movimiento lento, relacionada con la descarga del LCO y con  $\epsilon(t) = 0$ . Un LCO es un excelente ejemplo de oscilador de “integración y disparo” que son ampliamente utilizados para describir sistemas tales como poblaciones de luciérnagas, neuronas y células cardíacas. Un LCO funciona con una fuente de voltaje  $V_M$  (en general una batería común de 9 V) y está constituido por un chip temporizador LM555, el cual, funcionando en su configuración astable hace que se establezcan dos umbrales, uno superior en el que la carga se interrumpe cuando la señal alcanza  $2V_M/3$  pasando a su estado de descarga hasta alcanzar el umbral inferior  $V_M/3$  después de lo cual se repite el proceso de carga. Los otros constituyentes de un LCO son dos circuitos RC que determinan los procesos de carga, caracterizado por la constante de tiempo  $1/\lambda = (R_\lambda + R_\gamma)C$ , y descarga con constante de tiempo  $1/\gamma = R_\gamma C$ ; finalmente los fotodiodos que emiten un haz luminoso infrarrojo y los fotosensores, estos componentes optoelectrónicos permiten el acoplamiento de los LCOs. La construcción de los LCOs se describe en detalle en [10][11] donde además se describen las observaciones experimentales de enganche de fase y sincronización en diferentes configuraciones.

<sup>1</sup>Agradece el apoyo de la Cooperación Técnica Belga (CTB) y a la Fundación Universitaria David y Alice Van Buuren por el premio académico otorgado.

A continuación se presentan dos modelos que pueden ser adaptados para la descripción de los LCOs en interacción. Primeramente describiremos un modelo lineal<sup>2</sup> muy simple:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \Lambda_i \epsilon_i(t) - \Gamma_i [1 - \epsilon_i(t)] + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)] \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

donde  $\Lambda_i$  y  $\Gamma_i$  están relacionadas con las constantes de tiempo  $\lambda_i$  y  $\gamma_i$  mediante  $\Lambda_i = V_{Mi} \lambda_i / 3 \ln 2$  y  $\Gamma_i = V_{Mi} \gamma_i / 3 \ln 2$ . Posteriormente, analizaremos el modelo no lineal que tiene la forma:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = \lambda_i [V_{Mi} - V_i(t)] \epsilon_i(t) - \gamma_i V_i(t) [1 - \epsilon_i(t)] + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \delta_{ij} [1 - \epsilon_j(t)] \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2)$$

en ambos modelos, el acoplamiento entre LCOs está caracterizado por la variable  $\beta_{ij}$  que indica la intensidad del acoplamiento que el LCO<sub>j</sub> ejerce sobre el LCO<sub>i</sub> que a su vez está ligada a la intensidad luminosa recibida por los fotosensores del LCO<sub>i</sub> debido al haz luminoso que emana del LCO<sub>j</sub>, y por ende a la distancia entre los mencionados LCOs. Debemos señalar que para que los LCOs estén acoplados, el haz IR emitido por los fotodiodos de un LCO debe ser captado por los fotosensores de otro(s) LCO(s) lo que no siempre es el caso, para este fin, introducimos la variable  $\delta_{ij}$  para indicar si puede o no haber un acoplamiento efectivo entre los LCOs;  $\delta_{ij} = 1$  si los LCOs pueden interactuar y  $\delta_{ij} = 0$  en cualquier otro caso.

### 3. ANÁLISIS DE LOS MODELOS

Los modelos propuestos en §2 tienen la particularidad de considerar que la descarga de los LCOs es finita, es decir, no es instantánea como consideran los modelos clásicos de osciladores de “integración y disparo” [12]. En otras palabras, los modelos basados en los LCOs son más realistas.

#### 3.1. Modelo Lineal

Este tipo de modelos fueron privilegiados por científicos que estudiaban la sincronización en ciertas especies de luciérnagas como por ejemplo, *Pteroptyx cribrellata* [13]. En este artículo, estamos interesados en el estudio del caso más simple en el que nuestro sistema está compuesto por dos LCOs idénticos mutuamente acoplados. En este caso,  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ . Consideraremos igualmente que el factor de acoplamiento es simétrico, es decir,  $\beta_{12} = \beta_{21} = \beta$  y dado que los LCOs tienen un acoplamiento mutuo,  $\delta_{12} = \delta_{21} = 1$ , con lo que

(1) toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \Lambda \epsilon_1(t) - \Gamma [1 - \epsilon_1(t)] + \beta [1 - \epsilon_2(t)] \\ \frac{dV_2(t)}{dt} &= \Lambda \epsilon_2(t) - \Gamma [1 - \epsilon_2(t)] + \beta [1 - \epsilon_1(t)]. \end{aligned} \quad (3)$$

La evolución de cada uno de los LCOs con condiciones iniciales  $V_{01}$  y  $V_{02}$  está representada en la Fig. 1(a). Los instantes de “iluminación” y “apagado” están denotados por  $t_F$  y  $t_E$  respectivamente. Considerando (3) para la

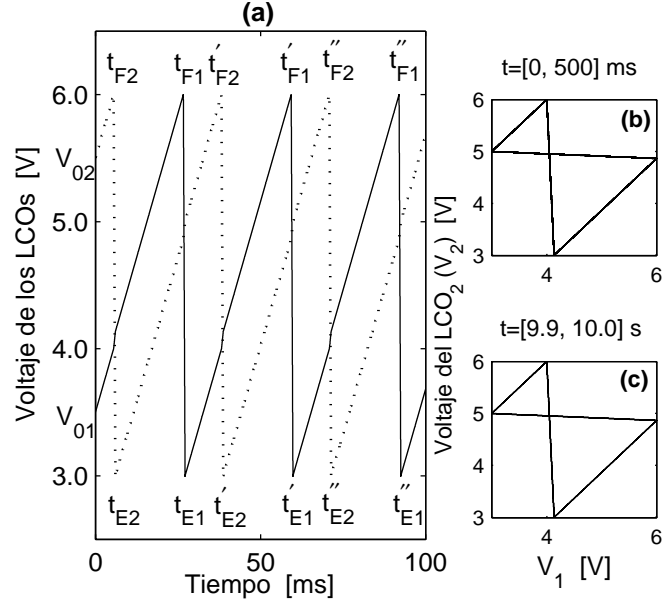


Figura 1. (a) Evolución de las señales de dos LCOs idénticos acoplados. Trayectorias en el espacio de fase para los tiempos (b) [0, 500] ms. (c) [9.9, 10.0] s.

situación mostrada en la Fig. 1, es decir, con  $V_{02} > V_{01}$ , podemos analizar cada región y resolver las ecuaciones para cada LCO con el fin de hallar los respectivos instantes de “iluminación” y “apagado”:

- Para la primera carga del LCO<sub>2</sub>, tenemos  $dV_2/dt = \Lambda$ . Dado que la integración se realiza entre la condición inicial  $V_{02}$  y el umbral superior  $2V_M/3$  correspondientes a  $t = 0$  y  $t = t_{F2}$  respectivamente, la solución nos conduce a:

$$t_{F2} = \frac{1}{\Lambda} \left( \frac{2V_M}{3} - V_{02} \right).$$

- La ec. que describe la primera descarga del LCO<sub>2</sub> es  $dV_2/dt = -\Gamma$  que integrando entre  $2V_M/3$  y el umbral inferior  $V_M/3$ , límites que corresponden a los tiempos  $t_{F2}$  y  $t_{E2}$ , nos permite hallar:

$$t_{E2} = \frac{V_M}{3\Gamma} + t_{F2}$$

- La ecs. de carga para el LCO<sub>1</sub> son:  $dV_1/dt = \Lambda$  para la región comprendida entre  $t = 0$  y  $t_{F2}$ ,  $dV_1/dt = \Lambda + \beta$  en la región donde el LCO<sub>2</sub> actúa

<sup>2</sup>Las denominaciones lineal y no lineal están referidas a la forma de las señales que resultan de la solución del sistema de ecs. diferenciales.

sobre el LCO<sub>1</sub>, es decir, entre  $t_{F2}$  y  $t_{E2}$  y luego nuevamente  $dV_1/dt = \Lambda$  para la región comprendida entre  $t_{E2}$  y  $t_{F1}$ , momento en el que el LCO<sub>1</sub> alcanza  $2V_M/3$ . Resolviendo en conjunto estas ecs. se encuentra que:

$$t_{F1} = \frac{1}{\Lambda} \left[ \frac{2V_M}{3} - V_{01} - \beta(t_{E2} - t_{F2}) \right].$$

- Procediendo de la misma manera en la que se analizó la descarga en el LCO<sub>2</sub>, hallamos:

$$t_{E1} = \frac{V_M}{3\Gamma} + t_{F1}.$$

- El segundo proceso de carga del LCO<sub>2</sub> está descrito por tres ecs. correspondientes a cada una de las regiones mostradas en la Fig. 1, a saber:  $dV_2/dt = \Lambda$  para la región comprendida entre  $t_{E2}$  y  $t_{F1}$ ,  $dV_2/dt = \Lambda + \beta$  en la región donde el LCO<sub>1</sub> actúa sobre el LCO<sub>2</sub>, es decir, entre  $t_{F1}$  y  $t_{E1}$  y luego nuevamente  $dV_2/dt = \Lambda$  para la región comprendida entre  $t_{E1}$  y  $t'_{F1}$ , momento en el cual el LCO<sub>2</sub> alcanza el umbral superior. La integración de estas ecs. nos permite hallar:

$$t'_{F2} = \frac{1}{\Lambda} \left[ \frac{V_M}{3} + \Lambda t_{E2} - \beta(t_{E1} - t_{F1}) \right].$$

- Analizando la segunda descarga del LCO<sub>1</sub> se encuentra:

$$t'_{E2} = \frac{V_M}{3\Gamma} + t'_{F2}.$$

- De manera similar a como se procedió en los puntos precedentes, se encuentra que el LCO<sub>1</sub> alcanza por segunda vez el umbral superior en:

$$t'_{F1} = \frac{1}{\Lambda} \left[ \frac{V_M}{3} + \Lambda t_{E1} - \beta(t'_{E2} - t'_{F2}) \right].$$

Con las expresiones anteriores, podemos calcular la diferencia de fases entre los LCOs que son proporcionales a las diferencias de tiempo en el que los mismos alcanzan el umbral superior, es decir,  $\Delta t_{12} = t_{F1} - t_{F2}$  y  $\Delta t'_{12} = t'_{F1} - t'_{F2}$ . Estas diferencias de tiempo dan:

$$\Delta t_{12} = \Delta t'_{12} = \frac{3\Gamma(V_{02} - V_{01}) - \beta V_M}{3\Lambda\Gamma}. \quad (4)$$

Este resultado nos indica que la diferencia de fases entre los LCOs no cambia en el tiempo, situación que puede ser observada claramente si representamos las trayectorias en el espacio de fases para diferentes tiempos (Fig. 1(b)–(c)) que muestran un carácter estacionario. Lo anterior significa que si los LCOs empiezan en condiciones iniciales tales que no se encienden al mismo tiempo, este modelo indica que los LCOs no llegarán nunca a emitir luz al mismo tiempo, lo cual está en contradicción con los resultados experimentales obtenidos con los LCOs [11] o con otro tipo de osciladores de relajación. Evidentemente, la única forma de que los LCOs emitan luz casi simultáneamente es que las impulsiones cortas estén enganchadas desde el principio, situación que es trivial.

### 3.2. Modelo No Lineal

Este tipo de modelos empezaron a utilizarse ya desde 1928 por van der Pol [14] con el objeto de hacer analogías entre osciladores eléctricos y células cardíacas. En 1975, este tipo de modelo adquiere bastante popularidad con el trabajo de Peskin [15] y en 1990, una refinación del modelo de Peskin realizada por Mirollo y Strogatz [12] hace que los modelos de “integración y disparo” se conviertan en un paradigma en el estudio de osciladores de relajación. En nuestro caso, el modelo no lineal que proponemos y que está en estrecha relación con los aspectos experimentales de los LCOs está dado por (2) que para el caso de dos LCOs idénticos toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \lambda(V_M - V_1)\epsilon_1(t) - \gamma V_1[1 - \epsilon_1(t)] + \beta[1 - \epsilon_2(t)] \\ \frac{dV_2}{dt} &= \lambda(V_M - V_2)\epsilon_2(t) - \gamma V_2[1 - \epsilon_2(t)] + \beta[1 - \epsilon_1(t)], \end{aligned} \quad (5)$$

donde está claro que  $V_1$  y  $V_2$  son dependientes del tiempo. Para el análisis de este modelo, vamos a hacer ciertas simplificaciones con el fin de poder resolver el sistema. La primera de ellas es considerar que la descarga de los LCOs permanece constante, es decir, igual a  $t_\gamma = \ln 2/\gamma$  y la segunda es que para el proceso de carga y cuando uno de los LCOs es afectado por la luz del otro, asumiremos que el acoplamiento es suficientemente mayor en valor absoluto que la constante de tiempo asociada a la carga de una forma tal que sea posible hacer simplificaciones. Así, si consideramos una situación análoga a la Fig. 1, pero con el modelo no lineal (Fig. 2(a)), tendremos que, por ejemplo, la solución de la carga del LCO<sub>1</sub> cuando el mismo está influenciado por el LCO<sub>2</sub> será:

$$V_1(t) = V_1(t_{F2})e^{-\lambda(t-t_{F2})} + \left( V_M + \frac{\beta}{\lambda} \right) \left( 1 - e^{-\lambda(t-t_{F2})} \right), \quad (6)$$

donde  $t_{F2}$  es el instante en el que el LCO<sub>2</sub> comienza a actuar sobre el LCO<sub>1</sub> y  $V_1(t_{F2})$  es el voltaje del LCO<sub>1</sub> al tiempo  $t_{F2}$ . Si aplicamos ahora la simplificación antes mencionada:  $|\beta| > |\lambda|$  y el hecho de que el tiempo en el cual toma lugar la acción de un LCO sobre el otro es muy pequeño, que nos permite hacer la aproximación:  $e^{-\lambda(t-t_{F2})} \approx 1 - \lambda(t-t_{F2})$ . Estas dos simplificaciones finalmente nos conducen a que (6) tome la forma:  $V_1(t) = V_1(t_{F2}) + \beta(t-t_{F2})$  que no está muy alejada de los resultados que se obtienen mediante integración numérica. En lo que sigue, utilizaremos este resultado para el análisis de dos LCOs idénticos. En la Fig. 2(a) se muestra la evolución de las señales de los LCOs utilizando el modelo no lineal y con la particularidad de que los pulsos luminosos están casi superpuestos. Resolviendo analíticamente las ecs. correspondientes, podemos escribir las expresiones para las diferencias de tiempo entre los primeros disparos de los LCOs:

$$\begin{aligned} \Delta t_{12} &= t_{F1} - t_{F2} = \frac{V_M}{3\beta} \frac{V_{02} - V_{01}}{V_M - V_{02}}, \\ \Delta t'_{12} &= t'_{F1} - t'_{F2} = \frac{V_M}{3\beta} \frac{V_{02} - V_{01}}{2V_M - 3V_{02} + V_{01}}. \end{aligned}$$

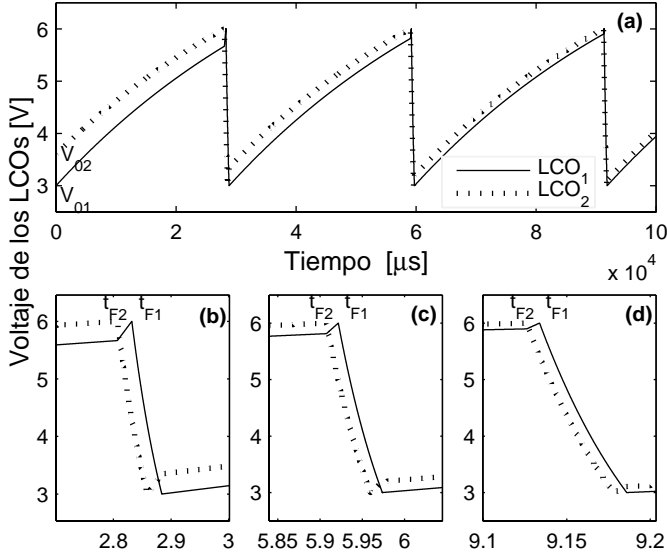


Figura 2. (a) Evolución de las señales de dos LCOs idénticos acoplados cuyos pulsos luminosos se encuentran casi superpuestos. (b)–(d) Vista ampliada de las señales para los tres “disparos”.

Si continuamos el cálculo, llegamos a la expresión para la  $(n + 1)$ ava diferencia de tiempos de disparo:

$$\Delta t_{12}^{(n)} = \frac{V_M}{3\beta} \left[ \frac{V_{02} - V_{01}}{2^{n-1}V_M - (2^n - 1)V_{02} + (2^{n-1} - 1)V_{01}} \right] < t_\gamma. \quad (7)$$

Como habíamos señalado anteriormente, la diferencia de tiempo entre los “disparos” y la diferencia de fase de los LCOs están directamente relacionadas, siendo su expresión:

$$\Delta\phi_{12} = \frac{2\pi}{T}(t_{F1} - t_{F2})$$

Si aplicamos el límite cuando  $n$  tiende a infinito en la diferencia de fases correspondiente a (7), observamos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} \Delta\phi_{12}^{(n)} = 0, \quad (8)$$

lo que indica que la tendencia es hacia la sincronización con diferencia de fase nula.

Ahora, si consideramos la situación mostrada en la Fig. 4(a), podemos resolver las ecs. correspondientes a cada uno de los LCOs y con ellas determinar los tiempos de inicio y fin de los disparos, lo que nos llevará a poder calcular las diferencias de fase entre los LCOs. De inicio no sabemos la tendencia de las diferencias de fase en este caso, es decir,  $\Delta\phi_{12} \gtrless \Delta\phi'_{12}$ . Procediendo al cálculo, tenemos que las soluciones para el primer proceso de carga y descarga del LCO<sub>2</sub> son:

$$V_2 = V_{02}e^{-\lambda t} + V_M(1 - e^{-\lambda t}) \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{2}{3}V_M e^{-\gamma(t - t_{F2})}. \quad (9)$$

Mientras que para la primera carga del LCO<sub>1</sub>, la solución es:

$$V_1 = [V_M(1 - e^{-\lambda t_{F2}}) + V_{01}e^{-\lambda t_{F2}} + \beta(t_{E2} - t_{F2})]e^{-\lambda(t - t_{E2})} + V_M(1 - e^{-\lambda(t - t_{E2})}). \quad (10)$$

Con estas expresiones, hallamos que los tiempos de inicio y fin de los disparos para cada uno de los LCOs están dados por:

$$\begin{aligned} t_{F2} &= -\frac{1}{\lambda} \ln \left[ \frac{V_M}{3(V_M - V_{02})} \right], & t_{E2} &= \frac{\ln 2}{\gamma} + t_{F2}, \\ t_{F1} &= -\frac{1}{\lambda} \ln \left[ \frac{\frac{V_M}{3}}{(V_M - V_{01})e^{-\lambda t_{F2}} - \beta(t_{E2} - t_{F2})} \right] + t_{E2}, \\ t_{E1} &= \frac{\ln 2}{\gamma} + t_{F1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Continuando con el proceso, se encuentran las expresiones generales:

$$\begin{aligned} t_{F2}^{(n)} &= \frac{1}{\lambda} \ln \left[ 2e^{-\lambda(t_{F1}^{(n-1)} - t_{E2}^{(n-1)})} - \frac{3x}{V_M} \right] + t_{E1}^{(n-1)}, \\ t_{E2}^{(n)} &= \frac{\ln 2}{\gamma} + t_{F2}^{(n)}, \\ t_{F1}^{(n)} &= \frac{1}{\lambda} \ln \left[ 2e^{-\lambda(t_{F2}^{(n)} - t_{E1}^{(n-1)})} - \frac{3x}{V_M} \right] + t_{E2}^{(n)}, \\ t_{E1}^{(n)} &= \frac{\ln 2}{\gamma} + t_{F1}^{(n)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Utilizando (12), se pueden calcular las diferencias de fase y dado que  $\Delta\phi_{12} \gtrless \Delta\phi'_{12}$ , se obtiene la desigualdad:

$$(V_{02} - y^+)(V_{02} - y^-) \gtrless 0, \quad (13)$$

donde

$$y^\pm = V_M + \frac{3x}{4V_M}(V_M - V_{01}) \left[ 1 \pm \sqrt{1 + 2 \left( \frac{2V_M}{3x} \right)^2} \right]. \quad (14)$$

Los anteriores resultados se hallaron considerando que  $V_{02} > V_{01}$ . Si repetimos el mismo procedimiento pero con  $V_{01} > V_{02}$ , llegamos a:

$$(V_{02} - z^+)(V_{02} - z^-) \gtrless 0, \quad (15)$$

siendo

$$z^\pm = V_M - \frac{3x}{2V_M}(V_M - V_{01}) \left[ 1 \pm \sqrt{1 + 2 \left( \frac{2V_M}{3x} \right)^2} \right]. \quad (16)$$

El caso más simple para la solución de (13) y (15) es considerar sólo el signo igual de estas desigualdades, es decir,  $(V_{02} - y^+)(V_{02} - y^-) = 0$ , situación que implica que la diferencia de fases permanece constante. Las soluciones están representadas en la Fig. 3(a) donde podemos ver claramente que las únicas soluciones admisibles son  $y^-$  y  $z^+$  y que además las mismas deben estar comprendidas sólo en el intervalo [3.0, 6.0] V puesto que  $V_M = 9.0$  V. Trabajando con las soluciones admisibles, podemos escribir una solución general, en la cual elegimos un “LCO de referencia” cuya condición inicial será dada por  $V_{0\text{ref}}$  y por tanto la condición inicial de anti-sincronización  $V_0$

estará en función de  $V_{0\text{ref}}$ :

$$V_0^\pm = \begin{cases} V_M - \frac{3x}{2V_M}(V_M - V_{0\text{ref}}) \left[ 1 + \sqrt{1 + 2 \left( \frac{2V_M}{3x} \right)^2} \right] \\ \text{si } V_0 < V_{0\text{ref}}, \\ \\ V_M + \frac{3x}{4V_M}(V_M - V_{0\text{ref}}) \left[ 1 - \sqrt{1 + 2 \left( \frac{2V_M}{3x} \right)^2} \right] \\ \text{si } V_0 > V_{0\text{ref}}. \end{cases} \quad (17)$$

Para aclarar aún mas el significado de (17), debemos

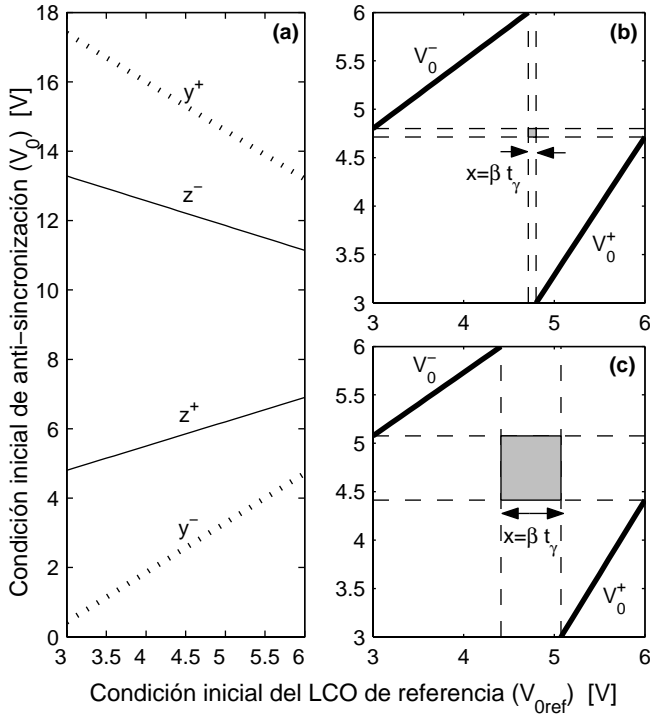


Figura 3. (a) Soluciones considerando el caso de anti-sincronización. Criterio de sincronización para diferentes valores de acoplamiento (b)  $\beta = 166$  y (c)  $\beta = 1270.9$ .

señalar que debido al hecho de considerar que la diferencia de fase es estacionaria,  $\Delta\phi_{12} = \Delta\phi'_{12}$ , (13) y (15) nos conducen a ecuaciones cuadráticas cuyas soluciones están dadas por (14) y (16) respectivamente y por lo tanto, en (17), la solución admisible  $z^+$  está relacionada con  $V_0^+$  cuando  $V_0 < V_{0\text{ref}}$  mientras que la solución  $y^-$  está relacionada con  $V_0^-$  cuando  $V_0 > V_{0\text{ref}}$ ; estas soluciones están representadas en la Fig. 3(b)–(c), en donde además se muestran las áreas (en gris) para diferentes valores de acoplamiento. Estas áreas indican que si las condiciones iniciales están dentro de las mismas, el sistema sincronizará siempre en fase y la anti-sincronización no será posible; las cuales a su vez están determinadas por la intersección de las rectas que parten de los extremos de cada solución, por lo que su expresión puede ser calculada reemplazando  $V_0^- = 2V_M/3$  y  $V_0^+ = V_M/3$  en

(17), permitiéndonos encontrar las abscisas:

$$V_{0\text{ref}}^- = V_M + \frac{4V_M^2}{9x \left( 1 - \sqrt{1 + 2 \left( \frac{2V_M}{3x} \right)^2} \right)}; \\ V_{0\text{ref}}^+ = V_M - \frac{4V_M^2}{9x \left( 1 + \sqrt{1 + 2 \left( \frac{2V_M}{3x} \right)^2} \right)}. \quad (18)$$

Por lo que, el lado del cuadrado que representa esta área es

$$x = V_{0\text{ref}}^+ - V_{0\text{ref}}^- = \beta t_\gamma, \quad (19)$$

que se muestra en la Fig. 3(b)–(c). Es evidente que si  $\beta \rightarrow 0$ , el área tenderá a cero también hasta colapsar en un punto significando que si queremos que los dos LCOs idénticos sincronicen en fase, las condiciones iniciales de los mismos deberán ser idénticas. En la Fig. 4(a) se

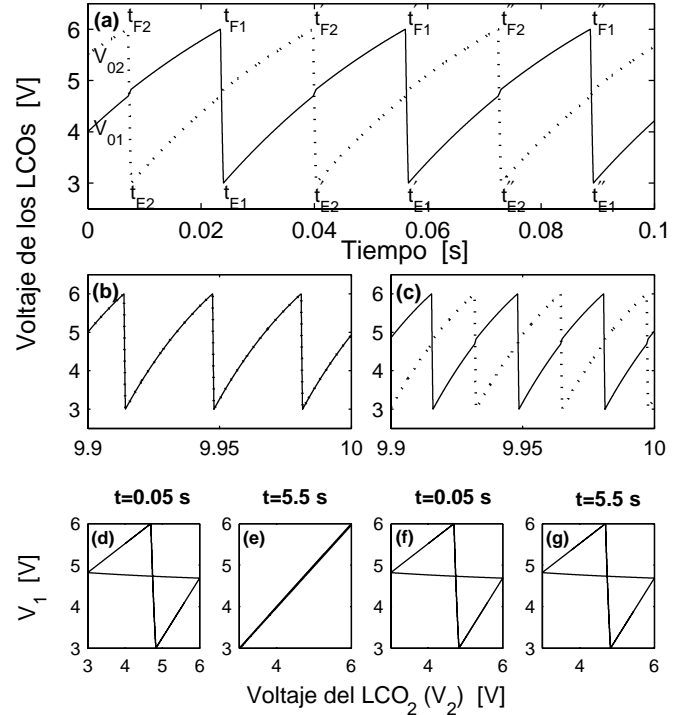


Figura 4. (a) Evolución de las señales de dos LCOs utilizando el modelo no lineal. Posibles comportamientos ulteriores en función de las condiciones iniciales del LCO<sub>2</sub>, sabiendo que  $V_{01} = 4.0$  V y  $\beta = 166$ . (b)  $V_{02} = 5.5178$  V (sincronización en fase) y (c)  $V_{02} = 5.5181$  V (anti-sincronización). Trayectorias en el espacio de fases a diferentes tiempos, (d)–(e) caso síncrono y (f)–(g) caso anti-síncrono.

muestra la evolución de las señales de dos LCOs idénticos acoplados, utilizando el modelo no lineal. Dependiendo de las condiciones iniciales, el sistema puede tender a la sincronización en fase (Fig. 4(b)) o permanecer en un estado estacionario de anti-sincronización (Fig. 4(c)). Las trayectorias en el espacio de fases muestran con claridad que en el caso síncrono, el sistema alcanza un ciclo límite (Fig. 4(e)) que denota la sincronización en fase; mientras que en el caso anti-síncrono, la trayectoria no

se modifica en el tiempo (Fig. 4(g)). También podemos mencionar que el estado anti-síncrono es inestable puesto que cualquier pequeña perturbación hará que el sistema tienda a la sincronización en fase. Si resolvemos

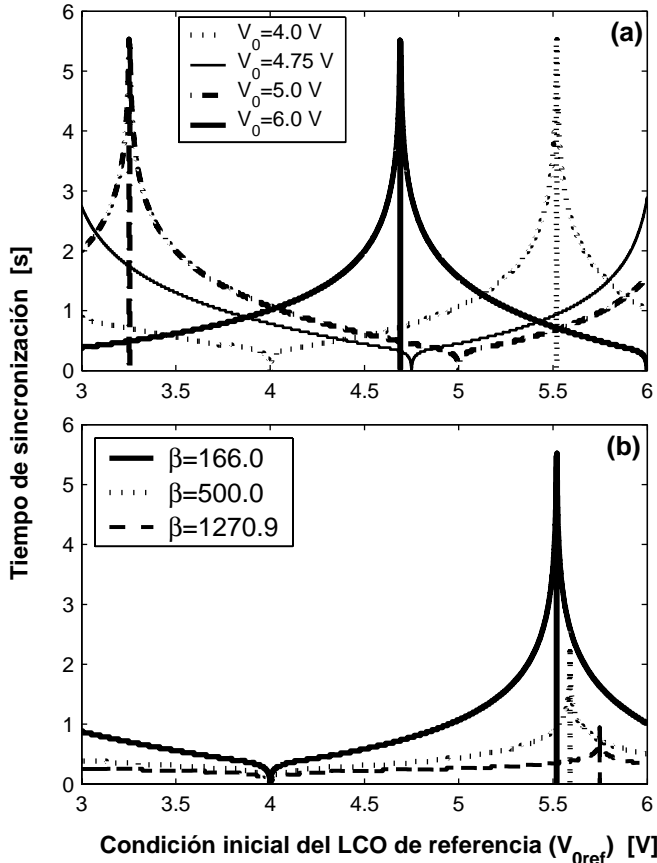


Figura 5. Tiempos de sincronización para dos LCOs idénticos. (a) Diferentes condiciones iniciales  $V_0$  y  $\beta = 166$ . (b) Diferentes valores de acoplamiento  $\beta$  y  $V_0 = 4.0$  V.

numéricamente el sistema, encontramos por ejemplo que el tiempo de sincronización en fase entre dos LCOs idénticos varía con las condiciones iniciales y que si tomamos las mismas de la región de sincronización definida en la Fig. 3(b), por ejemplo,  $V_0 = 4.75$ , vemos que el sistema siempre sincronizará en fase (línea continua delgada en la Fig. 5(a)), en tanto que si  $V_0$  no está comprendida dentro del área de sincronización, existirá un valor para el cual se tiene anti-sincronización que en la Fig. 5 se manifiesta como un tiempo de sincronización que tiende al infinito y que nosotros lo proyectamos hacia el eje de abscisas. La comparación de los resultados analíticos (Fig. 3) con los resultados numéricos (Fig. 5), muestra un buen acuerdo entre los mismos. Finalmente, vemos que el tiempo de sincronización  $t_s$  está relacionado con el acoplamiento  $\beta$  de la forma  $t_s \propto \beta^{-1}$ .

#### 4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

El presente trabajo nos permitió justificar la utilización de un modelo no lineal puesto que el mismo conduce a resultados que tienen coherencia con las observaciones experimentales [16]. Es interesante ver que

a pesar de considerar el sistema más simple posible (dos LCOs idénticos), se observa que las condiciones iniciales son determinantes para que el sistema permanezca en un estado anti-síncrono inestable o tienda hacia la sincronización en fase. A su vez, estas condiciones iniciales juegan un rol importante en el tiempo de sincronización, el cual tiende a infinito cuando las condiciones iniciales toman los valores que hacen que el sistema permanezca en el estado anti-síncrono. La coincidencia entre los valores numéricos y la predicción de los resultados analíticos nos indica que a pesar de las simplificaciones introducidas en el análisis, estas no influyen mayormente en el estado final del sistema. Actualmente estamos desarrollando el análisis de poblaciones de LCOs (ver [17]) cuyos comportamientos presentan gran interés en diversos dominios y observamos nuevamente que dependiendo de las condiciones iniciales, el sistema puede tender a uno o a otro estado entre los que se pueden indicar sincronización total o formación de cúmulos de sincronización.

#### REFERENCIAS

- [1] A. Pikovsky y Y. Maistrenko, eds., *Synchronization: Theory and Application*, vol. 109 of *NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [2] C. Huygens, *Horologium Oscillatorium*. Paris: Apud F. Muguet, 1673.
- [3] W. H. Eccles y J. H. Vincent, 1920.
- [4] E. V. Appleton, "The automatic synchronization of triode oscillator," *Proc. Cambridge Phil. Soc. (Math. and Phys. Sci.)*, vol. 21, pp. 231–248, 1922.
- [5] B. van der Pol, "On relaxation oscillation," *Phil. Mag.*, vol. 2, pp. 978–992, 1926.
- [6] I. I. Blekhnman, *Synchronization in Science and Technology*. ASME Press (American Society of Mechanical Engineers), 1988.
- [7] V. I. Arnol'd, "Small denominators I. mappings of the circumference onto itself," *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 46, pp. 213–284, 1965.
- [8] V. S. Afraimovich, G. V. Nekorkin, G. V. Osipov, y V. D. Shalfeev, *Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks*, vol. 6 of *World Scientific Series on Nonlinear Science A*. Singapore: World Scientific Pub Co., 1995.
- [9] A. S. Pikovsky y J. Kurths, "Collective behavior in ensembles of globally coupled maps," *Physica D*, vol. 76, no. 4, pp. 411–419, 1994.
- [10] J. L. Guisset, G. M. Ramirez Avila, y J. L. Deneubourg, "Construcción de osciladores controlados por luz y medida de su comportamiento síncrono" *Rev. Bol. Fis.*, vol. 1, no. 7, pp. 102–114, 2001.
- [11] J.-L. Guisset, J.-L. Deneubourg, y G. M. Ramirez Avila, "The phase information associated to synchronized electronic fireflies," *arXiv.nlin.AO/0206036*, no. Mon, 24 Jun 2002 16:07:15 GMT, 2002.
- [12] R. E. Mirollo y S. H. Strogatz, "Synchronization of pulse-coupled biological oscillators," *SIAM J. App. Math.*, vol. 50, no. 6, pp. 1645–1662, 1990.
- [13] J. Buck y E. Buck, "Synchronous fireflies," *Sci. Am.*, vol. 234, no. 5, pp. 74–79, 82–85, 1976.
- [14] B. van der Pol y J. van der Mark, "The heartbeat con-

- sidered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart," *Phil. Mag.*, vol. 6, pp. 763–775, 1928.
- [15] C. S. Peskin, "Mathematical aspects of heart physiology," 1975.
- [16] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, y J. L. Deneubourg, "Synchronization in light-controlled oscillators," *Physica D*, vol. 182, no. 3-4, pp. 254–273, 2003.
- [17] G. M. Ramirez Avila, J. L. Guisset, y J. L. Deneubourg, "Synchronous behavior in small populations of light-controlled oscillators," en *11th International IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems* (R. Stoop, ed.), (Scuol/Schuls, Switzerland), pp. 201–204, 2003.

# LA ENERGÍA LIBRE EN LA REGIÓN METAESTABLE (Versión en inglés aceptada en el *Journal of Chemical Physics*.)

Armando Ticona Bustillos<sup>1</sup>, D. W. Heermann<sup>2</sup>, C. E. Cordeiro<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Carrera de Física  
Universidad Mayor de San Andrés  
La Paz—Bolivia*

<sup>2</sup>*Institute für Theoretische Physik  
Universität Heidelberg  
Heidelberg—Alemania*

<sup>3</sup>*Instituto de Física  
Universidade Federal Fluminense  
Rio de Janeiro—Brasil*

## RESUMEN

Preparando muestras en la región metaestable del modelo de Ising tri-dimensional, estudiamos los caminos que la magnetización y la energía siguen para alcanzar el equilibrio, acumulándolos en distribuciones dependientes del tiempo, a partir de las cuales construimos la energía libre y estudiamos la altura de la barrera de energía libre en función de la temperatura, campo magnético y tamaño del sistema. Los resultados muestran que para este modelo, con interacciones entre primeros vecinos, la altura de la barrera de energía libre no va a cero como es predicho por las teorías de campo medio, sugiriendo la no existencia de una *spinodal*, separando las regiones metaestable e inestable, en la región de las dos fases.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los estados metaestables son bastante comunes en la naturaleza, muchos de los estados aparentemente estables, en realidad corresponden a estados metaestables con vida muy larga. Muchas fases cristalográficas asociadas con transiciones de fase estructurales, como por ejemplo, el diamante, son estados metaestables con tiempos astronómicos de vida. Experimentalmente, estos estados son estudiados cerca de las transiciones de primer orden, en diferentes contextos, como por ejemplo: partes de ciclos de histéresis asociados con retornos en la magnetización de un ferro-magneto o con separaciones de fases en aleaciones metálicas; vapores muy fríos y líquidos muy calientes; comportamientos “on-off” en películas ferro-eléctricas o sistemas moleculares bi-estables [1].

La existencia de estados metaestables, así como las propiedades de estos, aun continua siendo un desafío para la física teórica. Se demostró que sistemas infinitos de una fase, con interacciones de corto alcance, no pueden soportar estados metaestables de vida “infinita”. Si las interacciones son de corto alcance, basta una simple fluctuación finita de energía (algunas veces muy grande) para escapar de la fase metaestable [1]. Las barreras de nucleación son finitas, aun en el límite termodinámico [2,3]. De cualquier forma, si el tiempo de vida del estado metaestable es muy largo, en un sistema de interacciones de corto alcance, y mientras que el sistema permanece en la metaestabilidad verdadera, es posible medir cantidades termodinámicas, como los calores específicos y susceptibilidades. Este tipo de propiedades del equilibrio,

conducen al desafío de describir los estados metaestables desde un punto de vista estadístico [1].

El cálculo de la energía libre en el caso de estas transiciones de primer orden es de mucha importancia, por ser el punto de partida de muchas teorías que tratan con la metaestabilidad y la descomposición *spinodal*. La altura de la barrera de energía libre es necesaria para el cálculo del costo que representa crear una gota crítica formada por fluctuaciones estadísticas, que comienza la transformación del estado metaestable hasta llevarlo al equilibrio [4,5,6,7,8]. Entonces, el cálculo de la energía libre es de importancia central en el desarrollo del entendimiento de la metaestabilidad, la *spinodal* y el fenómeno que sucede en una transición de primer orden.

Con las teorías de campo medio [8,9,10,11,12] (interacciones de alcance infinito) para transiciones de primer orden, se puede calcular la energía libre no solamente en el equilibrio estable, sino también para el caso fuera del equilibrio y a partir de estos cálculos es que se puede hacer una diferenciación entre estados metaestables e inestables. Los estados metaestables e inestables, en este contexto, se encuentran separados por una *spinodal*, la fase homogénea (ordenada o desordenada) es termodinámicamente inestable. Entre la *spinodal* y la curva de coexistencia son necesarios eventos de nucleación de la fase opuesta (activación térmica, gotas) para inducir la transición de fase. El esquema del espacio de fases puede ser visto en la Figura 1.

Mientras que para las teorías de campo medio, la diferenciación entre estados estables y metaestables

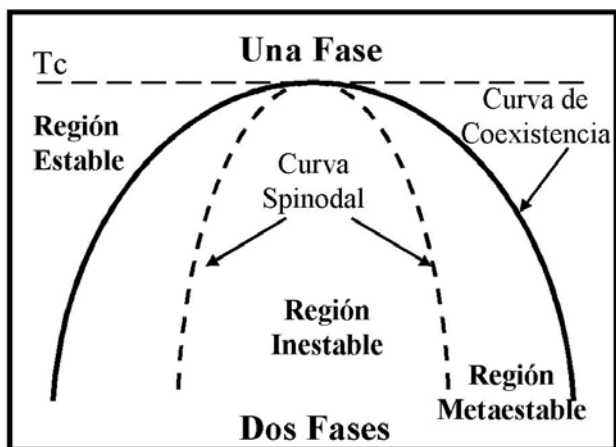


Figura 1. Diagrama de fases esquemático (T-m), mostrando las curvas de coexistencia, las curvas *spinodales*, regiones estables, metaestables e inestable.

es simplemente artificial, creada por la construcción de Maxwell para obtener la curva de coexistencia, la situación es mucho más compleja para sistemas con interacciones de corto alcance. La mecánica estadística tiene un formalismo canónico muy bien definido para el estudio de las propiedades de sistemas en equilibrio y también para algunos casos de sistemas cerca del equilibrio. Pero para el caso de la metaestabilidad y procesos de nucleación, solamente existe una colección de métodos (la mayoría aproximados) para el tratamiento de casos muy particulares. No queda muy clara la forma de definir un ensamble de estados que produzcan el probable estado metaestable de vida corta, antes de conducir automáticamente al sistema (en el límite termodinámico) al correcto estado estable de equilibrio. Parte de esta dificultad podría quizás ser la idea de equilibrio estadístico, perseguido en el tratamiento de estos problemas.

Existen muchos intentos para obtener la energía libre, cubriendo las regiones de equilibrio y no-equilibrio. Una de estas, fue la idea de Kaski [13], mediante un procedimiento de "grano-largo". Una línea de pensamiento similar, usando conceptos estadísticos, es la continuación analítica de la energía libre de equilibrio en la región de las dos fases [14]. Binder [15] sugirió otra aproximación, él consideró una única gota en un volumen finito, y analizó la transición de primer orden correspondiente. Aunque las consideraciones del modelo geométrico para las fluctuaciones permitieron comparar los resultados con las teorías clásicas de nucleación [4,5], este modelo no permite calcular la energía libre, ni hacer ningún comentario acerca de la existencia de una *spinodal*. Kolesik [16] y colaboradores, usaron las llamadas dinámicas proyectivas [17], para el estudio del tiempo de vida de los estados metaestables.

Para el cálculo de la energía es suficiente hacer una media sobre una pequeña pero representativa muestra de estados, pero en el caso de la energía libre es nece-

sario considerar todos los posibles estados accesibles del sistema. En este trabajo, así como en uno anterior [18], usamos los caminos de relajación para obtener funcionales de trayectoria que el sistema sigue a través del espacio de fases [19,20]. Para esto, consideramos los estados accesibles del sistema, huyendo de la metaestabilidad. Con estas funciones de caminos, reconstruimos la energía libre usando el hecho que una media en las funciones de trayectoria es implícitamente una media sobre el ensamble definido de caminos. Comenzamos con una descripción de como conseguimos los caminos a través de simulaciones de Monte Carlo del modelo de Ising tridimensional. Este modelo es usado debido a la existencia de muchos datos que facilitan comparaciones. También mostramos las transiciones de probabilidad usadas y la influencia de ellas en la dinámica del sistema. Construimos la energía libre comparando la altura de la barrera con los resultados de campo medio. Finalmente, discutimos nuestros resultados y sus implicaciones.

## 2. LA ENERGÍA LIBRE CALCULADA POR CAMINOS

En este trabajo usamos el modelo de Ising, cuya Hamiltoniana para una red cúbica de lado  $L$  y con  $N = L^3$  *spins*, está definida por:

$$\mathcal{H}(s) = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - \mu \mathbf{H} \sum_i s_i, \quad (1)$$

donde  $J > 0$  ( $\frac{J}{k_B T_c} = 0.221673$ ) es la constante de acoplamiento entre primeros vecinos y  $T_c$  la temperatura crítica. Usaremos aquí la variable adimensional  $\mathbf{h} = 2 \frac{\mu \mathbf{H}}{k_B T}$  del campo magnético.  $s = (s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_N)$  denota la configuración de los *spins* de la red  $s_i = \pm 1$ .

Debido a su característica clásica (no cuántica), el modelo de Ising presentado, no tiene una dinámica intrínseca. Es necesario construir una dinámica de Monte Carlo para el sistema. La dinámica del sistema en una simulación de Monte Carlo es especificada por las probabilidades de transición de una cadena de Markov que establece un camino a través del espacio de fases disponible. Usamos las probabilidades de transición de Metrópolis 2 y de Glauber 3 [21,22,23], dadas por:

$$W_M[s_i, E_i] = \frac{1}{\tau} \min \{1, \exp(-2\beta s_i E_i)\} = W_M(s_i|s), \quad (2)$$

$$W_G[s_i, E_i] = \frac{1}{\tau} (1 - \tanh(\beta s_i E_i)) = W_G(s_i|s), \quad (3)$$

donde  $\beta = 1/k_B T$ ,  $\tau$  es una constante estableciendo la escala de tiempo.  $s_i$  y  $E_j$  denotan el *spin* y la energía local antes de la inversión del *spin*. Para el estudio de las propiedades en el equilibrio, es suficiente que la dinámica satisfaga el balance detallado, así la distribución correcta de equilibrio es generada [24].

Comenzando con una configuración inicial  $s_0$  (igual para todas las muestras), tenemos una secuencia:  $s_0, s_1^k, \dots, s_{n-1}^k$  de muestras de configuraciones de *spin*,

que están dinámicamente correlacionadas, donde  $k$  denota la muestra.

El tiempo  $t$  en este contexto es medido en pasos de Monte Carlo por *spin*. Un paso de Monte Carlo (MCS) por sitio de red, esto significa que una actualización de la red entera, es considerada como una unidad de tiempo. En este modelo, la energía y la magnetización no son constantes, entonces medimos estos datos en función de la temperatura, campo magnético aplicado y el tamaño de red.

Desde el punto de vista de las probabilidades de transición la interpretación dinámica del algoritmo de simulación de Monte Carlo está basado en la ecuación Maestra:

$$\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} = \sum_i^N W(s|s_i)P(s_i, t) - P(s, t) \sum_i^N W(s_i|s), \quad (4)$$

donde la condición final de equilibrio está garantizada por la elección de las probabilidades de transición correctas.

Comenzamos las simulaciones con todos los *spins* iguales a  $-1$  como configuración inicial. A partir de este estado, llevamos el sistema dentro la región de las dos fases, mediante un campo magnético  $h$  opuesto a la magnetización inicial, obteniendo una magnetización  $m_{meta}$  dentro del intervalo  $-m_{coex}(T) \leq m_{meta} \leq m_{coex}(T)$ . Si  $h$  es suficientemente pequeño, el sistema queda en un estado metaestable. En la figura 2 mostramos un ejemplo de un camino para la magnetización, desde la metaestabilidad hasta alcanzar finalmente el estado de equilibrio, en función del tiempo.

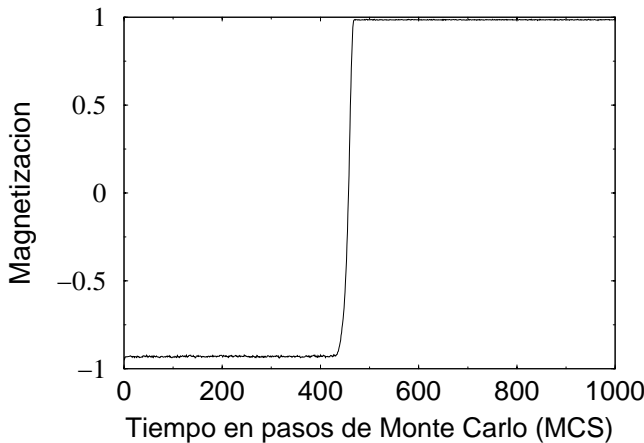


Figura 2. Ejemplo de un camino de relajación de la magnetización, usando las probabilidades de transición de Metrópolis,  $T/T_c = 0.59$ ,  $h = 0.51$  y  $L = 32$ .

Siguiendo los valores de la magnetización en el tiempo  $t$  tenemos:

$$m(t) = \frac{1}{N} \sum_i s_i, \quad (5)$$

para cada muestra. Después de los primeros pasos la magnetización fluctúa alrededor de un valor metaestable, después cambia bruscamente de signo para quedar finalmente en el estado de equilibrio. El mismo comportamiento es observado para la energía por *spin* dada por:

$$e(t) = \frac{1}{N} \mathcal{H}(s(t)). \quad (6)$$

Repetiendo este mismo procedimiento para diferentes muestras, lo que en este caso significa diferentes semillas de los números aleatorios, obtenemos la mayor cantidad posible de caminos que la magnetización y la energía recorren, hasta alcanzar el equilibrio pasando por la metaestabilidad. Entonces, usando esta información, encontramos las distribuciones de probabilidad dependientes del tiempo:  $P(m, e, N)(t)$  para la magnetización y energía. Después de los primeros pasos, se observan picos pronunciados en estas distribuciones, para algunos valores de la magnetización y la energía, indicando que el sistema pasa un tiempo considerable en la metaestabilidad. A medida en que el tiempo avanza, aparecen otros picos pronunciados correspondientes al valor final de equilibrio del sistema. Estos últimos picos crecen indefinidamente a medida que incluimos mas muestras, porque el sistema siempre termina en el mismo estado de equilibrio. Un ejemplo de esto es mostrado en la figura 3.

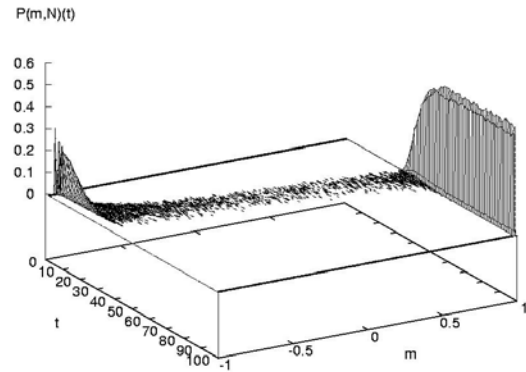


Figura 3. Ejemplo de distribución  $P(m,N)(t)$  sin considerar la energía. Usamos las probabilidades de transición de Metrópolis,  $T/T_c = 0.59$ ,  $h = 0.59$  y  $L = 32$ .

La parte central (inestable) de las distribuciones es ancha, para valores de  $L$  y  $h$  pequeños, pero a medida que el tamaño del sistema o el valor del campo aumentan, estas distribuciones presentan picos mas definidos para algunos valores de tiempo. Esto confirma las observaciones hechas por Acharyya y Stauffer [25]: el comportamiento del sistema para valores crecientes de campo cambia de estocástico a determinístico, considerando el intervalo de tiempo en el cual sucede la transición de la metaestabilidad hasta el equilibrio. Observamos este

mismo efecto para tamaños crecientes del sistema. Como ejemplo mostramos en la figura 4 las distribuciones de  $P(m, N)(t)$  en función del tiempo (sin considerar la energía), para la parte inestable, con  $L = 32, 256$ .

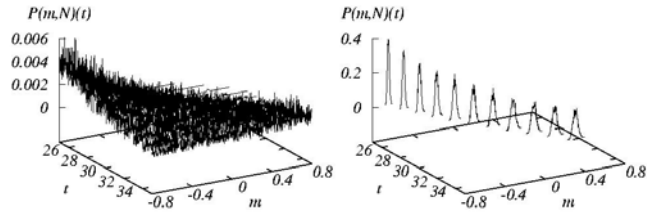


Figura 4. Parte inestable de las distribuciones  $P(m, N)(t)$  (sin considerar la energía). Usamos las probabilidades de transición de Metrópolis,  $T/T_c = 0.59$  y  $h = 0.59$ . Izquierda  $L = 32$  y derecha  $L = 256$ .

En el equilibrio se puede observar la energía libre  $F$ , mediante el cálculo de la función de partición, dada por:

$$Z = \sum_s \exp(-\mathcal{H}(s)/k_B T), \quad (7)$$

y obtenemos  $F$  por:

$$F = -k_B T \ln(Z), \quad (8)$$

donde la suma es realizada sobre todas las posibles  $2^N$  configuraciones de *spin*.

Como en este caso estamos interesados en la parte que queda fuera del equilibrio, no podemos considerar el factor de Boltzmann, que caracteriza las distribuciones en el equilibrio. En forma similar a la realizada por Shteto y colaboradores [1], obtenemos la función de partición para cada valor de la magnetización, sumando las distribuciones obtenidas, sobre todos los valores de energía en el tiempo:

$$Z_N(m) = \sum_{e, t=0}^{t_{max}} P(m, e, N)(t), \quad (9)$$

y entonces tenemos la energía libre en función de la magnetización dada por:

$$F_N(m) = -k_B T \ln(Z_N(m)), \quad (10)$$

la cual expresada en términos de la constante de acoplamiento entre primeros vecinos:

$$F_N(m) = -\frac{k_B T}{J} \ln(Z_N(m)). \quad (11)$$

El tiempo límite en nuestras simulaciones es  $t_{max}$ . Cuando este tiempo es muy grande, los valores de la magnetización correspondientes al equilibrio, son sobre representados y en el límite de  $t_{max} \rightarrow \infty$ , tenemos en esta región un pozo infinitamente profundo. Como consecuencia de esto, los valores de la energía libre para los otros valores de la magnetización son despreciados en

las observaciones. Debido a esto,  $t_{max}$  debe ser escogido cuidadosamente. En el caso de considerar solamente aquellos tiempos en que el sistema se encuentra en la metaestabilidad, la energía libre simplemente muestra el pozo metaestable, como puede ser visto en la figura 5, para algunos valores de  $h$ .

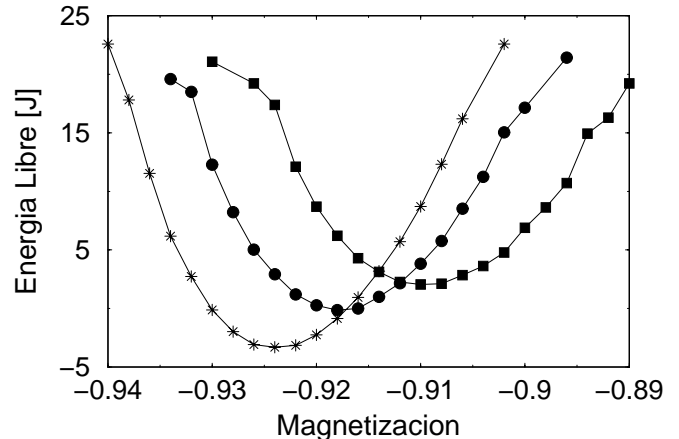


Figura 5. Energía libre en función de la magnetización, en la región metaestable. Probabilidades de transición de Metrópolis,  $T/T_c = 0.59$  y  $L = 32$ . Asteriscos  $h = 0.56$ , círculos llenos  $h = 0.59$  y cuadrados llenos  $h = 0.62$ .

Para poder calcular la altura de la barrera de energía libre, necesitamos extender el cálculo de ésta para todos los posibles valores de la magnetización. Se debe considerar el valor de  $t_{max}$  suficientemente grande para cubrir todos los posibles tiempos en que la transición de la metaestabilidad hasta el equilibrio sucede y suficientemente pequeño para no quedarnos solamente con la situación de equilibrio dominando el "escenario". Tomando en cuenta esta consideración, tenemos un ejemplo de la energía libre en la figura 6 para un valor de temperatura y de campo magnético. A partir de esto podemos definir la altura de la barrera como la diferencia entre el valor mínimo de energía en la región metaestable y el valor máximo en la parte inestable:

$$\Delta F_N(m) = F_N(m_{max}) - F_N(m_{min}), \quad (12)$$

donde  $m_{max}$  y  $m_{min}$  son los valores de la magnetización para la energía máxima y mínima, respectivamente.

### 3. RESULTADOS

Estudiamos la energía libre para diferentes valores de temperatura y campo magnético. Un ejemplo de la región metaestable para diferentes valores de campo magnético a una temperatura fija es mostrado en la figura 7. En esta, se puede ver que a medida que el valor del campo aumenta, el pozo queda mas ancho debido a la mayor fluctuación entre los caminos que el sistema sigue en estos casos. Esto también afecta la altura de la barrera de energía libre, que queda mas pequeña para valores mas altos de  $h$ . También se puede ver que el

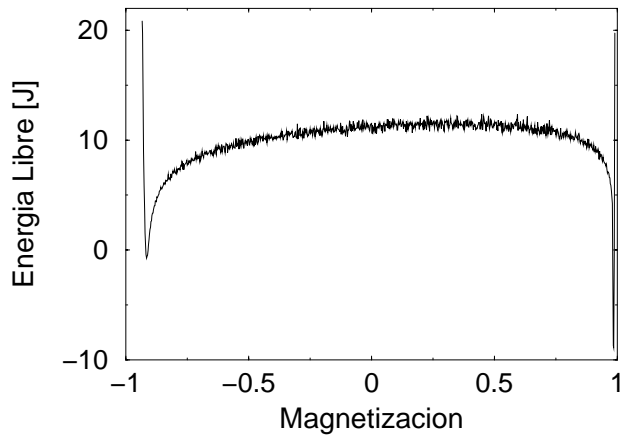


Figura 6. Energía libre como función de la magnetización. Probabilidades de transición de Metrópolis,  $T/T_c = 0.59$ ,  $L = 32$  y  $h = 0.59$ .

valor del mínimo queda desplazado dentro de la región inestable.

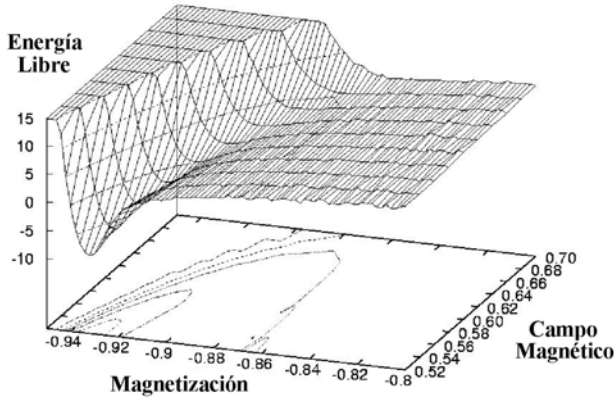


Figura 7. Energía libre como función de la magnetización y del campo magnético, na región metaestable. Probabilidades de transición de Metrópolis,  $T/T_c = 0.59$  y  $L = 32$ .

En la figura 8 mostramos la altura de la barrera de energía libre como función del campo magnético, para diferentes valores de temperatura. Se puede ver que este valor no va a cero, como es predicho por las teorías de campo medio. En la figura 8 también son mostrados los ajustes para cada temperatura. El comportamiento de la altura de la barrera como función del campo magnético obedece una ley de potencia, lo que indica que la altura de la barrera permanece no nula, para valores muy altos de  $h$ , al contrario de las predicciones de campo medio.

También estudiamos la dependencia de la energía libre con respecto a las transiciones de probabilidad usadas. En la figura 9 mostramos ejemplos de la parte metaestable de la energía libre, para una temperatura fija y diferentes valores de campo magnético. Se puede ver que la energía libre está trasladada como un todo,

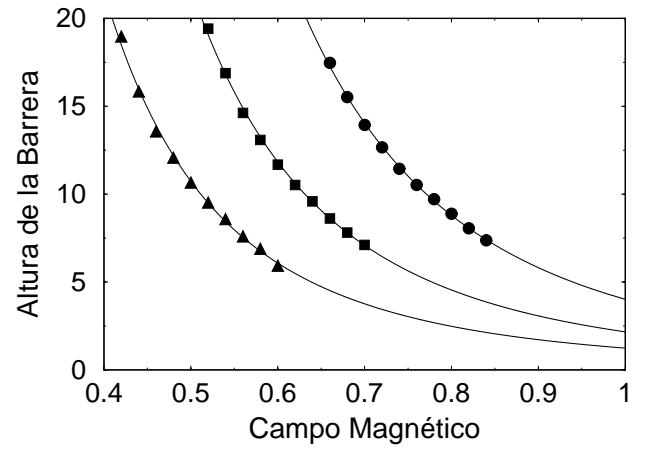


Figura 8. Altura de la barrera de energía libre como función del campo magnético aplicado. Probabilidades de transición de Metrópolis y  $L = 32$ . Triángulos  $T/T_c = 0.55$ , cuadrados  $T/T_c = 0.59$  y círculos  $T/T_c = 0.63$ . Las líneas continuas muestran los ajustes tipo ley de potencia para cada temperatura.

manteniendo la altura de la barrera sin mucha variación, como era de esperarse. Para confirmar esto, en la figura 10 mostramos una comparación de las dos probabilidades de transición. Presentamos la dependencia de la altura de la barrera con el campo magnético para un valor fijo de temperatura, usando los dos probabilidades de transición. Aunque la altura de la barrera no varíe para las dos probabilidades de transición, se puede ver en la figura 9 que, al usar valores altos de  $h$ , el valor del mínimo no es el mismo para las dos probabilidades de transición. Según las teorías de campo medio, algunos valores altos de  $h$  no estarían mas dentro de la región metaestable y si en la inestable. Los resultados mostrados indican una mudanza entre estas dos regiones sin el paso por una spinodal y los mínimos para los valores altos de  $h$  no corresponderían mas a mínimos metaestables, lo que los tornaría dependientes de las probabilidades de transición usadas.

Finalmente, estudiamos la dependencia de la altura de la barrera con el tamaño del sistema. En la figura 11 mostramos la altura de la barrera como función del inverso de  $N$ , para algunos valores de la temperatura y de campo magnético. Se observa que para tamaños muy grandes del sistema, el valor de la altura de la barrera queda casi constante (con algunas variaciones producidas, por errores estadísticos). Esto indicaría que en el límite termodinámico podemos esperar que el sistema también pase por un estado metaestable antes de alcanzar el equilibrio.

#### 4. COMPARACIÓN CON LAS TEORÍAS DE CAMPO MEDIO

Para derivar la energía libre en las teorías de campo medio para el modelo de Ising, consideramos el límite donde todos los *spins* interactúan con todos los otros de

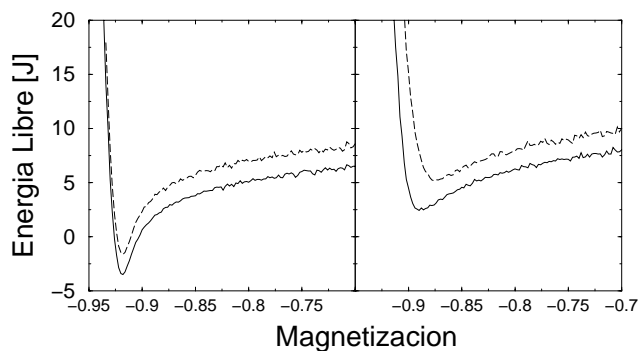


Figura 9. Energía libre como función de la magnetización en la región metaestable.  $T/T_c = 0.59$  y  $L = 32$ . Probabilidades de transición de Metrópolis líneas punteadas y probabilidades de transición de Glauber líneas continuas. Izquierda  $h = 0.58$ , derecha  $h = 0.68$ .

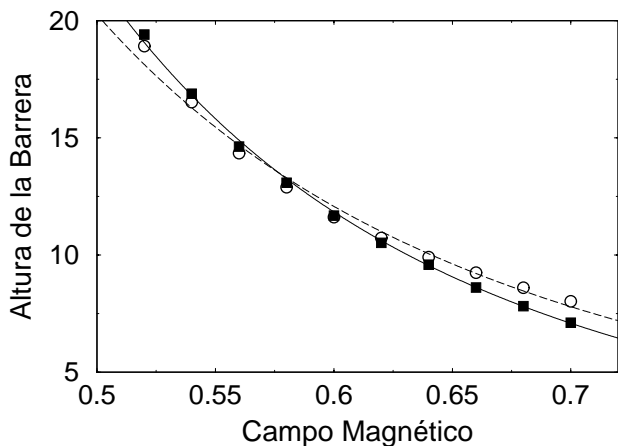


Figura 10. Altura de la barrera de energía libre como función del campo magnético aplicado.  $L = 32$  y  $T/T_c = 0.59$ . Probabilidades de transición de Metrópolis (cuadrados llenos) y probabilidades de transición de Glauber (círculos vacíos). Las líneas muestran los ajustes tipo ley de potencia para cada tipo de probabilidad de transición.

la red. En esta situación la suma sobre primeros vecinos en el Hamiltoniano se factoriza y tenemos que:

$$\mathcal{H}(m) = -\frac{1}{2} \frac{T_c}{T} m^2 - hm, \quad (13)$$

donde  $T_c$  es la temperatura crítica de la transición de segundo orden. Considerando la entropía de mezcla de estados  $m$  y  $-m$ , obtenemos el bien conocido resultado para la energía libre:

$$F(h, m) = \left( \frac{1+m}{2} \ln \frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2} \ln \frac{1-m}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{T_c}{T} m^2 - hm. \quad (14)$$

Una comparación entre la energía libre obtenida con la ecuación 14 y nuestros resultados es mostrada en la

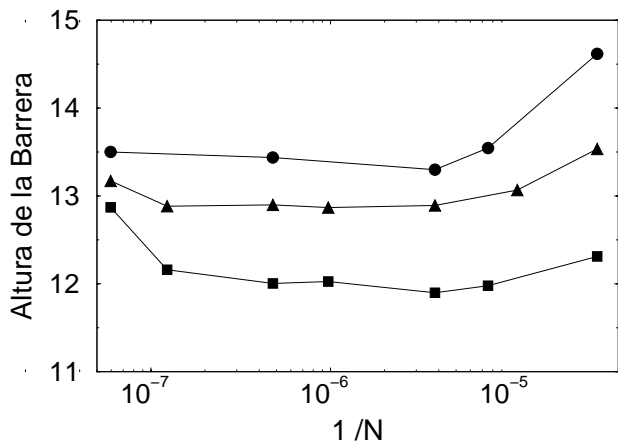


Figura 11. Altura de la barrera de energía libre como función del tamaño del sistema. Probabilidades de transición de Metrópolis. Cuadrados  $T/T_c = 0.59$  y  $h = 0.59$ ; triángulos  $T/T_c = 0.63$  y  $h = 0.46$ ; círculos  $T/T_c = 0.59$  y  $h = 0.56$ .

figura 12. Se puede ver que la aproximación de campo medio no define adecuadamente el valor de la magnetización metaestable, así como tampoco reproduce la forma de la función entre los dos mínimos. La barrera queda muy cerca del valor metaestable, haciendo que el pozo del mínimo global sea desproporcionalmente ancho.

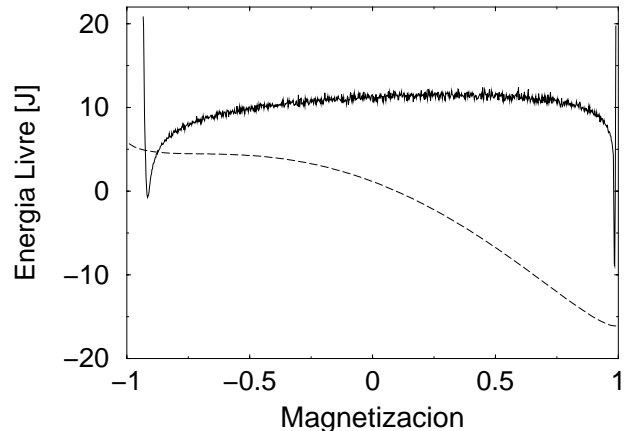


Figura 12. Comparación de la energía libre como función de la magnetización. Línea continua simulación y línea punteada campo medio.

Una importante predicción de la teorías de campo medio es la existencia de una spinodal [10,11,12,26], definida como el conjunto de valores en los que la altura de la barrera de energía libre es cero. En el caso de la existencia de esta *spinodal*, los valores de la altura de la barrera escalarían como:

$$\Delta F = 4 \left( \frac{T}{T_c} \right) (h - h_{sp})^x |m_{sp}|^{-1/2}, \quad (15)$$

donde el exponente  $x$  en las teorías de campo medio es

igual a  $3/2$ . En los resultados obtenidos con nuestro análisis, no encontramos ningún conjunto apropiado de  $h_{sp}$  y del exponente  $x$  que hiciese la altura de la barrera comportarse de acuerdo con esta función. Este resultado nos lleva a afirmar que no existe una *spinodal* en el modelo considerado.

## 5. DISCUSIONES

El ensamble de los caminos propuesto en este trabajo [18], nos permite calcular la función de partición y consecuentemente, la energía libre de una manera muy simple y considerando apenas los posibles caminos que el sistema recorre hasta el equilibrio. La probabilidad de ocupación de los estados está dada por la cantidad de veces que los estados son visitados, en las diferentes muestras consideradas. Esto hace innecesario el conocimiento anticipado de los pesos, equivalentes al del de Boltzmann fuera del equilibrio. Por otro lado, necesitamos una cantidad grande de muestras para tener certeza que el espacio de fases es adecuadamente cubierto.

Una de las principales consecuencias de nuestros resultados es el hecho de no encontrar una *spinodal* separando las regiones metaestable e inestable. Según los cálculos hechos con campo medio, los campos magnéticos usados en este trabajo, justamente atraviesan de una región a otra [10,11,12,19,20,26]. Entonces, se esperaba que la altura de la barrera de energía libre, como función del campo magnético, tuviese un cambio de comportamiento, indicando que para algún valor de campo, la barrera fuese nula. Pero, por lo menos para este caso, donde las interacciones son de corto alcance, se puede ver que el comportamiento no cambia y siempre existe una barrera no nula que debe ser superada para alcanzar el equilibrio.

También se puede ver que el comportamiento de la altura de la barrera como función del campo magnético, no depende de las probabilidades de transición aplicadas. El cambio en el valor del mínimo metaestable, encontrado para valores altos del campo magnético, cuando aplicamos diferentes probabilidades de transición confirmaría la no existencia de una *spinodal*. En la región inestable (campos magnéticos muy altos), las fluctuaciones del sistema dentro del mínimo local son muy grandes, lo que no nos permite extender el estudio a todos los valores de campo. Entonces, la diferencia de los mínimos metaestables verdaderos de la región inestable presentarían una dependencia con las probabilidades de transición aplicadas, por el hecho de no tener una dinámica apropiada que describa los cambios del sistema en estas regiones. El método presentado tiene limitaciones para reconstruir la energía libre, en muestras preparadas dentro de la región inestable.

Aunque los resultados para la dependencia de la altura de la barrera con el tamaño del sistema presentan una incerteza estadística considerable, podemos decir que en todos los casos estudiados siempre encontramos un mínimo metaestable, lo que llevaría a pensar que la existencia de estas regiones no es una propiedad exclusi-

va de sistemas muy pequeños.

**Agradecimientos.** Agradecemos a los profesores D. Stauffer, H. Gould, K. Binder y Paulo Murilo C. de Oliveira, por las discusiones y comentarios sobre el artículo. El trabajo fue parcialmente financiado por las organizaciones DAAD, CNPq y FAPERJ.

## REFERENCIAS

- [1] I. Shteto and J. Linares and F. Varret *Phys. Rev. E* **56**, (1997).
- [2] G. Sewell *Phys. Rep.* **57**, (1980).
- [3] D. W. Heermann and W. Klein *Phys. Rev. Lett.* **50**, (1983).
- [4] R. Becker and W. Döring *Ann. Phys. (Leipzig)* **24**, (1935).
- [5] M. Dekker *Nucleation Theory* **A. C. Zettlemoyer - New York**, (1969).
- [6] F. F. Abraham *Homogeneous Nucleation Theory* **Academic Press - New York**, (1974).
- [7] K. Binder and D. Stauffer *Adv. Phys.* **25**, (1976).
- [8] J. D. Gunton and M. San Miguel and P. S. Sahini *Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 8* **C. Domb and J. L. Lebowitz, Academic Press - New York**, (1983).
- [9] C. H. Bennett *J. Comput. Phys.* **22**, (1976).
- [10] P. A. Rikvold and B. M. Gorma *Annual Reviews of Computational Physics I* **D. Stauffer, World Scientific - Singapore**, (1994).
- [11] K. Binder *Phase Transformations in Materials - Materials Science and Technology, Vol. 5* **P. Haasen, VCH Verlag - Weinheim**, (1991).
- [12] K. Binder *Dynamics of Ordering Processes in Condensed Matter* **S. Komura and H. Furukawa, Plenum Press - New York**, (1991).
- [13] K. Kaski and K. Binder and J. D. Gunton *Phys. Rev. B* **29**, (1984).
- [14] J. S. Langer *Ann. Phys. N. Y.* **54**, (1969).
- [15] K. Binder *Physica A* **319**, (2003).
- [16] M. Kolesik and M. A. Novotny and P. A. Rikvold *cond-mat/0207405*.
- [17] M. A. Novotny and M. Kolesik and P. A. Rikvold *Comput. Phys. Commun* **121-122**, (1999).
- [18] A. Ticona Bustillos, D. W. Heermann and C. E. Cordeiro; sometido a *Journal of Chemical Physics*.
- [19] W. Paul and D. W. Heermann *Europhys. Lett.* **6**, (1988).
- [20] W. Paul and D. W. Heermann and K. Binder *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, (1989).
- [21] D. W. Heermann *Computer Simulation Methods in Theoretical Physics, 2nd ed.* **Springer Verlag - Heidelberg**, (1990).
- [22] K. Binder and D. W. Heermann *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics, 4-th Edition* **Springer - Heidelberg**, (2002).
- [23] R. J. Glauber *J. Math. Phys.* **4**, (1963).
- [24] V. I. Manousiouthakis and M. W. Deem *J. Chem. Phys.* **110**, (1999).
- [25] D. W. Heermann and A. N. Burkitt *Physica A* **162**, (1990).
- [26] M. Acharyya and D. Stauffer *Eur. Phys. J. B* **5**, (1998).
- [27] P. A. Rikvold and G. Korniss and C. J. White and M. A. Novotny and S. W. Sides *Computer Simulation Studies in Condensed Matter Physics XII, Springer Proceedings in Physics, Vol. 85* **P. Landau and S. P. Lewis and H. B. Schüttler, Springer**, (2000).

# RADIACIÓN GRAVITACIONAL DURANTE EL PROCESO DE COLISIÓN EN UN SISTEMA BINARIO

J.A.C. Nogales<sup>1</sup>, V. Subieta<sup>2</sup>

*Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
La Paz—Bolivia*

## RESUMEN

Este siglo será el siglo de la observación de ondas gravitacionales, de modo que este ha sido y es un tópico de estudio importante en los últimos años. Uno de los eventos más esperado para detectarse es la colisión de sistemas binarios. En este artículo se estudian dos aspectos de la colisión. Primero el decrecimiento del periodo orbital y la energía radiada en ondas gravitacionales. Ambos aspectos son presentados en una aproximación newtoniana y luego en una aproximación relativista usando la métrica de Weyl.

### 1. INTRODUCCIÓN

La radiación gravitacional es un tópico muy importante y grandes esfuerzos en su detección están siendo llevados a cabo. Hay cinco detectores basados en interferometría láser en vacío: LIGO, GEO 600 y VIRGO operarán pronto, TAMA 300 está colectando datos y LISA, que se planea este en funcionamiento alrededor del año 2011.

Uno de los eventos más importantes en la generación de ondas gravitacionales es la colisión de agujeros negros en sistemas binarios, por ello en este artículo se estudian dos aspectos de la colisión: el decrecimiento del periodo orbital debido a la pérdida de energía en radiación gravitacional y la cantidad de energía perdida. Ambas características son estudiadas en dos aproximaciones: Una aproximación Newtoniana y una aproximación relativista en la cual se usa la métrica de Weyl.

El decrecimiento del periodo orbital puede ser comparado con el decrecimiento de periodo orbital observado en el pulsar binario PSR1913+16. Esta comparación en la aproximación Newtoniana llevo a Hulse y Taylor a ganar el Premio Nóbel en 1993.

La cantidad de energía perdida podrá ser comparada con los datos observados que serán obtenidos por los detectores de radiación.

El plan en este artículo es el siguiente. En la sección 2 se estudiara la tasa de energía emitida en ondas gravitacionales en un sistema binario, en el cual un miembro está orbitando alrededor del otro. En la sección 3 se presenta el decrecimiento del periodo en una aproximación Newtoniana (sección 3.1), y en una aproximación relativista (sección 3.2) usando la métrica de Weyl. Al final de esta sección se discuten los resultados. En la sección 4 se estudia la tasa de energía gravitacional radiada en una aproximación Newtoniana (sección 4.1) y en dos aproximaciones relativistas (sección 4.2 y 4.3) y luego se

comparan los resultados. En la sección 4.4 se obtiene la cantidad de energía radiada total para todas las aproximaciones y se discuten los resultados.

### 2. ENERGÍA RADIADA POR SISTEMAS BINARIOS

El cálculo de la energía gravitacional radiada por un sistema constituido por dos partículas una orbitando alrededor de la otra fue realizado por Shapiro y Teukolsky [1] de la siguiente forma:

La energía gravitacional radiada por cualquier sistema está dada por:

$$L_{GW} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \left[ \dot{I}_{jk} \dot{I}_{jk} \right]. \quad (1)$$

Aquí  $I_{jk}$  es el momento de masa cuadrupolar:

$$I_{jk} \equiv \sum_A \left[ x_j^A x_k^A - \frac{1}{3} \delta_{jk} (x^A)^2 \right], \quad (2)$$

y los puntos arriba denotan derivación respecto al tiempo

En nuestro sistema se consideran dos masas puntuales  $M_1$  y  $M_2$ , una orbitando alrededor de la otra con el eje z como el eje de rotación. Sus distancias al centro de masas son  $a_1$  y  $a_2$ , luego

$$M_1 a_1 = M_2 a_2 = \mu a, \quad (3)$$

donde

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad (4)$$

es la masa reducida. Si  $\phi$  es el ángulo azimutal desde el eje x a la línea que une las masas, entonces tenemos

$$I_{xx} = -\frac{1}{2} \mu a^2 \cos 2\phi - \frac{1}{3} \frac{\mu a^2}{2}, \quad (5)$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2} \mu a^2 \cos 2\phi - \frac{1}{3} \frac{\mu a^2}{2}, \quad (6)$$

<sup>1</sup>Email: jnogales@fiums.a.edu.bo

<sup>2</sup>Email: veronicasubieta@hotmail.com

$$I_{xy} = I_{yx} = \frac{1}{2}\mu a^2 \text{sen}2\phi - \frac{4}{3}\frac{\mu a^2}{2}, \quad (7)$$

con esto en la ecuación 1 y como  $\phi = \Omega t$  donde  $\Omega$  es la velocidad angular, se encuentra para este sistema

$$L_{GW} = \frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{M^3\mu^2}{a^5}, \quad (8)$$

donde  $M = M_1 + M_2$ . Aquí se uso la tercera ley de Kepler

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a^3}. \quad (9)$$

### 3. EL DECRECIMIENTO DEL PERIODO ORBITAL

La pérdida de energía en radiación gravitacional lleva a un decrecimiento en la distancia  $a$  y por consiguiente a un decrecimiento en el periodo orbital  $P \equiv \frac{2\pi}{\Omega}$ .

#### 3.1. El decrecimiento del periodo orbital en una aproximación newtoniana

La energía del sistema es la suma de la energía cinética de rotación y la energía potencial Newtoniana

$$E = \left(\frac{1}{2}M_1a_1^2 + \frac{1}{2}M_2a_2^2\right)\Omega^2 - \frac{GM_1M_2}{a} = -\frac{1}{2}\frac{G\mu M}{a}. \quad (10)$$

Entonces el decrecimiento del periodo orbital debido a la variación de la energía es

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{a}\frac{da}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}. \quad (11)$$

Usando la ecuación 8 se obtiene

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = -\frac{96}{5}\frac{G^3}{c^5}\frac{M^2\mu}{a^4}. \quad (12)$$

Si las dos masas están en una órbita elíptica con excentricidad  $e$ , entonces

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dt}\Big|_{e=0} f(e), \quad (13)$$

donde

$$f(e) \equiv \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)(1 - e^2)^{-7/2}. \quad (14)$$

Considerando una órbita elíptica y usando la tercera ley de Kepler (9) en la ecuación 12 se obtiene que el decrecimiento del periodo orbital es

$$\dot{P} = \frac{-192\pi}{5}\frac{G^{\frac{5}{3}}M_1M_2}{c^5(M_1 + M_2)^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{2\pi}{P}\right)^{\frac{5}{3}}f(e). \quad (15)$$

Este resultado podría ser testado usando los datos experimentales obtenidos del pulsar binario PSR1913+16. El valor predicho fue  $\dot{P} = -2.4010^{-12}$  [1], en excelente acuerdo con el medido de  $(-2.30 \pm 0.22)10^{-12}$ . Este resultado fue la primera evidencia indirecta de la existencia de las ondas gravitacionales y gracias a esto Hulse y Taylor ganaron el Premio Nobel en 1993.

### 3.2. El Decrecimiento del Periodo Orbital en una Aproximación Relativista

#### 3.2.1. La métrica de Weyl

Esta métrica describe un espacio tiempo vacío estático y axisimétrico.

El elemento de línea en coordenadas polares está dado por

$$ds^2 = e^{2\psi}dt^2 - e^{-2\psi}[e^{2\nu}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2d\phi^2], \quad (16)$$

donde  $\psi = \psi(\rho, z)$ ,  $\nu = \nu(\rho, z)$ ,  $0 < \rho < \infty$ ,  $-\infty < z < \infty$  y  $0 < \phi < 2\pi$ . Las ecuaciones de campo de Einstein son

$$\nabla^2\Psi \equiv \Psi_{\rho\rho} + \frac{\Psi_\rho}{\rho} + \Psi_{zz} = 0, \quad (17)$$

$$\nu_\rho = \rho(\Psi_\rho^2 - \Psi_z^2), \quad (18)$$

$$\nu_z = 2\rho\Psi_\rho\Psi_z. \quad (19)$$

Existe una solución exacta a estas ecuaciones, la cual es isométrica a la solución de Schwarzschild, esto significa que el espacio tiempo de un solo agujero está incluido en la clase de Weyl, esto puede ser demostrado desarrollando una transformación de coordenadas, de coordenadas polares a coordenadas esféricas. En coordenadas polares el horizonte del agujero negro está dado por  $\rho = 0$  y  $-M \leq z \leq M$ .

Como la ecuación (17) es lineal, uno puede superponer dos soluciones, cada una de ellas correspondiente a un agujero negro. Usando aquello uno puede resolver las ecuaciones (18) y (19) para obtener una solución que puede ser interpretada como dos agujeros negros con una singularidad entre ellos, la cual los mantiene apartados. Esta solución es

$$\Psi = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{R_+ + R_- - 2M}{R_+ + R_- + 2M}\right] + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{R'_+ + R'_- - 2M'}{R'_+ + R'_- + 2M'}\right], \quad (20)$$

donde

$$R_\pm = \sqrt{\rho^2 + [z - (Z_0 + M) \mp M]^2}, \quad (21)$$

$$R'_\pm = \sqrt{\rho^2 + [z + (Z_0 + M') \mp M']^2}. \quad (22)$$

y

$$\nu = \nu[\Psi] + \nu[\Psi'] + 2\sigma[\Psi, \Psi'], \quad (23)$$

donde  $\Psi$ ,  $\nu[\Psi]$  y  $\Psi'$ ,  $\nu[\Psi']$  son soluciones a un solo agujero negro y  $\sigma[\Psi, \Psi']$  es el término de interacción entre ellos donde la singularidad está dada por:

$$\sigma[\Psi, \Psi'] = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{(M' + Z_0)R_+ + (M + M' + Z_0)R_- - MR'_-}{Z_0R_+ + (M + Z_0)R_- - MR'_+}\right] + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{Z_0}{Z_0 + M'}\right]. \quad (24)$$

Aquí  $2M$  y  $2M'$  son las masas de cada agujero negro centradas a  $Z_0 + M$  y  $-Z_0 - M'$  respectivamente.

Araujo y Oliveira [2] obtuvieron la fuerza entre los dos agujeros negros usando este término en el que está la singularidad, y ellos asumieron que esta fuerza de Weyl es adecuada para describir el movimiento de los agujeros negros. De aquí ellos identificaron la energía potencial en el sistema como

$$V(r)_{W1} = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{r-M}{r+M} \right]. \quad (25)$$

Ellos llamaron a este el potencial de Weyl.

### 3.2.2. El decrecimiento del periodo orbital en una aproximación relativista usando el potencial de Weyl

El potencial de Weyl puede ser reescrito como

$$V = \frac{GM_1 M_2}{2r_s} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right), \quad (26)$$

donde  $x = \frac{r_s}{a}$ ,  $r_s$  es el radio de Schwarzschild y  $a$  es la separación entre los dos agujeros negros.

Nosotros usamos este potencial en lugar del potencial Newtoniano en la ecuación de movimiento de los agujeros de modo que la energía del sistema está dada por

$$E = \frac{1}{2} \mu a^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu GM}{r_s} \ln \left( \frac{a-r_s}{a+r_s} \right). \quad (27)$$

El decrecimiento de la distancia  $a$  debido a la variación de la energía en el tiempo es:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \mu GM \frac{1}{a^2} \left( \frac{a^2 - r_s^2}{a^2 + r_s^2} \right) \frac{da}{dt}. \quad (28)$$

Usando las ecuaciones (8) y (9) se obtuvo

$$\dot{P} = \frac{-192\pi}{5} \frac{G^{\frac{5}{2}} M_1 M_2}{c^5 (M_1 + M_2)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{2\pi}{P} \right)^{\frac{5}{2}} f(e) \frac{(GM)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{P}{2\pi} \right)^{\frac{4}{3}} - r_s^2}{(GM)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{P}{2\pi} \right)^{\frac{4}{3}} + r_s^2}. \quad (29)$$

Si se compara este resultado con el obtenido en la aproximación newtoniana (15), se puede ver que la diferencia entre ellos es el factor  $f$ :

$$f = \frac{(GM)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{P}{2\pi} \right)^{\frac{4}{3}} - r_s^2}{(GM)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{P}{2\pi} \right)^{\frac{4}{3}} + r_s^2}, \quad (30)$$

Este puede ser reescrito

$$f = \frac{\frac{\widetilde{M}^{\frac{2}{3}}}{4\alpha^{\frac{2}{3}}} \left( \frac{P}{4\pi} \right)^{\frac{4}{3}} - 1}{\frac{\widetilde{M}^{\frac{2}{3}}}{4\alpha^{\frac{2}{3}}} \left( \frac{P}{4\pi} \right)^{\frac{4}{3}} + 1}, \quad (31)$$

donde  $\widetilde{M}$  es la masa total del sistema en unidades de masa solar y  $\alpha = \frac{GM_{\odot}}{c^3} = 4.925490x10^{-6}s$ . Nótese que este factor se torna importante si:

$$\widetilde{M}^{\frac{2}{3}} 4\alpha^{\frac{4}{3}} \left( \frac{P}{4\pi} \right)^{\frac{4}{3}} \approx 1. \quad (32)$$

Esto es equivalente a:

$$P^2 M \approx 3.06 \times 10^{-8} s^2. \quad (33)$$

Entonces podemos concluir que la aproximación Newtoniana es buena y la aproximación relativista podría ser importante solo para sistemas con la característica (33).

## 4. EMISIÓN DE ENERGÍA GRAVITACIONAL

La energía radiada durante el proceso de colisión está dada por la siguiente expresión

$$\frac{dE_g}{da} = \frac{dE_g}{dt} \frac{1}{\dot{a}}, \quad (34)$$

donde  $a$  está decreciendo en el tiempo y la energía radiada por unidad de tiempo fue calculada en la sección 2.

### 4.1. Emisión de energía gravitacional en una aproximación newtoniana

Bajo las mismas condiciones para nuestro sistema hechas en la sección (2), se puede asumir, que la ecuación de movimiento del sistema, usando una energía potencial newtoniana, es

$$\epsilon = -\frac{1}{2} \frac{\mu GM}{a} + \mu \frac{\dot{a}^2}{2}. \quad (35)$$

Usando esto y la tasa de energía radiada (8) en la ecuación (34) se obtiene

$$\frac{dE}{da} = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^3 \mu^2}{a^5} \left( \frac{2\epsilon}{\mu} + \frac{GM}{a} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

Haciendo  $M = 1$ , de esta forma se está reescalando las coordenadas del espacio tiempo. Entonces se tiene que  $\mu = M_1 M_2$ , o usando el factor de proporción entre las masas de los agujeros negros  $b$  ( $b = \frac{M_1}{M_2}$ ) se tiene:  $\mu = \frac{b}{(b+1)^2}$ , donde  $\mu$  representa la razón de masa de los dos agujeros negros. Nótese que  $\mu$  toma el máximo valor  $\frac{1}{4}$  cuando los agujeros negros tienen la misma masa.

Con este reescalamiento del espacio tiempo y en unidades geometrizadas se tiene

$$\frac{dE}{da}_N = \frac{32}{5} \frac{\mu^2}{a^5} \left( 2\epsilon' + \frac{1}{a} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (37)$$

donde  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\mu}$ .

Ésta es la tasa de emisión de energía en ondas gravitacionales durante la colisión, es decir a medida que la distancia  $a$  entre los agujeros decrece, obtenida en una aproximación Newtoniana

### 4.2. Emisión de energía gravitacional en una aproximación relativista

#### 4.2.1. Primera aproximación

Se toma como energía potencial del sistema la energía encontrada por Araujo y Oliveira eq. (25), trabajando con la singularidad entre los dos agujeros, la cual los mantiene fijos.

TABLA 1

Cantidad total de energía radiada calculada para las tres aproximaciones desarrolladas, como función de  $a_{max}$ , para dos valores diferentes de  $\mu$ :  $\mu = \frac{1}{7}$ , o un agujero tiene una masa cinco veces mayor a la del otro y  $\mu = \frac{1}{256}$  cuando un agujero es mucho más grande que el otro. El valor de  $a_{min}$  usado es indicado dentro los *brackets*.

x	$\mu = 1/7 \Delta E [1.3871]$	$\mu = 1/256 \Delta E [1.1040]$	$\Delta E_{W1} [1.4537]$	$\Delta E_{Newton} [1]$
$\infty$	0.5425	0.9325	0.4415	1.8286
100	0.5462	0.9367	0.000	1.1708
20	0.5615	0.9526	0.4302	1.2010
5	0.6190	0.9954	0.00	1.3424

Luego, con esta energía potencial en unidades geometrizadas y en un espacio tiempo reescalado ( $M = 1$ ), la ecuación de movimiento es:

$$\epsilon' = \frac{1}{2a} + \frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{a-1}{a+1}. \quad (38)$$

Usando esto y (8) en la ecuación(34), se obtiene

$$\frac{dE}{da}_{W1} = \frac{32}{5} \frac{\mu^2}{a^5} \left( 2\epsilon' - \frac{1}{a} - \ln \left( \frac{a-1}{a+1} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (39)$$

Ésta es la tasa de energía gravitacional radiada usando una aproximación relativista donde en la energía potencial del sistema es considerada sólo la singularidad entre los dos agujeros negros.

#### 4.2.2. Segunda Aproximación

Usando la métrica de Weyl y obteniendo el Tensor energía momento, se dedujo otra energía potencial para el sistema [3]. La diferencia con la energía potencial de Araujo y Oliveira es que en este potencial es considerado todo el sistema, esto significa: que los dos agujeros negros están incluidos además de la singularidad entre ellos. Esta energía potencial en unidades geometrizadas y en un espacio tiempo reescalado  $M = 1$  está dado por

$$V_{W2} = \frac{\mu}{4} \ln \left( \frac{a^2 - 2a + a}{a^2 + 2a - 3 + 16\mu} \right). \quad (40)$$

Con esto la ecuación de movimiento será

$$\epsilon' = \frac{1}{2a} + \frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{a^2 - 2a + a}{a^2 + 2a - 3 + 16\mu}. \quad (41)$$

Usando ésta y 8 en la ecuación 34 se obtiene

$$\frac{dE}{da}_{W2} = \frac{32}{5} \frac{\mu^2}{a^5} \left( 2\epsilon' - \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2 - 4(1-4\mu)} \right) \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (42)$$

Ésta es la tasa de energía gravitacional radiada usando una aproximación relativista donde en la energía potencial del sistema se considera los dos agujeros negros y la singularidad entre ellos.

Es importante notar cuando  $\mu = \frac{1}{4}$ , esto es cuando los dos agujeros negros tienen masas iguales, la tasa de energía gravitacional radiada en la segunda aproximación decae en la obtenida en la primera aproximación. Cuanto más diferentes son las masas de los agujeros negros la segunda aproximación debería ser usada.

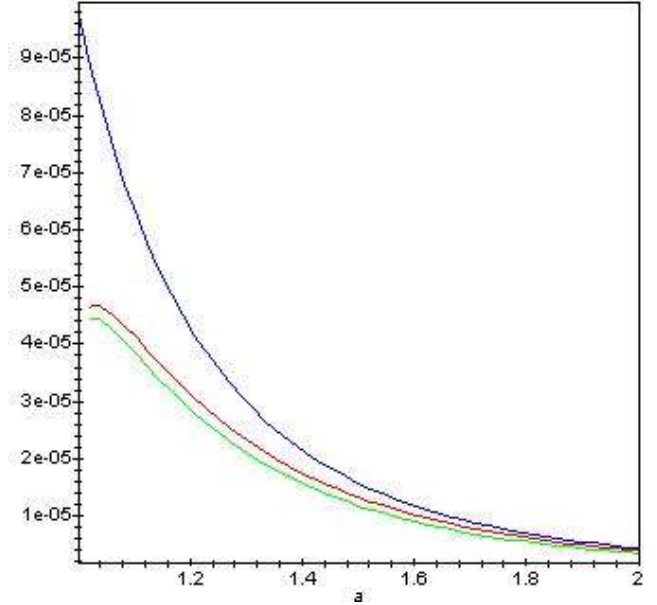


Figura 1. Tasa de emisión de energía gravitacional como una función de la distancia entre los agujeros para las tres aproximaciones desarrolladas. La curva superior es la obtenida para la aproximación newtoniana, la siguiente es la curva obtenida para la primera aproximación relativista, y la curva inferior es la obtenida para la segunda aproximación relativista. La condición inicial para las tres curvas es  $\epsilon' = 0$ , esto es cuando los agujeros se encuentran en reposo en el infinito. Y  $\mu = \frac{1}{256}$  esto es cuando los agujeros negros tienen masas muy diferentes. Cuanto mas similares se hacen las masas de los agujeros la curva inferior se aproxima a la curva obtenida en la segunda aproximación relativista.

#### 4.3. Cantidad total de energía radiada

La cantidad total de energía radiada en ondas gravitacionales será

$$\Delta E_{a_{max}, a_{min}} = \int_{a_{min}}^{a_{max}} \frac{dE}{dx} dx. \quad (43)$$

Aquí  $a_{max}$  es la distancia inicial entre los dos agujeros negros. Cuando los dos agujeros se encuentran muy cerca las aproximaciones hechas, obviamente pierden validez, entonces es importante escoger adecuadamente  $a_{min}$ . Una posibilidad es escoger el punto donde los agujeros negros alcanzan la velocidad de la luz cuando caen el

uno en el otro desde una distancia infinita, llamaremos a este punto  $a_{luz}$ . Esta elección está justificada por la Relatividad Especial.

$a_{luz}$  puede ser deducido de la ecuación de movimiento obtenida en cada aproximación que se hizo (ecuaciones 35, 38, 41). En la aproximación newtoniana  $a_{luzN} = 1$ , en la primera aproximación relativista  $a_{luzW1}$  es la solución para  $a$  de la ecuación  $e^{\frac{1+a}{a}} = \frac{a+1}{a-1}$ , y en la segunda aproximación relativista  $a_{luzW2}$  es la solución para  $a$  de la ecuación  $e^{\frac{2(1+a)}{a}} = \frac{(a+1)^2 - 4(1-4\mu)}{(a-1)^2}$ . Nótese que el valor de  $a_{luz}$  en la segunda aproximación relativista depende de  $\mu$ , y toma valores entre 1.4537, cuando los dos agujeros tienen la misma masa y el límite, 1.0880 cuando los agujeros negros son muy diferentes. La energía radiada calculada usando el segundo potencial decae en la energía obtenida usando la aproximación de Araujo y Oliveira cuando los agujeros se hacen mas similares, es

lo que se esperaba pues cuando hay menos simetría la segunda aproximación se hace importante porque considera dentro del potencial a los propios agujeros negros que al ser menos similares entre sí distorsionan más el espacio tiempo.

#### REFERENCIAS

- [1] Shapiro, S., Teukolsky, S. 1983, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, Wiley, USA
- [2] Araujo, M., Oliveira, S. 1994 *Static axisymmetric approach for the head-on collision of two black holes*, Physical Review, 52,1995
- [3] Subieta V., Nogales, J.A.C. 2002, *Colisión de dos agujeros negros*
- [4] Anninos, P., Hobill, D., Siedel, E., Smarr, L., y Suen, W. 1994 *The Head-On Collision of Two Equal Mass Black Holes*, NCSA report No. 048

## EXTENSIÓN DEL ESQUEMA DE INTEGRADORES SIMPLÉCTICOS EN EL MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL

Diego Sanjinés C.<sup>1</sup>

*Carrera de Física, U.M.S.A.*

### RESUMEN

Se presenta una generalización del esquema de operadores simplécticos en el método pseudo-espectral. Ya en trabajos anteriores [1], se utilizó la aproximación de segundo orden de este esquema y con ello se verificó analíticamente el fenómeno físico de la oscilación de Bloch. Surge entonces la cuestión de saber si este fenómeno es “sensible” al orden del integrador simpléctico elegido para simular numéricamente la dinámica de un electrón cristalino de enlace fuerte en un campo eléctrico estático y homogéneo. El resultado de este trabajo muestra que el periodo de la oscilación de Bloch, y probablemente todos los aspectos físicos relevantes de dicha dinámica, no dependen del orden del integrador.

### 1. INTRODUCCIÓN

El problema de representar la dinámica de un electrón en presencia de un campo eléctrico externo estático corresponde —como es sabido [2]— al cálculo de  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  como solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, junto con las variables dinámicas que dependen de  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  como ser los valores medios de posición, velocidad y ancho del paquete de ondas electrónico. La expresión formal de dicha solución es

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iH(t-t_0)} \Psi(\mathbf{r}, t_0) \quad (1)$$

donde  $H = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{r})$  es el hamiltoniano independiente del tiempo. Ya que los operadores de energía cinética  $T(\mathbf{p})$  y energía potencial  $V(\mathbf{r})$  en general no conmutan, el desarrollo del operador de evolución temporal  $\exp(-iH(t-t_0))$  en (1) tendrá un resultado no-trivial al actuar sobre un estado inicial  $\Psi(\mathbf{r}, t_0)$ , que —para el caso de un típico electrón cristalino— se puede tomar como un paquete gaussiano definido en una red. Las unidades físicas que se usará en este trabajo son aquellas denominadas “atómicas” (ver, por ejemplo, Yoshida [3]) donde  $\hbar = 1$ ,  $M$  (masa del electrón) = 1,  $e$  (carga del electrón) = 1 y  $a$  (constante de red) = 1.

Así, en la mayoría de los esquemas numéricos para simular la dinámica de un electrón cristalino [4], se busca separar el operador de evolución en (1) de forma aproximada, de manera tal que para  $t = t_1$  y  $t_1 - t_0 = \Delta t$ , la aplicación iterativa de (1) permita obtener el estado  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  para un instante arbitrario  $t = N\Delta t$  hasta un orden de aproximación  $O(\Delta t^{n+1})$ , donde  $n$  es un entero positivo. El esquema formal que permite dicha separación es el esquema de integradores simplécticos para sistemas hamiltonianos [3], y se puede describir como:

Para los operadores no-conmutativos  $T$  y  $V$ , el número real pequeño  $\Delta t$  y el entero positivo  $n$  (denominado *orden del integrador*, existen dos conjuntos de números reales  $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  y  $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$  tales que se cumple

$$e^{-i(V+T)\Delta t} = \prod_{m=1}^k e^{-ic_m V \Delta t} e^{-id_m T \Delta t} + O(\Delta t^{n+1}), \quad (2)$$

donde

$$\sum_{m=1}^k c_m = \sum_{m=1}^k d_m = 1. \quad (3)$$

Una condición física que debe cumplir el esquema descrito por (2) es la reversibilidad temporal, esto es,

$$e^{-iH\Delta t} e^{-iH(-\Delta t)} = e^{-iH(-\Delta t)} e^{-iH\Delta t} = 1, \quad (4)$$

lo que restringe el esquema en cuestión a integradores simplécticos de orden par [3]; sin embargo, el caso de  $n = 3$  se considerará más adelante solamente para efectos ilustrativos.

El caso trivial de (2) corresponde a  $n = k = 1$ , con  $c_1 = d_1 = 1$ . Para  $n = k = 2$  se encuentra  $c_1 = c_2 = 1/2$ ,  $d_1 = 1$  y  $d_2 = 0$ . En general, para valores de  $n > 2$  (integradores simplécticos de orden superior) se encuentra los conjuntos  $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  y  $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$  a través de aplicar a (2) la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [5]. Así, para  $n = k = 4$ , Yoshida y otros antes que él [3] obtuvieron los siguientes coeficientes (que aquí se escriben de forma aproximada):

$$c_1 = c_4 \cong 0.676, \quad c_2 = c_3 \cong -0.176, \\ d_1 = d_3 \cong 1.351, \quad d_2 \cong -1.702 \quad \text{y} \quad d_4 = 0. \quad (5)$$

<sup>1</sup>Email: sanjines@fiums.a.edu.bo

La separación de acuerdo a (2) para  $n = k = 2$  es particularmente útil en el contexto del método pseudo-espectral aplicado al estudio (en una dimensión) de la dinámica electrónica de enlace fuerte (*tight-binding*) en presencia de un campo eléctrico homogéneo y estático [1], pues de ello resulta la fórmula iterativa de evolución infinitesimal

$$C_m^{p+1} = \sum_n C_n^p e^{-i\alpha(n+m)\lambda} i^{n-m} J_{n-m}(z) + O(\Delta t^3), \quad (6)$$

donde los coeficientes  $C_n^p \equiv C_n(p\Delta t)$  describen al estado cristalino  $\Psi(x = na, t)$  en la representación de las funciones Wannier  $\Phi(x - ma)$ :

$$\Psi(x = na, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(t) \Phi(x - ma). \quad (7)$$

En (6) se tiene  $z = 2A\Delta t = 4A\lambda$ , con  $A$  el elemento de salto (*hopping*) entre sitios vecinos de una red cristalina separados por una constante de red unitaria  $a = 1$ ; la energía potencial correspondiente al campo eléctrico homogéneo de intensidad  $\alpha$  es  $V_n = \alpha n$  y  $J_m$  es la función de Bessel de primer tipo y orden entero  $m$ . La solución analítica de (6) representada por  $C_n^N$  para un instante arbitrario  $t = N\Delta t$  ya se conoce (cf. ec. (23) abajo) y se discutió ampliamente en otros trabajos [1]; en el límite de  $N \rightarrow \infty$  esta solución permite describir el fenómeno físico de la oscilación de Bloch con un periodo  $\tau_B = 2\pi/\alpha$ .

## 2. EXTENSIÓN DEL ESQUEMA DE INTEGRADORES SIMPLÉCTICOS

La cuestión natural que surge a continuación es saber cómo, a través de (2), una mayor “segmentación” del operador de evolución puede incorporarse en el método pseudo-espectral, es decir, para integradores simplécticos de orden mayor ( $n = 4, 6, 8, \dots$ ), ¿cuál es la correspondiente fórmula iterativa de evolución infinitesimal? ¿Cuál es la solución general de dicha fórmula? ¿Cómo depende el fenómeno físico de la oscilación de Bloch del orden del integrador  $n$  en (2)? Seguramente que la respuesta a esta última pregunta es “no”, pues la oscilación de Bloch, como fenómeno físico, debe depender solamente de la estructura del hamiltoniano  $H$  en (2), sin importar cuál sea su segmentación aproximada. La veracidad de esta afirmación debe reflejarse en el análisis que se presentará a continuación.

La respuesta a la primera pregunta está dada por la fórmula (8) a continuación, y resulta (ver [1] y referencias allí citadas) de una extensión natural de los pasos que llevaron del esquema de integradores simplécticos dado por (2) a la fórmula pseudo-espectral (6); así, para el integrador simpléctico de orden  $n$  se tiene:

$$C_{n_k}^{p+1} = \sum_{n_1, \dots, n_{k-1}} C_{n_1}^p \prod_{m=1}^k \exp(-ic_m V_{n_m} \Delta t) \times F(n_m - n_{m+1}, d_m) + O(\Delta t^{n+1}), \quad (8)$$

donde  $d_k = 0$ ,  $n_{k+1} = n_k$  y, para el caso de la banda de enlace fuerte  $T(k) = -2A \cos k$ , de tal forma que

$$F(n_m - n_{m+1}, d_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[k(n_m - n_{m+1})] \times \exp(2id_m A \Delta t \cos k) dk; \quad (9)$$

esta última integral en (7) se puede expresar en términos de la función de Bessel del primer tipo y orden entero, así que (8) se escribe finalmente como

$$C_{n_k}^{p+1} = \sum_{n_1, \dots, n_{k-1}} C_{n_1}^p \prod_{m=1}^k e^{-ic_m n_m \alpha \Delta t} i^{n_m - n_{m+1}} \times J_{n_m - n_{m+1}}(2d_m A \Delta t) + O(\Delta t^{n+1}). \quad (10)$$

Siguiendo el esquema de integradores simplécticos sugerido por Yoshida [3] la relación entre el orden del integrador  $n$  y el índice  $k$  en la multiplicatoria de (10) es  $n = k$  hasta  $n = 4$ ; sin embargo, para integradores de orden superior ( $n > 4$ ) dicha relación ya no se cumple necesariamente. Se puede ver que la fórmula (6) corresponde al caso de (10) con  $n = k = 2$ ,  $d_2 = 0$ ,  $n_3 = n_2$  y los coeficientes  $c_1 = c_2 = 1/2$ ,  $d_1 = 1$  y  $d_2 = 0$  (recordemos que  $J_0(0) = 1$ ). El siguiente paso lógico es tomar  $n = k = 3$ ,  $d_3 = 0$  y  $n_4 = n_3$  en (10), cuyo desarrollo es:

$$C_{n_3}^{p+1} = \sum_{n_1, n_2} C_{n_1}^p \times e^{-ic_1 n_1 \alpha \Delta t} i^{n_1 - n_2} J_{n_1 - n_2}(2d_1 A \Delta t) \times e^{-ic_2 n_2 \alpha \Delta t} i^{n_2 - n_3} J_{n_2 - n_3}(2d_2 A \Delta t) \times e^{-ic_3 n_3 \alpha \Delta t} i^{n_3 - n_4} J_{n_3 - n_4}(2d_3 A \Delta t) + O(\Delta t^4), \quad (11)$$

que se puede reacomodar como

$$C_{n_3}^{p+1} = \sum_{n_1} C_{n_1}^p e^{-i(c_1 n_1 + c_3 n_3) \alpha \Delta t} i^{n_1 - n_3} \times \sum_{n_2} e^{-i(c_2 n_2) \alpha \Delta t} J_{n_1 - n_2}(2d_1 A \Delta t) \times J_{n_2 - n_3}(2d_2 A \Delta t) + O(\Delta t^4), \quad (12)$$

de tal forma que la suma sobre  $n_2$  (que se designará como  $\Gamma$ ) se pueda calcular de acuerdo a la fórmula de adición de Graf [6]. El resultado es:

$$\Gamma = J_{n_1 - n_3}(\tau_{p+1}) e^{-i(n_3 - n_1) \chi_p + n_1 c_2 \alpha \Delta t}, \quad (13)$$

donde

$$\chi_p = \arctan \left[ \frac{\sin(c_2 \alpha \Delta t)}{d_2/d_1 + \cos(c_2 \alpha \Delta t)} \right], \quad (14)$$

$$\tau_{p+1} = \tau_1 \frac{\sin(c_2 \alpha \Delta t)}{\sin(\chi_p)}, \quad (15)$$

y  $\tau_1 = 2d_1 A \Delta t$ . Una aproximación útil —aunque poco precisa— para (14) y (15) es  $\chi_p \cong c_2 \alpha \Delta t / (d_2/d_1 + 1)$  y  $\tau_{p+1} \cong \tau_1 (d_2/d_1 + 1)$  respectivamente, con lo que  $\Gamma$  en (13) se puede escribir como

$$\Gamma \cong J_{n_1 - n_3}(\tau_1 (d_2/d_1 + 1)) \times \exp \left[ -ic_2 \alpha \Delta t \left( \frac{n_3 d_1 + n_1 d_2}{d_1 + d_2} \right) \right], \quad (16)$$

de tal manera que (12) queda como

$$C_m^{p+1} \cong \sum_n C_n^p e^{-i(A_n+B_m)\alpha\Delta t} i^{n-m} \times J_{n-m}(2A\Delta t), \quad (17)$$

donde se invocó la fórmula (3) y se definió  $\mathcal{A} = c_1 + c_2d_2$  y  $\mathcal{B} = c_3 + c_2d_1$ . Notemos que la fórmula (17) —aunque expresada con menor precisión que (12)— tiene la misma estructura matemática que (6) y, además, en vista de (3), se cumple que  $\mathcal{A} + \mathcal{B} = 1$ .

El caso que acabamos de ver corresponde al integrador simpléctico de tercer orden, es decir,  $n = k = 3$  en (2), pero ya se dijo a continuación de (4) que este caso no obedece el requisito físico de reversibilidad temporal. Así pues, antes de sacar mayores conclusiones de (17) sobre la extensión del esquema de operadores simplécticos en el método pseudo-espectral, debemos proceder a examinar el caso  $n = k = 4$  para el que existe reversibilidad temporal en (2). Esto implica básicamente sustituir  $k = 4$ ,  $d_4 = 0$  y  $n_5 = n_4$  en (10), y repetir el conjunto de pasos de (11) a (17) con las modificaciones apropiadas:

$$C_{n_3}^{p+1} = \sum_{n_1, n_2, n_3} C_{n_1}^p \times e^{-ic_1n_1\alpha\Delta t} i^{n_1-n_2} J_{n_1-n_2}(2d_1A\Delta t) \times e^{-ic_2n_2\alpha\Delta t} i^{n_2-n_3} J_{n_2-n_3}(2d_2A\Delta t) \times e^{-ic_3n_3\alpha\Delta t} i^{n_3-n_4} J_{n_3-n_4}(2d_3A\Delta t) \times e^{-ic_4n_4\alpha\Delta t} i^{n_4-n_5} J_{n_4-n_5}(2d_4A\Delta t) + O(\Delta t^5), \quad (18)$$

que se reescribe

$$C_{n_4}^{p+1} = \sum_{n_1, n_2} C_{n_1}^p e^{-i(c_1n_1+c_2n_2+c_4n_4)\alpha\Delta t} \times i^{n_1-n_4} J_{n_1-n_2}(2d_1A\Delta t) \times \sum_{n_3} e^{-ic_3n_3\alpha\Delta t} J_{n_2-n_3}(2d_2A\Delta t) \times J_{n_3-n_4}(2d_3A\Delta t) + O(\Delta t^5), \quad (19)$$

la suma sobre  $n_3$  se realiza por medio de la fórmula de adición de Graf y se aproxima de la misma forma que llevó a (16); el resultado se ordena como

$$C_{n_4}^{p+1} \cong \sum_{n_1} C_{n_1}^p i^{n_1-n_4} \times \exp\left[-i\left(c_1n_1 + c_4n_4 + \frac{c_3d_2n_4}{d_2 + d_3}\right)\alpha\Delta t\right] \times \sum_{n_2} \exp\left[-i\left(c_2 + \frac{c_3d_3n_2}{d_2 + d_3}\right)\alpha\Delta t\right] \times J_{n_1-n_2}(2d_1A\Delta t) J_{n_2-n_4}(2(d_2 + d_3)A\Delta t) \quad (20)$$

y de nuevo, se suma sobre el índice  $n_2$ . El resultado que queda después de simplificaciones es

$$C_{n_4}^{p+1} \cong \sum_{n_1} C_{n_1}^p e^{-i(A_{n_1}+B_{n_4})\alpha\Delta t} i^{n_1-n_4} \times J_{n_1-n_4}(2A\Delta t), \quad (21)$$

donde  $\mathcal{A} = c_1 + c_2d_2 + c_2d_3 + c_3d_3$ ,  $\mathcal{B} = c_2 + c_3 + c_4 - c_2d_2 - c_2d_3 - c_3d_3$ , verificándose también en este caso que  $\mathcal{A} + \mathcal{B} = 1$ . Debe notarse que este último resultado es *independiente* de los valores específicos de los conjuntos de coeficientes  $\{c_i\}$  y  $\{d_i\}$  en (5) hallados por Yoshida y otros autores [3], permitiendo que un aspecto físico importante como es la oscilación de Bloch, pueda dilucidarse (en el contexto del método pseudo-espectral) sin necesidad de recurrir a los intrincados recursos algebraicos derivados del uso de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [5]. Después de comparar (21) con (17) (para distintos valores de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  en cada caso) ya se puede proponer que

$$C_m^{p+1} \cong \sum_n C_n^p e^{-i(A_n+B_m)\alpha\Delta t} \times i^{n-m} J_{n-m}(2A\Delta t) \quad (22)$$

sea una simplificación adecuada de la fórmula iterativa de evolución infinitesimal (10). Los valores de  $\mathcal{A} = \mathcal{A}\{c_i, d_j\}$  y  $\mathcal{B} = \mathcal{B}\{c_i, d_j\}$  dependen a su vez de los conjuntos de coeficientes  $\{c_i\}$  y  $\{d_j\}$  dados por (2). Así, se sugiere que la condición  $\mathcal{A} + \mathcal{B} = 1$  se debería cumplir para cualquier orden de integrador simpléctico, conjetura que se verificará más adelante a partir de un requerimiento físico.

Ciertamente, la fórmula (22) ya no tiene la precisión de (10) y por ello es una aproximación muy pobre, sin embargo, su estructura matemática es más sencilla que la de (10): por ejemplo, los coeficientes  $\{d_i\}$  ya no se encuentran en el argumento de las funciones de Bessel, sino en la función exponencial. Esto permitirá una gran ventaja en el tratamiento analítico que se muestra a continuación.

La solución general para la ecuación iterativa (6) (que corresponde a  $\mathcal{A} = \mathcal{B} = 1/2$ ) ya se encontró [1] y se demostró por inducción. Esta solución general para el instante arbitrario  $t = N\Delta t$  es

$$C_n^N = \sum_r C_r^0 e^{in(\xi_N - \eta_N)} e^{-ir\xi_N} i^{r-n} J_{r-n}(\tau_N), \quad (23)$$

con

$$\tau_N e^{i\xi_N} = \tau_1 e^{i\phi_N} + \tau_{N-1} e^{i\xi_{N-1}}, \quad (24)$$

y

$$\phi_N = (\eta_N + \eta_{N-1})/2, \quad \eta_N = \eta_{N-1} + \alpha\Delta t. \quad (25)$$

A continuación se demostrará por inducción que (23) también es la solución general para (22), con las definiciones equivalentes a (24) y (25) donde se habrá hecho las sustituciones adecuadas. Tomando  $N = p$  en (23) y reemplazando en (22):

$$C_m^{p+1} = \sum_r C_r^0 i^{r-m} e^{-ir\xi_p} e^{-i\alpha m \mathcal{B} \Delta t} \times \sum_n e^{-in(\eta_p - \xi_p + \alpha A \Delta t)} J_{n-m}(2A\Delta t) J_{r-n}(\tau_p); \quad (26)$$

luego, se utiliza la fórmula de Graf para sumar sobre el índice  $n$  y se define en lugar de (25)

$$\eta_{p+1} = \eta_p + \alpha \Delta t (\mathcal{A} + \mathcal{B}), \quad (27)$$

con lo que se obtiene finalmente

$$C_m^{p+1} = \sum_r C_r^0 e^{im(\xi_{p+1} - \eta_{p+1})} e^{-ir\xi_{p+1}} i^{r-m} J_{r-m}(\tau_{p+1}). \quad (28)$$

Vemos pues que (28) corresponde a (23) con  $N = p + 1$ . Q.E.D.

Al comparar (27) y la segunda ecuación en (25), se ve que la sustitución adecuada debe ser  $\alpha \rightarrow (\mathcal{A} + \mathcal{B})\alpha$  a fin de garantizar que (23), junto con las cantidades ahí comprendidas, es la solución general de la ecuación iterativa infinitesimal (22) para cualquier “segmentación” u orden  $n$  del integrador simpléctico en (2). Por otra parte, el periodo  $\tau_B = 2\pi/\alpha$  de la oscilación de Bloch para un electrón cristalino en presencia de un campo eléctrico estático y homogéneo de intensidad  $\alpha$ , debe ser *independiente* de la forma particular que se haya elegido para “segmentar” el operador de evolución  $\exp[-iH(t-t_0)]$  en (1), así que necesariamente se debe cumplir la condición  $\mathcal{A}(c_i, d_j) + \mathcal{B}(c_i, d_j) = 1$  para todo orden de integrador simpléctico. Queda pues confirmada la conjetura citada arriba.

### 3. CONCLUSIONES

Se obtuvo la generalización (22) de la fórmula de evolución iterativa infinitesimal (6). Se mostró que (23) es la solución general (para  $t = N\Delta t$ ) de (22), y corresponde a una “segmentación” arbitraria del operador de evolución según el esquema de integradores simplécticos (2). Esta generalización —que consiste de una aproximación burda de (10)— es muy conveniente, pues así se verifica que (23) es válida tanto para el caso  $n = k = 2$ , que ya se había tratado en trabajos anteriores, como para cualquier otra “segmentación” mayor, siempre que se verifique la condición  $\mathcal{A}(c_i, d_j) + \mathcal{B}(c_i, d_j) = 1$ . Notemos que, a pesar de la pérdida de precisión de la fórmula aproximada (22) respecto a (10), (22) conserva la información de los coeficientes  $\{c_i\}$  y  $\{d_i\}$  de tal forma que se cumpla la referida condición. La validez de dicha condición se puede inferir a partir del requerimiento de que el fenómeno físico de la oscilación de Bloch deba permanecer invariante respecto al orden del integrador simpléctico elegido en (2). Una demostración directa (por construcción) de  $\mathcal{A}(c_i, d_j) + \mathcal{B}(c_i, d_j) = 1$  exigiría desarrollar un algoritmo eficiente para calcular los conjuntos de coeficientes  $\{c_i\}$  y  $\{d_j\}$  a través de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, por ejemplo, con la ayuda del paquete computacional de álgebra no-conmutativa “NCAlgebra” [7], pero el esfuerzo computacional se incrementa notablemente a medida que aumenta el orden del integrador. De manera equivalente, aunque no menos complicada, se podría verificar  $\mathcal{A}(c_i, d_j) + \mathcal{B}(c_i, d_j) = 1$

por construcción directa, sustituyendo (23) en (10) en lugar de (22), a fin de demostrar (23) por inducción. En el análisis matemático que se presentó en este trabajo, los valores específicos de  $\{c_i\}$  y  $\{d_j\}$  resultan innecesarios, pues se demostró que el periodo de la oscilación de Bloch, como uno de los aspectos relevantes de la dinámica electrónica de enlace fuerte en presencia de un campo eléctrico estático y homogéneo, no depende de dichos coeficientes.

Resulta interesante mencionar que el cálculo específico de  $\{c_i\}$  y  $\{d_j\}$  es un problema actual de relevancia en otras áreas, como por ejemplo en algunos sistemas dinámicos: el péndulo simple y el problema astronómico de tres cuerpos [8]. En estos casos, se muestra que los valores negativos de  $\{c_i\}$  y  $\{d_j\}$  pueden ocasionar problemas de “estabilidad” en el algoritmo numérico de integración de estos sistemas hamiltonianos. Ciertamente, para un cálculo numérico eficiente, siempre habrá un pequeño error acumulado en las fórmulas (22) y (23) para el integrador simpléctico de orden  $n$  en (2); sin embargo, es útil saber que existirán propiedades dinámicas que se mantengan invariantes ante la estructura específica de  $\{c_i\}$  y  $\{d_j\}$ , pues ello se podría utilizar, además de la condición (3), para encontrar dicha estructura.

Finalmente, mencionemos que para el hamiltoniano dependiente del tiempo  $H(t) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{r}, t)$ , la ec. (1) ya no es la solución formal de la ecuación de Schrödinger, por lo que la ec. (6) de evolución infinitesimal debe modificarse para incluir la variación temporal de  $V(\mathbf{r}, t)$ . En este caso, la extensión del esquema de integradores simplécticos (2) ya no es un asunto trivial, pero se conoce propiedades dinámicas invariantes [1] que servirían para calcular  $\{c_i\}$  y  $\{d_j\}$ . Este asunto permanece como un problema abierto interesante.

El autor expresa su agradecimiento al Prof. Dr. Jean-Pierre Gallinar (Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela), por su valiosa y oportuna colaboración en la revisión de este artículo.

### REFERENCIAS

- [1] Sanjinés D., Gallinar J.-P.; *Phys. Rev. B* **64**, 54301 (2001); *Rev. Boliviana de Física* **7**, 16 (2001).
- [2] Liboff R.L.; *Introductory Quantum Mechanics* (Holden-Day, 1980).
- [3] Yoshida H.; *Phys. Lett.* **A150**, 5, 262 (1990).
- [4] *Computer Physics Communications* **63** (1991). Todo este volumen está dedicado a métodos numéricos en dinámica cuántica.
- [5] Swanson M.; *Path Integrals and Quantum Processes* (Academic Press, 1992).
- [6] Abramowitz M., Stegun I.; *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1965).
- [7] Helton J.W., Stankus M., Miller R.; *The NCAlgebra SUITE* (<http://math.ucsd.edu/~ncalg>).
- [8] Laskar J., Robutel P.; *High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems* (<http://arxiv.org/list/astro-ph/0005074v1>, 4 May 2000).

## LA RADIACIÓN ULTRAVIOLETA B DIFUSA MEDICIONES EN COTA COTA, LA PAZ (3420 msnm)

R. Torrez

*Laboratorio de Física de la Atmósfera  
Instituto de Investigaciones Físicas—UMSA  
La Paz—Bolivia*

### RESUMEN

Con el empleo de una banda de sombra seccionada y un sensor de radiación ultravioleta tipo YES, se han realizado una serie de mediciones continuas durante aproximadamente 7 meses a partir de junio del año 2002, en un año con típicas características de efecto niño.

Las series de tiempo por la forma del diseño experimental presentan bandas casi equidistantes de variación continua con regiones de radiación global y regiones de radiación difusa. Estos datos se han procesado de manera de ajustar los máximos de la curva o envolvente superior a una curva polinomio exponencial, y de manera similar para los mínimos de la curva o envolvente inferior.

Con los datos filtrados por este proceso se ha determinado que la radiación ultravioleta B difusa, es en promedio, un tercio de la radiación UVB global, y varía ligeramente alrededor del año. Se ha observado valores máximos en los meses de mayo y agosto, y mínimos en los meses de junio y septiembre. En cuanto a su característica diaria, es máxima alrededor del medio día, y se prolonga ligeramente alrededor de esta hora, disminuyendo su intensidad hacia los extremos del día en la misma proporción a la radiación global.

### 1. INTRODUCCIÓN

La radiación ultravioleta B que abarca desde 280 hasta 320 nm es monitoreada en el Laboratorio de Física de la Atmósfera, con dos radiómetros UVB del tipo YES. Además de un espectro radiómetro BREWER, para efectos de comparación y monitoreo de la capa de ozono. Con estos instrumentos se ha determinado, entre otros resultados, que la radiación ultravioleta global en el altiplano andino presenta índices mucho mayores a los correspondientes al nivel del mar a la misma latitud. Esto hace suponer también que la radiación ultravioleta B difusa se incrementa, no sabiendo exactamente la forma de esta variación, ni su proporción en la radiación UVB global. Por esta razón se ha diseñado un experimento para determinar estas características.

### 2. ARREGLO EXPERIMENTAL

Es conocido el uso de la banda de sombra para la medición de la radiación solar difusa (Ref.1). En base a este diseño se ha preparado una banda de sombra seccionada (Fig.1), equidistantemente distribuida, y de igual proyección de área, de manera de tener una distribución de regiones de sombra y no sombra de igual ancho e igualmente espaciada, las figura 2 muestra un día de todos los registros tomados.

Debido a que el arreglo requiere de una corrección casi continua de la posición de la posición de la banda de sombra en el cursor, algunos registros presentan distorsiones por la sombra parcial de la banda, a causa

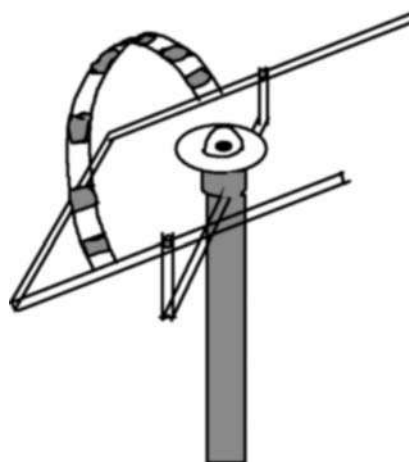


Figura 1. Arreglo experimental de la banda de sombra sobre el detector de UVB.

de correcciones no efectuadas. La banda seccionada de sombra tiene un radio de 19 cm, las placas de sombra tienen un ancho de 3 cm, y largos que varían desde 0.6 hasta 3 cm, y van localizadas cada 20°.

### 3. REGISTRO Y ANÁLISIS DE DATOS

Los registros obtenidos tienen la forma de la figura 2. Aunque varios de ellos están distorsionados por la presencia de nubes o por falta de corrección a la banda de sombra, en cualquier caso se puede identificar fácilmente

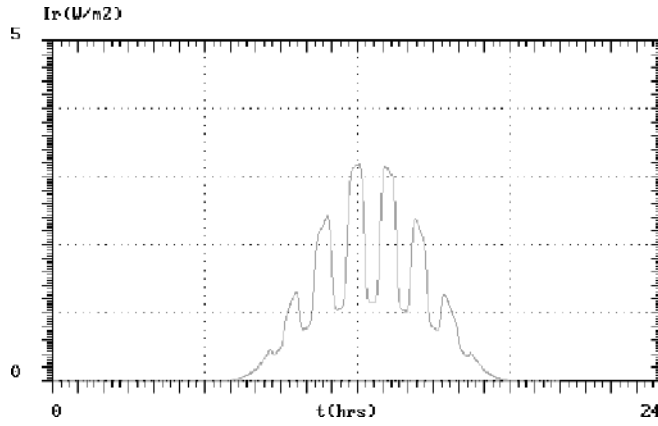


Figura 2. Gráfico de radiación ultravioleta global y difusa obtenida con la banda de sombra seccionada correspondientes al 3 de junio de 2002.

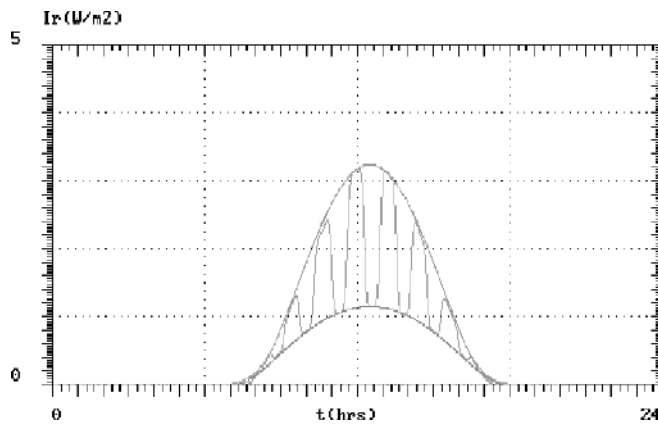


Figura 3. Ajuste de las funciones envolventes a las curvas de radiación global y difusa del gráfico anterior.

el tipo de distorsión del gráfico. Los registros con presencia de nubes no presentan las curvas onduladas de las figura 2, sino algo muy irregular, mientras que los registros con el defecto de falta de corrección de la posición de la banda de sombra, la envolvente inferior no se ajusta a la función polinomio exponencial.

Para seleccionar automáticamente los días claros y buenos, se ha realizado un proceso de comparación automático con los registros del otro sensor de radiación ultravioleta del mismo tipo, y con los registros de un sensor de radiación solar global, de manera que solo se han seleccionado los registros de UVB para los días con una curva solar muy regular, y que presenten una envolvente inferior simétrica. Este proceso ha permitido además validar el equipo con banda de sombra.

Los valores obtenidos según el proceso anterior, han sido sometidos a modelación tanto para la envolvente superior, como para la envolvente inferior de acuerdo a la función (Ref.3):

$$f(x) = a(x - b)^2(c - x)^2 e^{-d(x-e)^2}. \quad (1)$$

Donde los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , y  $e$  han sido evaluados por mínimos cuadrados, a través de un proceso iterativo. La figura 4 muestra el proceso de ajuste de dos funciones

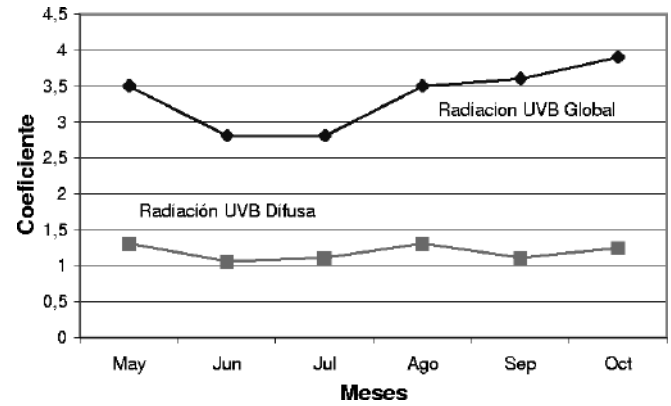


Figura 4. Variación en el periodo de observación de los coeficientes principales de las funciones envolventes. Se puede observar que el coeficiente de la radiación difusa varía ligeramente.

de este tipo a la envolvente superior y a la envolvente inferior.

Llamando  $G(x)$  a la envolvente superior, y  $D(x)$  a la envolvente inferior. El cociente de la última sobre la anterior; es decir  $D(x)/G(x)$  representará la función de proporción de la UVB-difusa sobre la UVB-global, o sea:

$$P(x) = D(x)/G(x), \quad (2)$$

puesto que los coeficientes  $b$ ,  $c$ , y  $e$ , son prácticamente similares para las dos envolventes, es decir; la hora de salida y entrada del sol, y la hora del medio día, y puesto que la forma de la curva no afecta esta proporción considerablemente, la relación anterior solo depende de los coeficientes principales  $a$  y  $a'$  de ambas funciones, es decir:

$$P = a/a'. \quad (3)$$

Donde  $a$  es el coeficiente principal de la función ajustada para la radiación difusa, y  $a'$  el correspondiente a la radiación global.

Para los registros tomados se han evaluado estos coeficientes en promedio, para los meses desde mayo hasta octubre, la figura 4 muestra la variación de estos coeficientes en el periodo de observación.

El aumento de la radiación UV global en los meses finales, podría atribuirse a los efectos del agujero de ozono antártico, que debido a las corrientes atmosféricas hacia el norte empobrece el ozono troposférico. El incremento de la radiación global significa recíprocamente reducción de la radiación difusa.

#### 4. ANÁLISIS DE ERRORES

De las varias fuentes posibles de error en las mediciones, como el albedo particular de la superficie donde están instalados los equipos de radiación UVB y radiación solar, la presencia muy particular de aerosoles en el lugar (polvo), y la masa del aire, no han sido considerados por la complejidad que significa el análisis de reflexiones múltiples y los demás factores, no obstante,

TABLA 1

Variación de los coeficientes  $a$  y  $a'$ .

Meses	$a'(W/m^2)$	$a(W/m^2)$	$R(\%)$
Mayo	3,5	1,3	37,14
Junio	2,8	1,05	37,50
Julio	2,8	1,1	39,29
Ago.	3,5	1,3	37,14
Sept.	3,6	1,1	30,56
Oct.	3,9	1,24	31,79
Prom.	3,35	1,18	

se establece que su influencia no es considerable para la longitudes de onda que corresponden a la radiación ultravioleta (Ref.2.p.156).

Otros factores como la presencia de obstáculos en las cercanías, así como del horizonte, permiten establecer que los valores obtenidos son ligeramente inferiores a los reales.

Por su mayor influencia, solo se ha considerado el efecto sombra de las cuadrículas de la banda seccionada en las mediciones tanto de la radiación global, como de la difusa. Esta disminución de la radiación difusa que no llega al sensor en ambos casos es tan solo del orden del 2%, dada la relación de áreas, de la banda, sobre el área de la semiesfera, a la altura del radio donde está ubicada la banda de sombra.

## 5. CONCLUSIONES

La Tabla 1 permite establecer que: a) La radiación ultravioleta B difusa varía ligeramente alrededor de  $1.18W/m^2$ , lo que representa aproximadamente un 35% de la radiación UVB global. b) Presenta valores mínimos en los meses de junio y septiembre; de aproximadamente  $1.1W/m^2$ . c) Presenta valores máximos en los meses de mayo y agosto, donde alcanza  $1.3W/m^2$ .

Por el gráfico, se observa también que la radiación ultravioleta B difusa varía suavemente comparado con la variación de la radiación ultravioleta global de la que depende. En términos porcentuales la radiación difusa varía entre 30 y 40% de la radiación global, lo que significa por sí mismo, valores altos teniendo en cuenta los elevados índices de radiación ultravioleta que se registran en la ciudad de La Paz.

## AGRADECIMIENTOS

El autor expresa su agradecimiento a los investigadores del Laboratorio de Física de la Atmósfera y al personal administrativo del Instituto de Investigaciones Físicas por toda la cooperación brindada en la realización del experimento.

## REFERENCIAS

- [1] M. Iqbal. *Introducción a la radiación solar*. 1983. Academic Press.
- [2] M. Peñafiel. *Revista Boliviana de Física* No.7. 2001. Ed. Carrera de Física.
- [3] J. García. *Estudio Comparativo de dos Radiómetros YES*. 2002. LFA.
- [4] *UVB-1 Ultraviolet Pyranometer. Installation and User Guide*. 1997. YES Inc.

## DETERMINACIÓN DEL ESPESOR ÓPTICO DE LA ATMÓSFERA EN LA CIUDAD DE LA PAZ

R. Torrez, E. Palenque

*Laboratorio de Física de la Atmósfera  
Carrera de Física—Instituto de Investigaciones Físicas, UMSA  
La Paz—Bolivia*

### RESUMEN

Por las especiales características de la ciudad de la Paz, ( $16.5^{\circ}S$ ,  $68.2^{\circ}W$ ) principalmente con respecto a su altura sobre el nivel del mar; por encima de los  $3500m$ , reducidos niveles de contaminación atmosférica, además de su prolongada época seca, se hace importante determinar la profundidad óptica de su atmósfera, y su variación anual, con el objeto de compararlos con el correspondiente a ciudades similares a nivel del mar. Para este propósito recurrimos a las conocidas expresiones de la atenuación atmosférica de Bouguer o Beer-Lambert, considerando que la atmósfera es una capa plana, de densidad homogénea, y donde no se considera la refracción de los rayos solares. Los resultados obtenidos son satisfactorios para una gran cantidad de casos, principalmente situados a principios y finales de año, sin embargo, en una cantidad considerable de días, principalmente de cielo muy claro y ángulos cenitales muy altos el modelo no satisface plenamente los valores observados, que consisten en una cantidad de radiación solar apreciable en contraste con cero del modelo tradicional. Este problema nos ha llevado a establecer, una nueva expresión para determinar la atenuación de la radiación solar, principalmente a ángulos cenitales muy altos, o lo que es lo mismo, elevaciones muy bajas del sol. Esta expresión toma en cuenta la esfericidad de la tierra, y por consiguiente hace posible obtener atenuaciones finitas aún a ángulos muy altos. El modelo está basado en el triángulo formado entre el camino directo cenital, el camino máximo sobre el horizonte, y la línea recta que une ambos puntos. En el presente trabajo se presenta estos valores evaluados para diferentes épocas del año, observándose un particular comportamiento de la atmósfera en la ciudad de La Paz.

El valor medio anual de la máxima radiación solar incidente en la ciudad de La Paz, vale aproximadamente  $955W/m^2$ , resultando un coeficiente de atenuación de 0.35 por unidad de columna atmosférica, y que varía entre 0.20 y 0.45, de acuerdo con los valores máximo y mínimo calculados de:  $1120W/m^2$  en el primer trimestre y de  $866W/m^2$ , en el tercer trimestre.

### 1. LAS SERIES DE DATOS

El Laboratorio de Física de la Atmósfera localizado en la ciudad de La Paz ( $16.5^{\circ}S$ ,  $68.2^{\circ}W$  y  $3420 m.s.n.m$ ) dispone de una estación meteorológica, entre otros varios equipos de medición de radiación ultravioleta, aerosoles, y algunos gases contaminantes como CO y CO<sub>2</sub>. Los datos que entrega la estación meteorológica consisten de radiación solar global y directa, humedad, velocidad de viento, temperatura, presión atmosférica, y son registrados y almacenados cada minuto en un datalogger Campbell CR-10X. Las medidas de radiación solar directa que se emplean en este trabajo han sido obtenidas con un pirheliometro Eppley modelo NIP incluyendo su sistema de seguimiento solar.

La serie de datos de radiación solar directa consiste en aproximadamente  $5 \times 10^5$  registros, y que datan desde noviembre de 1999. Algunos días típicos de esta serie se muestran en las figuras 1 y 2.

La figura 1 muestra tres días de radiación directa

registrada en los primeros días de abril del año 2000, se puede observar que la envolvente de esta curva tiene la forma de una parábola achatada, cuyo límite es una línea recta de valor constante, que correspondería al caso de una atmósfera totalmente transparente (sin absorción y sin dispersión).

Observando más detalladamente el primer día de esta serie (figura 2), la radiación solar se reduce o queda cortada abruptamente a ángulos cenitales muy altos, es decir a la salida y puesta del sol en el horizonte. Se puede observar entonces que ésto depende únicamente de la claridad de la atmósfera.

Para eliminar en las series de tiempo los momentos de interrupción o atenuación de la radiación directa debido a la interposición de nubes u otros fenómenos que hacen sombra al detector, se ha modelado la envolvente del registro anterior a una función potencial de exponente par, de la forma:

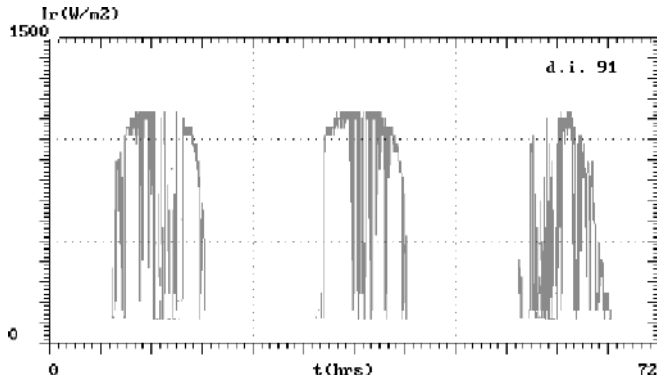


Figura 1. Registro de la radiación solar directa en Cota Cota durante los primeros días del mes de abril del año 2000.

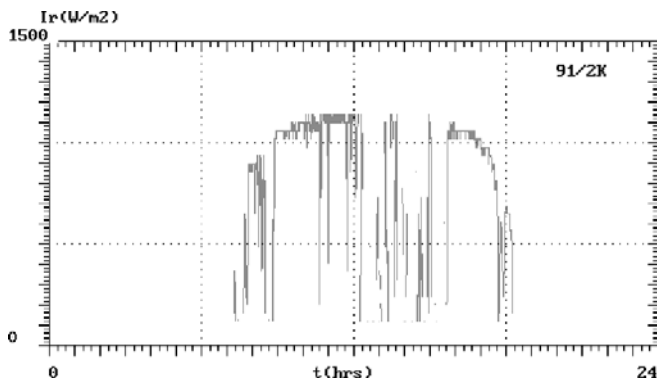


Figura 2. Registro de radiación solar directa del día 31 de marzo del año 2000 en Cota Cota, La Paz.

$$y = a + b\left(\frac{x}{c} - 1\right)^n. \quad (1)$$

Donde  $c$  representa la posición temporal en minutos correspondiente al medio día,  $b$  ajusta la curva a los puntos de salida y puesta del sol en el horizonte,  $a$  nos permite ajustar la máxima irradiancia solar diaria registrada, y finalmente el exponente  $n$  conforma el ancho de la curva hacia los valores máximos de la función.

Se ha realizado este proceso ajustando los valores de los registros a la función eliminando los datos más alejados, en un proceso iterativo hasta obtener los valores más altos en el coeficiente de correlación. La figura 3 muestra la función filtro aplicado a otro registro del mismo grupo.

De esta manera realizando el proceso para doce días consecutivos por trimestre, se han obtenido una serie de registros promedio para la radiación solar directa por periodo, de manera de obtener también promedios para los coeficientes de atenuación de la atmósfera.

La figura 4 muestra los resultados de este proceso, aplicado al primer grupo de registros (12 primeros días del mes de abril del 2000). Se puede observar en este gráfico que las perturbaciones han sido completamente filtradas.

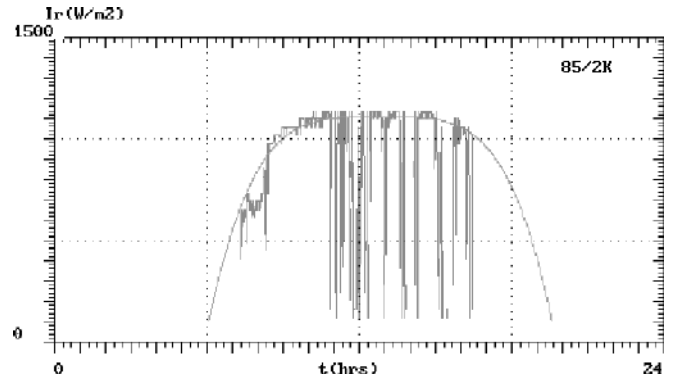


Figura 3. Registro de la radiación solar directa con la función filtro de perturbaciones.

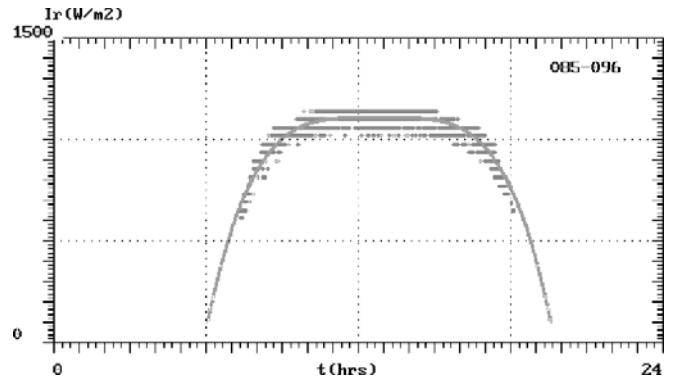


Figura 4. La radiación solar directa en los primeros doce días del mes de abril del 2000.

## 2. EL MODELO DE CAPA ATMOSFÉRICA

El modelo tradicional de capa atmosférica plana (M. Iqbal p.97-99), presenta limitaciones hacia elevaciones del sol muy pequeñas, estableciendo una completa opacidad de la atmósfera en estas posiciones, resultado que no es satisfactorio, especialmente para las condiciones de la mayor parte de regiones de nuestro altiplano, donde el cielo es particularmente claro, la atmósfera considerablemente seca una gran parte del año, y en un terreno prácticamente plano. Con estas condiciones es previsible tener valores de radiación solar directa considerables con el sol en el horizonte, tanto a la salida como a la entrada del sol.

De esta manera, en lugar de una capa horizontal plana, consideramos una capa de atmósfera en forma de cuña, cuya altura es la elevación de la atmósfera sobre el punto de observación, y cuya base es la mitad de la secante a la atmósfera que pasa por el punto indicado, que a la vez es el punto tangente a la tierra en el mismo lugar (fig. 5).

Por consideraciones trigonométricas, el camino óptico a elevación cero, o lo que es lo mismo, al ángulo cenital máximo, puede ser expresado en términos del radio de la Tierra ( $R$ ), y la altura de la atmósfera ( $h$ ) en la siguiente forma:

$$L = \sqrt{h(2R + h)}. \quad (2)$$

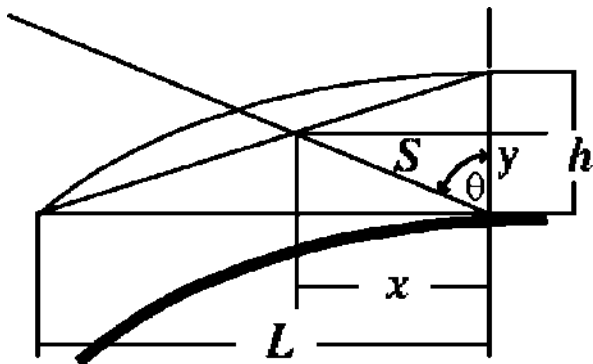


Figura 5. Diagrama de distancias para el modelo de cuña propuesto. Se puede observar que la aproximación a la trayectoria real es mayor a elevaciones menores.

Que se puede aproximar a:

$$L = \sqrt{2Rh}. \quad (3)$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{h}{L} = \frac{y}{L-x}. \quad (4)$$

Luego:

$$S = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (5)$$

o sea:

$$S = h \left( \frac{1}{\frac{h}{L} \operatorname{sen} \theta + \cos \theta} \right). \quad (6)$$

Luego, la diferencia de camino óptico respecto al camino cenital será:

$$S - h = h \left( \frac{1}{Q \operatorname{sen} \theta + \cos \theta} - 1 \right), \quad (7)$$

donde:

$$Q = \sqrt{\frac{h}{2R}}. \quad (8)$$

Luego, por la ley de Beer-Lambert aplicada a la irradiancia medida en función del incremento del camino óptico, tendremos:

$$I_S = I_0 e^{-mh \left( \frac{1}{Q \operatorname{sen} \theta + \cos \theta} - 1 \right)}. \quad (9)$$

Donde  $m$  es el coeficiente de atenuación por unidad de distancia, e  $I_S$  la irradiancia medida en función del ángulo cenital conforme al movimiento diario del sol.

Cambiando  $mh$  por  $\alpha$ , es decir, atenuación por unidad de columna atmosférica, y denominando  $x$  a la expresión:

$$x = \left( \frac{1}{Q \operatorname{sen} \theta + \cos \theta} - 1 \right), \quad (10)$$

la irradiancia solar puede expresarse entonces como:

$$I_S = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (11)$$

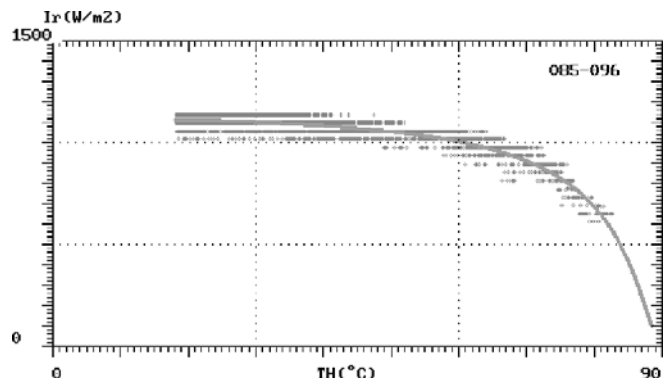


Figura 6. Dispersión de los registros y curva de ajuste para el modelo propuesto.

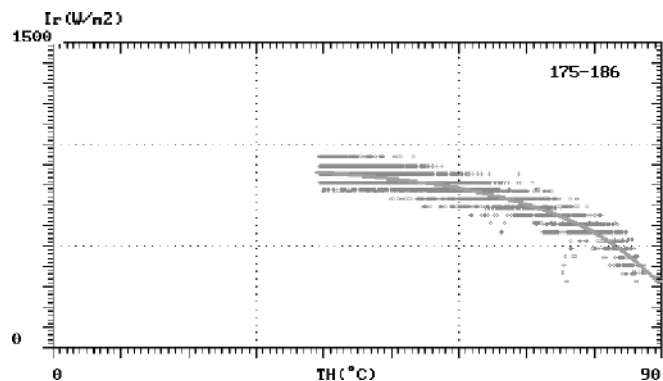


Figura 7. Dispersión de los registros y curva de ajuste para el grupo de datos correspondiente al tercer trimestre.

que ajustando por mínimos cuadrados a los datos reales nos permitirá determinar las constantes  $I_0$  y  $\alpha$ .  $I_0$  es la irradiancia cenital, y  $x$  es el aumento de la profundidad atmosférica en otras posiciones del sol, en unidades de columna atmosférica, es decir, de la profundidad óptica.

Debido a que  $\alpha$  contiene en su expresión al término  $h$  que se desconoce,  $Q$  se estimará por un proceso iterativo que dé como resultado el mayor coeficiente de correlación.

### 3. RESULTADOS DEL MODELO

Para realizar el ajuste de los datos al modelo requerimos determinar previamente el valor de  $Q$ , que depende de la altura de la capa de la atmósfera. Para tal efecto partiremos de la condición de atmósfera plana,  $Q = 0$ , incrementando gradualmente su valor hasta obtener el mayor coeficiente de correlación.

Realizado este proceso, las figuras 6 y 7 muestran la dispersión de los datos y la curva ajustada para dos de los grupos considerados. Como se puede ver en estas gráficas el ajuste es completamente satisfactorio, presentando coeficientes de correlación superiores a 0.9. La Tabla 1 muestra los valores de  $I_0$ , la atenuación correspondiente, y el valor del parámetro  $Q$ .

Tomando en consideración el valor de la constante solar, y los valores de  $I_0$  obtenidos anteriormente, podemos determinar los coeficientes de atenuación absoluta para cada uno de los cuatro grupos considerados. Normalizan-

TABLA 1

Irradiancia cenital ( $I_0$ ) y atenuación relativa ( $\alpha$ ).

$I_0(W/m^2)$	$\alpha(1/atm)$	$Q$
1121,03	1,00	0,02
891,32	2,16	0,19
866,97	2,30	0,15
941,05	1,88	0,19

do éstos a la condición de menor atenuación nos permite obtener los correspondientes coeficientes relativos para los otros grupos.

#### 4. CONCLUSIONES

Como se puede observar en las gráficas, el modelo refleja satisfactoriamente los registros reales, observándose que evidentemente sobre el horizonte o a elevaciones muy reducidas la radiación solar es apreciable.

Sin embargo los resultados obtenidos presentan

algunos problemas de interpretación, como que siendo el coeficiente de atenuación relativo superior a 1, la radiación directa sobre el horizonte sea aún muy apreciable, ésto sugiere el efecto de una obstrucción a la radiación, muy localizada y orientada en la dirección de la vertical, como podría ser la presencia de aerosoles y otros contaminantes sobre la ciudad.

#### AGRADECIMIENTOS

Merecen especial reconocimiento los colegas del Laboratorio de Física de la Atmósfera, por toda la colaboración prestada en la realización del proyecto que ha dado lugar a este artículo.

#### REFERENCIAS

- [1] M. Iqbal. *An Introduction to Solar Radiation*. 1983. Academic Press.
- [2] K. Coulson. *Solar and Terrestrial Radiation*. 1975. Academic Press.
- [3] N. Robinson. *Solar Radiation*. 1966. Elsevier.
- [4] E.J. McCartney. *Optics of the Atmosphere*. 1976. Jhon Wiley and Sons.

## UN EVENTO DE TIPO HALO DETECTADO CON CÁMARA DE EMULSIONES Y ARREGLO PARA CHUBASCOS EN EL MONTE CHACALTAYA

H. Aoki<sup>1</sup>, K. Hashimoto<sup>2</sup>, K. Honda<sup>3</sup>, N. Inoue<sup>4</sup>, N. Kawasumi<sup>2</sup>,  
 N. Martinic<sup>5</sup>, C. Navia<sup>6</sup>, N. Ochi<sup>7</sup>, N. Ohmori<sup>8</sup>, A. Ohsawa<sup>9</sup>,  
 L.C.Oliveira<sup>10</sup>, K.Shinozaki<sup>9</sup>, M.Tamada<sup>11</sup>, R.Ticona<sup>5</sup>, I.Tsushima<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias, Universidad de Soka, Hachioji, Tokio, 192-8577, Japón

<sup>2</sup>Facultad de Educación, Universidad de Yamanashi, Kofu, 400-8510, Japón

<sup>3</sup>Facultad de Ingeniería, Universidad de Yamanashi, Kofu, 400-8510, Japón

<sup>4</sup>Facultad de Ciencias, Universidad de Saitama, Saitama, 388-8570, Japón

<sup>5</sup>Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia

<sup>6</sup>Departamento de Física, Universidad Federal Fluminense, Niteroi, RJ, Brasil

<sup>7</sup>Universidad de Ciencias de Okayama, Okayama, 700-0005, Japón

<sup>8</sup>Facultad de Ciencias, Universidad de Kochi, Kochi, 780-8520, Japón

<sup>9</sup>Instituto de Investigación en Rayos Cósmicos, Universidad de Tokio, Kashiwa, 277-8582, Japón

<sup>10</sup>Centro Brasileño de Investigaciones Físicas, Río de Janeiro, RJ, Brasil

<sup>11</sup>Facultad de Ciencias e Ingeniería, Universidad de Kinki, Higashi-Osaka, 577-8502, Japón

### RESUMEN

Se tiene un experimento híbrido en funcionamiento en el Monte Chacaltaya (5200msnm, Bolivia) en cual se operan en forma simultánea un arreglo de chubascos atmosféricos, un calorímetro de hadrones y una cámara de emulsiones. Con este conjunto se detectó un evento de tipo halo, con un área ennegrecida de cerca  $\sim 1\text{cm}$  sobre la película de rayos X de la cámara de emulsiones, de la cual se extrajo información sobre el halo ( $E_{\text{halo}} = 850\text{TeV}$ ) y sobre las partículas de alta energía de las componentes electromagnéticas y hadrónicas fuera del halo ( $\sum E_{\gamma} = 632.5\text{TeV}$  y  $\sum E_h^{(\gamma)} = 278.8\text{TeV}$  con un umbral de detección de  $2\text{TeV}$ ). Los detalles de los hadrones de baja energía se determinaron a partir de los datos del calorímetro de hadrones, y las características del chubasco acompañante ( $N_e = 7.0 \times 10^7$ ,  $s = 0.59$ ) se obtuvieron del otro arreglo. Se reconstruyó el evento sobre la base de los datos observados. Además, el evento observado se comparó con simulaciones, lo que apoya la conclusión que las interacciones nucleares cambian sus características en la región de alta energía, lo que resulta en una división muy marcada para cada energía.

### ABSTRACT

An hybrid experiment to operate simultaneously an air shower array, an hadron calorimeter and emulsion chamber is under way at Mt. Chacaltaya (5200m, Bolivia). An event with an halo, a blackened area of  $\sim 1\text{cm}$  on X-ray film of the emulsion chamber, was observed with the experiment. Information about the halo ( $E_{\text{halo}} = 850\text{TeV}$ ) and on high energy particles of electromagnetic and hadronic components outside the halo ( $\sum E_{\gamma} = 632.5\text{TeV}$  and  $\sum E_h^{(\gamma)} = 278.8\text{TeV}$  with a detection threshold of  $2\text{TeV}$ ) was obtained from emulsion chamber data. Details about low energy hadrons were determined from the hadron calorimeter data, and characteristics of the accompanying air shower ( $N_e = 7.0 \times 10^7$ ,  $s = 0.59$ ) were determined by the air shower array. We reconstruct the event, based on the observed data. The event is compared with simulated events, which supports the conclusion that nuclear interactions change their characteristics in the high energy region so as to result in stronger energy subdivision.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los estudios sobre las estructuras de los chubascos atmosféricos, como el desarrollo de sus componentes (hadrones, electrones y fotones, muones) así como la interrelación entre ellas, en el rango ( $10^{15} - 10^{17}$ )eV, son importantes porque proveen claves sobre la identidad

de las partículas primarias que los originaron, además de información sobre las interacciones nucleares de alta energía. Los estudios sobre el desarrollo de los chubascos son especialmente importantes para tratar de identificar partículas primarias sean rayos gamma, protones o núcleos pesados. La relación entre las componentes del

chubasco es la única fuente de información en la región energética por encima de los  $10^{16} eV$ . La información que se obtiene del estudio de los chubascos atmosféricos está relacionada a la región frontal de las partículas en colisión, a la cual no se puede acceder en los experimentos realizados con los aceleradores.

En un experimento típico de chubascos atmosféricos, los detectores consisten en un arreglo para medir la densidad o el tamaño del chubasco (la cantidad de partículas cargadas en el chubasco) y también detectores de hadrones o de muones para medir las otras componentes del chubasco. La información sobre la estructura de los chubascos atmosféricos es limitada en los arreglos convencionales para detectar chubascos debido a que la energía umbral de las partículas detectadas es muy baja. Por ejemplo, el tamaño del chubasco atmosférico (que incluye a todas las partículas con energía  $E \geq 0$  sólo depende de la energía de la partícula primaria, pero no de la naturaleza de ésta, o del mecanismo de las reacciones nucleares, etc <sup>1</sup>. Las partículas con energías más altas nos dan información más directa sobre el origen y la estructura del chubasco atmosférico.

Las cámaras de emulsión permiten la detección de partículas de alta energía (superiores a  $1TeV$ ) de la componente electromagnética (fotones y electrones, referidos de aquí en adelante como rayos gamma) y la componente hadrónica. Además, permite medir la posición y la energía de estas partículas con gran precisión ( $\Delta x \cong 50\mu m$  y  $\Delta E/E \cong 20\%$ ). De ahí que un experimento híbrido operando simultáneamente una cámara de emulsiones y un arreglo para chubascos, tiene grandes beneficios para el estudio de la estructura de los chubascos atmosféricos. Un experimento de ese tipo se lleva a cabo en el Monte Chacaltaya ( $5200msnm$ , Bolivia) [1,2]

El experimento actual permite un estudio efectivo de la estructura de los chubascos atmosféricos, de las interacciones nucleares que inician el chubasco y del número másico de las partículas primarias del rayo cósmico.

Un resumen de estos aspectos es:

- (1) Un chubasco atmosférico con un tamaño mayor a  $10^7 eV$  siempre está acompañado de una “familia”, un haz de rayos gamma de alta energía y de hadrones que se detectan con la cámara de emulsiones.
- (2) En la región de tamaños pequeños, un chubasco atmosférico puede o no estar acompañado de una familia, dependiendo de las fluctuaciones del chubasco. Esta es la razón por la cual no se encuentra una correlación fuerte entre el tamaño del chubasco atmosférico y la energía de la familia (que es la energía total observada para la familia). O sea, las energías de las familias tienen una amplia distribución para un tamaño dado del chubasco atmosférico.

<sup>1</sup> Por supuesto, esto no es un problema. El tamaño del chubasco atmosférico a la altura de su máximo desarrollo nos da una muy buena medida de la energía de la partícula primaria que inició el chubasco.

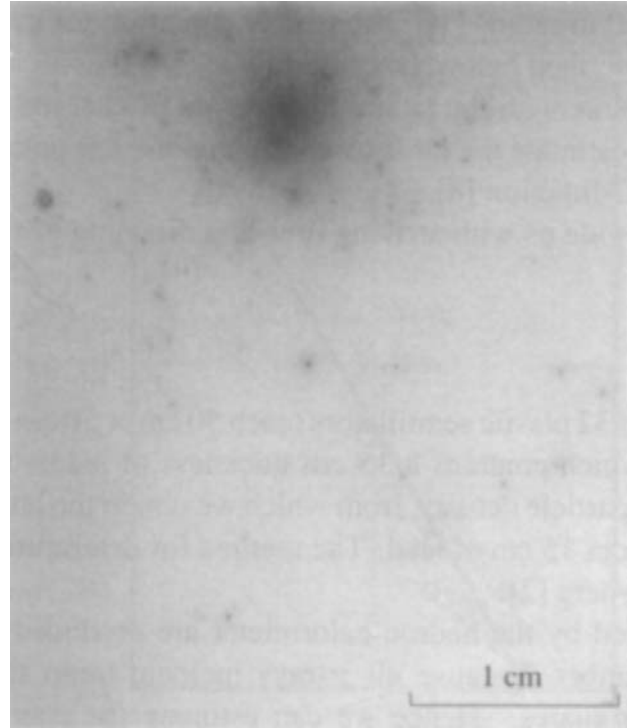


Figura 1. El halo y las cascadas en la película de rayos X a una profundidad de  $7cmPb$  en la cámara de emulsión. El halo alcanza su máximo desarrollo a esta profundidad.

- (3) Las cantidades promedio de los rayos gamma de alta energía y de los hadrones en el chubasco atmosférico, según lo observado con la cámara de emulsiones, no se pueden describir por las simulaciones de la propagación de los rayos cósmicos en la atmósfera. Estas simulaciones suponen verdaderos los modelos UA5 [3], QGSJET [4], VENUS [5] y HDPM [6] para las interacciones nucleares de alta energía. Esta conclusión vale independientemente de la hipótesis sobre la intensidad del rayo cósmico primario, dada la naturaleza híbrida del experimento.
- (4) El anterior punto (3) nos indica que la subdivisión por energía durante el desarrollo del chubasco es más fuerte que lo supuesto por las simulaciones. Entonces, una composición química más pesada del rayo cósmico inicial (que es un proceso posible para dar una mayor subdivisión energética) no puede describir completamente la discrepancia entre los datos experimentales y los eventos simulados. Lo más probable es que la interacción nuclear cambie sus características de manera tal que la subdivisión energética sea mayor en la región de altas energías.
- (5) El valor promedio del número másico de los rayos cósmicos primarios es  $\langle \ln A \rangle = 2.8 \pm 0.5$  para las energías cercanas a  $10^{16} eV$ . Este valor es independiente de los detalles característicos de las interacciones nucleares de alta energía.

Durante el análisis descrito se ha excluido un even-

to de alta energía que es del tipo “halo” de  $\sim 1\text{cm}$  de diámetro al centro de la familia, rodeado de varios otros chubascos distribuidos alrededor y ocupando un área de  $10\text{cm}$  de diámetro (figura 1). Un halo se define como la región ennegrecida de una placa de rayos X que tenga más de  $1\text{cm}$  de diámetro, lo que no puede ser producido por un único rayo gamma que arribe a la cámara de emulsión. Debido a esa causa, el proceso rutinario de análisis de los datos de la cámara de emulsión no se aplica a los eventos de tipo halo, y más bien se requiere un análisis especial, como el que se reporta en este trabajo.

Los eventos de tipo halo fueron identificados como tales desde 1969 con la cámara de emulsiones en Chacaltaya, en el experimento conjunto de la Colaboración Brasil-Japón [7]. El primer evento detectado fue bautizado como Andrómeda, y tenía un halo de  $5\text{cm}$  de diámetro con varios cientos de chubascos inducidos por rayos gamma y por hadrones. Los chubascos se distribuyeron en una región de  $10\text{cm}$  de diámetro alrededor del halo. La energía total del halo fue estimada en  $2 \times 10^{16}\text{eV}$ . Desde entonces más de diez eventos de ese tipo se han registrado en una serie de exposiciones en el Monte Chacaltaya. El presente trabajo es el primer paso de nuestro análisis extensivo de los eventos de tipo halo, incluyendo a los detectados por la Colaboración Brasil-Japón. La base de este trabajo está en la disponibilidad de los datos, tanto del arreglo para chubascos atmosféricos como de la cámara de emulsiones.

## 2. ARREGLO EXPERIMENTAL

### 2.1. Arreglo para los chubascos atmosféricos

El Arreglo para los chubascos atmosféricos consiste en cinco detectores de tiempo rápido y 35 detectores de densidad (31 de los cuales son de  $0.25\text{m}^2$  y 4 de  $1\text{m}^2$ ), siendo que todos utilizan un plástico de centelleo. Los detectores de densidad están esparcidos en un área circular con  $50\text{m}$  de radio [1]. La condición umbral para que el evento sea registrado es que cualquiera de los detectores de avanzada presente una densidad de  $n_b > 10^3$ .

Los detectores de densidad nos proveen con la distribución lateral de la densidad de partículas cargadas dentro del chubasco atmosférico, y a partir de esa distribución, se estiman tanto el tamaño como la edad del chubasco mediante el ajuste a función NKG para la distribución lateral.

Los detectores de avanzada nos informan sobre el tiempo y la dirección de arribo del chubasco.

### 2.2. El calorímetro de hadrones

El calorímetro de hadrones consiste de 32 plásticos de centelleo (cada uno de  $50\text{cm} \times 50\text{cm} \times 5\text{cm}$ ) colocados debajo de la cámara de emulsión, la cual contiene un espesor de  $15\text{cm}$  de plomo. Los centelleadores nos dan un mapa de la densidad de las partículas cargadas y a partir de éste se obtiene la distribución lateral de las partículas cargadas por debajo de la capa de plomo. El método para hallar el centro de la distribución está descrito en la literatura [2].

Las partículas cargadas que son detectadas por el calorímetro de hadrones están producidas por los hadrones que llegan a la cámara de emulsión, ya que todos los rayos gamma que arriban a la misma son absorbidos por la placa de plomo de  $15\text{cm}$  de espesor. Por tanto, es posible estimar el espectro de energía de los hadrones que inciden en la cámara de emulsión, a partir de la distribución lateral de las partículas cargadas [2].

Un evento que se puede observar en el calorímetro de hadrones se denomina “explosión” (*burst*). La relación entre los chubascos atmosféricos y las explosiones, que se miden con detectores independientes, viene dada a partir de la coincidencia de sus tiempos de arribo.

### 2.3. La cámara de emulsión

La cámara de emulsión consiste en capas alternadas de placas de plomo metálico y películas de rayos X. La cámara utilizada aquí tiene 32 bloques (cada uno de  $50\text{cm} \times 50\text{cm}$ ) y contiene  $15\text{cm}$  de espesor de plomo. Las placas sensibles (película de rayos X) se colocan debajo de cada centímetro de plomo, excepto por la más próxima a la parte alta, que queda vacía.

Los rayos gamma de alta energía que llegan a la cámara, producen chubascos de electrones dentro de la cámara, a través de interacciones electromagnéticas en cascada. Por otro lado, los hadrones producen una componente electromagnética a través de las colisiones  $h-Pb$ , que originan cascadas de electrones. Las cascadas de electrones, independientemente de su origen, aparecen como pequeños puntos negros sobre las placas de rayos X al ser reveladas. Como una cascada se desarrolla a través de varios centímetros, es detectada por varias placas sucesivas de rayos X.

La opacidad ( $D$ ) (también llamada “oscurecimiento”) de los puntos de la cascada se mide con un microfotómetro de apertura  $200\mu\text{m} \times 200\mu\text{m}$ . La forma en la opacidad se desarrolla respecto de la profundidad alcanzada, se denomina curva de transición, y nos permite estimar tanto la energía como el punto de inicio  $\Delta t$  de la cascada dentro de la cámara, apoyados en la teoría de cascadas [9]. El umbral de detección de las cascadas está alrededor de  $1\text{TeV}$ , dependiendo de las condiciones experimentales. Debe notarse que la energía observada en la cascada inducida por un hadrón  $E_h^{(\gamma)}$  no es la energía del hadrón  $E_h$  sino que es la energía de los rayos gamma producidos en la colisión del hadrón con un átomo de plomo, o sea,  $E_h^{(\gamma)} = k_\gamma E_h$ , donde  $k_\gamma$  es la inelasticidad del rayo gamma.

La separación de los chubascos electromagnéticos y hadrónicos se puede realizar a partir del punto de inicio del chubasco, ya que los recorridos libres medios son muy diferentes dentro del plomo, que respectivamente son de  $X_0 = 0.57\text{cm}$  (la longitud de radiación) y de  $\lambda_{coll} = 18.0\text{cm}$  (el recorrido libre medio del nucleón).<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Nótese que los chubascos inducidos por hadrones que tienen puntos de inicio a poca profundidad quedan clasificados como rayos gamma.

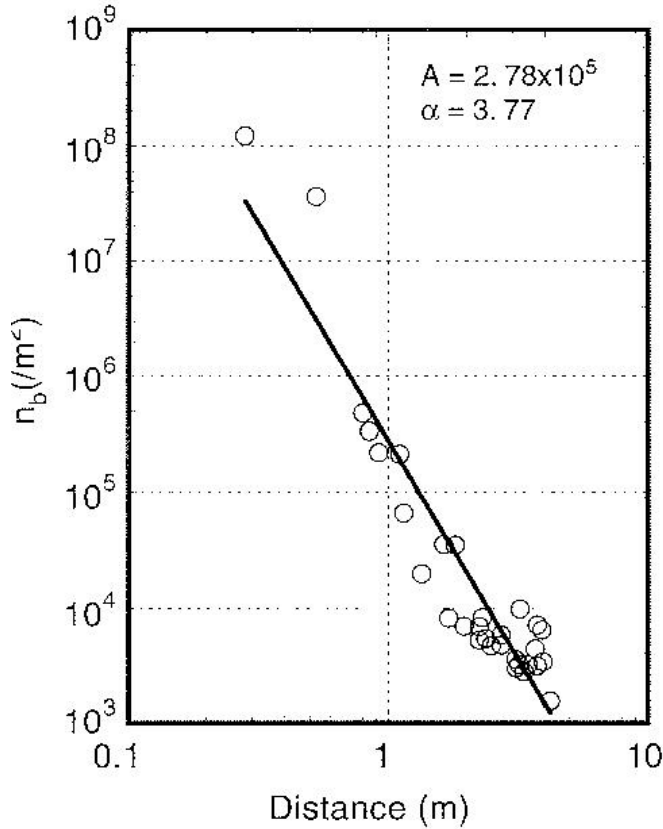


Figura 2. La distribución lateral de la densidad de partículas cargadas por debajo de la cámara de emulsión con  $15\text{cmPb}$ , tal como se detecta con el calorímetro de hadrones. Se ha realizado un ajuste de la forma  $n_b = A(r/r_0)^{-\alpha}$ , con  $r_0 = 1\text{m}$ , sobre la distribución.

Cuando el centro de un chubasco atmosférico golpea a la cámara de emulsión, ingresa a ésta un haz de partículas de alta energía, tanto electromagnéticas como hadrónicas. Las partículas producen a su vez una cantidad de chubascos con trayectorias paralelas dentro de la cámara. Este conjunto de trayectorias se denomina como una “familia”.

Un evento de tipo halo se produce por una familia de muy alta energía, en la cual los chubascos de alta energía quedan colimados en una región cerca al centro, lo que significa que en un halo se produce la superposición de puntos de los chubascos.

Como no se tiene información sobre el tiempo de arribo de las familias, se las relaciona con sus explosiones respectivas a través de la cercanía de sus centros y la magnitud de sus tamaños [1].

### 3. DESCRIPCIÓN DEL EVENTO

El arreglo para los chubascos atmosféricos, el calorímetro de hadrones y la cámara de emulsión observan diferentes aspectos del evento de tipo halo que se analiza aquí, y a continuación se dan los detalles:

TABLA 1

Parámetros del chubasco atmosférico del evento actual.

Tiempo de arribo	20:59 13 Feb 1985
Dirección de arribo <sup>a</sup>	$\theta = 8.3^\circ$ , $\phi = 24.7^\circ$
Tamaño	$N_e = 7.03 \times 10^7$
Parámetro de edad	$s = 0.59$

<sup>a</sup>Los ejes  $x, y$  para la dirección de arribo se muestran en la figura 1.

#### 3.1. El arreglo para los chubascos atmosféricos

Los datos obtenidos por el arreglo para chubascos atmosféricos se muestran en la tabla 1.

#### 3.2. El calorímetro de hadrones

La figura 2 muestra la distribución lateral de la densidad de las partículas cargadas por debajo de los  $15\text{cm}$  de plomo, tal como se detectaron con el calorímetro de hadrones.

La distribución se puede aproximar por:

$$n_b(r) = A \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\alpha}, \quad \text{donde } r_0 = 1\text{m}, \quad (1)$$

tomando  $A = 2.79 \times 10^5$  (partículas  $\text{m}^{-2}$ ) y  $\alpha = 3.77$  sobre un intervalo espacial de  $r = (0.5 - 5)\text{m}$ . Se tomó  $1.10\text{m}$  como la distancia entre el centro del chubasco y el centro de la explosión.

#### 3.3. La cámara de emulsión

No se tiene incertidumbre al identificar la explosión correspondiente a la familia analizada por que es simplemente el evento de mayor energía entre los detectados. La distancia entre el centro de la familia y el de la explosión es de  $20\text{cm}$ .

- (i) *Halo*. El evento analizado llegó a esquina superior derecha de un bloque ( $50\text{cm} \times 50\text{cm}$ ) de la cámara de emulsión con ángulos  $\theta = 7.9^\circ$  y  $\phi = 64.9^\circ$  por lo que el halo del centro de la familia comienza a ser difuso a los  $10\text{cm}$  de plomo, abandonando la cámara después de una profundidad de  $13\text{cmPb}$ . Sin embargo, esto afecta muy poco a las conclusiones sobre las características del halo, ya que éste alcanza su máximo desarrollo a una profundidad de  $\sim 7\text{cmPb}$ . La opacidad del halo se midió paso a paso sobre un área de  $1\text{cm}^2$  utilizando el microfotómetro de apertura  $200\mu\text{m} \times 200\mu\text{m}$ . Los puntos de medida forman un arreglo de  $21 \times 21$  de una máscara de  $500\mu\text{m}$  de lado que se colocó sobre el halo.

La figura 3 muestra la distribución de la opacidad del halo a una profundidad de  $7\text{cmPb}$ , que es la de mayor desarrollo del halo dentro de la cámara de emulsión. Es fácil ver que el halo contiene dos núcleos marcados como  $A$  y  $B$ .

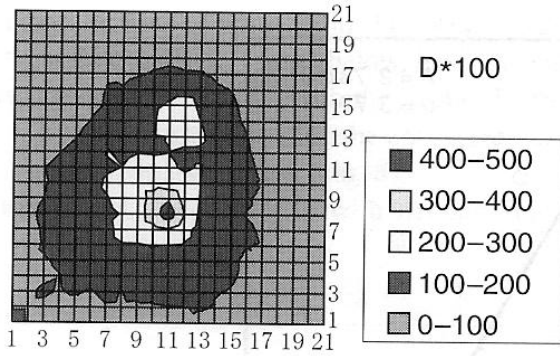


Figura 3. Líneas de nivel (1 div. =  $500\mu m$ ) de la opacidad  $D$  del halo a una profundidad de  $7cmPb$ , donde el halo alcanza su máximo desarrollo. Los pasos de los contornos son  $D = 0 - 1.0, 1.0 - 2.0, \dots$ . Se puede observar la presencia de dos núcleos  $A(11, 8)$ ,  $B(12, 14)$ .

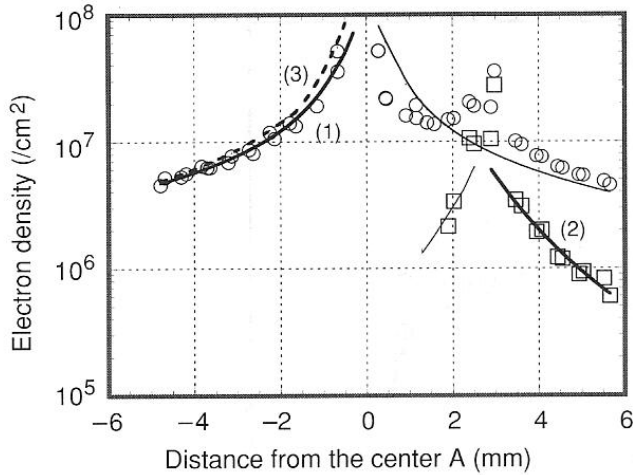


Figura 4. La función de distribución lateral de la densidad de electrones a lo largo de la línea que conecta los dos núcleos  $A$  y  $B$  a una profundidad de  $7cmPb$ ; donde la cantidad total de electrones llega a su máximo. La línea (1) es la distribución del núcleo  $A$ , que es el mejor ajuste a los datos experimentales, y la línea (2), la correspondiente al núcleo  $B$ ; que se obtiene restando la distribución de  $A$  de la distribución observada (véase el texto para los detalles). La línea (3) es la correspondiente a una cascada electromagnética ( $s = 1$ ).

La opacidad  $D$  puede convertirse a densidad electrónica  $\rho$  (electrones  $cm^{-2}$ ) mediante las siguientes relaciones:

$$\rho = 5.236 \times 10^6 D^{1.071} \quad (D \leq 2.0) \quad (2)$$

$$\rho = 3.846 \times 10^6 D^{1.617} \quad (D > 2.0) \quad (3)$$

las cuales se obtienen a partir de la curva característica por la película de rayos X [10].

La figura 4 muestra la distribución lateral de la densidad electrónica del halo a  $7cmPb$  de profundidad. El eje  $x$  va a lo largo de la línea que une los núcleos  $A$  y  $B$ , con el origen puesto en el núcleo  $A$ .

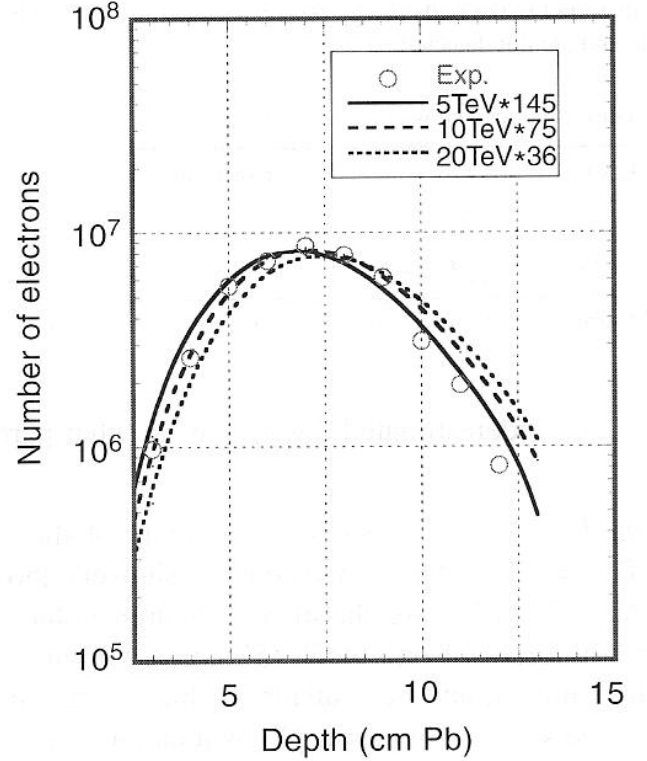


Figura 5. La curva de transición para la cantidad total de electrones del halo. Ésta se obtiene por integración de la distribución de densidad electrónica para cada profundidad en la cámara. La densidad de electrones después de  $10cmPb$  está subestimada por el hecho de que parte del halo abandona la cámara de emulsión. Las curvas corresponden a energías de incidencia de los rayos gamma de  $E_\gamma = 5, 10$  y  $20 TeV$ , multiplicadas respectivamente por los factores  $n_\gamma = 145, 75$  y  $36$ .

Al integrar la distribución lateral de la densidad electrónica del halo, se obtiene la cantidad de electrones en el halo, para cada profundidad de la cámara, o sea:

$$N_e(t) = \int_0^{r_{th}} \rho(r, t) 2\pi r dr \quad (4)$$

donde  $r_{th}$  es la distancia desde el centro del halo hasta el punto para el cual la opacidad  $D$  es tan baja como el límite de detección  $D_{th} = 0.1$ . La figura 5 muestra la curva de transición de la cantidad total de electrones en el halo. La curva de transición alcanza su máximo desarrollo a  $t \approx 7cmPb$ . Nótese que la cantidad de electrones después de  $10cmPb$  está subestimada debido a que parte del halo ya está fuera de la película de rayos X.

(ii) *Chubascos individuales fuera del halo*. La tabla 2 da un resumen de los chubascos fuera del halo, con un umbral de energía de  $E_{th} = 2TeV$ . Del conjunto de los chubascos detectados, se considera que aquellos

TABLA 2

Rayos gamma y chubascos inducidos por hadrones fuera del halo.<sup>a</sup>

Chubascos ( $E_{th} = 2.0TeV$ )	Rayos gamma	Inducidos por hadrones
Cantidad	176	40
Energía total (TeV)	$\sum E_\gamma = 635.2$	$\sum E_h^{(\gamma)} = 278.82$

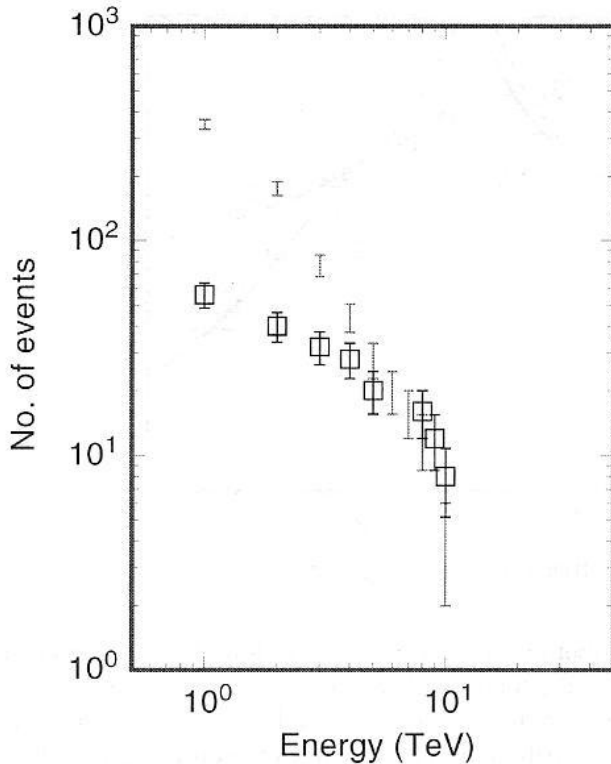
<sup>a</sup>Los valores de esta tabla se obtienen luego de multiplicar por un factor 4 (véase el texto).

Figura 6. Espectro de energías de los rayos gamma y de los chubascos inducidos por hadrones fuera del halo. Las barras de error representan  $\pm\sqrt{n}$  donde  $n$  es la cantidad de chubascos después de multiplicarse por el factor 4 (véase el texto). Nótese que ambos espectros están distorsionados en la región de altas energías porque la mayoría de los chubascos de altas energías están localizados dentro del halo y no se los detecta.

cuyo punto de inicio sobrepasa los  $3cmPb$  (es decir  $\Delta t \geq 3cmPb$ ) se clasificarán como hadrónicos.

Debido a que el evento pegó sobre la esquina superior izquierda de un bloque ( $50cm \times 50cm$ ) de la cámara de emulsión, parte de la familia se perdió por caer fuera de la cámara. Entonces, al calcular el espectro de energía de los chubascos inducidos por hadrones o rayos gamma, multiplicamos por un factor 4 a los chubascos ubicados en el cuarto cuadrante (es decir,  $\phi = 270^\circ - 360^\circ$ ) del plano  $xy$  cuyo origen está en el centro del halo y cuyos ejes son paralelos a los bordes de la película de rayos X.

La figura 6 muestra los espectros de energías de los chubascos inducidos por rayos gamma y por hadrones que están fuera del halo. Nótese que los espectros están distorsionados en las regiones de alta energía debido a que los chubascos dentro de la región del halo, de los cuales la mayoría tiene energías altas, no son detectables por interferencia del halo. Considerando que los rayos gamma tienen un rango característico de *varios TeVcm* en el Monte Chacaltaya ( $540gcm^{-2}$  de profundidad atmosférica)<sup>3</sup> y que el halo tiene un ensanchamiento lateral de  $0.5cm$ , el espectro de los rayos gamma es distorsionado en la región energética por arriba de  $\sim 10TeV$ .

#### 4. ANÁLISIS

Se examina la hipótesis de trabajo de que tanto el halo como los chubascos fuera del mismo se originan por un haz de rayos gamma de alta energía del núcleo del chubasco atmosférico. Esto significa que los rayos gamma de energía relativamente alta produjeron el halo en la cámara de emulsión y aquellos con menor energía terminaron fuera del halo, debido a que la distribución lateral de los rayos gamma varía aproximadamente en forma inversa con la energía.

##### 4.1. Halo

###### 4.1.1. Cantidad total de electrones en el halo

Se consideran dos casos en los cuales los rayos gamma producen un halo: (1) rayos gamma con energía fija y (2) rayos gamma con una distribución de energías.

- (1) *Un halo de rayos gamma con energía fija  $E_\gamma$ .* Es evidente que la curva de transición que se muestra en la figura 5 no puede describirse por un único rayo gamma que llega hasta la cámara, por lo que se supone que el halo fue producido por una cantidad  $n_\gamma$  de rayos gamma, con una misma energía  $E_\gamma$ . De acuerdo con la teoría de cascadas [9], la energía  $E_\gamma$  del rayo gamma y la profundidad del desarrollo máximo, están relacionadas por:

$$\ln \frac{E_\gamma}{\varepsilon} \simeq t_{max} \quad (5)$$

<sup>3</sup>Los valores promedio de  $\langle E^2 r^2 \rangle$  para los rayos gamma y hadrones en el Monte Chacaltaya están en la tabla 3. Son valores calculados en forma analítica [11].

TABLA 3

$$\sqrt{\langle E^2 r^2 \rangle} (TeV cm)^a$$

	$E_0/E = 10^4$	$E_0/E = 10^5$	Observación
Rayos gamma	53 ~ 9.5	11 ~ 7	$E_s X_0 = 1.2 (TeV cm)$
Hadrones <sup>b</sup>	140 ~ 42	120 ~ 38	$\langle p_T \rangle \lambda_{coll} = 48 (TeV cm)$

<sup>a</sup>Los valores  $a$  y  $b$ , escritos como  $a \sim b$ , son los valores correspondientes a diferentes alturas del primer punto de interacción.  $a$ : al tope de la atmósfera y  $b$ : cuatro caminos libre medio que recorre el nucleón desde el tope ( $= 320g cm^{-2}$ ).

<sup>b</sup>Existe la relación  $\langle (E_h^{(\gamma)})^2 r^2 \rangle = k_\gamma^2 \langle E_h^2 r^2 \rangle$  donde  $E_h$  y  $E_h^{(\gamma)}$  son la energía del hadrón y la del chubasco inducido. El factor  $k_\gamma$  es la razón entre la energía del rayo gamma y la energía incidente, producto de la producción múltiple de partículas, con un valor promedio de  $\langle k_\gamma \rangle = \frac{1}{4}$ .

TABLA 4

Energía incidente  $E_\gamma$  y la cantidad de rayos gamma  $n_\gamma$  considerados para describir la curva de transición del halo.

Energía del rayo $E_\gamma (TeV)$	5	10	20
Cantidad de rayos gamma $n_\gamma$	145	75	36
Energía total estimada en el halo $E_{halo} (TeV)$	725	750	720

donde  $\varepsilon = 7.4 (MeV)$  es la energía crítica del  $Pb$ . Entonces, se tiene que:

$$E_\gamma = \varepsilon e^{t_{max}} = 8.9 TeV \quad (6)$$

ya que  $t_{max} = 7cm$  para el plomo. La figura 5 muestra las curvas de transición para la cantidad total de electrones para los  $n_\gamma$  rayos gamma que inciden con energías  $E_\gamma = 5, 10, 20 TeV$ . La cantidad de rayos gamma que se muestra en la tabla 4 se ha estimado por comparación de la curva de transición del halo con la curva equivalente para un único rayo gamma con la misma energía  $E_\gamma$ .

La energía total del halo es  $E_{halo} = (720 - 750) TeV$  a partir de la tabla 4. No se puede suponer que la  $E_{halo}$  es la energía de la familia dentro de la región del halo, que fue definida aquí como la suma de las energías de los rayos gamma que están por encima de la energía umbral de  $2 TeV$ , debido a que los rayos gamma con energías menores a  $2 TeV$  pero localizados dentro de la región del halo, también contribuirán a la opacidad del mismo.

- (2) *Un halo de rayos gamma con un espectro de energías.* Suponer que los rayos gamma que llegan a la cámara de emulsión tienen la misma energía  $E_\gamma$  no es un cuadro realista, por lo que para poder discutir el caso en el cual las energías de los rayos incidentes están distribuidas, debemos empezar con la distribución lateral de energías de esos rayos gamma.

Supongamos que la distribución lateral de energías de los rayos gamma dentro del chubasco atmosférico

puede describirse por la siguiente fórmula:

$$F_\gamma(E, r) dE = \frac{\gamma N_0}{\pi} \left( \frac{E}{E_c} \right)^{-\gamma-1} \frac{dE}{E_c} \frac{E^2}{K^2} \theta \left( 1 - \frac{E^2 r^2}{K^2} \right) \quad (7)$$

$(E_c = 1 TeV),$

donde  $K$  es una constante que expresa la distribución lateral de los rayos gamma y  $\theta(x)$  es la función escalón (véase el Apéndice A). La distribución es una aproximación a la función tridimensional de cascada [9], y por tanto es útil para describir los rayos gamma dentro del chubasco atmosférico. Estos son el producto de los procesos nucleares y electromagnéticos en la atmósfera, pero los valores de las constantes difieren. Se considera que los rayos gamma con energía  $E$  están distribuidos en forma uniforme sobre una área circular de radio  $K/E$ , es decir, que los rayos gamma con menor energía están más lejos del centro. Al integrar la distribución respecto de la distancia radial  $r$ , obtenemos el espectro de energía de los rayos gamma (véase el Apéndice A):

$$\gamma N_0 \left( \frac{E}{E_c} \right)^{-\gamma-1} d \left( \frac{E}{E_c} \right). \quad (8)$$

El promedio de la distribución lateral está dado por:

$$\langle E^2 r^2 \rangle = \frac{1}{N} \int_E^\infty dE \int_0^\infty 2\pi dr E^2 r^2 F_\gamma(E, r) = \frac{K^2}{2} \quad (9)$$

donde  $N$  es la constante de normalización.

A partir de la ecuación (7) los rayos gamma de la

TABLA 5

Valores de  $\gamma$ ,  $N_0$  y  $E_h$  dentro del espectro de energía de los rayos gamma (ecuación (7)) que se usan para el ajuste de la curva de transición del halo.

Índice $\gamma$	Energía crítica $E_R(TeV)$	Cantidad $N_0$ de rayos gamma	Energía del halo $E_{halo}(TeV)$
1.5	5	$4.3 \times 10^2$	$7.7 \times 10^2$
	10	$6.7 \times 10^2$	$8.5 \times 10^2$
	20	—	—
1.75	5	$6.2 \times 10^2$	$6.9 \times 10^2$
	10	$1.2 \times 10^3$	$8.0 \times 10^2$
	20	—	—
2	5	—	—
	10	$1.8 \times 10^3$	$7.2 \times 10^2$
	20	$3.8 \times 10^3$	$7.6 \times 10^2$

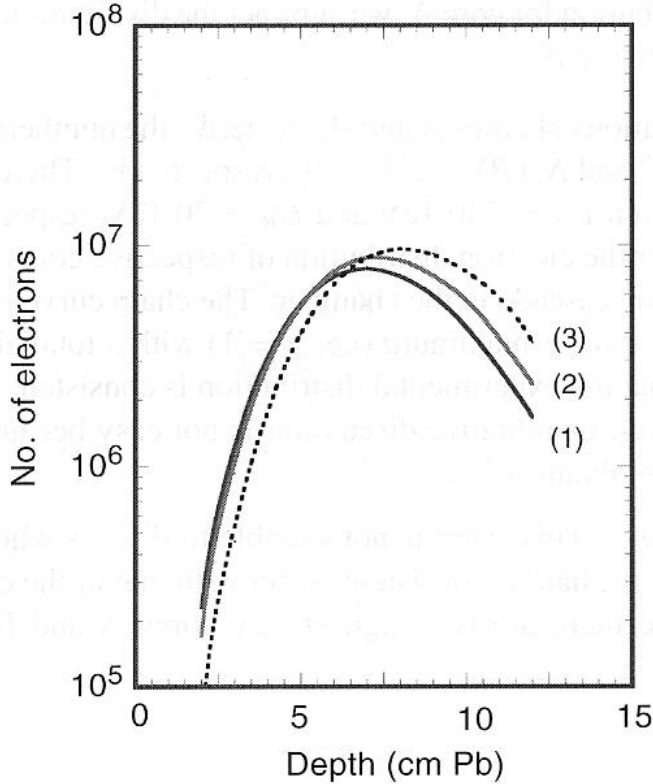


Figura 7. Curvas de transición para la cantidad total de electrones en el halo. Se ha asignado un espectro de energía  $\propto E^{-\gamma-1}dE$  a los rayos gamma que inciden sobre la cámara de emulsión con energía  $E$ , y que están distribuidos uniformemente sobre un área circular de radio  $K/E$ . El halo es producto de los rayos gamma que están dentro de ese radio  $R$ . Las curvas (1), (2), (3) corresponden a los casos de  $\gamma = 1.75$  y  $K/R = 5, 10, 20 TeV$ , respectivamente.

región del halo (dentro de un radio  $R$ ) tienen un espectro de energía como:

$$F_{\gamma}^{(in)}(E)dE = \gamma N_0 \left( \frac{E}{E_c} \right)^{-\gamma-1} \frac{dE}{E_c} \times \begin{cases} 1, & \text{si } E > E_R \\ \frac{E^2}{E_R^2}, & \text{si } E < E_R, \end{cases} \quad (10)$$

donde  $E_R = K/R$  es la energía crítica relacionada al radio del halo (véase Apéndice A).

La curva de transición de la cantidad total de electrones debidos a esos rayos gamma viene dada por:

$$N_e(t) = \gamma N_0 \left( \frac{E_R}{E_C} \right)^{-\gamma} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{ds}{s(\gamma-s)} \left( \frac{E_R}{\varepsilon} \right)^s \times \left[ 1 + \frac{\gamma-s}{s+2-\gamma} \right] a_1(s) K_{1,0}(s, -s) e^{\lambda_1(s)t}. \quad (11)$$

El proceso de derivación de la ecuación (11) se muestra en el Apéndice B. Tanto la energía crítica  $E_R$ , el exponente  $\gamma$  y la cantidad de rayos gamma  $N_0$  se pueden determinar ajustando la curva de transición de la ecuación (11) a una curva experimental. Los resultados de este proceso se muestran en la tabla 5. la figura 7 muestra un ejemplo de este tipo de ajuste entre la curvas experimental y la calculada.

La energía total del halo es:

$$E_{halo} \equiv \int_0^{\infty} E F_{\gamma}^{(in)}(E) dE = N_0 E_R \left( \frac{E_R}{E_C} \right)^{-\gamma} \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{\gamma}{3-\gamma} \right], \quad (12)$$

la cual está tabulada en la tabla 5, para diversos valores de  $\gamma$  y de  $E_{th}$ .

Claramente se ve que ninguno de los casos considerados produce un buen ajuste, lo que será discutido más abajo, en relación con el espectro de energía de los rayos gamma fuera del halo.

#### 4.1.2. Núcleos de alta energía dentro del halo

Tal como se mencionó en la sección 3.3, existen dos núcleos de alta energía ( $A$  y  $B$ ) dentro del halo. Se trató de estimar sus energías usando la distribución lateral de la densidad electrónica para ambos núcleos de la figura 4.

Esas distribuciones se obtuvieron de la siguiente manera:

- (1) La distribución para el núcleo  $A$  se obtiene del lado izquierdo, ya que esta región no está afectada, o lo está en poca medida, por la distribución del núcleo  $B$ .
- (2) Suponiendo una distribución simétrica para el núcleo  $A$ , se resta la distribución obtenida de la distribución del lado derecho del núcleo  $A$ .

Al integrar las distribuciones laterales de los núcleos  $A$  y  $B$ , obtenemos que la cantidad de electrones en los núcleos son  $N_e(A) = 8.1 \times 10^6$  y  $N_e(B) = 2.3 \times 10^5$ ; por tanto, suponiendo que  $N_e(A)/N_e(B) = E_A/E_B$ , se obtiene  $E_A = 730 \text{ TeV}$  y  $E_B = 20 \text{ TeV}$  respectivamente.

Es de interés verificar si la distribución de electrones en los respectivos núcleos es o no consistente con la distribución de la cascada electromagnética de la cámara de emulsión. La curva tipo cadena de la figura 4 es la distribución de la cascada al máximo del chubasco ( $s = 1$ ) con una cantidad total de electrones de  $N_e(A) = 8.1 \times 10^6$ . Resulta entonces que la distribución experimental es consistente con la cascada electromagnética. Sin embargo, no es fácil realizar una discusión cuantitativa debido a que se necesita la distribución sobre una región más amplia, para poder obtener  $\langle r^2 \rangle$ .

#### 4.1.3. Distribución lateral del halo

Este evento no es el adecuado para discutir si la distribución lateral de la densidad de electrones del halo es o no consistente con la cascada electromagnética dentro de la cámara de emulsión, debido a que existen dos núcleos  $A$  y  $B$ , separados por  $3.2 \text{ mm}$ .

#### 4.2. Rayos gamma fuera del halo

A partir de la ecuación (7), los rayos gamma fuera del halo tienen el siguiente espectro de energía en su forma integral (véase el Apéndice A):

$$N_0 \left( \frac{E}{E_c} \right)^{-\gamma} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{E}{E_R} \right)^\gamma \right] - \frac{\gamma}{2-\gamma} \left[ \left( \frac{E}{E_R} \right)^\gamma - \left( \frac{E}{E_R} \right)^2 \right] \right\} \quad (\text{para } E < E_R), \quad (13)$$

donde  $E_R = K/R$  y  $R$  es el radio del halo. El espectro de energía es 0 para  $E > E_R$  y converge hacia  $N_0(E/E_c)^{-\gamma}$  cuando  $E \ll K/R$ . Es decir, que todos los rayos gamma con energías  $E > K/R$  están dentro de la región del halo (de radio  $R$ ) sin poder ser detectadas. El espectro está prácticamente libre de pérdidas de detección en la región

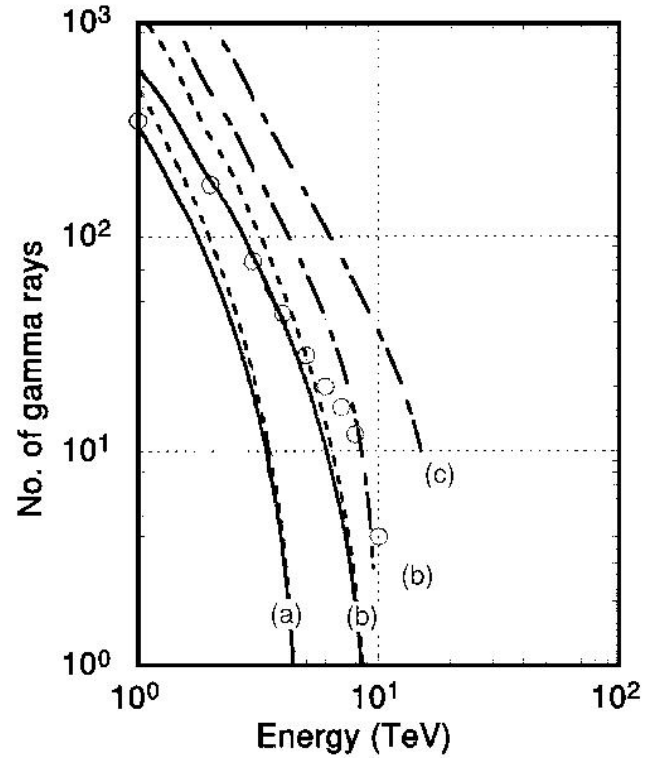


Figura 8. Espectro de energía de los rayos gamma fuera del halo. Las líneas sólida, punteada y de guiones representan respectivamente a los casos en que  $\gamma = 1.5$ ,  $1.75$  y  $2.0$ . Las letras (a), (b), (c) junto a las curvas son para los casos de  $K/R = 5$ ,  $10$  y  $20 \text{ TeV}$ , respectivamente.

de bajas energías, ya que la mayoría de los rayos gamma de baja energía quedaron fuera de la región del halo.

La figura 8 muestra el espectro de energías de los rayos gamma fuera del halo junto con el espectro calculado con la ecuación (13), para los valores de  $N_0$  de la tabla 5. Se puede observar que el caso de  $\gamma = 1.5$  con  $K/R = 10 \text{ (TeV)}$  coincide con los datos experimentales. Al utilizar  $\gamma = 1.5$  obtenemos una energía para la familia (con una energía umbral  $E_{th} = 2 \text{ TeV}$ ) de:

$$\begin{aligned} \sum E_\gamma &\equiv \int_{E_{th}}^{\infty} E_\gamma N_0 \left( \frac{E}{E_c} \right)^{-\gamma-1} d \left( \frac{E}{E_c} \right) \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1} N_0 E_{th} \left( \frac{E_{th}}{E_c} \right)^{-\gamma} = 1.4 \times 10^3 \text{ TeV}. \end{aligned} \quad (14)$$

El valor obtenido es congruente con la suma de la energía del halo  $E_{halo} = 8.5 \times 10^2 \text{ TeV}$  y la energía fuera del halo  $\sum E_\gamma = 6.4 \times 10^2 \text{ TeV}$  (de la tabla 2). Como el radio del halo es  $R = 0.5 \text{ cm}$ , la constante para el ensanchamiento lateral de los rayos gamma es  $K = 5 \text{ TeV cm}$ , que viene de la relación  $E/R = 10 \text{ TeV}$ . Este valor es compatible con los dados en la nota 3.

#### 4.3. El calorímetro de hadrones

Podemos estimar la distribución de energía de los hadrones ( $\propto E^{-\gamma-1} dE$ ) que inciden sobre la cámara,

TABLA 6

Supuestos básicos para las simulaciones.

Programa de computación	CORSIKA (ref. 12)
Modelo de interacción nuclear	QGSJET (ref. 4)
Espectro de energía de los rayos cósmicos primarios	$\propto E^{-\beta-1}dE$ ( $\beta = 1.8$ a $10^{15}eV$ )
Composición	Normal (ref. 13) <sup>a</sup>

<sup>a</sup>  $p(42\%)$ ,  $He(17\%)$ ,  $CON(14\%)$ ,  $pesados(14\%)$ ,  $Fe(13\%)$  a  $10^{15}eV$ .

a partir de la distribución lateral de la densidad de partículas cargadas ( $\propto r^{-\alpha}$ ) medida con el calorímetro de hadrones [2]. El índice espectral  $\gamma$  está relacionado con el valor de la pendiente  $\alpha$  por

$$\alpha = \beta - \gamma + 2, \quad (15)$$

donde  $\beta \simeq 1.0$  se debe a la relación entre la energía de los hadrones y la cantidad de las partículas cargadas, a una profundidad de  $15cmPb$ . Entonces, se tiene que  $\alpha < 3.0$  para  $\gamma > 0$ , mientras que en el presente caso  $\alpha = 3.77$ . Esto podría indicar que los hadrones que inciden sobre la cámara tienen una distribución lateral empinada que puede ser descrita por una distribución del tipo de la ecuación (7). Este asunto será discutido más adelante, junto con otros eventos que también tienen valores elevados de  $\alpha$  en la ref. [2].

## 5. RESUMEN Y DISCUSIÓN

- (i) Se realizó un análisis detallado de un evento de alta energía con halo. Este evento es el primer caso en el que se observaron en forma simultánea el halo y el chubasco atmosférico.

El halo y los rayos gamma fuera del mismo se describen por los rayos gamma dentro del núcleo del chubasco atmosférico, el cual tiene un espectro de energía como:  $N_0(E/E_C)^{-\gamma-1}d(E/E_C)$  ( $E_C = 1TeV$ ), con  $N_0 = 6.7 \times 10^2$ ,  $\gamma = 1.5$  y el ensanchamiento lateral queda caracterizada por la constante  $K = 5TeVcm$ .

Aquí no se presenta una discusión sobre la distribución lateral del halo, debido a que el halo consiste básicamente de dos núcleos. Si se hubiera considerado tal cosa, se podría haber terminado con un valor de constante  $K$  diferente a la de los rayos gamma fuera del halo.

- (ii) Sigue una discusión sobre la precisión de la determinación del centro (o núcleo) del chubasco atmosférico, con varios detectores del arreglo, el calorímetro de hadrones y la cámara de emulsión.

El error en la posición del núcleo del chubasco determinado por el arreglo es de  $0.5m$ , con una dispersión  $\sigma = 0.3m$  [1,14], que se obtiene por simulación considerando la configuración del arreglo de detectores. Una pequeña parte del error proviene del hecho de que los detectores de densidad están agrupados en

forma más densa en la porción central del arreglo y que se toman en cuenta los chubascos cuyos núcleos están dentro de una región circular de  $20m$  de radio centrada en el arreglo de detectores. La probabilidad de que la diferencia de las posiciones del núcleo, estimada por el calorímetro de hadrones y por el arreglo de detectores, sea del orden de  $(1.1 \pm 0.2)m$  es de:

$$\int_{0.9}^{1.3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-0.5)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 0.09.$$

El error en la posición de la explosión determinada por el calorímetro de hadrones es de  $23cm$  con una dispersión de  $16cm$ , que se obtiene en forma experimental por comparación entre la posición del núcleo según el calorímetro y según la cámara de emulsión [2].

El movimiento de los centros de energía, estimado a partir del halo, y de los rayos gamma fuera del mismo, no se puede discutir aquí porque los rayos gamma exteriores al halo no fueron detectados en su totalidad debido a la cercanía del borde de la placa.

- (iii) Es interesante observar si el evento analizado es consistente con las simulaciones, las cuales se realizaron con las hipótesis dadas en la tabla 6. Los eventos se simularon hasta el arribo a los detectores, de manera tal que si la familia produce o no un halo en la cámara de emulsión es algo que no se vio aquí.

Se seleccionaron 125 eventos con un tamaño de chubasco de  $N_e = (0.5 \sim 1) \times 10^8$  de todas las simulaciones corridas. Las energías primarias  $E_0$  de esos eventos tienen una distribución con promedio  $\langle \log E_0(eV) \rangle = 8.04$  y una dispersión  $\sigma(\log E_0(eV)) = 0.10$ .

La figura 9 muestra la distribución de la energía de la familia  $\sum E_\gamma$  (con una energía umbral de detección  $E_{th} = 2TeV$ ) de los eventos simulados, y también el valor para el caso analizado. Se observa que  $\sum E_\gamma$  está en el centro de la distribución. También es notable el hecho de que el espectro de energía de los rayos gamma estimado para el halo y fuera del mismo sea consistente con la simulación.

Se puede dar alguna pauta sobre el tipo de partícula primaria que habría iniciado el chubasco analizado.

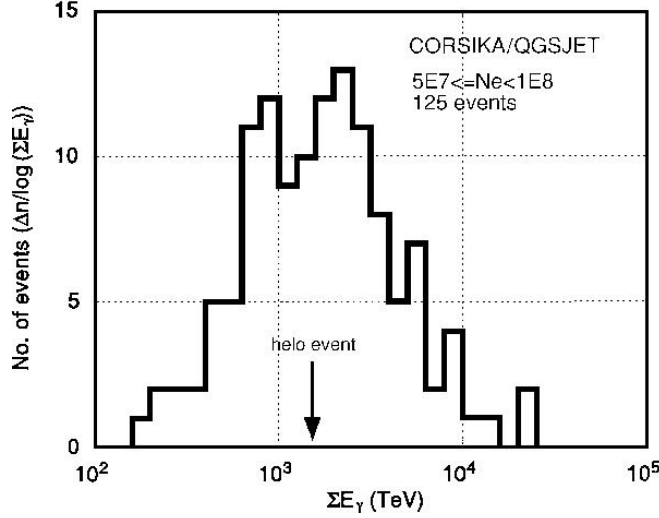


Figura 9. Distribución de la energía de las familias ( $\sum E_\gamma$ ) de los eventos simulados.

La energía total de los rayos gamma *dentro de la región del halo* ( $R < 0.5\text{cm}$ ), y por encima del umbral de detección  $E_{th} = 2\text{TeV}$  es:

$$\sum_{r < R} E_\gamma = \int_{E_{th}}^{\infty} EF^{(in)}(E) dE = 8.3 \times 10^2 \text{TeV}, \quad (16)$$

donde se fijó el valor  $K/R = 10\text{TeV}$  a partir del espectro de energía de los rayos gamma fuera del halo. En la muestra de 125 eventos existen ocho de ellos cuya energía de rayos gamma dentro de la región del halo está entre  $640\text{TeV}$  y  $1000\text{TeV}$ . Las partículas primarias de esos eventos son protones en cinco casos (63%), una partícula alfa en un caso (13%) y un núcleo CON en dos casos (25%). Nótese que los 125 eventos son consistentes con la composición de entrada, es decir, 56 protones (45%), 18 partículas alfa (14%), 11 CON (9%), 14  $Mg$  (11%) y 26  $Fe$  (21%), lo cual no es sorprendente ya que el chubasco atmosférico en su máxima extensión depende principalmente de la energía de incidencia y en menor grado de las interacciones nucleares o de la partícula primaria.

- (iv) Las conclusiones sobre la formación del halo son:
- (1) No todos los halos son producto de protones primarios en la región energética alrededor de los  $10^{17}\text{TeV}$ .
  - (2) Al tomar en cuenta que el halo y los rayos gamma alrededor del halo pueden describirse por el mismo espectro de energía de los rayos gamma de la ecuación (8), y que el valor de la constante  $K$  para caracterizar el ensanchamiento lateral de los rayos gamma es consistente con los obtenidos mediante cálculos analíticos (ver la nota 3), el halo no requiere de ningún mecanismo particular para su creación, salvo la gran energía involucrada en el evento.

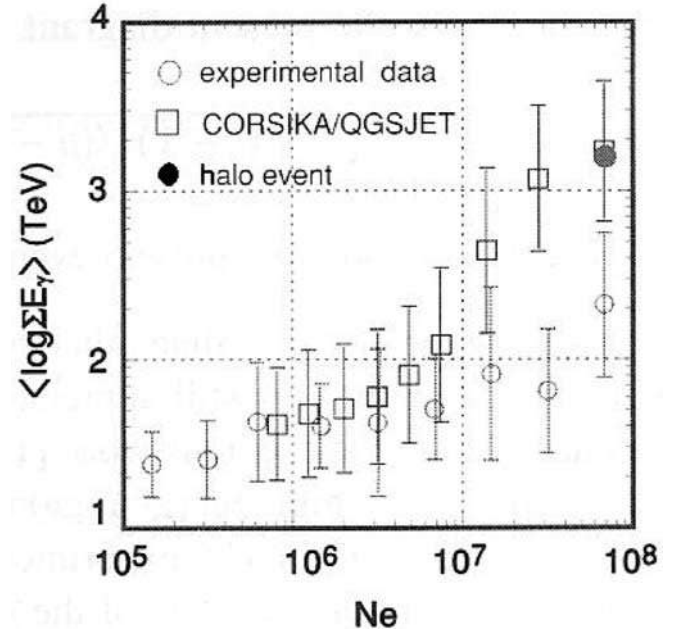


Figura 10. Valores promedio de la energía de las familias ( $\sum E_\gamma$ ) y del tamaño del chubasco atmosférico  $N_e$  de experimento y simulaciones. Las barras de error representan la dispersión  $\sigma$ . El valor medio de  $N_e = 7 \times 10^7$  es de tres eventos, incluyendo al actual.

- (v) Es interesante ver la posición de este evento en el diagrama  $\sum E_\gamma vs. N_e$ . Este diagrama nos permitió en un trabajo anterior [1] el señalar que los modelos de las interacciones nucleares que se usan ampliamente en las simulaciones de la difusión de los rayos cósmicos en la atmósfera no son capaces de describir los datos experimentales. Este argumento se puede aplicar sin restricción alguna respecto de la intensidad de los rayos cósmicos.

La figura 10 muestra el evento analizado junto con otras familias de eventos; de donde se destaca lo siguiente:

- (1) La cantidad de eventos se ha duplicado, es decir, pasó de 47 eventos en la ref. [1] a 98 para el presente diagrama.
- (2) Los valores para los valores medios graficados aquí, corresponden a medias geométricas en contraposición de las medias aritméticas utilizadas en la ref. [1].
- (3) Las barras de error corresponden a la dispersión  $\sigma$ , definida como  $\sigma = \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)}$ , por lo que no son los errores del valor promedio  $\sigma/\sqrt{n}$ .
- (4) El punto correspondiente a  $N_e = 8 \times 10^7$  es de tres eventos, incluyendo al actual.

Se puede observar que el evento actual tiene un valor  $\sum E_\gamma$  más alto que otros eventos con un tamaño similar de chubasco, y que el valor medio del experimento

continúa siendo apreciablemente menor que el valor dado por la simulación. Esto nos indica que las conclusiones obtenidas en nuestro trabajo previo [1] también son válidas aquí. En otras palabras, que la interacción nuclear cambia sus características en la región de alta energía de manera tal que la energía incidente queda subdividida de manera más fuerte. El experimento HADRON en Tien Shan (3300m Kazakhstan) [15], que es un experimento similar, obtiene datos con las mismas tendencias, lo que se discute ampliamente en la literatura [1].

## AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento por el apoyo financiero otorgado por la Sociedad Japonesa para la Promoción de la Ciencia, lo que hizo posible realizar la presente colaboración internacional. El experimento también fue parcialmente financiado por el "Programa de Investigación Científica Internacional" y el "Fondo para Investigación Científica" del Ministerio de Educación, Ciencia y Cultura del Japón; y por el Instituto de Investigaciones en Rayos Cósmicos de la Universidad de Tokio. Los autores agradecen también al personal boliviano del Laboratorio de Rayos Cósmicos de Chacaltaya, del Instituto de Investigaciones Físicas, de la Universidad Mayor de San Andrés. Las películas de rayos X y las emulsiones nucleares fueron reveladas en el Instituto de Investigaciones en Rayos Cósmicos de la Universidad de Tokio.

### Apéndice A

#### Distribución lateral de la energía de los rayos gamma que inciden en la cámara de emulsión

Consideremos que los rayos gamma que inciden en la cámara de emulsión tienen una distribución como:

$$F(E, r) = \frac{\gamma N_0}{\pi} \left(\frac{E}{E_C}\right)^{-\gamma-1} d\left(\frac{E}{E_C}\right) \frac{E^2}{K^2} \theta\left(1 - \frac{E^2 r^2}{K^2}\right),$$

donde  $\theta(x)$  es la función escalón y  $K$  es la constante que expresa el ensanchamiento lateral de los rayos gamma.

El valor promedio de  $E^2 r^2$  es:

$$\langle E^2 r^2 \rangle \equiv \int_0^\infty E^2 r^2 F(E, r) 2\pi r dr = K^2 \int_0^\infty x \theta(1-x) dx = \frac{K^2}{2}.$$

#### Apéndice A.1. Espectro de energía de los rayos gamma

Integrando la expresión de arriba respecto de  $r$ , se tiene:

$$\int_0^\infty F(E, r) 2\pi r dr = \gamma N_0 \left(\frac{E}{E_C}\right)^{-\gamma-1} d\left(\frac{E}{E_C}\right),$$

que nos da la forma integral del espectro de energía  $N_0 \left(\frac{E}{E_C}\right)^{-\gamma}$

#### Apéndice A.2. Espectro de energía de los rayos gamma dentro del halo

El espectro de energía de los rayos gamma dentro de la región de radio  $R$  es:

$$F^{(in)}(E) dE = \int_0^R F(E, r) 2\pi r dr = \gamma N_0 \left(\frac{E}{E_C}\right)^{-\gamma-1} d\left(\frac{E}{E_C}\right) \times \begin{cases} 1, & \text{si } E \geq \frac{K}{R} \\ \frac{E^2 R^2}{K^2}, & \text{si } E < \frac{K}{R}. \end{cases}$$

Nótese que los espectros de energía son  $E^{-\gamma-1} dE$  y  $E^{-\gamma+1} dE$  en las regiones con  $E > K/R$  y  $E < K/R$  respectivamente.

#### Apéndice A.3. Espectro de energía de los rayos gamma fuera del halo

El espectro de energía de los rayos gamma fuera del halo (de radio  $R$ ) es :

$$F^{(out)}(E) dE = \int_R^\infty F(E, r) 2\pi r dr = \begin{cases} 0, & \text{si } E > \frac{K}{R} \\ \gamma N_0 \left(\frac{E}{E_C}\right)^{-\gamma-1} d\left(\frac{E}{E_C}\right) \left(1 - \frac{E^2 R^2}{K^2}\right), & \text{si } E < \frac{K}{R}. \end{cases}$$

En la forma integral se tiene que, para  $E < K/R$ ,

$$\int_E^{K/R} \gamma N_0 \left(\frac{E}{E_C}\right)^{-\gamma-1} d\left(\frac{E}{E_C}\right) \left(1 - \frac{E^2 R^2}{K^2}\right) = N_0 \left(\frac{E}{E_C}\right)^{-\gamma} \left\{ 1 - \left(\frac{ER}{K}\right)^\gamma - \frac{\gamma}{2-\gamma} \left[ \left(\frac{ER}{K}\right)^\gamma - \left(\frac{ER}{K}\right)^2 \right] \right\},$$

que es forma que se muestra en la figura 11. El espectro integral de energías es 0 para  $E > K/R$  y converge hacia  $N_0 (E/E_C)^{-\gamma}$  cuando  $E \ll K/R$ .

### Apéndice B

#### Curva de transición de la cantidad total de electrones

De acuerdo con la teoría de cascadas [9], un rayo gamma de energía  $E_0$  que incide sobre la cámara de emulsión, produce la siguiente cantidad de electrones (con energía  $\geq 0$ ) para una profundidad  $t$  (u.c.) dentro de la cámara:

$$\Pi(E_0, 0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{ds}{s} \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s a_1(s) K_{1,0}(s, -s) e^{\lambda_1(s)t},$$

donde  $\varepsilon = 7.4 MeV$  es la energía crítica para el  $Pb$ , las funciones  $a_1(s) = M(s)\sqrt{s}$ ,  $K_{1,0}(s, -s)$  son ya familiares en la teoría de cascada.

El espectro de energía de los rayos gamma dentro de la región del halo con radio menor a  $R$  está en el Apéndice A. A partir del mismo, la curva de transición para la cantidad total de electrones causados por esos rayos gamma es de:

$$N_e(t) = \int_{E_h}^\infty \gamma N_0 \left(\frac{E'}{E_C}\right)^{-\gamma-1} \frac{dE'}{E_C} \Pi(E', 0, t) + \int_0^{E_h} \gamma N_0 \left(\frac{E'}{E_C}\right)^{-\gamma-1} \frac{dE'}{E_C} \frac{E^2}{E_h^2} \Pi(E', 0, t)$$

donde  $E_h = K/R$ . Finalmente se tiene que:

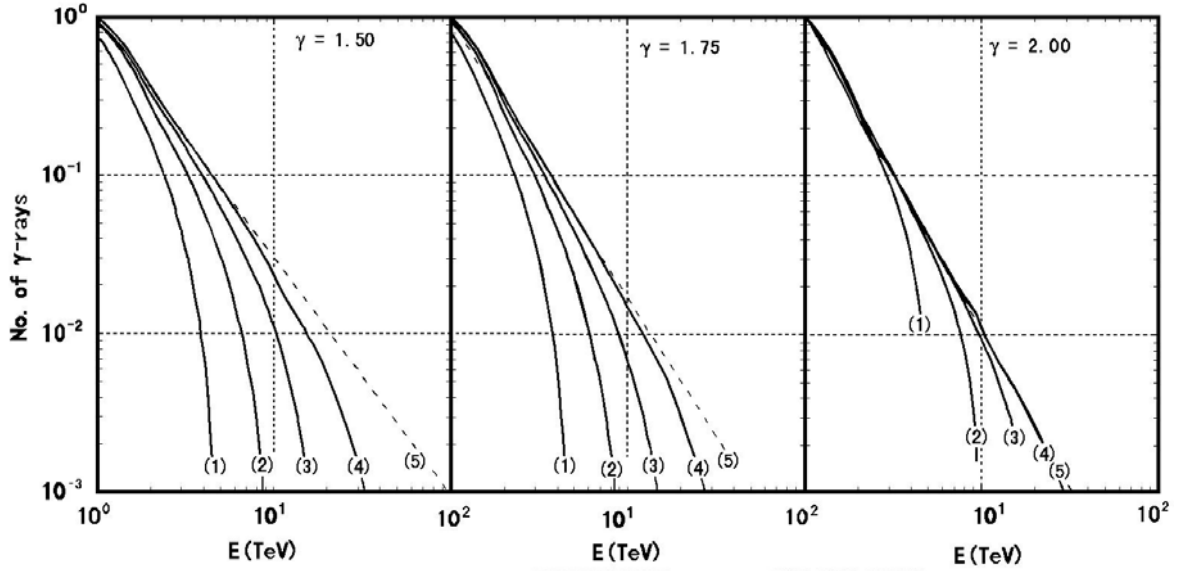


Figura 11. Espectro de energías de los rayos gamma fuera de la región del halo (radio mayor a  $R$ ) para los casos de  $\gamma = 1.5, 1.75$  y  $2.0$  con  $N_0 = 1$ . Las cifras junto a las curvas son: (1)  $K/R = 5 \text{ TeV}$ , (2)  $K/R = 10 \text{ TeV}$ , (3)  $K/R = 20 \text{ TeV}$ , (4)  $K/R = 50 \text{ TeV}$ , (5)  $K/R = \infty \text{ TeV}$ .

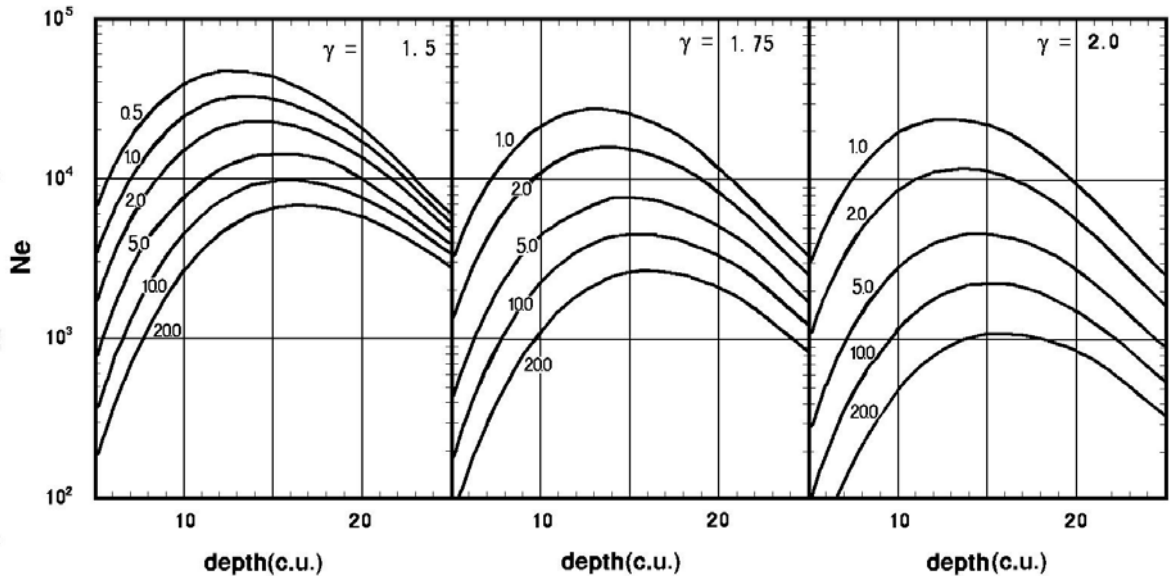


Figura 12. Curvas de transición de la cantidad total de electrones que son producidos por rayos gamma en la región del halo (radio menor a  $R$ ) para los casos de  $\gamma = 1.5, 1.75$  y  $2.0$  con  $N_0 = 1$ . Las cifras junto a las curvas representan la energía crítica  $E_h = K/R (\text{TeV})$ .

$$N_e(t) = \gamma N_0 \left( \frac{E_h}{E_C} \right)^{-\gamma} \times \frac{1}{2\pi i} \int \frac{ds}{s} \left[ \frac{1}{\gamma-s} + \frac{1}{s+2-\gamma} \right] \left( \frac{E_h}{\varepsilon} \right)^s a_1(s) K_{1,0}(s, -s) e^{\lambda_1(s)t}.$$

En la figura 12 se muestran los resultados numéricos. Las curvas de transición se aproximan en forma asintótica a:

$$N_0 \left( \frac{E_h}{\varepsilon} \right)^s a_1(s) K_{1,0}(s, -s) e^{\lambda_1(s)t} \Big|_{s=\gamma}$$

para profundidades mayores.

## REFERENCIAS

- [1] Kawasumi, N., et al. Phys.Rev. D53, 3534 (1996); Honda, K., et al. Nucl.Phys.B. (proc.Suppl.), 206 (1997)
- [2] Aguirre, C., et al. Phys.Rev. D62, 32003 (2000); Aguirre, C., et al. Nucl.Phys.B. (proc.Suppl.), 97, 158 (2001)
- [3] Alner, G.J. et al. (UA5 Collaboration). CERN-EP/86-213 (1986)
- [4] Kalmykov, N.N. y Ostapchenko, S.S. Yad.Fiz. 56, 105 (1993); Kalmykov, N.N. y Ostapchenko, S.S. Phys.At.Nucl. 56, 346 (1993); Kalmykov, N.N., Ostapchenko, S.S. y Pavlov, A.I. Bull.Acad.Sci.USSR

- Phys. Ser. 58, 1996 (trad.Inglés), (1994)
- [5] Werner, K. Phys.Rep. 232, 87 (1993)
- [6] Capdevielle, L.N. et al. Kernforschungszenrum Karlsruhe KfK Report N° 4998 (1992)
- [7] Lattes, C.M.G. et al. (Brazil-Japan Emulsion Chamber Collaboration) Proc.12th Intl. Cosmic Ray Conf. (Hobart) 7, 2275 (1971)
- [8] Kamata, K. y Nishimura, J. Prog.Theor.Phys.Suppl. 6, 93 (1958); Greisen, K. Progress in Cosmic Ray Physics (Amsterdam, North-Holland) 3, 3 (1958)
- [9] Nishimura, J. Handbuch der Physick (Berlin, Springer) 42/2 (1967)
- [10] Ohta,I. Prog. Theor. Phys. Suppl. 47, 271 (1971)
- [11] Ohsawa, A y Yamashita, S. Prog. Theor. Phys. 77, 1441 (1987)
- [12] Heck,D. Knapp, J., Capdevielle, J.N., Schatz, G. y Thow, T. FZKA Report 6019, Forschungszentrum Karlsruhe, GmbH Karlsruhe (1998)
- Knapp,J. Heck,D. y Schatz, G. Report of Forschungszentrum, Karlsruhe FZKA 5828 (1996)
- [13] Nikolsky, S.I. Proc. 3rd Symp. On Cosmic Rays and Particle Physics, Univ. Tokio, Inst. Cosmic Ray Research, Tokio, p.507 (1984)
- [14] Ticona et al. 23rd Intl. Cosmic Ray Conf. (Calgary) 4, 331 (1993)
- [15] Arabkin, V.V. et al. 22d Intl. Cosmic Ray Conf. (Dublin) 4, 269, 273 (1991)

## REACCIONES DE BELOUSOV-ZHABOTINSKY Y SU COMPROBACIÓN EXPERIMENTAL

Sorge A. Oporto Almaraz<sup>1</sup>, G. Marcelo Ramírez Ávila<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Carrera de Ciencias Químicas U.M.S.A.*

<sup>2</sup>*Instituto de Investigaciones Físicas U.M.S.A.*

### RESUMEN

El presente trabajo reporta la caracterización de la reacción de Belousov-Zhabotinsky con el fin de realizar investigaciones ulteriores de la misma ligadas con su carácter no lineal. Se dan detalles de los procesos involucrados en esta reacción. Se explica el procedimiento experimental seguido para la observación de los fenómenos típicos a esta reacción. Se detectaron las oscilaciones de concentración empleando un espectrofotómetro. Se obtuvieron algunos resultados numéricos que cualitativamente concuerdan con los fenómenos experimentales observados.

### 1. INTRODUCCIÓN

La reacción de Belousov-Zhabotinsky (BZ) es una reacción química paradigmática en la Ciencia de los Fenómenos no Lineales por su riqueza en cuanto a los fenómenos e implicaciones que esta conlleva.

#### 1.1. Reacciones químicas alejadas del equilibrio

En los sistemas que evolucionan fuera del estado de equilibrio la producción de entropía es función del tiempo  $t$ , y su variación respecto de éste, define la función disipativa  $\sigma = \frac{d_i S}{dt} \geq 0$  como una contribución del producto de cualesquiera flujos  $J$  y fuerzas generalizadas  $X$  [1]:

$$\sigma = \sum_j X_j J_j. \quad (1)$$

Las fuerzas generalizadas están representadas comúnmente por un gradiente (temperatura, concentración, potencial, etc.) [2] al cual se le asocia un flujo determinado. En proximidades del equilibrio, la dependencia entre flujos y fuerzas generalizadas está dada por la expansión lineal

$$J_i = \sum_{j=1}^n L_{ij} X_j, \quad (2)$$

donde  $L_{ij}$  son los coeficientes fenomenológicos simétricos de Onsager.

En el caso de procesos químicos el potencial químico de reactivos y productos determina el grado en que una reacción se lleva a cabo. La fuerza generalizada para una reacción está definida por

$$X_{\text{qmc}} = -\frac{1}{T} \sum_{\gamma=1}^r \nu_{\gamma} \mu_{\gamma} = \frac{\mathcal{A}}{T}, \quad (3)$$

$\mu_{\gamma}$  y  $\nu_{\gamma}$  son respectivamente el potencial químico y el coeficiente estequiométrico de la especie  $\gamma$ , y el término

$\mathcal{A} = -\sum_{\gamma=1}^r \nu_{\gamma} \mu_{\gamma}$  es la afinidad. La velocidad de reacción hace el papel de flujo generalizado

$$J_{\text{qmc}} = v = \frac{d\xi}{dt}, \quad (4)$$

para  $\xi$  que representa el avance de la reacción.

Si  $c_{\gamma}$  es la actividad de la especie  $\gamma$ , el potencial químico se puede escribir como una desviación del estado denominado estándar:

$$\mu_{\gamma} = \mu_{\gamma}^{\circ}(T, p) + RT \ln c_{\gamma}, \quad (5)$$

donde  $\mu_{\gamma}^{\circ}(T, p)$  es el potencial cuando la concentración del componente es igual a uno [3]. La afinidad será:

$$\mathcal{A} = -\sum_{\gamma=1}^r \nu_{\gamma} \mu_{\gamma}^{\circ} - RT \sum_{\gamma=1}^r \ln c_{\gamma}. \quad (6)$$

La afinidad en el equilibrio es nula con lo que se puede expresar el término correspondiente al estado estándar en función de las concentraciones en el equilibrio, con lo que (6) queda:

$$\mathcal{A} = RT \ln \frac{\prod_{\gamma=1}^r c_{\gamma}^{\nu_{\gamma}^{\text{eq}}}}{\prod_{\gamma=1}^r c_{\gamma}^{\nu_{\gamma}}} = RT \ln \frac{K(p, T)}{\prod_{\gamma=1}^r c_{\gamma}^{\nu_{\gamma}}}, \quad (7)$$

siendo  $K(p, T)$  la constante de equilibrio.

Para la reacción



si  $k$  y  $k'$  son las constantes de velocidad directa e inversa respectivamente, y sabiendo que la constante de equilibrio resulta del cociente de ambas, entonces

$$\begin{aligned} v &= -\dot{c}_A = \dot{c}_B = kc_A - k'c_B \\ v &= kc_A \left(1 - \frac{k'c_B}{k c_A}\right) = kc_A \left(1 - \frac{1}{K} \frac{c_B}{c_A}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

En éste caso la afinidad es:

$$\mathcal{A} = RT \ln \frac{K}{c_A^{-1} c_B}, \quad (9)$$

<sup>1</sup>Email: saoporto@yahoo.com

<sup>2</sup>Email: gramirez@ulb.ac.be

de donde

$$\frac{c_B}{c_A} = K e^{-\frac{A}{RT}}. \quad (10)$$

Reemplazando ésta última expresión en (8), se tiene:

$$v = k c_A (1 - e^{-\frac{A}{RT}}), \quad (11)$$

lo que significa que para las reacciones químicas alejadas del equilibrio no existe una relación lineal entre flujos y fuerzas generalizadas, constituyéndose esas en sistemas no lineales.

Si consideramos estados estacionarios próximos al equilibrio, el término exponencial se puede desarrollar en serie de Taylor; si tomamos sólo los términos lineales se tiene que [1]

$$v = \frac{k}{R} \frac{A}{T} = L \frac{A}{T}. \quad (12)$$

En éste caso, el criterio de estabilidad es

$$\sum_j \delta v_j \delta \mathcal{A}_j \geq 0, \quad (13)$$

donde  $\delta$  indica la desviación del estado estacionario. Si ésta condición no se cumple el estado estacionario no será estable y es posible el surgimiento de un orden dinámico. Al llegar a éstos casos, la termodinámica como tal ya no es suficiente. Para el estudio de los sistemas dinámicos es necesario el empleo del aparato de ecuaciones diferenciales [1].

## 1.2. Procesos químicos como sistemas no lineales.

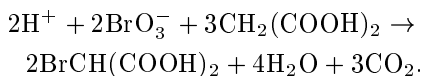
### Reacción de Belousov-Zhabotinsky

Las reacciones autocatalíticas son sistemas que no cumplen con la condición de estabilidad lineal (13). Así por ejemplo, para la reacción  $X + Y \rightarrow 2X$ , en la aproximación lineal  $v \sim XY$  y  $\mathcal{A} \sim \ln \frac{XY}{X^2}$ , de modo que

$$\delta_X v \delta_X \mathcal{A} \sim -\frac{Y}{X} (\delta X)^2 < 0. \quad (14)$$

Se conocen algunos modelos matemáticos para reacciones químicas autocatalíticas [4]. El primero en ser postulado fue el de Lotka-Volterra (modelo predador-presa) en los años 20 del siglo pasado; el Bruselator por Lefever, Prigogine y Nicolis en 1968 [6]; el modelo FKN para la reacción de Belousov-Zhabotinsky propuesto por Field, Köros y Noyes en 1972 [5], entre otros.

La reacción BZ consiste en la oxidación de ácido malónico por ión bromato en medio ácido, catalizado por iones cerio. La ecuación global es:



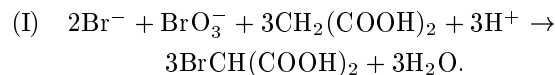
Si se emplea ferroína como indicador redox, se observa cambios periódicos de color en la solución de reacción, que pasa de azul pálido a rosa pálido.

La reacción de BZ es compleja, en conjunto tiene por lo menos 11 pasos [5], pero sólo señalaremos aquellos que son los más importantes desde el punto de vista cinético

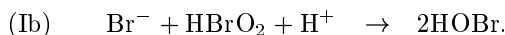
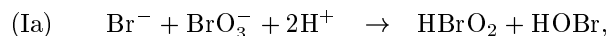
y que, además, son los necesarios para establecer el modelo matemático del proceso.

El mecanismo FKN consiste básicamente en la existencia de dos conjuntos de sistemas de reacción no interactuantes I y II, que se acoplan por un tercer conjunto de reacciones III, el que determina la conversión de I a II [1][5].

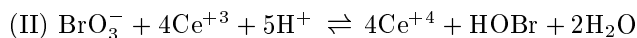
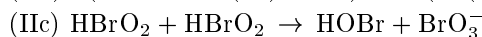
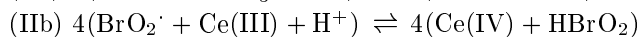
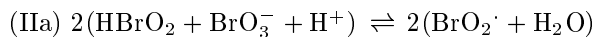
El proceso I se lleva a cabo para concentraciones suficientes de  $\text{Br}^-$ , siendo el resultado la disminución de ese ión y la formación de ácido bromomalónico; la ecuación global es:



Los pasos cinéticamente determinantes son:

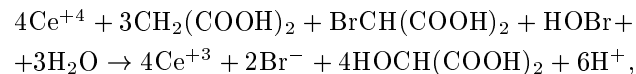


Las etapas (Ia) y (Ib) constituyen un estado pseudoestacionario, pero cuando  $[\text{Br}^-]$  es suficientemente baja la reacción de  $\text{HBrO}_2$  en Ib compite con su reacción en IIa, con la cual se pasa al conjunto de reacciones del proceso II:



El proceso II es autocatalítico en  $\text{HBrO}_2$ , y alcanza un nuevo estado pseudoestacionario que es removido por (IIc).

Hasta que  $\text{Ce}^{+4}$  y  $\text{HOBr}$  se formen en cantidades suficientes se da lugar al proceso III mostrado a continuación:

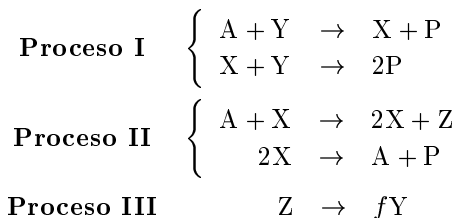


cuyo resultado es la producción de  $\text{Br}^-$  hasta que sea posible retornar al proceso I.

Debido a la disminución y aumento en  $[\text{Br}^-]$  la reacción de BZ es autooscilante. La concentración crítica de  $\text{Br}^-$  para que la reacción se conmute del proceso I a II es [1]:

$$[\text{Br}]_{\text{cr}} = \frac{k_{B1}}{k_{A2}} [\text{BrO}_3^-] \approx 5 \cdot 10^{-6} [\text{BrO}_3^-].$$

El modelo matemático está basado en el siguiente esquema (Oregonator) [5]:



donde  $X = [\text{HBrO}_2]$ ,  $Y = [\text{Br}^-]$ ,  $Z = 2[\text{Ce}^{4+}]$ ,  $A = [\text{BrO}_3^-]$  y  $P = [\text{HOBr}]$ . De modo que el Oregonator corresponde a las reacciones Ia, Ib, IIa, IIc y III. Aquí,  $f$  es un parámetro estequiométrico. Las ecuaciones diferenciales son:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= k_{\text{Ia}}AY - k_{\text{Ib}}XY + k_{\text{IIa,IIb}}AX - 2k_{\text{IIc}}X^2 \\ \dot{Y} &= -k_{\text{Ia}}AY - k_{\text{Ib}}XY + f k_{\text{III}} \\ \dot{Z} &= k_{\text{IIa,IIb}}AX - k_{\text{III}}Z.\end{aligned}$$

El término  $+k_{\text{IIa,IIb}}AX$  resulta del paso autocatalítico. Las soluciones  $\dot{X}$ ,  $\dot{Y}$  y  $\dot{Z}$  son llamadas trayectorias, que se obtienen por integración numérica, que reproduce esencialmente los fenómenos observados en la reacción BZ.

## 2. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El método experimental usado en §2.1, §2.2 y §2.3 se basó en el protocolo utilizado por D'Hernoncourt [7].

### 2.1. Oscilaciones temporales en medio homogéneo

Experimentalmente se comprobó que la reacción de BZ es oscilante respecto a las concentraciones de las especies químicas reaccionantes, caracterizada por cambios periódicos de color de la solución de reacción entre azul y rosa. Para tal efecto se prepararon las siguientes soluciones acuosas:

1.  $\text{CH}_2(\text{COOH})_2 1.2M$ ,
2.  $\text{KBrO}_3 0.35M$ ,
3.  $\text{H}_2\text{SO}_4 1.5M$ ,
4.  $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 4.5 \cdot 10^{-3}M$ ,
5. Solución indicadora de ferroína.

Se mezclaron 15 ml de las soluciones 1 a 4, en ese orden, y se añadieron 3 gotas de ferroína, luego se agita y se deja en reposo. La solución que inicialmente tenía color azul pasó a rosa, y continuó oscilando aproximadamente por 45 minutos, hasta alcanzar el equilibrio con una solución de color rosa predominante. El tiempo promedio del estado caracterizado por el color azul fue de 18 s y el correspondiente al color rosa de 32 s dando un periodo de 50 s aproximadamente. Aunque el experimento estaba previsto para ser realizado con agitación magnética continua, en realidad las oscilaciones se observaron sin necesidad de la misma, y mas bien sometiendo a agitación éstas ya no eran visibles.

### 2.2. Organización espacio-temporal en medio no homogéneo unidimensional

Se introducen 0.5 ml de cada una de las soluciones 1 a 3, mas 2 gotas de ferroína en un tubo de ensayo. Se mezcla bien. Se toma 0.5 ml de la solución 4 y se agrega a la mezcla reaccionante sin agitar. Se deja reposar, y de manera gradual se observa la formación de bandas horizontales que corresponden a zonas alternativamente más ricas en  $\text{Ce}^{+3}$  y  $\text{Ce}^{+4}$ , como se muestra en la figura (1a).

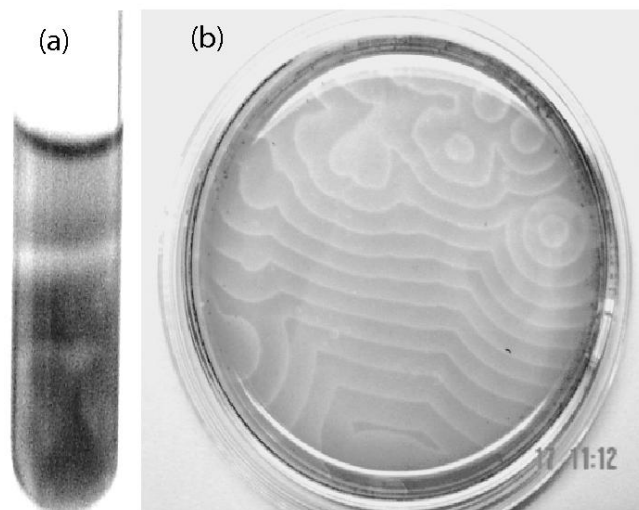


Figura 1. Patrones que aparecen en la reacción BZ en medio no homogéneo. (a) Unidimensional: bandas. (b) Bidimensional: espirales

### 2.3. Organización espacio-temporal en medio no homogéneo bidimensional

Se prepararon las siguientes soluciones acuosas: 100 ml de solución 0.48 M de  $\text{KBrO}_3$  en medio ácido ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ) 0.52 M; 10 ml de una solución 0.96 M de  $\text{CH}_2(\text{COOH})_2$ ; 10 ml de una solución 0.97 M de  $\text{NaBr}$ .

Trabajando bajo una campana, en un tubo de ensayo de 20 cm se mezclan bien 6 ml de la solución de bromato, 1 ml de solución de ácido malónico y 0.5 ml de solución de bromuro. Inmediatamente se tapa el tubo con un tapón de goma y se espera la desaparición del color naranja de  $\text{Br}_2$  generado. Se saca el tubo de la campana y se introduce unas cuantas gotas (2 a 3) de ferroína. Se vierte el contenido en una caja Petri, recomendándose la formación de una superficie uniforme de 1.5 mm de espesor. Éste procedimiento se llevó a cabo en una caja Petri cerrada y abierta.

En el primer caso, la formación de patrones se lleva a cabo de manera progresiva y notoria, con presencia de burbujas, empezando con una variación en el color de manera no uniforme de la mezcla, que luego da lugar a la aparición de patrones concéntricos en los bordes de la caja Petri, que se expanden hacia el interior. Aplicando agitación magnética la solución se hace homogénea, pero al suspenderla los patrones aparecen nuevamente en forma de espiral en el sentido de la agitación, y localizados de manera aleatoria.

Cuando se trabaja con una caja Petri abierta, se forman patrones distorsionados, debido posiblemente a las turbulencias provocadas por el aire.

### 2.4. Observación espectroscópica de las oscilaciones en la reacción de Belousov-Zhabotinsky

Se observaron las oscilaciones de la reacción BZ por métodos espectroscópicos empleando un espectrofotómetro UV-visible Spectronic Helios alpha.

La solución para la reacción se preparó mezclando en

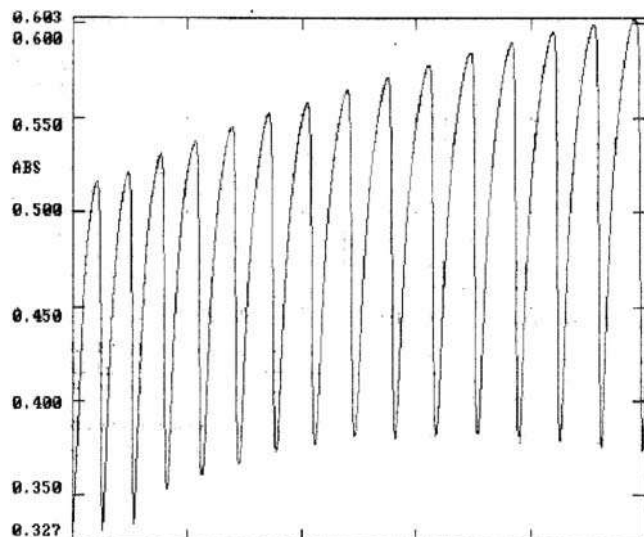


Figura 2. Evolución temporal (10 min) de la absorbancia para la reacción BZ.

un tubo de ensayo 1 ml de cada una de las soluciones 1 a 4, y añadiéndose 2 gotas de ferroína. Después de agitar, se pasó parte de la solución resultante a una cubeta de cuarzo, de aproximadamente 3.5 ml de volumen, para su análisis en el espectrofotómetro, a una longitud de onda de 500 nm y un intervalo de tiempo programado de 10 min. El resultado fueron oscilaciones en forma de dientes de sierra, típico de los osciladores de relajación, tal como se puede observar en la Fig. 2 obtenida por el graficador del equipo.

Se observa que la absorbancia tiende a aumentar hasta un valor máximo a medida que se alcanza el equilibrio y que los periodos de las absorbancias no son constantes, y mas bien aumentan gradualmente, lo que muestra la tendencia a la absorbancia que caracteriza al color de la solución en el equilibrio. Si bien ambos hechos no son los que se reportan generalmente en bibliografía, esto se debe a que la reacción no se realiza a flujo continuo de reactivos y productos, y mas bien lo que resalta es la tendencia del sistema a alcanzar el equilibrio.

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Utilizando diferentes métodos de integración, se resolvió el sistema de ecuaciones diferenciales reparametrizadas [1]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= s(y - xy + x - qx^2) \\ \dot{y} &= s^{-1}(-y - xy + fz) \\ \dot{z} &= w(x - z).\end{aligned}\quad (15)$$

Se consideraron varios valores de los parámetros. Se muestra como ejemplo oscilaciones de concentración en la variable  $z$ , la misma que en la reacción experimental está ligada a la concentración de  $Ce^{+4}$ . Se puede observar (Fig. 3(a)) estas oscilaciones cuyo período es del mismo orden que el de las oscilaciones descritas en §2.4. En la Fig. 3(b), se muestra en escala logarítmica el ciclo límite que resulta de la representación de  $z$  vs  $x$ , y

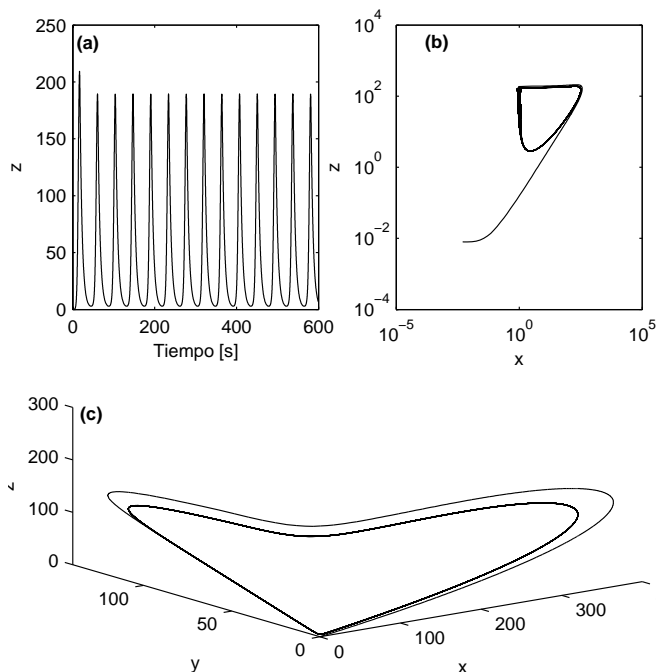


Figura 3. Resultados obtenidos a partir de la integración numérica de (15). (a) Evolución temporal (10 min)  $z$ . (b) Ciclo límite para  $z = z(x)$ ; nótese que el gráfico es logarítmico para poder apreciar mejor el ciclo. (c) Trayectoria en el espacio de fases (ciclo límite).

finalmente se presenta en la Fig. 3(c), la trayectoria en el espacio de fases. La Fig. 3 se obtuvo utilizando los siguientes valores de parámetros:  $q = 8.4 \times 10^{-4}$ ,  $s = 1$ ,  $w = 0.19$  y  $f = 1.8$ ; siendo las condiciones iniciales:  $x_0 = 0.05$ ,  $y_0 = 0.7$  y  $z_0 = 0.08$ .

### 4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Tanto los resultados experimentales como los cálculos numéricos indican que la reacción BZ se comporta como un sistema no lineal oscilante en las concentraciones de los reaccionantes.

Se llega a ésta conclusión principalmente por la correspondencia cualitativa entre la representación temporal de la solución numérica con la obtenida espectroscópicamente. Dicha correspondencia confirma que:

1. La reacción BZ es autocatalítica y por tanto evoluciona lejos del equilibrio.
2. Los fenómenos experimentales, tales como los cambios de color periódicos y la formación de patrones, son inherentes a dicha condición. Por ejemplo, en el experimento §2.3 se forman patrones sobre una fase heterogénea se agite o no el sistema.

Esto se debe a que ambos aspectos están íntimamente relacionados con el mecanismo FKN que es la base la descripción matemática de la reacción BZ como sistema complejo.

Respaldados por los resultados obtenidos, para futuro se tienen las siguientes perspectivas:

- Una vez optimizado el método de medida espectrofotométrico, se harán variar las concentraciones de ácido malónico de manera de observar cómo éstas afectan el período de las oscilaciones.
- Con el mismo objetivo que en el anterior punto, se harán variar las concentraciones de  $\text{KBrO}_3$ .
- Se intentará medir las longitudes de onda de los patrones ayudándonos con una cámara filmadora.
- Eventualmente se tendría que hacer algunas determinaciones experimentales suplementarias (constantes de velocidad).
- Para la parte concerniente a la formación de patrones bidimensionales se tratará de adaptar un modelo de reacción-difusión que pueda explicar la formación de estos patrones.
- Acoplando dos subsistemas con diferentes períodos de oscilación se espera observar que exista un sistema resultante que tenga un sólo período de oscilación dado por la interacción de los subsistemas. El acoplamiento se realizaría uniendo mediante un tubo dos cajas Petri cada una de las cuales conteniendo una solución oscilante diferente. Al cabo de cierto tiempo esperaríamos que el período de las oscilaciones en ambas cajas Petri sea el mismo gracias al surgimiento de la sincronización.
- Se espera poder determinar cantidades características a la sincronización, tales como las lenguas

de Arnold, las escaleras del diablo, etc.

- Finalmente, para la parte de sincronización, se espera poder formular un modelo fenomenológico basado en variables tales como la duración de la carga y la descarga en las oscilaciones.

#### Agradecimientos

Los autores agradecen a Jessica D'Hernoncourt y Stéphanie Depickère de la Universidad de Bruselas por su valiosa colaboración en lo concerniente a la reacción BZ. A Leonardo Guzmán por toda la cooperación en lo concerniente a la bibliografía y a los ambientes de laboratorio. Finalmente a Edgar Coronel por hacer posible las mediciones espectrofotométricas.

#### REFERENCIAS

- [1] Volkenshtein, M.V., Biofísica, Mir, 1985.
- [2] de Groot, S.R., Termodinámica de los Procesos Irreversibles, Alhambra, 1968.
- [3] Guerasimov, Ya., Drewng, V., Eriomin, E., Kiseliov, A., Lebedev, B., Panchenkov, G., Shliguin, A., Curso de Química Física, Mir, 1986.
- [4] Noyes R.M., Some Models of Chemical Oscillators, Journal of Chemical Education, V. 66, 190-191, 1989.
- [5] Field R.J., Schneider F.W., Oscillating Chemical Reactions and Nonlinear Dynamics, Journal of Chemical Education, V.66, 195-204, 1989.
- [6] Nicolis, G., Introduction to Nonlinear Science, Cambridge University Press, 1995.
- [7] D'Hernoncourt, J. La réaction oscillante de Belousov-Zhabotinski, Com. Pers., 2004.

## EL TIEMPO A TRAVÉS DEL TIEMPO

Adolfo Aramayo<sup>1</sup>

Carrera de Física—U.M.S.A.  
La Paz, Bolivia

### RESUMEN

Primeramente se plantea una revisión del concepto de tiempo durante la Antigüedad, el de Parménides y el de Heráclito, en particular, para después procurar una reformulación de la cuestión del tiempo en base al concepto de Kant, poniendo de relieve la confrontación entre determinismo y libre albedrío. Luego se ofrece una revisión cronológica de la noción implícita de tiempo en la Relatividad, la Mecánica Cuántica y la Termodinámica, concluyendo, así, que el tiempo no es absoluto, tiene dirección y que su orden causal no puede responder únicamente a un determinismo científico.

### 1. INTRODUCCIÓN

De todas las nociones, la del tiempo es, probablemente, la más inaccesible a la mente humana. Es interesante constatar que esta afirmación se realiza mientras *el tiempo pasa* y que ni bien se la ha sentenciado, *ya* pertenece al pasado.

De todas las cualidades del tiempo, las de *pasado, presente y futuro* son las más cercanas a la experiencia inmediata por la repercusión que tienen en todo evento que acaece. Así, todo evento, previsto parcialmente en lo que llamamos futuro, *tiene lugar*, finalmente, en un presente, para pertenecer inmediatamente después a un pasado que no se puede modificar: el tiempo es irreversible.

¿Cómo es posible que todas las posibilidades que contempla el futuro se reduzcan a una sola en el presente y cómo se puede saber *dónde estaban antes y a dónde van después?* Esta preocupación se puede resumir en las palabras de Hans Reichenbach, preguntándonos “qué es el tiempo, si todo lo que tenemos de él es este Ahora, este momento único que se desliza con nosotros a través de la corriente de eventos que fluye del pasado inmutable al futuro incognito”. [1]

Está claro que este cuestionamiento está permeado por la percepción que tenemos y por la sensación que nos causa el tiempo. Es por ello que esta aproximación no puede ser considerada estrictamente científica, haciéndose necesaria una reformulación de la pregunta *¿Qué es el tiempo?* A pesar que esta reformulación no garantiza una respuesta para esta pregunta, es indudable que la reformulación por sí, aportaría nuevas apreciaciones y puntos de vista antes ignorados.

Por otra parte, la mayor de las fatalidades humanas, la muerte, se convierte en el factor que alimenta la búsqueda de una respuesta, pues el temor subjetivo por

la muerte se convierte en un temor objetivo por el tiempo. “El temor por la muerte ha influido de manera decisiva el análisis lógico que los filósofos han dado al problema del tiempo. La creencia de que han encontrado paradojas en el flujo del tiempo es llamada una *proyección* en la terminología psicológica moderna. Esta proyección funciona como un mecanismo de defensa; así, las paradojas tienen por fin desacreditar las leyes físicas que provoquen un antagonismo emocional profundamente arraigado”, dice Reichenbach. Al mismo tiempo, están las creencias de casi toda las religiones en las que se asegura una vida después de la muerte, es decir un escape al flujo del tiempo en una realidad más allá de la terrena y temporal: una vida eterna en contraposición a una vida mortal.

### 2. EL TIEMPO EN LOS SISTEMAS FILOSÓFICOS DE LA ANTIGÜEDAD

El hecho de que todo acontecimiento o evento este condicionado temporalmente conduce a la deducción lógica de que la realidad física a su vez esté supeditada también al tiempo. Sin embargo, ya en la Antigüedad, filósofos como Platón y Parménides (s. IV aC. y s. V aC. respectivamente) desarrollaron conceptos de Realidad en los que ésta no se concreta sino “es innata e indestructible; ya que es completa, inmutable y sin fin. No fue ni será, sino *es*, a un mismo tiempo, una entidad única y continua.” Platón explica que “el tiempo es la imagen móvil de la eternidad”. Aquí eternidad debe entenderse no como una cantidad de tiempo infinita, sino simplemente como una realidad atemporal.

Platón argumenta en el *Timeo* que el creador “... buscó hacer el Universo eterno, tanto como lo pudiese ser. Ahora bien, la naturaleza del ser ideal era perenne, pero era imposible conceder este atributo, en su totalidad, sobre una criatura. Por tanto resolvió tener una imagen móvil de la eternidad y cuando puso orden en los cielos, él hizo esta imagen eterna pero móvil, de acuerdo al número, mientras que la eternidad por sí misma permanece en la unidad; a esta imagen llamamos tiempo.” [2]

<sup>1</sup>Email: aaramayo@fiums.a.edu.bo

Se debe notar que lo que se discute aquí es, en realidad, la imposibilidad de la *realización*, de la transformación, de la conversión o el cambio. (*To become* en inglés o *devenir* en francés.) El sucesor de Parménides, Zenón de Elea (s. V aC.), ilustraría, más tarde, estas ideas mediante sus famosas paradojas.

### 2.1. Las paradojas de Zenón

Zenón argumenta que si el movimiento es la traslación de un punto a otro, una flecha no puede moverse en tanto no esté exactamente en un punto. Luego, ¿cómo puede llegar al próximo punto? ¿Salta a través de un intervalo atemporal? Obviamente no. Por lo tanto, el movimiento, es decir, *el cambio*, es imposible. O considérese la carrera entre Aquiles y la tortuga, en la que la tortuga parte con cierta ventaja. Al partir, Aquiles tiene que alcanzar el punto que la aventajada tortuga ya alcanzó; para cuando lo logra, la tortuga se ha movido a un punto más lejano. Entonces, Aquiles tiene que alcanzar ese otro punto, pero para el momento en el que lo haga la tortuga habrá alcanzado otro punto más lejano y así *ad infinitum*. Aquiles tendría que atravesar una cantidad infinita de distancias no nulas antes que pueda alcanzar a la tortuga y como esto es ilógico, no alcanza a la tortuga, en consecuencia.

Sin embargo, hoy en día se sabe que la paradoja de la flecha puede ser refutada porque existe un elemento limitante llamado *velocidad* que al ser no nulo en el espacio continuo en el que se mueve la flecha, deja sin sentido la noción de “próximo punto”. Por otra parte, Aquiles sí puede alcanzar a la tortuga porque se sabe que una suma de infinitas partes puede converger, de hecho, hacia un valor que en este caso se traduce como un tiempo finito. Por otra parte, Zenón sabía que la flecha se desplaza por el aire y que Aquiles ciertamente alcanza a la tortuga. Lo que sucede es que Zenón, como Parménides, pretendía mostrar que *el cambio y la realización* son ilusorios y que la Realidad es atemporal.

### 2.2. Todo fluye

Esta es la frase con la que Heráclito (s. V aC.) resume su filosofía y muestra su oposición a la negación que Parménides y Zenón hacen del flujo del tiempo. Heráclito dice que “uno no puede entrar al mismo río dos veces porque nuevas aguas lo están colmando constantemente”. Sin embargo, lo que Heráclito logra, en realidad, es llamar la atención sobre la naturaleza lógica de cualquier ente físico como una serie de diversos estados en el tiempo; para la *identidad* física de dicho ente no es necesario que estos estados sean iguales. Así, *el cambio y la realización* se hacen posibles.

Para Aristóteles, bajo una línea de pensamiento similar, *el cambio* consistía en introducir entre el ser y el no-ser, es decir, *la realización*, un tercer estado de potencialidad y decir que el cambio es la actualización de los atributos potenciales dentro de una realidad física, dada a causa

de la naturaleza del objeto cambiante, es decir, el cambio es posible e intrínseco y por eso el tiempo, en contraposición a la idea de los atomistas, debe ser continuo. [3]

Así, para Aristóteles el tiempo se puede entender como producto del movimiento y el movimiento, a su vez, como un tipo de *cambio*.

### 2.3. San Agustín y el tiempo

Durante el siglo IV dC. San Agustín fue responsable de llevar gran parte de la filosofía platónica al centro de la teología cristiana. A pesar que Platón y él no están de acuerdo en los detalles de la creación del mundo, sí lo están en lo que se refiere a la *creación del tiempo*. San Agustín bien puede resumir la preocupación subjetiva por el tiempo, que tanto caracteriza a la Antigüedad, cuando dice:

*Quid est ergo tempus?  
Si nemo ex me quaerat, scio;  
si quaerenti explicare velim, nescio.*<sup>2</sup>

Existen, sin embargo, otras coincidencias de pensamiento que se deben resaltar. San Agustín, como Aristóteles, cuestiona la existencia del pasado como del futuro. Trata de solucionar este problema diciendo que el pasado y el futuro sólo tienen sentido si pensamos en ellos en el presente: el pasado es la memoria, el futuro una expectativa y el presente es todo lo que nos rodea en seguida.

## 3. ¿QUÉ ES EL TIEMPO? UNA REFORMULACIÓN

Estas paradojas y aforismos, producto de una postura emocional hacia el tiempo (cf. **Introducción**, página 50), no dicen mucho acerca de la estructura lógica del mismo, que es lo que se pretende en este ensayo. Para ello es necesario retornar hacia la Física y probablemente comenzar atacando el problema por las cualidades más inmediatas del tiempo, a decir, pasado, presente y futuro.

Un científico podría argumentar, por ejemplo, si es posible cambiar el futuro. La experiencia cotidiana da una respuesta afirmativa a esta cuestión, pero no por ello quiere decir que el futuro no esté determinado, ya que la única diferencia con el pasado es que el primero no es conocido mientras que el último sí lo es. Con esto se quiere discutir una posible simetría en el tiempo, cuestión que está bien fundamentada gracias a la idea de *causalidad*.

La causalidad, o determinismo causal, está en directa relación con la Física que Galileo y Newton desarrollaron en el siglo XVII, pues con ellos y mediante su ciencia *la predicción* se hizo posible. Toda la tecnología de hoy en día es posible porque sabemos que hay relaciones

<sup>2</sup>¿Qué es entonces el tiempo? Si nadie me lo pregunta, lo sé; si deseo explicarlo a quien me lo pregunta, no lo sé. [4]

causales que gobiernan la naturaleza y, así, la predicción, el control y el comportamiento de los sistemas físicos en juego son realizables. En otras palabras, el futuro *está* determinado.<sup>3</sup>

Una visión absolutamente determinista puede mostrarse estéril en lo que se refiere a cualquier cambio o innovación que se quiera hacer. Es una repercusión de Parménides y de su imposibilidad del cambio o la realización. Y la siguiente pregunta se hace plausible: ¿Es el presente sólo el reconocimiento de un patrón de eventos ya determinado?

Si la respuesta a esta pregunta fuese afirmativa, entonces se tendría que decir que no se puede cambiar el futuro. Aquí se levanta una paradoja más genuina que las anteriores, la que enfrenta determinismo y libre albedrío: “El sentido común se inclina, por una parte, a creer que *cada* evento es causado por algunos eventos precedentes, de manera que cada evento puede ser explicado o predecido. . . Por otra parte, . . . el sentido común atribuye a toda persona humana madura y sana . . . la habilidad para elegir libremente entre posibilidades alternativas de acción”. [6]

Para comprender mejor esta nueva paradoja es necesario hacer una revisión breve de la teoría del tiempo de Immanuel Kant (1724 - 1804). En Kant, la distinción parmenideana de ser atemporal y flujo de tiempo ilusorio reaparece como la distinción de entes atemporales por sí mismos y el tiempo como forma subjetiva y aparente de estos entes. “Kant dice que el conocimiento resulta de una interacción entre la realidad física y la mente humana y que la mente humana impone ciertas formas sobre los entes físicos con el fin de hacerlos comprensibles y accesibles a un orden. Tales formas son el espacio y el tiempo.” [1]

“Si yo mismo o cualquier otro ser pudiese observarme sin estas condiciones de percepción sensorial. . . se produciría un conocimiento en el que el concepto de tiempo y cambio no tendrían lugar.” [7]

Así, al proponer la ilusión del tiempo de una manera más elaborada, Kant también salva el libre albedrío o la posibilidad de la acción anticipada: en otras palabras, encuentra un escape al determinismo causal, a pesar que éste lo había impresionado fuertemente por el alcance que tenía la Física newtoniana. Al mismo tiempo, Kant vio muy bien la relación cercana

<sup>3</sup> “Debemos considerar el estado presente del Universo como efecto del estado anterior y causa de su estado posterior. Una inteligencia que conociese por un instante todas las fuerzas que controlan la naturaleza y, en adición, las posiciones relativas de todas las entidades de las que la naturaleza está compuesta – si fuese suficientemente grande para realizar el análisis matemático de estos datos – contendría en la misma ecuación los movimientos de los cuerpos más grandes del Universo y aquellos del átomo más ligero: nada sería incierto para esta inteligencia y el futuro como el pasado estarían presentes a sus ojos.” [5]

entre tiempo y causalidad. Vio, particularmente, que un orden temporal es posible por un orden causal [1]. Sin embargo, para Kant, el orden causal es tan subjetivo como el tiempo y la Física sólo puede describir la apariencia del mundo, no su realidad. Por lo tanto el mundo *real* se ve liberado de las leyes causales.

En contraposición a Kant, Henri Bergson (1859 - 1941), filósofo francés ganador del premio Nobel [1], clama haber construido un sistema en el que *el cambio o la realización* son la esencia del tiempo, pero, al igual que en el caso de Kant, esta otra visión, si bien está mejor elaborada y fundamentada en una ciencia física ya estructurada, tampoco ofrece una reformulación última sobre la cuestión del tiempo.

Reichenbach concluye: “No hay otro medio de resolver el problema del tiempo que no sea el de la Física. Más que cualquier otra ciencia, la Física ha estado relacionada con la naturaleza del tiempo.” Si, en efecto, hay una relación profunda entre la Física y el concepto de tiempo, deben analizarse en particular las implicaciones que tienen, en especial, tres ramas de la Física Moderna: la Termodinámica<sup>4</sup>, la Relatividad y la Mecánica Cuántica, por lo que puedan decirnos de la dirección, el relativismo y el determinismo en el tiempo, respectivamente.

#### 4. EL TIEMPO EN LOS SISTEMAS FÍSICOS DE LA MODERNIDAD

Para revisar el criterio de Reichenbach sobre la resolución del problema del tiempo, a continuación se presenta un análisis cronológico aproximado (de acuerdo a Dampier [9]) de los eventos físicos que marcaron una tendencia en cuanto al concepto del tiempo.

“El invento a finales del siglo XIII del reloj mecánico, en el que las manecillas traducían el tiempo en unidades de espacio sobre la esfera, completó la sustitución del tiempo *orgánico*, progresivo, irreversible (tal como era vivido), por el tiempo abstracto, matemático, de unidades sobre una escala, que pertenecía al mundo de la Ciencia.” [3]

Ilya Prigogine afirma [11]: “Fue la incorporación del tiempo en el esquema conceptual de la física galileana la que marcó los orígenes de la ciencia moderna.” Galileo Galilei (1564 - 1642) hace dos planteamientos importantes a lo largo del siglo XVII. Uno de ellos consiste en la posibilidad de medir un *tiempo absoluto* observando el paso de los satélites de Júpiter por delante y por detrás de dicho planeta. El efecto práctico, que en realidad estaba buscando Galileo, permitía entonces medir las longitudes (en contraposición a las latitudes) con una mayor precisión. El segundo de sus

<sup>4</sup> La inclusión de la Termodinámica como una de las ramas de la Física Moderna se debe al análisis que se dará, más adelante, de la Segunda Ley de la Termodinámica, en la versión de Ludwig Boltzmann [8] que bien corresponde a lo que ahora conocemos como Mecánica Estadística.

planteamientos, respecto al tiempo, establece que los periodos de oscilación de un péndulo son los mismos, lo que a su vez permite la construcción de mejores relojes. Sin embargo, lo que aquí hay que subrayar es que Galileo creía en el carácter absoluto del tiempo.

El filósofo y matemático inglés Isaac Barrow (1630 - 1677), tutor de Isaac Newton, propone que el espacio y el tiempo son absolutos. Es posible que esta noción haya influido poderosamente en el desarrollo de la Física newtoniana. De hecho, Isaac Newton (1643 - 1727) sentencia: "...el tiempo absoluto, verdadero y matemático fluye igualmente de sí mismo y a partir de su propia naturaleza sin relación a nada externo." [12] Por otra parte, el filósofo alemán Gottfried W. Leibniz (1646 - 1716) rechaza esta posición explicando que los conceptos de espacio y tiempo debieran ser conceptos empíricos formados por abstracción de nuestras percepciones sensoriales de las cosas reales.

A propósito de la postura de Kant (ya discutida) Bertrand Russell (1872 - 1970), el filósofo de la ciencia inglés, ha considerado que más que un avance o un aporte, esta filosofía fue un escollo y produjo un retroceso en el progreso de las ideas y conceptos científicos. Sin embargo, es interesante reconocer que Kant fue, en su tiempo, lo que podría considerarse un buen científico gracias a su amplio conocimiento de la Física de su época.

La Revolución Francesa dió su propia contribución a la noción del tiempo, organizando las medidas o dimensiones fundamentales. Así, Jean Fourier (1768 - 1830) puso de manifiesto en su obra *Théorie du Chaleur* que las magnitudes físicas secundarias, todas derivaban de tres cantidades fundamentales, a decir, la longitud, la masa y el tiempo.

Una de las consecuencias de la visión newtoniana del tiempo es que las leyes mecánicas se desarrollan igualmente si el tiempo corre hacia delante como hacia atrás. Es decir existe una completa simetría en lo que se refiere a la dirección del tiempo. Rudolf Clausius (1822 - 1888) rebate esta posición en 1850 al presentar un artículo ante la Academia de Ciencias de Berlín en el que propugna la segunda ley de la termodinámica. Esta ley establece, resumidamente, que la aleatoriedad de los componentes de un sistema dado crece siempre. Es decir, la entropía (cualidad cuantificable de la ley en cuestión), siempre es positiva y los procesos en los que está presente – prácticamente todos en el Universo – son irreversibles. Por tanto, el tiempo tiene una dirección, si es que mantenemos la visión mecanicista del mundo que Newton inició.

#### 4.1. Aportes del siglo XX

En 1870 el matemático alemán Carl Neumann (1832 - 1925) cuestiona la idea de inercia como Newton

la plantea. En particular Neumann pregunta qué debería entenderse por inercia si el Universo estuviese constituido por una sola partícula y si así se pudiese, en efecto, construir un verdadero reloj inercial que marcara *un verdadero tiempo absoluto*. Sin embargo, ¿cómo podemos saber que una partícula esta definitivamente sujeta a una fuerza o no?

En 1883 Ernst Mach (1838 - 1916) publica una historia de la mecánica en la que presenta argumentos en contra de las ideas newtonianas de espacio y tiempo absolutos. Newton argumenta que el movimiento inercial se da en relación al espacio absoluto mientras que Mach argumenta que el movimiento inercial sólo puede darse en relación al promedio de la masa en el Universo. Por otra parte, Mach creía que lo que entendemos por tiempo es sólo gracias a *los cambios mecánicos* y no de manera inversa.

En 1898 Henri Poincaré (1854 - 1912) presenta un artículo en el que plantea dos preguntas sumamente significativas: ¿Qué quiere decir que un segundo hoy es igual a un segundo mañana? ¿Qué quiere decir que dos eventos que están separados en el espacio ocurran al mismo tiempo?

La primera de estas preguntas no tiene una respuesta definitiva hasta hoy. Sin embargo, un número de filósofos ha llegado a la conclusión de que el tiempo es una sustancia que permea el espacio sin fluir necesariamente. Ellos argumentan que la noción de flujo es inconsistente internamente. "El concepto de flujo, después de todo, hace referencia al movimiento. Tiene sentido hablar del movimiento de un objeto físico, como una flecha a través del espacio, determinando como su posición varía con el tiempo. Pero ¿qué significado puede darse al *movimiento del tiempo* mismo? Formulando la simple pregunta *¿Cuán rápido pasa el tiempo?* expone lo absurdo de la pregunta misma. Así, la respuesta trivial *un segundo por segundo* no nos dice nada en absoluto" [13]. La mayoría de los físicos dirían, en este sentido, que el flujo del tiempo es irreal pero que el tiempo, por sí mismo, es tan real, como el espacio. De hecho, un reloj mide el paso entre eventos tanto como una cinta mide las distancia entre lugares; pero un reloj no mide la velocidad con la que cada momento sucede al siguiente. Por lo tanto, tal pareciera que el flujo del tiempo es subjetivo, no objetivo.

Cuatro años después, en 1902, Poincaré presenta otro artículo en el que pregunta qué información es requerida para predecir el futuro en un marco relativista (no así un marco absoluto como el que imaginaba Laplace), es decir, conociendo sólo las velocidades y posiciones relativas de las partículas contempladas. Albert Einstein (1879 - 1955) resuelve en 1905 las *cuestiones relativistas* planteadas por Poincaré en sus artículos de 1898 y de 1902, exigiendo simplemente dos cosas: Que las

leyes físicas sean las mismas para cualesquiera dos observadores moviéndose relativamente a velocidad constante y sobre los cuales no actúe ninguna fuerza. Lo segundo es que se considere la velocidad de la luz como una constante independiente de la velocidad de su fuente. Así, estos dos postulados permiten abandonar la idea de un espacio y un tiempo absolutos.

Es llamativo el hecho de que fuesen precisamente las tres magnitudes fundamentales propuestas por Fourier las que sufrieran cambios radicales bajo la nueva luz que arrojó la Teoría de la Relatividad sobre ellas. Ahora sabemos que para velocidades comparables a la de la luz, la masa (entendida como inercia traslacional) crece desmesuradamente, mientras que la longitud se contrae y, principalmente para lo que nos toca, el tiempo se dilata. Conclusión: ¡ni el espacio ni el tiempo son absolutos! Son relativos en función del observador. Pero ¿qué quiere decir que el tiempo se dilate o que los relojes marquen el paso del tiempo más lentamente? Es, sin duda una pregunta difícil. Lo seguro es que sobre cuantos relojes se ha probado esta teoría, la misma se ha comprobado siempre.

Como consecuencia de la teoría propuesta por Einstein, años más tarde Hermann Minkowski (1864 - 1909) fundamentó la base matemática de la teoría introduciendo un espacio de cuatro dimensiones, el espacio-tiempo. En este espacio matemático sólo la entidad espacio-temporal puede tener carácter absoluto. En las palabras de Hermann Weyl (1885 - 1955), “es un continuum cuadrimensional que no es espacio ni es tiempo.” [14] Por otra parte, si el astrónomo danés Olaf Römer ya pudo constatar que la velocidad de la luz es finita en 1676, es discutible el hecho de que hayan tenido que pasar más de 200 años para dilucidar la relatividad del tiempo.

Hay quienes creen que la Teoría de la Relatividad Especial plantea más problemas que soluciones a la cuestión del tiempo. Dado que el tiempo sólo es significativo para un solo observador, pues cada uno tiene un tiempo propio asociado, ¿qué significa decir *ahora*? Einstein creía que éste era un concepto humano que ya no podía tener lugar en esta nueva descripción del Universo. Sin embargo, el mismo escribió: “...hay algo esencial acerca del *ahora* que está fuera del reino de la ciencia.” [14]

Cuando Einstein incorporó la gravitación a la teoría del espacio-tiempo lo que resultó de ello fue la Teoría de la Relatividad General. En este caso, no sólo la velocidad tenía repercusión sobre el tiempo sino también los cuerpos masivos. Así, por ejemplo, un reloj sobre la superficie de la tierra se retrasa  $10^{-9}$  segundos cada hora, en comparación a un reloj alejado, en el espacio, de cualquier cuerpo masivo. Hoy en día se han comparado incluso los tiempos que miden dos relojes, uno en la azotea de un edificio y otro en la

planta baja. Al otro extremo están los agujeros negros, en los que el campo gravitacional es tan intenso que el tiempo se detiene efectivamente sobre su horizonte de eventos. A la vista de efectos tan sorprendentes, no sería apropiado preguntarse ¿qué es lo que realmente se dilata en cualquiera de estos relojes ideales que son, al parecer, el mejor reflejo del tiempo?

Otra de las grandes revoluciones del siglo XX tuvo lugar con el desarrollo de la Mecánica Cuántica.<sup>5</sup> Werner Heisenberg (1901 - 1976), uno de los constructores de esta teoría, descubrió el Principio de Incertidumbre en 1927. Este principio establece que el producto de las incertidumbres de dos cantidades (llamadas “complementarias” o “conjugadas”), como las de velocidad y posición, tiene un valor límite. Es decir, que cuanto mayor precisión se requiere de una de las cantidades, menor es la precisión en la otra. Como se ve, este principio impone una restricción al determinar las posiciones y velocidades de un conjunto de partículas con un grado de precisión absoluto. De este modo no es posible determinar, tampoco, ningún futuro para el sistema en el que dichas partículas se encuentren puesto que las incertidumbres se irían multiplicando. Por tanto, el sueño determinista de Laplace es imposible. Estas cantidades físicas no sólo se limitan a la posición y la velocidad, sino también pueden, equivalentemente, ser el tiempo y la energía. Así, entonces, al no ser posible la determinación de una medida temporal con cualquier precisión, es evidente la imposibilidad de un tratamiento adecuado de la cuestión del tiempo a escalas en la que los efectos cuánticos sean apreciables.

Einstein se mostró muy preocupado por las repercusiones del Principio de Incertidumbre, ya que significaba que el mundo no podría ser descrito con total precisión. Procurando una solución se reunió en repetidas oportunidades con Niels Bohr (1885 - 1962) en una serie de entrevistas epistemológicas [10], en las que se vio la necesidad de entender como deberían interactuar teorías básicas como las de Relatividad y Cuántica en cuanto a aspectos tan fundamentales como el espacio y el tiempo.

Los intentos por reunir estas dos teorías aún continúan hoy en día. En el camino se han encontrado, sin embargo otros problemas. Ahí está, por ejemplo, la famosa paradoja EPR en la que aparentemente se transmite información a velocidades mayores que la de la luz, lo que viola unos de los postulados de la Relatividad, con implicaciones inmediatas para la cuestión del tiempo, que aún no han sido estudiadas completamente. (Las condiciones experimentales de la paradoja fueron mostradas en los años 80.) Una de las muchas hipótesis propuestas desde entonces es la de Stephen Hawking en la que el tiempo no es único. Existe uno *imaginario*,

<sup>5</sup>Es interesante mencionar que el escenario en el que se desarrolló esta teoría fue el tiempo absoluto de Newton.

necesario a la evolución del Universo, y otro *real* que *percibimos y medimos*. [15]

Finalmente, está la Termodinámica que mediante su concepto de entropía condiciona la dirección del tiempo, lo hace irreversible. En base a los descubrimientos en termodinámica de Sadi Carnot (1796 - 1832) en 1821, Rudolf Clausius y William Thomson (más tarde distinguido con el título de Lord Kelvin), establecieron, a mediados del siglo XIX, la segunda ley de la termodinámica, “un principio que hace posible la expresión matemática de una dirección que controle el curso de los eventos físicos.” [1] La primera ley de la termodinámica estipula la conservación de la energía. En su forma clásica, la segunda ley estipula la existencia de una cantidad, llamada *entropía*, que en algunos casos permanece constante, en otros se incrementa, pero que en ninguno disminuye. Los procesos irreversibles son aquellos en los que la entropía aumenta. La entropía puede ser considerada una función de estado que describa un sistema en el que la suma total de los cambios en la entropía sea positiva. Esto, siempre y cuando el sistema sea cerrado. Sin embargo, un sistema mecánico – en contraposición a uno termodinámico – sufre cambios mecánicos (no termodinámicos) que no afectan el valor de la entropía de dicho sistema.

Existen, de todas formas, ciertos sistemas en los que hay procesos que *se pueden considerar* reversibles si los procesos termodinámicos son lentos, o semejan estados de equilibrio sucesivos, o si los sistemas no son estrictamente cerrados. También se pueden considerar como procesos reversibles aquellos ciclos termodinámicos (por ejemplo, el ciclo de Carnot) para los que la energía agregada necesaria para revertir el ciclo, es pequeña en comparación a la energía introducida u obtenida en el ciclo. Así, estrictamente hablando, ningún proceso natural – incluyendo los mecánicos<sup>6</sup> – es completamente reversible.

Todo esto indica que la dirección de los procesos físicos puede ser descrita por una función de estado que a su vez describe el grado de equilibrio alcanzado en el sistema considerado. Este grado de equilibrio puede entenderse como el grado de ordenamiento en el sistema. En el caso del Universo, considerado como un sistema cerrado, esto se traduce como la existencia de un tiempo positivo - una dirección preferida - en el que se alcanza estados sucesivos a mayor entropía, es decir, estados cada vez más parejos o equilibrados.

A todo esto Ludwig Boltzmann (1844 - 1906) aportó una corrección muy valiosa: el principio de incremento de la entropía debe ser considerado no como una ley causal, sino como una ley estadística. “No debemos decir *la entropía debe hacerse mayor*, en el sentido en

el que decimos *la energía debe permanecer constante*. Debemos decir, *es altamente probable que la entropía se incremente*. En otras palabras, la reversibilidad en un proceso termodinámico no es físicamente imposible; es meramente improbable.” [1] Boltzmann descubrió la naturaleza estadística de la entropía. “El orden es una excepción en un mundo azaroso. La dirección de los procesos físicos, y la *dirección del tiempo*, es concebida como un acto estadístico: el acto de realización (transformación o cambio) es la transición de configuraciones improbables a probables. Es esta interpretación de la dirección del tiempo que debe estudiarse. Veremos que representa, en efecto, el núcleo del flujo del tiempo.” [1]

He aquí que debe hacerse una distinción: la primera ley de la termodinámica es causal. La segunda ley es estadística. ¿Cuál de ellas es más fundamental? ¿Es posible derivar una de la otra? En los tiempos de Boltzmann era evidente una preferencia por la prioridad lógica de la primera ley. La segunda era considerada una ley *faute de mieux* – una formulación tentativamente adoptada a falta de algo mejor. De acuerdo a esta opinión las leyes estadísticas deberían reducirse a leyes causales deterministas.

Sin embargo, también es posible lo contrario. Y esta posibilidad está apoyada por la interpretación usual de la Mecánica Cuántica como una descripción estadística de la naturaleza [10]. Desde los primeros días de la formulación de la Mecánica Cuántica fue evidente cómo el tiempo afecta esta teoría de una manera única, muy diferente a cómo lo hace el espacio. El indeterminismo cuántico implica que para un estado cuántico, en particular, hay muchos (posiblemente infinitos) futuros alternativos o realidades potenciales. La Mecánica Cuántica indica las probabilidades relativas para el resultado de cada observable, es decir, para cada cantidad a ser medida, pero no indica qué futuro potencial está destinado a ser realidad. Sin embargo, cuando un observador hace una medida, uno y sólo un resultado es obtenido. Para la mente del observador lo posible hace su transición hacia lo específico – el futuro abierto hacia el pasado fijo – que es precisamente lo que entendemos como *flujo del tiempo*.

## 5. UNA CONCLUSIÓN TEMPORAL

Hoy en día, incluso la Psicología ha tomado parte del debate y ha propugnado si acaso no son los procesos irreversibles termodinámicos estadísticos los que imprimen el inexorable paso del tiempo en nuestras mentes. Por otra parte, no hay consenso entre los físicos acerca de cómo la transición de muchas realidades potenciales hacia una sola realidad toma lugar. Muchos físicos creen que ello tiene que ver con la conciencia del observador, argumentando que es el acto de observación el que obliga a la naturaleza a decidirse por una situación particular. Unos pocos investigadores, como Roger Penrose de la

<sup>6</sup>En los procesos mecánicos, también puede haber disipación por calor.

Universidad de Oxford, mantienen que la conciencia – incluyendo la impresión del flujo temporal – podría estar relacionada a procesos cuánticos en el cerebro.

“¿Qué sucedería si la ciencia fuese capaz de descartar el flujo del tiempo? Tal vez ya no temeríamos el futuro o lamentaríamos el pasado. Las preocupaciones acerca de la muerte serían tan irrelevantes como las que tenemos acerca de un nacimiento. La esperanza y la nostalgia dejarían de ser parte del vocabulario humano. Sobre todo, el matiz de urgencia que caracteriza toda actividad humana, se evaporaría. Ya no seríamos esclavos de las palabras de Henry Wadsworth Longfellow cuando dice ‘*actúa, actúa en este presente*’, pues el pasado, el presente y el futuro serían, literalmente, cosas del pasado.” [13]

Todo esto nos lleva a preguntarnos: ¿Podemos contraponer un tiempo clásico a uno estadístico? Y si es así, ¿qué puede significar que esté abierta la posibilidad a los procesos irreversibles y que la dirección del tiempo no sea única? La pregunta está abierta y las respuestas... esperando.

#### REFERENCIAS

- [1] Reichenbach, Hans. *The Direction of Time*. University of California Press. 1956.
- [2] Platón. *Timeo*. 360 aC.
- [3] Crombie, A. C. *Historia de la Ciencia: De San Agustín a Galileo*. Alianza Editorial. 1987.
- [4] Augustini, Aureli. *Confessio*. 397.
- [5] Laplace, Pierre Simon de. *Essai philosophique sur les probabilités*. 1814.
- [6] Popper, K. R. *The Open Universe: An Argument for Indeterminism*. Routledge. 1982.
- [7] Kant, Immanuel. *Kritik der reinen Vernunft*. 1781.
- [8] Boltzmann, Ludwig. *On the Relation Between the Second Law of the Mechanical Theory of Heat and the Probability Calculus with Respect to the Theorems on Thermal Equilibrium*. 1877.
- [9] Dampier, W. C. *Historia de la Ciencia*. Editorial Tecnos. 1972.
- [10] Aramayo, Adolfo. *La Naturaleza, la Realidad y la Ciencia. Una Revisión de la Interpretabilidad de la Mecánica Cuántica*. Revista Boliviana de Física, Número 7. 2001
- [11] Prigogine, Ilya. *The End of Certainty*. The Free Press. 1997.
- [12] Newton, Isaac. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. 1687.
- [13] Davies, Paul. *That mysterious flow*. Scientific American, September, 2002.
- [14] O'Connor, J.J., Robertson E. F. *A history of time: 20th century time*. [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/HistTopics/Time\\_2.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/~history/HistTopics/Time_2.html)
- [15] Hawking, S.W. *A Brief History of Time*. 1988.

# DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN SIMULADOR DE MICROCOMPUTADOR EN UNA PLATAFORMA NO CONVENCIONAL

Ing. Jorge A. León Cano<sup>1</sup>

*Facultad de Ingeniería  
Universidad Mayor de San Andrés  
La Paz—Bolivia*

## RESUMEN

Es sabido que en nuestro medio no existe la suficiente cantidad de recursos necesarios para emprender un adecuado estudio de temas relacionados con la tecnología electrónica; es por eso que el trabajo desarrollado brinda una alternativa de solución para reducir las limitaciones en el conocimiento y aplicación de las funcionalidades de los microprocesadores, como partes fundamentales de los microcomputadores.

Se busca definir una línea de conocimiento para el diseño y construcción de simuladores de microprocesadores, multiprocesadores y/o transputers. La concepción del trabajo trae consigo muchos otros tópicos, como por ejemplo la estructuración de ensambladores cruzados y programas monitores para sistemas embebidos.

El caso de estudio del presente trabajo describe el diseño y las características de un sistema de simulación del modelo de programación de microprocesadores MC6800 (como parte del *trainer* ET-3400) haciendo uso de calculadoras programables HP48 del fabricante Hewlett Packard. Se desarrolla una aplicación de software para calculadores que no disponen de un lenguaje de programación estándar bajo los principios de optimización de espacio de almacenamiento, velocidad, usabilidad, modularidad, reutilización, integridad y portabilidad. La concepción del sistema emulador se fundamenta en la aplicación correcta de los conceptos existentes en la arquitectura de hardware y en la ingeniería de software para sistemas empotrados.

## 1. INTRODUCCIÓN

La implementación de un sistema de simulación en una plataforma como el calculador gráfico de Hewlett Packard es justificable por la funcionalidad de éste, las características de dicho dispositivo permiten, entre otras posibles acciones:

- Recepción y transmisión de datos.
- Visualización de una considerable cantidad de información.
- Procesamiento de la información para el control de eventos.

Es necesario tener un conocimiento apropiado de la arquitectura de hardware y software de éstos calculadores para el desarrollo de aplicaciones relativamente complejas que van más allá de las especificaciones existentes en los manuales de usuario de éstos equipos.

## 2. ANTECEDENTES

El uso de calculadores programables en diversas aplicaciones ya ha sido abordado dentro de varios proyectos realizados en la Facultad de Ingeniería. Se desarrollaron accesorios para transformar y/o adicionar funcionalidad

al típico calculador programable, pero muchos o casi todos con estructuras poco claras y sin la posibilidad de portabilidad y reuso de los módulos hardware/software.

Con respecto al caso de estudio, ya existen simuladores de microcomputadores implementados en computadores personales o estaciones de trabajo, sin embargo, de acuerdo a la investigación realizada, no se tiene constancia de que se haya desarrollado una herramienta similar para calculadores HP48.

## 3. OBJETIVOS DE DISEÑO

Desarrollar una aplicación de software para calculadores que no disponen de un lenguaje de programación estándar con el fin de poder simular la operación de microprocesadores en un entorno de entrenamiento.

Para alcanzar el objetivo se tiene que:

- Estudiar y analizar la arquitectura de una plataforma específica como es el calculador HP48 de Hewlett Packard.
- Evaluar los requerimientos para el diseño de un simulador de microprocesadores de entrenamiento del caso de estudio seleccionado, para cuantificar el alcance funcional de la aplicación.
- Diseñar la arquitectura de software, para el caso de estudio seleccionado, considerando los principios de

<sup>1</sup>Email: joaleon@hotmail.com

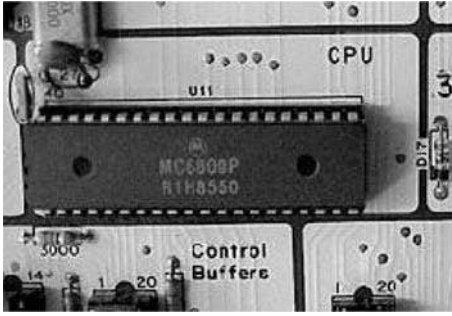


Figura 1. Detalle del MC6800 del *trainer* ET-3400.

optimización de espacio de almacenamiento, velocidad, reusabilidad, modularidad, integridad y portabilidad.

- Implementar la aplicación, para el caso de estudio seleccionado, con el fin de realizar pruebas unitarias, pruebas de módulo y pruebas de integridad de acuerdo a los protocolos estándar de pruebas.
- El proceso de diseño del sistema de simulación no contempla algunas funciones propias del microcomputador real; no se implementan las instrucciones que gestionan las interfaces físicas del *trainer*.
- Extender el desarrollo para realizar la migración a otras plataformas distintas a las del caso de estudio seleccionado.

#### 4. DESCRIPCIÓN DEL DESARROLLO DEL TRABAJO

##### 4.1. *Evaluación de requerimientos*

###### **HARDWARE**

Las características de las arquitecturas del *trainer* y el calculador se resumen a continuación:

**Trainer ET-3400** Microprocesador Motorola MC6800

Ancho de palabra: 8 bits  
Espacio direccionable (Máx.): 64 KB  
Frecuencia del sistema: 1 MHz aprox.  
Registros del modelo de programación: 6

###### **Calculador HP48G+**

Microprocesador NEC Saturno  
Ancho de palabra: 4 bits  
Espacio direccionable (Máx.): 512 KB  
Frecuencia del sistema: 4 MHz aprox.  
Registros del modelo de programación: 19

Deben resaltarse los siguientes atributos físicos del dispositivo en el que se implemente un simulador de programación de un microcomputador:

**MEMORIA.** Los calculadores de las familias HP48G+ y HP48GX tienen 128 KB de memoria RAM (sin posibles expansiones), lo que permite el cómodo desarrollo de una aplicación que requiere alrededor de 28 KB.

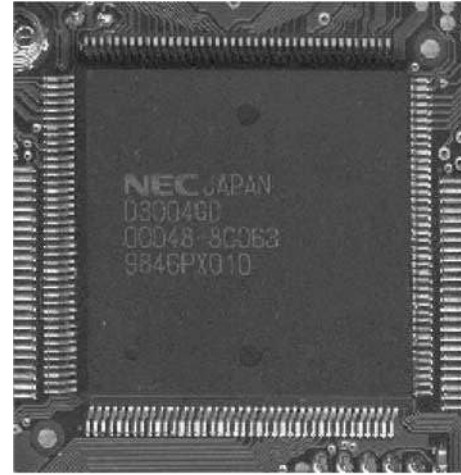


Figura 2. Detalle del  $\mu$ P Saturno del calculador HP.

**VELOCIDAD.** Los tiempos de simulación del software implementado deben ser aptos para el estudio de casos de uso y pruebas dentro de un margen de latencia no exagerado. En el calculador existen tres niveles de programación disponibles, en orden descendente respecto al nivel del lenguaje, pero ascendente en cuanto a la velocidad de ejecución se tiene:

- (1) Lenguaje RPL de Usuario (UserRPL).
- (2) Lenguaje RPL del Sistema (SystemRPL).
- (3) Lenguaje Ensamblador (ASM).

**INTERFAZ HOMBRE MÁQUINA.** En el entorno de simulación, el teclado alfanumérico del calculador es utilizado para imitar al del *trainer*, mientras que la pantalla (resolución 131 x 64) muestra mayor información que la que podemos percibir haciendo uso del *trainer*.

###### **SOFTWARE**

El calculador ofrece un adecuado conjunto de instrucciones que permite imitar las operaciones del modelo de programación de la Unidad del Microprocesador MC6800 (UM6800) y el entorno del ET-3400.

##### 4.2. *Diseño de la arquitectura de software*

###### 4.2.1. *Modelado de datos*

Se analizan las características y relaciones funcionales de las variables pertenecientes a los modelos de programación de los sistemas simulado y simulador.

###### 4.2.2. *Reconocimiento del entorno de simulación*

De acuerdo al modelado de datos se asignan correspondencias funcionales entre las variables de simulación del *trainer* y el calculador. Los contenidos de los registros de la UM6800 se almacenan en los registros de la unidad del Saturno. La memoria RAM y ROM de la UM6800 se simulan en la RAM del calculador.

TABLA 1

Correspondencia de registros y memoria de la UM6800 y del  $\mu$ P Saturno.

UM6800		Saturno	
Registro	Tamaño (bits)	Registro	Tamaño (bits)
Acumulador A	8	R. de trabajo A	64
Acumulador B	8	R. de trabajo B	64
Registro Índice	16	R. de almac. R1	64
Puntero de Pila	16	R. de almac. R2	64
Contador de Programa	16	R. de almac. R3	64
Registro de Código de Condición	8	R. de estado ST	16
Memoria	Tamaño (bytes)	Memoria	Tamaño (bytes)
RAM	512	RAM	512
ROM	1024	ROM	1024

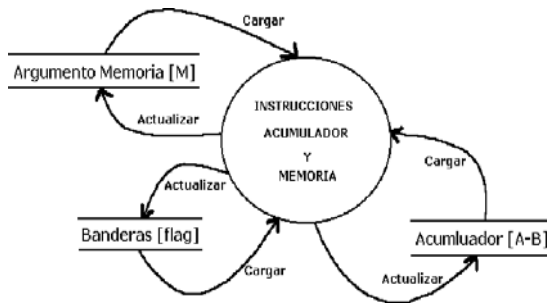


Figura 3. Grafo de las instrucciones de Acumulador y Memoria.



Figura 5. Grafo de las instrucciones del Registro de Códigos de Condición.



Figura 4. Grafo de las instrucciones de Saltos y Ramificaciones.

#### 4.2.3. Implementación

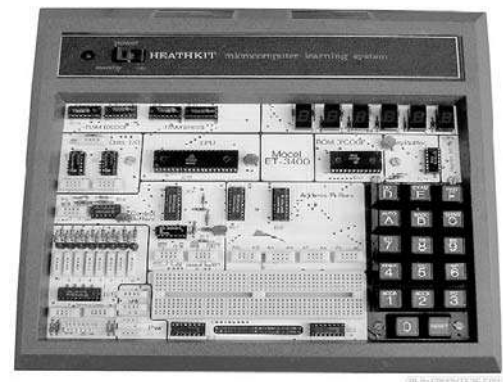
La arquitectura del sistema de simulación se desarrolla refinando sucesivamente niveles de detalle procedimental. Se desarrolla una jerarquía descomponiendo un enunciado macroscópico de función (una abstracción procedimental) al estilo paso a paso hasta que se llega a los enunciados del lenguaje de programación.

Los módulos encargados de la administración de la interfaz gráfica de la aplicación fueron implementados en SystemRPL, mientras que los módulos funcionales responsables de la simulación de la UM680 están escritos en ASM.

Se identifican tres grupos funcionales generales en

el sistema de la UM6800, la representación de éstos se muestra con los grafos del diseño de los modelos estructurales en las figuras 3, 4 y 5.

En la figura 6 se señalan las características físicas del sistema original y las del sistema simulador.

Figura 6. Aspecto del *trainer* ET-3400, fabricado el año 1977.

En la figura 7 se detalla la interfaz hombre máquina del *trainer* real, donde:

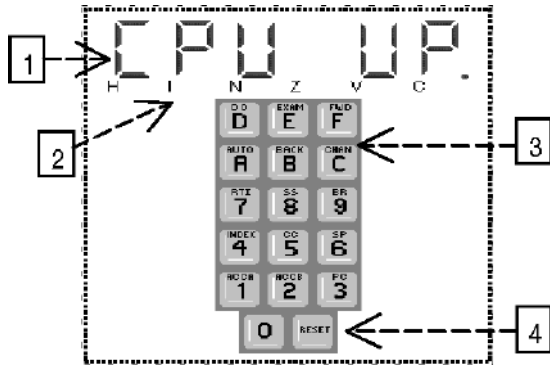


Figura 7. Interfaz hombre máquina del *trainer* ET-3400.

- [1 ] Indicadores de valor/estado.
- [2 ] Relación de indicador y bandera.
- [3 ] Teclado alfanumérico de función/valor.
- [4 ] Reinicio del programa Monitor.

La pantalla correspondiente al programa de emulación (figura 8) ofrece las mismas características en los indicadores estándar de 7 segmentos. Se muestra la correspondencia entre las banderas y los respectivos indicadores que las representan con el relleno o vacío de las secciones gráficas de cada una de ellas (un cubículo relleno corresponde al valor 1 lógico, y un cubículo vacío corresponde al 0 lógico).

Los valores constantemente actualizados de los acumuladores son los que se muestran en la parte superior derecha. El registro de códigos de condición (CC) muestra la información de los estados de las banderas. También se indican los valores del contador de programa (PC), registro índice (IX) y el puntero de pila (SP).

## 5. CONCLUSIONES

La concepción del trabajo trae consigo muchos otros tópicos, como por ejemplo la estructuración de ensambladores cruzados y programas monitores para sistemas embebidos.

El adecuado uso de las técnicas de la ingeniería de software para sistemas empotrados permite la opti-

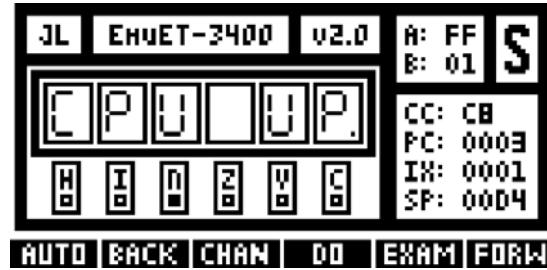


Figura 8. Aspecto de la interfaz gráfica del simulador.

mización del espacio de almacenamiento para datos y la velocidad de simulación.

El uso conjunto de dispositivos con las características del calculador programable de HP y módulos de hardware adicionales pueden ser empleados en varias aplicaciones, como por ejemplo: simulación de eventos y sistemas de hardware/software, control de procesos de mecanismos y telecontrol de eventos (mediante la interfaz infrarroja del calculador), adquisición y análisis oscilográfico de señales, etc.

## REFERENCIAS

- [1] Heathkit Educational Systems, "Individual Learning Program in Microprocessors. EE-3401", Heath Company, 1977.
- [2] Hewlett-Packard Company, "The RPL compiler manual", "The Saturn assembler manual", Hewlett-Packard Co., 1991.
- [3] Eduardo Kalinowski, "Programming in System RPL", 1998.
- [4] Matthew Mastracci, "Guide to the Saturn Processor (Whit HP48 Applications)", 1998.
- [5] Roger S. Pressman, "Ingeniería del Software. Un enfoque práctico", McGraw-Hill, 1998.
- [6] Andrew S. Tanenbaum, "Organización de Computadoras. Un enfoque estructurado", Prentice-Hall, 1992.

*Información sobre calculadores Hewlett Packard*

- [i] <http://www.hpcalc.org>
- [ii] <http://www.hp.com/calculators>

*Técnicas para la programación de un emulador*

- [iii] <http://www.komkon.org/fms/EMUL8/HOWTO.html>

## PRIMER CURSO DE RAYOS CÓSMICOS Y ASTROFÍSICA

Rolando Ticona, Alonso Velarde, Armando Ticona Bustillos

*Instituto de Investigaciones Físicas  
Universidad Mayor de San Andrés  
La Paz—Bolivia*

### RESUMEN

La primera Escuela de Rayos Cósmicos y Astrofísica se llevó a cabo en la ciudad de La Paz del 9 al 20 de agosto de 2004 en el Hotel Torino. El propósito de la Escuela fue el de proporcionar un panorama comprensivo de los aspectos teóricos y prácticos de la física de rayos cósmicos y astrofísica. La Escuela fue dirigida a estudiantes de los últimos cursos del nivel de la licenciatura y estudiantes de los primeros cursos de posgrado, interesados en aprender aspectos básicos de estos campos. Los tópicos de las lecciones incluyeron temas como física solar, el espectro primario y composición de los rayos cósmicos, interacciones de altas energías, astronomía de rayos gamma y GRBs, astrofísica de neutrinos, detectores de rayos cósmicos, simulaciones, monopolos magnéticos y aspectos actuales del Proyecto Auger. Estas clases introductorias proporcionaron a los estudiantes una instrucción básica general, mientras que seminarios especializados les proporcionaron información sobre temas actuales.

Se pretende con esta Escuela iniciar una serie de actividades similares a ser realizadas cada dos años en diferentes países de Latinoamérica. El siguiente país organizador será México.

#### 1. ORGANIZACIÓN

##### 1.1. Dirección Científica

Carlos Aguirre. *Proyecto Auger*  
Carlos Navía. *UFF, Brasil*  
Oscar Saavedra. *Universidad de Torino, Italia*  
Alfonso Velarde. *IIF—UMSA, Bolivia*  
A. Watson. *Leeds, U.K.*

##### 1.2. Organizador local

*Instituto de Investigaciones Físicas (IIF), Carrera de Física, Universidad Mayor de San Andrés.*

##### 1.3. Financiadores

*International Center of Theoretical Physics ABDUS SALAM (ICTP).*  
*Centro Latinoamericano de Física (CLAF).*  
*Proyecto Auger.*

#### 2. DESARROLLO DEL CURSO

##### 2.1. Lecturas

- C. Escobar, UNICAMP, Brazil: *The Pierre Auger Experiment.*
- P. Galeotti, INFN, Italy: *Ultra High Energy Cosmic Rays and EUSO Experiment.*
- A. Haungs, FZK, Germany: *Astrophysics and Cosmic Rays around the Knee.*
- J. Knapp, U. of Leeds, UK: *Air Shower Simulations.*
- P. Lipari, INFN, Italy: *Neutrino Astrophysics.*

— C. Navía, UFF, Brazil: *Gamma ray Astronomy through the detection of photo-muons at sea level in the sub-TeV energy region.*

— C. Navía, UFF, Brazil: *The Brasil—Japan Experiment.*

— L. Patrizzi, U. di Bologna—INFN, Italy: *Search for Magnetic Monopoles.*

— O. Saavedra, Torino, Italy: *High Energy Cosmic Ray Interactions.*

— S. Vernetto, IFSI—Torino, Italy: *Gamma Ray Astronomy.*

##### 2.2. Seminarios

— Y. Matsubara, Nagoya U., Japan: *Cosmic Rays from the Sun.*

— R. Ticona, IIF—U.M.S.A., Bolivia: *Search for Gamma Ray Sources From Chacaltaya.*

— A. Zanini, INFN, Italy: *The Role of Cosmic Rays in Atmospheric Processes.*

— A. Zepeda, CINVESTAV, México: *Cosmic Rays at the LHC.*

##### 2.3. Seminarios en honor al Legado de Galvani—Volta

— O. Saavedra (Italia): *Desde lo Infinitamente Pequeño hasta lo Infinitamente Grande.*

— A. Gérard (Bolivia): *La Física de los Instrumentos Andinos.*

- A. Zanini (Italia): *Dosimetría*.
- R. López (México): *La Física en la Vida Diaria*.
- L. Patrizzi (Italia): *El Legado de Galvani—Volta*.
- D. Sanjinés (Bolivia): *Historia de la Física*.
- P. Galeotti (Italia): *Las Evoluciones de las Estrellas: Desde el Nacimiento hasta los Agujeros Negros*.
- P. Galeotti (Italia): *El Origen del Universo: Hechos y Teoría*.
- P. Lipari (Italia): *Otro Modo de Observar el Cielo*.

### 3. EVALUACIÓN DEL CURSO

#### 3.1. Impacto en la investigación local

El estudio de los Rayos Cósmicos y la Astrofísica a energías entre los  $TeV$  y  $PeV$  solamente pueden ser estudiados (1) mediante arreglos de áreas cada vez mayores o (2) con arreglos colocados a gran altitud. Por su altitud ( $5300msnm$ ) el Laboratorio de Física Cósmica de Chacaltaya es importante para el estudio de Rayos Cósmicos de dichas energías. Por tanto es necesario continuar con la investigación en Chacaltaya con experimentos relativos a interacciones de alta energía, astronomía de Rayos Gamma, búsqueda de monopolos magnéticos y otros. También se recomendó que se debe lograr colaboración internacional para estos experimentos.

#### 3.2. Contactos iniciados

Se ha iniciado un acuerdo de colaboración entre investigadores del laboratorio de Chacaltaya y de la Uni-

versidad de Campinas (Brasil). El propósito principal de esta colaboración consiste en que investigadores y estudiantes bolivianos puedan ir, por lo menos uno al año, a Malarge (Argentina) donde se encuentra el Experimento Auger.

#### 3.3. Comentarios y Conclusiones de los organizadores

El curso contó con disertantes que son autoridades mundiales en el campo de los Rayos Cósmicos y Astrofísica, mostrando el avance en el estudio de los Rayos Cósmicos de Ultra Alta Energía. Los disertantes cubrieron tópicos como: Revisión de los estudios tradicionales de Rayos Cósmicos, esto es, Interacciones de Alta Energía, Astrofísica y Rayos Cósmicos en torno a la “rodilla”, Física Solar; tópicos recientes como la Búsqueda de Monopolos Magnéticos, Astrofísica de Rayos Gamma y Neutrinos; y futuros proyectos como Rayos Cósmicos de Ultra Alta Energía: Experimento Auger, y experimento EUSO. Todos estos tópicos fueron complementados con simulaciones. Así que, tanto organizadores como participantes, coinciden en que el curso satisfizo sus expectativas. Se hicieron copias en CD de todas las presentaciones en *Power Point*.

Se adjunta a la presente edición el CD con las exposiciones.

El Comité Organizador agradece a los financiadores.

#### 3.4. Sugerencia para el futuro

Como el nombre del curso señala, este es el primer curso periódico en Latino América. EL Comité Organizador ha acordado realizar el curso cada dos años en diferentes países de Latino América. La sede del segundo curso se ha fijado en México para el 2006.

## EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS: UNA DEDUCCIÓN ALTERNATIVA (The Method of the Least Squares: An Alternative Deduction)

Wilton P. Silva<sup>1</sup>, Cleide M. D. P. S. e Silva<sup>2</sup>, Diogo D. P. S. e Silva<sup>3</sup>, Cleiton D. P. S. e Silva<sup>4</sup>

<sup>1,2</sup>*Departamento de Física*

<sup>3</sup>*Departamento de Matemática e Estatística*

<sup>1,2,3</sup>*UFMG, 58109-970, Campina Grande, PB, Brasil*

<sup>4</sup>*ITA, São José dos Campos, São Paulo, Brasil*

### RESUMEN

La mayoría de los libros didácticos que abordan el problema del ajuste de curvas deducen el método de los mínimos cuadrados a partir de la presunción de que un conjunto de puntos experimentales del tipo  $(x_i; y_i \pm \sigma_{y_{mi}})$  fluctúan, en torno de la función ajustada, con una distribución gaussiana de errores. En este artículo es propuesta una deducción alternativa, sin partir de esta presunción. Se obtienen fórmulas para los parámetros de una función de primer grado, para sus incertidumbres y para la covarianza entre sus parámetros. Estas fórmulas son aplicadas a un conjunto de puntos  $(x_i; y_i \pm \sigma_{y_{mi}})$  que se ajustan a una recta. La determinación de una incertidumbre para la función ajustada a puntos del tipo  $(x_i; y_i \pm \sigma_{y_{mi}})$  es discutida y, con ello, dicha función pasa a estar dada por  $y(x) = y(x)_m \pm \sigma_{y(x)_m}$ , donde  $y(x)_m$  es la “expresión media” de la función y  $\sigma_{y(x)_m}$  es su incertidumbre. Una aplicación del estudio desarrollado se hace para datos obtenidos en un péndulo de torsión y el análisis de los resultados obtenidos a través de las expresiones deducidas permite establecer el modelo que relaciona el torque aplicado al péndulo y su ángulo de torsión.

### ABSTRACT

The majority of didactic textbooks treating the problem of curve fitting deduces the method of least squares from the presupposition that a set of experimental points of the type  $(x_i; y_i \pm \sigma_{y_{mi}})$  is distributed normally around the fitted function. This article proposes an alternative deduction without use of this presupposition. Formulas are obtained for the parameters of a function of first degree, for their uncertainties and for the covariance between these parameters. These formulas are applied to a set of points  $(x_i; y_i \pm \sigma_{y_{mi}})$  suited around a straight line. The determination of the uncertainty of the function fitted to points of the type  $(x_i; y_i \pm \sigma_{y_{mi}})$  is discussed and the fitted function is then given by  $y(x) = y(x)_m \pm \sigma_{y(x)_m}$ , where  $y(x)_m$  is the “averaged expression” of the function and  $\sigma_{y(x)_m}$ , is its uncertainty. An application of the study is carried out for dates obtained from a torsion pendulum and the analysis of the results permits to establish the relationship between the torque applied on the pendulum and its torsion angle.

### 1. INTRODUCCIÓN

En el trabajo experimental, en general estamos involucrados con medidas que, muchas veces, resultan en tablas que poseen una representación gráfica. Hasta inicios de la década de los 80 era común extraer resultados experimentales a partir del análisis de gráficos, en general trazados en papel milimetrado, *semilog* y *log-log*. Con la popularización de los microcomputadores, varios *softwares* fueron desarrollados con el objetivo de analizar datos experimentales que pueden ser representados gráficamente. El método utilizado en esos *softwares*

es el método de los mínimos cuadrados que, en la mayoría de los textos didácticos, es desarrollado a partir de la presunción de que los puntos experimentales presentan fluctuaciones con una distribución normal de errores en torno de la función ajustada. En este artículo proponemos una deducción alternativa para el método de los mínimos cuadrados, sin la consideración de la distribución normal de errores, en el ajuste de una función de dos parámetros a puntos del tipo  $(x_i; y_i \pm \sigma_{y_{mi}})$ . Conviene observar que  $y_i$  es el valor medio de la ordenada del  $i$ -ésimo punto y que  $\sigma_{y_{mi}}$  es la incertidumbre de ese valor medio. Incluiremos además, la deducción de una importante información con relación a la función ajus-

<sup>1</sup>Email: wiltonps@uol.com.br

tada, que es la determinación de una incertidumbre asociada a esa función. Específicamente, la función objeto de este estudio será la función de primer grado.

A pesar de que la determinación de incertidumbres para puntos del tipo  $(x_i; y_i)$  sea común en muchos trabajos; nosotros lo haremos para puntos del tipo  $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$ , esto es, para puntos cuya incertidumbre de la variable dependiente sea conocida. Para esos casos, el sistema físico objeto de estudio pasa a ser descrito de forma completa, por la expresión  $y(x) = y(x)_m \pm \sigma_{y(x)_m}$ , siendo  $y(x)_m$  la función ajustada, y  $\sigma_{y(x)_m}$  la incertidumbre de esa función. En todo el artículo supondremos que la variable independiente está exenta de errores. Si no fuera así, el estudio desarrollado aquí continúa siendo válido pero, en este caso, hay que hacer un ajuste previo con  $x$  exento de errores y, en seguida, transferir las incertidumbres de  $x$  para  $y$ , por propagación de errores, seguido por un nuevo ajuste. De los *softwares* más conocidos disponibles en el mercado, pocos como el “Origin”<sup>2</sup> y el “LAB Fit Curve Fitting”<sup>3</sup> determinan una incertidumbre para funciones de primer grado ajustadas a puntos del tipo  $(x_i; y_i)$ . El “LAB Fit” es el único conocido por los autores de este artículo que hace la transferencia de las incertidumbres de  $x$  para  $y$  de forma automática, a partir de la información de las incertidumbres de  $x$ . A propósito, el presente artículo tiene su origen en el desarrollo de este *software*, creado en complementación al libro “Tratamiento de Datos Experimentais” [1].

## 2. DEDUCCIÓN USUAL DEL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Dado un conjunto de  $N$  puntos  $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$  y una función  $f(x, a, b)$ , donde  $x$  es la variable independiente y  $a$  y  $b$  son los parámetros de esa función, su ajuste al conjunto de puntos puede ser obtenido a través del método de los mínimos cuadrados. Este método ha sido desarrollado en muchos textos didácticos a partir de la siguiente presunción: las distribuciones de los errores de los puntos experimentales en torno de la curva ajustada deben ser gaussianas. Eso significa que en un gráfico, la probabilidad de que un punto  $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$  “esté sobre la curva ajustada” está dada por la función de distribución normal (ver, por ejemplo, la referencia [2]):

$$P_i = \frac{C}{\sigma_{ymi}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{y_i - f(x_i, a, b)}{\sigma_{ymi}} \right]^2}, \quad (1)$$

donde  $C$  es una constante que tiende a uno por cuanto  $P_i$  es, de hecho, una densidad de probabilidad. Así, la probabilidad de que la curva contenga todos los  $N$  puntos experimentales está dada por el producto de las probabilidades individuales:

$$P = \frac{C^N}{N} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - f(x_i, a, b)}{\sigma_{ymi}} \right]^2} \prod_{i=1}^N \sigma_{ymi}. \quad (2)$$

Naturalmente, la función que mejor se ajusta a los puntos es aquella para la cual la probabilidad  $P$  es máxima. A eso se da el nombre de principio de la máxima probabilidad. Entonces, el exponente negativo de la función dada en la Eq. (2), debe ser, en módulo, un mínimo. Denotando la sumatoria del exponente de la Eq. (2) por  $\chi^2$ , esto es, haciendo

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a, b)]^2 \frac{1}{\sigma_{ymi}^2}, \quad (3)$$

las condiciones para que  $\chi^2$  sea un mínimo son:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \quad y \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0. \quad (4)$$

A partir de las condiciones dadas en (4) y de la expresión obtenida en (3), tenemos un sistema de dos ecuaciones que nos posibilita determinar los parámetros  $a$  y  $b$  para una función específica. Esta es la deducción usual del método de los mínimos cuadrados, y es presentada de esa forma en la mayoría de los libros que tratan el problema del ajuste de curvas. Aún cuando el razonamiento empleado en la deducción sea bastante simple, induce al estudiante a creer que tal método sólo puede ser aplicado si los puntos experimentales fluctúan con distribución normal en torno de la función ajustada. En este artículo, mostraremos que el método de los mínimos cuadrados puede ser desarrollado sin la suposición de la distribución normal. Naturalmente, si la distribución normal existe, habrá mayor disponibilidad de información sobre la función ajustada, como por ejemplo, la asociación de una probabilidad a los intervalos determinados para los valores de los parámetros.

Para nuestra deducción alternativa, debemos hacer una revisión de un tema normalmente estudiado en el primer curso dedicado a la Física Experimental: valor medio de medidas no similares.

## 3. REVISIÓN DE UN TÓPICO RELEVANTE: VALOR MEDIO DE MEDIDAS NO SIMILARES

Antes de la deducción alternativa propiamente dicha, hagamos un análisis del tratamiento de medidas no similares de una misma cantidad. Este tipo de tratamiento será utilizado en nuestra deducción y, para ello, supongamos que hayamos hecho  $n_1$  lecturas de una cantidad  $x$  que, entonces, puede expresarse así:

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm \sigma_{x_{m1}}. \quad (5)$$

<sup>2</sup>www.originlab.com

<sup>3</sup>www.angelfire.com/rnb/labfit

Aquí,  $\bar{x}_1$  es el valor medio de  $x_1$  y  $\sigma_{x_{m1}}$  es la desviación estándar de este valor medio. Con un otro conjunto de  $n_2$  lecturas de la cantidad  $x$ , obtenidas con el mismo instrumento y en las mismas condiciones, podemos escribir:

$$x_2 = \bar{x}_2 \pm \sigma_{x_{m2}}. \quad (6)$$

A pesar de que  $x_1$  y  $x_2$  son medidas de la misma cantidad  $x$  se llaman medidas no similares, por tener precisiones diferentes. Los valores medios de  $x_1$  y de  $x_2$  son determinados a través de la expresión para la media aritmética de las lecturas

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (7)$$

donde  $n$  es el número de lecturas efectuadas en cada conjunto de datos. La desviación estándar de cada media se obtiene por las expresiones [2, 3 y 4]

$$\sigma_{x_m} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \quad (8)$$

donde  $\sigma_x$  es la desviación estándar de las lecturas. Hay que observar que la relación entre  $\sigma_{x_m}$  y  $\sigma_x$  dada en la Eq. (8) está demostrada en las referencias [2, 3 y 4] sin partir de la suposición de que las lecturas tengan una función de distribución normal.

Debemos observar que, para extraer un único resultado final de las medidas  $x_1$  y  $x_2$ , no podemos simplemente calcular la media aritmética de esas medidas, porque ellas tienen precisiones diferentes. Para evitar el problema, basta comprender que un nuevo valor medio puede ser obtenido por la “unión” de los dos conjuntos de lecturas originales en un único conjunto con  $n_1 + n_2$  lecturas, con lo que usamos la Eq (7):

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1 + n_2} \left[ \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i} \right], \quad (9)$$

donde  $x_{1i}$  y  $x_{2i}$  son las  $i$ -ésimas lecturas de los conjuntos de datos 1 y 2.

De la Eq. (7) podemos escribir  $\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$  y, entonces, la Eq. (9) puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1 + n_2} [n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2], \quad (10)$$

lo que significa que el nuevo valor medio es igual a la media ponderada de  $x_1$  y  $x_2$ , teniendo el número de lecturas de cada conjunto de datos como el factor peso. Por otro lado, de la Eq. (8) podemos escribir  $n = \sigma_x^2 / \sigma_{x_m}^2$  que, sustituido en (10), nos da:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 \frac{1}{\sigma_{x_{m1}}^2} + \bar{x}_2 \frac{1}{\sigma_{x_{m2}}^2}}{\frac{1}{\sigma_{x_{m1}}^2} + \frac{1}{\sigma_{x_{m2}}^2}}. \quad (11)$$

En esta última expresión los desvios estándar  $\sigma_x$  de las lecturas de los dos conjuntos fueron considerados iguales, lo que permitió su simplificación. Esa consideración es bastante razonable porque hicimos la suposición de que los dos conjuntos de lecturas fueron obtenidos con el mismo instrumento, y en las mismas condiciones. Una generalización de la Eq. (11) para  $N$  medidas no similares nos da:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{x}_i \frac{1}{\sigma_{x_{mi}}^2}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{x_{mi}}^2}, \quad (12)$$

donde el término  $1/\sigma_{x_{mi}}^2$  es denominado peso estadístico de la  $i$ -ésima medida. Entonces, dadas  $N$  medidas no similares  $x_i = \bar{x}_i \pm \sigma_{x_{mi}}$ , el valor medio de esas medidas es calculado con la utilización de la Eq. (12).

#### 4. DEDUCCIÓN ALTERNATIVA DEL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Cuando un conjunto de  $N$  puntos del tipo  $(x_i; y_i \pm \sigma_{y_{mi}})$  se obtiene en un laboratorio, el desprecio de las incertidumbres  $\sigma_{y_{mi}}$  significaría una pérdida de la información disponible. Más que eso, lo que haríamos, de hecho, sería provocar una “distorsión” de la información disponible. Lo más correcto sería desarrollar el método de los mínimos cuadrados tomando en consideración las incertidumbres de  $y$ . Para ello, recordemos que, si las lecturas  $y_i$  tuviesen pesos estadísticos desconocidos y quisiésemos ajustar una función  $f(x, a, b)$  a esos puntos, deberíamos minimizar la siguiente expresión para la varianza del ajuste [1, 5 y 6]:

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a, b)]^2. \quad (13)$$

La expresión (13) puede ser reescrita del siguiente modo:

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{N}{N-2} \frac{\sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a, b)]^2}{N}, \quad (14-a)$$

o

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{N}{N-2} \bar{e}^2, \quad (14-b)$$

donde

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a, b)]^2}{N}. \quad (14-c)$$

La expresión (14-c) define el error cuadrático medio de los puntos  $(x_i, y_i)$  a los que fue ajustada una función del tipo  $f(x, a, b)$ . Como las diferencias  $[y_i - f(x_i, a, b)]$  no poseen pesos estadísticos propios, ya que los  $y_i$  no los poseen, la media de los cuadrados de esas diferencias se determina por la Eq. (7), que define una media aritmética. Puesto que consideramos puntos experimentales del tipo  $(x_i; y_i \pm \sigma_{ymi})$ , lo que significa que se considera a los  $x_i$  excentos de error, pero no así a los  $y_i$ . Entonces, vamos a utilizar a Eq. (12), que define una media ponderada, para determinar la media de los cuadrados de los errores para puntos con incertidumbres en  $y_i$ :

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a, b)]^2 \frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}, \quad (15-a)$$

Entonces, la Eq. (14-b), que define la varianza del ajuste, debe ser reescrita con  $\overline{\epsilon^2}$  dado por la Eq. (15-a), que toma en consideración el peso estadístico de cada  $y_i$ :

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{N}{N-2} \frac{\sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a, b)]^2 \frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}, \quad (15-b)$$

o

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{N}{N-2} \frac{\chi^2}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}, \quad (15-c)$$

donde el término

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i, a, b)]^2 \frac{1}{\sigma_{ymi}^2}, \quad (15-d)$$

es el llamado chi-cuadrado de ajuste a la función. Entonces, la condición para que el ajuste tenga la menor varianza posible implica la minimización del chi-cuadrado:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \quad y \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0. \quad (16)$$

Naturalmente, la Eq. (15-d) es idéntica a la Eq. (3) y las condiciones de la Eq. (16) son las mismas obtenidas en la deducción usual del método de los mínimos cuadrados, dadas en la Eq. (4). Pero debemos observar que, en esta deducción alternativa, no ha sido necesario considerar que los puntos tengan una distribución normal de errores en torno a la función ajustada. En muchos cursos iniciales de Física Experimental, la distribución normal de errores apenas se menciona y eso dificulta, desde el punto de vista didáctico, la presentación del método de los mínimos cuadrados a través de la deducción usual. En este contexto, la deducción presentada aquí constituye una alternativa viable porque nos dispensa de un conocimiento más profundo de la función de distribución normal.

Es importante percibir que los  $y_i$  para los diferentes puntos  $i$  se refieren a cantidades distintas, pero las diferencias  $[y_i - f(x_i, a, b)]$  fluctúan en torno de cero y, por tanto, pueden ser consideradas como medidas de una misma cantidad. Eso justifica el uso de la Eq. (12) en la determinación de  $\overline{\epsilon^2}$ , en este caso, en que los puntos tienen pesos estadísticos propios. Aunque una observación poco atenta puede llevarnos a suponer que la deducción propuesta sea excesivamente larga, sin embargo, hay que resaltar que la revisión hecha en la sección 3 es necesaria en cualquier curso básico de Física Experimental y, por tanto, nuestra deducción se restringe, de hecho, apenas a la sección 4.

## 5. EL MÉTODO APLICADO A UNA RECTA CUALQUIERA

Las condiciones de minimización dadas por las Eq. (16) pueden ser extendidas a una función con una cantidad cualquiera de parámetros. Aplicaremos tales condiciones al ajuste de una función de primer grado, dada por  $y(x) = ax + b$ . En este caso, el chi-cuadrado viene dado de la siguiente forma:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - ax_i - b]^2 \frac{1}{\sigma_{ymi}^2}$$

Así, de la primera condición de mínimo, encontramos:

$$\left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2} \right) a + \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \right) b = \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_{ymi}^2} \right) \quad (17-a)$$

Y de la segunda condición de mínimo:

$$\left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \right) a + \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{ymi}^2} \right) b = \left( \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_{ymi}^2} \right) \quad (17-b)$$

Las Eqs. (17-a) y (17-b) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que, resuelto, nos dá:

$$a = \frac{1}{D} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_{ymj}^2} - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^N \frac{y_j}{\sigma_{ymj}^2} \right] \quad (18)$$

y

$$b = \frac{1}{D} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^N \frac{y_j}{\sigma_{ymj}^2} - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^N \frac{x_j y_j}{\sigma_{ymj}^2} \right], \quad (19)$$

donde

$$D = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_{ymj}^2} - \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2} \right)^2. \quad (20)$$

Nos cabe ahora, deducir las expresiones para las incertidumbres de los parámetros  $a$  y  $b$  y también para la covarianza entre esos parámetros. Con ello, podemos escribir la función en la forma  $y(x) = y(x)_m \pm \sigma_{y(x)_m}$ , siendo  $y(x)_m$  la función ajustada y  $\sigma_{y(x)_m}$  la incertidumbre de la función. Eso es lo que haremos a continuación.

### 5.1. Determinación de las incertidumbres de los parámetros

La determinación de las incertidumbres de los parámetros  $a$  y  $b$  se hace a través de la fórmula de propagación de errores [2, 3, 4]:

$$\sigma_{am} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial a}{\partial y_i} \sigma_{ymi} \right)^2}. \quad (21)$$

Como el parámetro  $a$  está dado por la Eq. (18), es fácil mostrar que la expresión (21) queda como:

$$\sigma_{am} = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{ymi}^2}}, \quad (22)$$

donde  $D$  está dada por la Eq. (20). Análogamente, para  $b$  obtenemos:

$$\sigma_{bm} = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_{ymi}^2}}. \quad (23)$$

Determinemos, ahora, la covarianza entre los parámetros de ajuste.

### 5.2. Determinación de la covarianza entre los parámetros de ajuste

En los casos en que los parámetros  $a$  y  $b$  dependen de valores independientes  $y_i$ , que a su vez poseen incertidumbres  $\sigma_{ymi}$ , la covarianza entre esos parámetros está definida del siguiente modo [2, 3, 5]:

$$cov(a, b) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial a}{\partial y_i} \frac{\partial b}{\partial y_i} \sigma_{ymi}^2 \quad (24)$$

La Eq. (24) define la covarianza entre  $a$  y  $b$  pre-suponiendo que las medidas  $y_i$  sean independientes entre sí. Así, conocidos los parámetros  $a$  y  $b$  a través de las expresiones (18) y (19), y sustituyendo esas expresiones en (24), encontramos:

$$cov(a, b) = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_{ymi}^2}, \quad (25)$$

donde  $D$  fue definida en la Eq. (20). Habiendo determinado  $\sigma_{am}$ ,  $\sigma_{bm}$  y  $cov(a, b)$  podemos, finalmente, determinar la incertidumbre de la función ajustada. Vale resaltar que los principales resultados obtenidos en esta sección ya fueron presentados en un artículo anterior [7], en un contexto de linealización, pero no fueron deducidos, cosa que ahora hemos hecho aquí.

### 5.3. Determinación de la incertidumbre para la función ajustada

Además de presentar una deducción alternativa para el método de los mínimos cuadrados, el propósito de este artículo es añadir una incertidumbre a la función ajustada, semejante a la que fue propuesta en la referencia [5] para puntos de incertidumbre desconocida, esto es, para puntos del tipo  $(x_i, y_i)$ . La diferencia es que, en nuestro caso, los puntos experimentales están dados por  $(x_i, y_i \pm \sigma_{ymi})$  y, por tanto, los parámetros, las incertidumbres de esos parámetros y la covarianza entre ellos son calculados por fórmulas diferentes, dadas por las Eqs. (18), (19), (22), (23) y (25). Ahora, la expresión para la incertidumbre de la función ajustada puede obtenerse a través de la expresión general para la propagación de errores, aplicada a una función de dos parámetros [3 y 5]:

$$\sigma_{y(x)_m} = \sqrt{\left( \frac{\partial y}{\partial a} \sigma_a \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial b} \sigma_b \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} cov(a, b)}. \quad (26-a)$$

Como  $y(x) = ax + b$ , de la Eq. (26-a) resulta:

$$\sigma_{y(x)_m} = \sqrt{(x\sigma_a)^2 + \sigma_b^2 + 2x cov(a, b)}. \quad (26-b)$$

Entonces, con  $\sigma_{am}$ ,  $\sigma_{bm}$  y  $cov(a, b)$  dados respectivamente por (22), (23) y (25), la incertidumbre de la función queda completamente determinada.

## 6. EL MÉTODO APLICADO A UNA RECTA QUE PASA POR EL ORIGEN

Para una recta que pasa por el origen, dada por  $y(x) = ax$ , la aplicación de la condición de minimización

TABLA 1

Puntos  $(\theta_i; M_i \pm \sigma_{Mmi})$ .

	1	2	3	4	5	6
$\theta(rad)$	0,227	0,349	0,473	0,642	0,768	0,873
$M(N.m)$	0,00233	0,00372	0,00522	0,00676	0,00817	0,00946
$\sigma_{Mm}(N.m)$	0,00011	0,00015	0,00020	0,00025	0,00030	0,00035

del chi-cuadrado junto con el estudio de propagación de errores para el parámetro obtenido da:

$$y(x) = (a \pm \sigma_{am})x, \quad (27)$$

con

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_{mi}}^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_{y_{mi}}^2}} \quad \text{y} \quad \sigma_{am} = \sqrt{\frac{1}{N \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_{y_{mi}}^2}}}. \quad (28)$$

## 7. UNA APLICACIÓN NUMÉRICA A PUNTOS QUE SE AJUSTAN A UNA RECTA

Vamos a aplicar los resultados obtenidos a un conjunto de puntos que se ajustan a una recta, siendo los datos del tipo  $(x_i, y_i \pm \sigma_{y_{mi}})$ . Después, vamos a discutir cómo nuestros resultados podrían ser utilizados para puntos del tipo  $(x_i; y_i)$ .

### 7.1. Recta definida por dos parámetros

Para puntos de incertidumbres conocidas, podemos hacer el ajuste a una recta con dos parámetros a través de la aplicación directa de las Eqs. (18) y (19) en la determinación de los parámetros. Las incertidumbres de los parámetros  $a$  y  $b$  son obtenidas a través de las Eqs. (22) y (23) y la covarianza entre estos parámetros está determinada por la Eq. (25). Con eso, podemos determinar la incertidumbre de la función ajustada a través de la Eq. (26-b).

Hagamos una aplicación numérica al conjunto de datos  $(x_i, y_i \pm \sigma_{y_{mi}})$  mostrados en la tabla 1, referidos a un péndulo de torsión. Estos datos fueron extraídos de la referencia [8] y se busca establecer un modelo que relacione el torque  $M$  aplicado en los extremos de un hilo metálico y el ángulo  $\theta$  de torsión. El montaje experimental se propone en la referencia [9], con la utilización del “Kit para Experiencias de Mecánica” (K.E.M.) [10]. Pasemos a los datos extraídos de la referencia [9] (tabla 1).

Aplicando la solución propuesta para una función de primer grado con dos parámetros, finalmente obtenemos:

$$M(\theta) = (0,010913\theta - 0,00011) \pm 10^{-4} \sqrt{14,3988\theta^2 - 11,0708\theta + 2,66169}, \quad (29)$$

donde, en la función  $M(\theta) = a\theta + b$ , tenemos  $\sigma_{am} = 0,00038N.m/rad$ ,  $\sigma_{bm} = 0,00016N.m$  y  $cov(a,b) = -5,53534 \times 10^{-8}N^2.m^2/rad$ .

La expresión (29) nos permite trazar el gráfico de la función ajustada a través de tres líneas: la línea central que representa los valores medios de la función  $y(x)_m$ , y dos líneas más de incertidumbres, representando los límites inferior y superior de la faja de confianza de la función. Admitiendo que los puntos fluctúen según la distribución normal en torno de la función ajustada, podemos multiplicar  $\sigma_{y(x)_m}$  por un factor que dé la faja de confianza de la función con una probabilidad de 95,4%: para los cuatro grados de libertad del ajuste tenemos  $f = 2.87$  (ver, por ejemplo, el “LAB Fit Curve Fitting Software”). Así, la función ajustada pasa a estar dada por la siguiente expresión:

$$M(\theta) = (0,010913\theta - 0,00011) \pm 2,87 \times 10^{-4} \sqrt{14,3988\theta^2 - 11,0708\theta + 2,66169}, \quad (30)$$

con 95,4% de confianza. Con la Eq. (30) podemos trazar el gráfico mostrado en la figura 1, relativo al ajuste, extrapolado hasta  $\theta = 0rad$ . En este gráfico, la línea central representa la función ajustada y las líneas superior e inferior definen la faja de incertidumbre de la función. Una inspección de la figura 1 sugiere que la recta podría pasar por el origen, y eso merece ser investigado.

### 7.2. Recta que pasa por el origen

En el ajuste realizado en el inciso anterior, nos quedó la sospecha de que la recta podría pasar por el origen. Para determinar la probabilidad de que el coeficiente lineal (parámetro  $b$ ) sea cero, se utilizó el test  $t$  de Student [11] con el siguiente resultado:  $t = -0,703737$ ; lo que implica una probabilidad  $P(t) = 0,520$  de que el parámetro  $b$  sea cero. Así, el modelo “recta con dos parámetros” debe ser abandonado y el ajuste debe ser rehecho utilizando las Eqs. (27) y (28), lo que da el siguiente resultado:

$$M = (0,01067 \pm 0,00017)\theta \quad (31)$$

La Eq. (31) genera el gráfico mostrado en la figura 2.

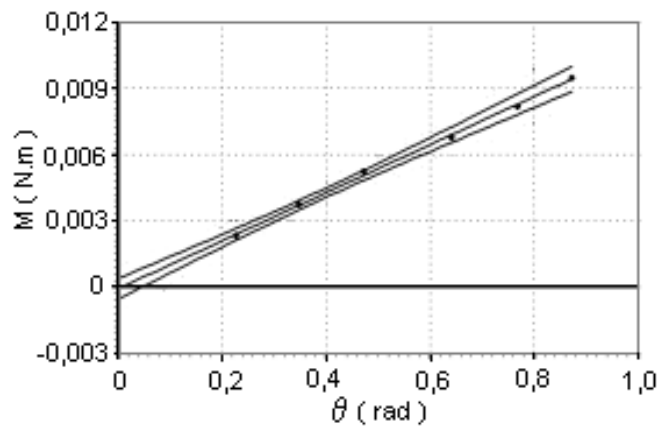


Figura 1. Momento  $M$  aplicado en los extremos del hilo versus el ángulo  $\theta$  de torsión. La línea central es la función ajustada:  $M = a\theta + b$ , y las líneas externas definen una faja con 95,4% de confianza.

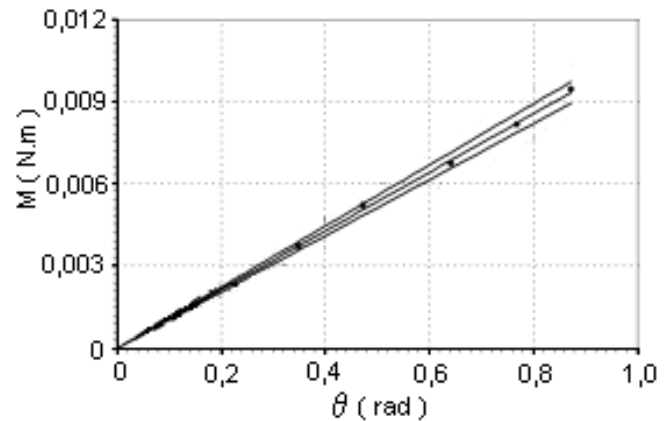


Figura 2. Momento  $M$  aplicado en los extremos del hilo versus el ángulo  $\theta$  de torsión. La línea central es la función ajustada,  $M = a\theta$ , y las líneas externas definen una faja con 95,4% de confianza.

### 7.3. AJUSTE DE UNA FUNCIÓN A PUNTOS CON PESOS ESTADÍSTICOS DESCONOCIDOS

Para puntos de incertidumbres desconocidas, podemos hacer un pre-ajuste considerando los  $\sigma_{ymi} = 1$ , lo que permite determinar la varianza del ajuste  $\sigma_{y(x)}^2$  y consecuentemente  $\sigma_y(x)$ , que da una medida de la incertidumbre de los puntos experimentales. Así, considerando cada  $\sigma_{ymi}$  igual a  $\sigma_{y(x)}$ , podemos volver a aplicar las Eqs. (18), (19), (22), (23), (25) y (26-b), y determinar la función ajustada de forma completa, lo que es equivalente a lo que se hizo en la referencia [5]. Hay que observar que el procedimiento descrito aquí impone, de hecho, que el chi-cuadrado reducido del ajuste sea igual a 1, lo que lo hace lo más verosímil posible (ver, por ejemplo, [3]).

## 8. CONCLUSIONES

Queda en evidencia que un conjunto de puntos no necesariamente tiene que tener fluctuaciones estadísticas que obedezcan a una distribución normal en torno de la curva ajustada para que podamos deducir las expresiones para los parámetros de la función ajustada. Así, es posible demostrar el método de los mínimos cuadrados también para alumnos que no tengan un conocimiento profundizado en Estadística, lo que es una ventaja desde el punto de vista didáctico y un recurso disponible más. Además de ello, por no restringir los resultados a un cierto tipo de datos, la deducción alternativa es más general que la deducción usual. Por otro lado, la inclusión de una desviación estándar para la función ajustada enriquece considerablemente el nivel de información acerca del ajuste, tornando los resultados obtenidos más confiables. También para funciones con puntos de incertidumbres desconocidas, la técnica del pre-ajuste con  $\sigma_{ymi} = 1$ , generadora de esas incertidumbres, se revela satisfactoria y es equivalente a lo que fue propuesto en la referencia [5].

En cuanto a los resultados experimentales para el

péndulo de torsión queda claro, a través del test  $t$  de Student, que la función  $M = a\theta + b$  debe ser descartada en favor del modelo  $M = a\theta$ . En ese modelo, como sabemos, el parámetro  $a$  es la constante de torsión del hilo.

Un otro aspecto que se percibe de forma clara en el análisis de la figura 1 es el cuidado que debemos tener al hacer extrapolaciones de rectas ajustadas. En la medida en que nos separamos de la región de los datos, la incertidumbre del valor medio de la función ajustada va aumentando, esto es, la precisión de los resultados va disminuyendo, como evidencian las líneas que definen la faja de incertidumbre de la función.

## REFERENCIAS

- [1] Silva, Wilton P. e outros - *Tratamento de Dados Experimentais* - UFPB/Editora Universitária, João Pessoa, 1ª Ed. (1995), pag. 109.
- [2] Vuolo, José H. - *Fundamentos da Teoria de Erros* - Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1ª Ed., (1992), pag. 140, 89, 215.
- [3] Silva, Wilton P. e Silva, Cleide M. D. P. S. - *Tratamento de Dados Experimentais* - UFPB/Editora Universitária, João Pessoa, 2ª Ed. (Revisada e Ampliada), (1998), pag. 64, 162, 111, 175, 185
- [4] Helene, Otaviano A. M. e Vanin, Vitor R. - *Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental* - Ed. Edgard Blücher LTDA, São Paulo, (1981), pag. 42, 66.
- [5] Silva, Wilton P. et al. - *Geração de Incertidumbres de Funções Redutíveis ao Primeiro Grau Ajustadas pelo Método dos Mínimos Quadrados* - Rev. Bras. Ensino de Física, Vol. 21, No 3, setembro, 1999
- [6] Press, William H. et al. - *Numerical Recipes in Pascal: The Art of Scientific Computing* - Cambridge University Press (1989), pag. 551
- [7] Silva, Wilton P. et al. - *Consideración del Peso Estadístico en la Generación de Incertidumbres de Funciones Reducibles a Primer Grado Ajustadas por el Método de Mínimos Cuadrados* - Rev. Bol. Fís., Vol. 9, noviembre, 2003
- [8] Silva, Wilton P. e Fagundes, Mona L. M. - *Relatório*

- Final do Projeto "Aperfeiçoamento de Kits Experimentais no Ensino de Física" - CNPQ/REENGE/PICT - CCT/UFPB, Campina Grande, (1997)*
- [9] Silva, Wilton P. e Silva Cleide M. D. P. S. - *Mecânica Experimental para Físicos e Engenheiros* - UFPB/ Editora Universitária, João Pessoa, (2000), pag. 206
- [10] KEM - *Kit para Experiências de Mecânica*, info online, <http://www.extensao.hpg.com.br/kits/kits.html>
- [11] Bussab, Wilton O. e Morettin, Pedro A - *Estatística Básica* - Atual Editora LTDA, São Paulo, (1995), pag. 264

## 9<sup>NA</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA

Bustos R., Velarde A., Paz J.

*Carrera de Física - Universidad Mayor de San Andrés (UMSA)*  
*Academia Nacional de Ciencias de Bolivia (ANCB)*  
*Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)*  
*La Paz—Bolivia*

Guaygua T., Jemio C., Mamani N.

*Facultad Nacional de Ingeniería (FNI)*  
*Universidad Técnica de Oruro (UTO)*  
*Oruro—Bolivia*

Choqueticlla T.

*Dirección Distrital de Educación*  
*RBG Minera Huanuni S.A.*  
*Sindicato de Trabajadores Mineros de Huanuni*  
*Huanuni—Bolivia*

### RESUMEN

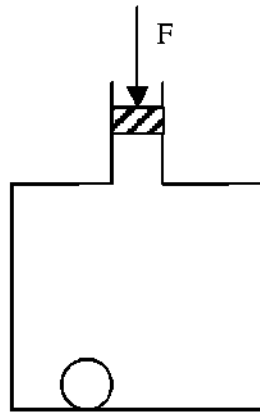
Se presentan los exámenes de la 9<sup>na</sup> Olimpiada Boliviana de Física. Éstos corresponden a los niveles de Tercero y Cuarto de Secundaria y fueron tomados en fechas 27, 28 y 29 de Julio de 2004 en el Distrito Minero de Huanuni, Oruro.



**9na OLIMPIADA BOLIVIANA DE FISICA**  
**Distrito Minero de Huanuni, Oruro. Julio del 2004**  
**TERCERO DE SECUNDARIA**

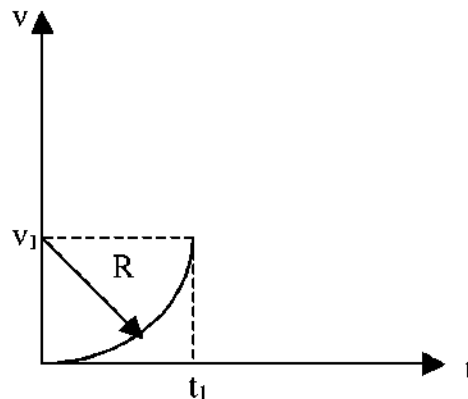
PARTE CONCEPTUAL

1. ¿Qué sucede cuando dos ondas iguales y simétricas con desplazamientos opuestos se cruzan?
2. En un recipiente cerrado con un émbolo que contiene agua, se introduce una esfera de plástico deformable. Si se incrementa la fuerza sobre el émbolo. ¿Se deforma la esfera?, de ser así ¿qué forma toma?

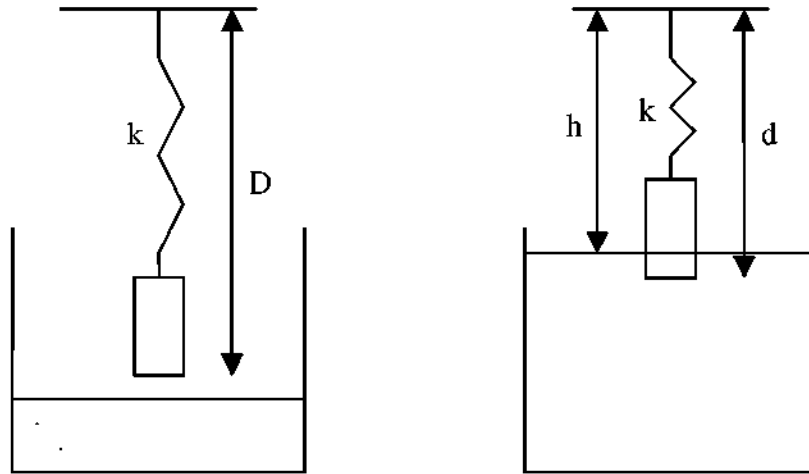


PARTE PRACTICA

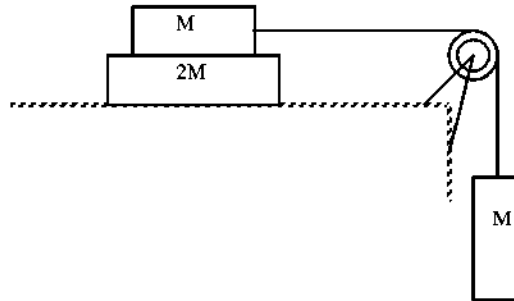
1. El diagrama velocidad – tiempo de un móvil es el cuadrante de circunferencia representado en la figura. Otro móvil se mueve sobre la misma recta del anterior, pero con movimiento uniformemente acelerado, y partiendo en el mismo instante desde la misma posición inicial con una velocidad  $v_0 = 0.5 v_1$  alcanza al primer móvil en el tiempo  $t_1$ . Determinar la aceleración del segundo móvil.



2. En un experimento de laboratorio, un bloque de madera con área de sección transversal  $A$ , se suspende por encima de un recipiente de agua mediante un resorte lineal de constante elástica  $k$ . La parte inferior del bloque se encuentra a una distancia  $D$  por debajo del nivel del punto donde se sostiene el resorte. Cuando el nivel del agua del recipiente se eleva y se ubica a una distancia  $h$  por debajo de dicho punto, determinar  $d$  en función de los parámetros  $A$ ,  $D$ ,  $k$ ,  $h$ , y la densidad del agua  $\rho$ .



3. En la figura siguiente, el bloque de masa  $M$  tiene una aceleración doble que la aceleración del bloque de masa  $2M$ . Existe rozamiento en todas las superficies en contacto. Calcular el valor del coeficiente de rozamiento cinético.



### SOLUCIONES PARTE CONCEPTUAL

1. Tomemos como ejemplo a las ondas sonoras, para ellas es válido el principio de superposición. El principio de superposición de ondas significa que cada onda se propaga en un medio independientemente de la existencia de otras ondas.

El fenómeno de la superposición de dos (o más) movimientos ondulatorios en determinadas condiciones se llama interferencia.

Estudiemos la interferencia de dos ondas sonoras dentro de un tubo. Supongamos que en el tubo hay simultáneamente dos ondas de la misma frecuencia que se propagan en sentidos contrarios. Digamos que una onda de desplazamientos se propaga en el sentido positivo del eje  $x$  y está determinada así:

$$y_1 = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right),$$

mientras que la otra

$$y_2 = B \cos \omega(t + \frac{x}{c}),$$

se propaga al encuentro de la primera.

Es evidente que la desviación de cada punto de su posición de equilibrio para el instante  $t$  será

$$y_1 + y_2 = y$$

La segunda onda  $y_2$  puede definirse siempre como la suma de dos ondas progresivas, a saber:

$$y_2 = A \cos \omega(t + \frac{x}{c}) + (B - A) \cos \omega(t + \frac{x}{c})$$

Entonces la oscilación resultante  $y(x, t)$  se representa así:

$$\begin{aligned} y = y_1 + y_2 &= A \cos \omega(t - \frac{x}{c}) + A \cos \omega(t + \frac{x}{c}) + (B - A) \cos \omega(t + \frac{x}{c}) \\ &= 2A \cos \frac{\omega x}{c} \cos \omega t + (B - A) \cos \omega(t + \frac{x}{c}) \end{aligned}$$

El movimiento ondulatorio resultante consta de dos partes:

de la onda estacionaria

$$2A \cos \frac{\omega x}{c} \cos \omega t$$

y de la onda progresiva

$$(B - A) \cos \omega(t + \frac{x}{c})$$

Siendo  $B = A$ , es decir cuando dos ondas progresivas en sentidos contrarios tienen amplitudes iguales el movimiento ondulatorio resultante será una onda estacionaria.

La energía no se propaga en una onda estacionaria. Por lo tanto el movimiento de una onda estacionaria, de hecho, ya no es un movimiento ondulatorio, aunque se obtiene como resultado de la interferencia de dos ondas progresivas de igual amplitud.

Si las amplitudes de las ondas que se desplazan al encuentro no son iguales, el movimiento ondulatorio consta de una onda estacionaria y de una onda progresiva, cuya amplitud será igual a la diferencia entre las amplitudes de las ondas progresivas fundamentales.

2. Un cuerpo sólido, cuyo volumen dentro de ciertos límites no depende de la presión, flotará en la superficie de un líquido o descenderá al fondo. Ahora bien, si el peso del cuerpo es exactamente igual al peso del líquido desalojado, el cuerpo se hallará en estado de equilibrio indiferente en cualquier parte del líquido.

Por lo general el volumen de un cuerpo disminuye al aumentar la presión, por lo tanto, el equilibrio de dicho cuerpo en el interior de un líquido de densidad constante es siempre inestable. En realidad, supongamos que a cierta profundidad y a una presión determinada el peso del cuerpo es igual al peso del líquido desalojado; cuando el cuerpo desciende un poco, la presión sobre el mismo aumenta y su volumen disminuye, por consiguiente, también disminuye la fuerza ascensional, por eso, el cuerpo seguirá descendiendo; un cuadro análogo se observará también cuando el cuerpo asciende un poco con respecto a la posición de equilibrio, pero en este caso las variaciones de todas las magnitudes ocurren en sentido contrario: la presión cae, el volumen aumenta, la fuerza ascensional se incrementa y el cuerpo asciende.

SOLUCIONES PARTE PRACTICA

1. El desplazamiento del primer móvil está dado según el gráfico por

$$x_1 = v_1 t_1 - \frac{\pi R}{2}$$

El desplazamiento del segundo móvil será

$$x_2 = \frac{1}{2} v_1 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$$

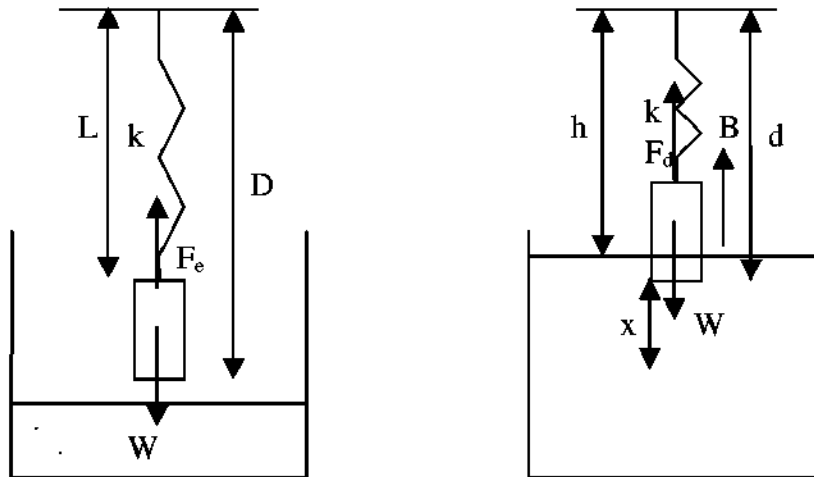
La condición de que uno le alcance al otro en un tiempo  $t_1$  se da por  $x_1 = x_2$ , es decir

$$\frac{1}{2} v_1 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = v_1 t_1 - \frac{\pi R}{2}$$

obteniendo el parámetro requerido

$$a = \frac{v_1}{t_1} - \frac{\pi R}{t_1^2}$$

2. Para este caso nos referimos al gráfico del problema



Del gráfico se observa que la fuerza que ejerce el resorte  $F_e$  está en equilibrio con el peso del bloque  $W$

$$kL = W$$

Donde  $L$  es la longitud en equilibrio.

Cuando el cuerpo se encuentra en el líquido las condiciones de equilibrio son diferentes, en este caso se debe tomar en cuenta la fuerza de empuje  $B$  por parte del fluido sobre el bloque, claro está que la fuerza que ejerce el resorte  $F_d$  es diferente al valor de  $F_e$ .

Del gráfico cuando el bloque se encuentra en agua, las condiciones de equilibrio serán:

$$B + k(L - x) - W = 0$$

$$B + kL - kx - kL = 0$$

es decir

$$B = kx$$

Nuevamente refiriéndonos al gráfico se tiene que

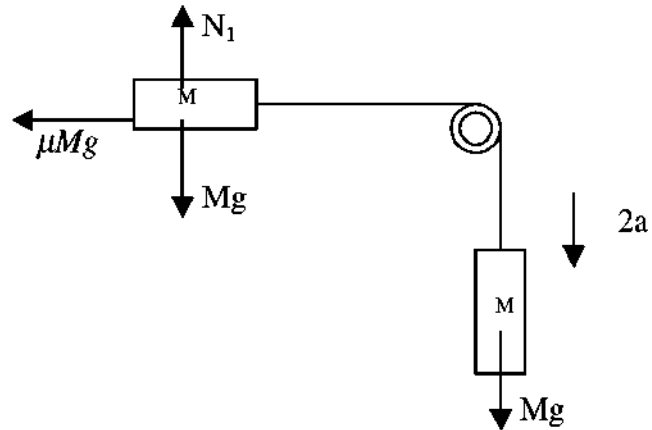
$$\rho g A(d - h) = k(D - d)$$

Realizando operaciones algebraicas se tiene que:

$$d = \frac{kD + \rho g Ah}{k + \rho g A}$$

3. Tomamos al sistema de masas  $M$  aparte de la masa  $2M$ :

Realizamos el diagrama de cuerpo libre para este caso



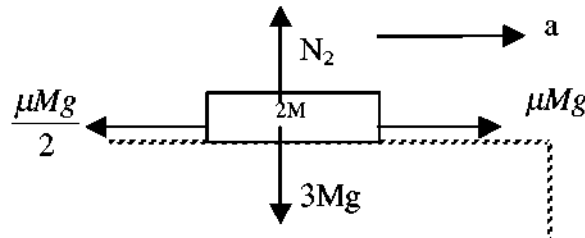
Del gráfico se observa que

$$Mg - \mu Mg = (2M)(2a)$$

$$(1 - \mu)g = 4a$$

$$a = \left(\frac{1 - \mu}{4}\right)g$$

Para  $2M$  tenemos que



Entonces finalmente

$$\mu Mg - \frac{\mu Mg}{2} = 2Ma$$

$$\frac{1}{2} \mu Mg = 2M \left(\frac{1 - \mu}{4}\right)g$$

$$\mu = 0.5$$

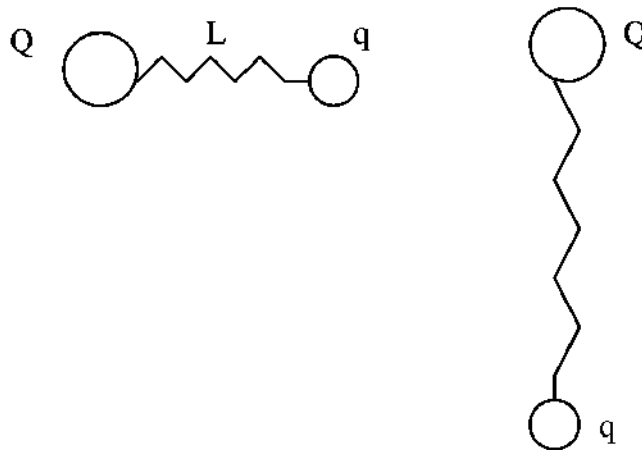
**9na OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA**  
**Distrito Minero de Huanuni, Oruro, Julio del 2004**  
**CUARTO DE SECUNDARIA**

PARTE CONCEPTUAL

- Suponga que exista un campo eléctrico en el cuarto en el que está trabajando y las líneas de fuerza son horizontales, formando ángulos rectos con las paredes. Si camina usted hacia la pared de la que salen las líneas de fuerza, está caminando hacia puntos de potencial: ¿más bajo, más alto, del mismo potencial? Justifique su respuesta.
- La presión atmosférica a nivel del mar es igual a 760 mm Hg (milímetros de mercurio). En la Villa de Huanuni la presión atmosférica está determinada en 494 mm Hg. Expresar la presión atmosférica en Huanuni, en el sistema internacional de unidades y en metros de columna de agua (m H<sub>2</sub>O).

PARTE PRACTICA

- A una carga  $Q = 6 \mu\text{C}$  está unida otra carga  $q = 5 \text{ nC}$  de masa 10 mg, por medio de un resorte de material aislante. La carga  $q$  se suelta, desde la posición horizontal donde la longitud del resorte es de  $L = 2 \text{ cm}$ , en medio del campo gravitacional  $g = 9.76 \text{ m/s}^2$ . Determinar el valor de la constante del resorte  $k$  si éste se estira la mitad de su longitud.



- El ciclo mostrado en la figura consiste en tres procesos que comienzan en el punto A. Una reducción de presión a volumen constante de A – B, un aumento de volumen a presión constante del proceso B – C, una compresión isotérmica desde C regresando al punto A. El ciclo es realiza sobre 0.75 mol de un gas diatómico ideal. Determinar  $Q$ ,  $W$ ,  $\Delta E_{\text{int}}$ .

Datos

$$P_A = 3.2 \times 10^3 \text{ Pa.}$$

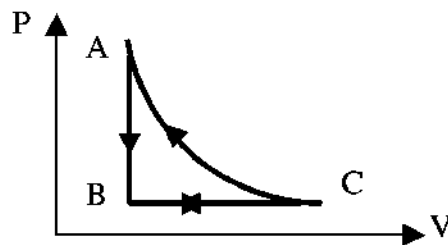
$$P_B = 1.2 \times 10^3 \text{ Pa.}$$

$$V_A = 0.21 \text{ m}^3.$$

$$R = 8.3145 \text{ J / (mol K)}$$

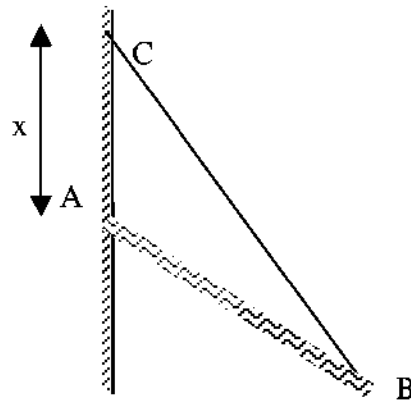
$$C_V = 20.8 \text{ J / (mol K)}$$

$$C_P = 29.1 \text{ J / (mol K)}$$



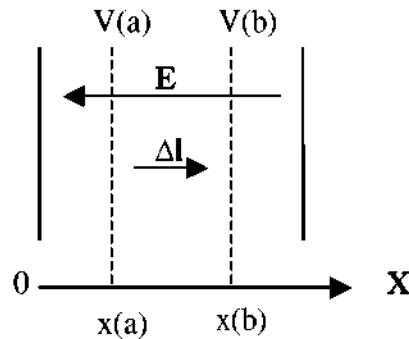
3. Determinar la posición de equilibrio del sistema simple de una barra de peso  $G$  y longitud  $L$  que se apoya libremente sobre una pared vertical lisa y sujeta por el otro extremo por un cable de longitud  $a$ .

Datos  
 $AB = L$   
 $BC = a$   
 Peso de la barra =  $G$



### SOLUCIONES PARTE CONCEPTUAL

1. Fijemos nuestra atención al siguiente gráfico



Realizamos una analogía con un condensador de placas paralelas que son en sí equipotenciales. Tomamos dos equipotenciales  $V(a)$  y  $V(b)$ , por definición:

$$\Delta V = - \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{l} = - E \Delta x \cos 180^\circ$$

$$\Delta V \quad I_a^b = E \Delta x \quad I_a^b$$

$$V(b) - V(a) = E [x(b) - x(a)]$$

ya que  $x(b) - x(a) > 0$ , entonces

$$V(b) > V(a)$$

Es decir se camina hacia puntos de potencial más alto.

Esto está en pleno acuerdo con la relación entre el campo eléctrico y el potencial para dos placas conductoras paralelas, cada una de ellas a diferentes potenciales. Se sabe que el campo eléctrico entre

placas paralelas es constante, y que va de las partes de mayor potencial a los de menor potencial. El potencial disminuye a lo largo de la dirección en la que apunta el campo eléctrico.

2. Para este caso se tiene que tomar en cuenta el valor del campo gravitacional en la Villa de Huanuni  $g = 9.76 \text{ m/s}^2$ , entonces

$$1 \text{ mm Hg} = (13.6 \times 10^3) (9.76) (1 \times 10^{-3}) = 132.7 \text{ Pa}$$

Por lo tanto

$$494 \text{ mm Hg} \times \frac{132.7 \text{ Pa}}{1 \text{ mm Hg}} = 65.6 \text{ KPa}$$

Ahora

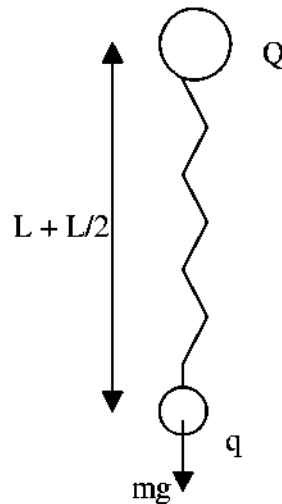
$$1 \text{ m H}_2\text{O} = (1 \times 10^3) (9.76) (1) = 9.76 \text{ KPa}$$

Finalmente

$$65.6 \text{ KPa} \times \frac{1 \text{ m H}_2\text{O}}{9.76 \text{ KPa}} = 6.7 \text{ m H}_2\text{O}$$

### SOLUCIONES PARTE PRACTICA

1. Veamos el gráfico siguiente



Donde  $L$  es la longitud de equilibrio, mostrada en los gráficos del enunciado. Aplicamos el principio de la conservación de la energía

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{1}{2} k \left( \frac{L}{2} \right)^2 - mg \left( L + \frac{L}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2} k \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{3}{2} mgL$$

$$k = \frac{4}{L} \left( \frac{2Qq}{4\pi\epsilon_0 L^2} + 3mg \right) = 270.06 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

2. Para determinar los parámetros requeridos es necesario hallar los valores de P, V y T en cada punto del proceso en general.

Encontramos el valor de la temperatura para el punto A, aplicando la ley del gas ideal

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{(3.2 \times 10^3)(0.21)}{(0.75)(8.31)} = 108 \text{ K}$$

En el punto B, tomando en cuenta que  $V_B = V_A$ , tenemos

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{(1.2 \times 10^3)(0.21)}{(0.75)(8.31)} = 40 \text{ K}$$

Para el punto C, notamos que  $P_C = P_B$ , además  $T_C = T_A$  ya que CA es isotérmico. Entonces

$$V_C = \frac{P_A V_A}{V_C} = \frac{(3.2 \times 10^3)(0.21)}{1.2 \times 10^3} = 0.56 \text{ m}^3$$

Con todo lo anterior procedemos a encontrar lo pedido.

Para el proceso AB = 1, tenemos

$$Q_1 = nC_V(T_B - T_A) = (0.75)(20.8)(40 - 108) = -1060 \text{ J}$$

$$W_1 = 0 \quad (\text{proceso a volumen constante})$$

$$\Delta E_{\text{int},1} = Q_1 + W_1 = -1060 \text{ J}$$

Energía es transmitida por el sistema al entorno como calor en el proceso 1, ya que la temperatura disminuye esto se refiere a un cambio negativo en la energía interna.

Para el proceso BC = 2, se tiene

$$Q_2 = nC_P(T_C - T_B) = (0.75)(29.1)(108 - 40) = 1480 \text{ J}$$

$$W_2 = -P(V_C - V_B) = -(1.2 \times 10^3)(0.56 - 0.21) = -420 \text{ J}$$

$$\Delta E_{\text{int},2} = Q_2 + W_2 = 1060 \text{ J}$$

Al gas se le transfiere energía en forma de calor en 2 y dilatándose el gas realiza trabajo sobre su entorno.

Luego para el proceso CA = 3, obtenemos

$$W_3 = -nRT_C \ln \frac{V_A}{V_C} = -(0.75)(8.31)(108) \ln \left( \frac{0.21}{0.56} \right) = 660 \text{ J}$$

$$\Delta E_{\text{int},3} = 0 \quad (\text{proceso a temperatura constante})$$

$$Q_3 = \Delta E_{\text{int},3} - W_3 = 0 - 660 = -660 \text{ J}$$

Finalmente para el ciclo, tenemos

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -1060 + 1480 - 660 = -240 \text{ J}$$

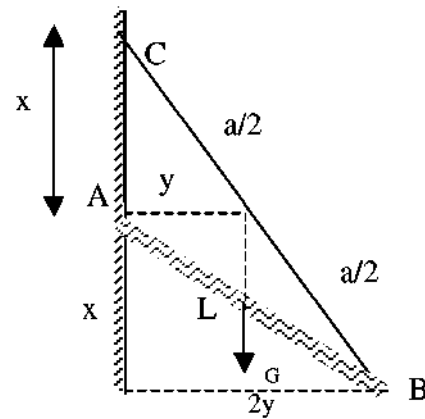
$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0 - 420 + 660 = 240 \text{ J}$$

$$\Delta E_{\text{int}} = \Delta E_{\text{int},1} + \Delta E_{\text{int},2} + \Delta E_{\text{int},3} = -1060 + 1060 + 0 = 0$$

Obsérvese que para el ciclo  $\Delta E_{\text{int}} = 0$  y  $Q = -W$ .

3. Nos referimos a la siguiente figura

Datos  
 $AB = L$   
 $BC = a$   
 Peso de la barra =  $G$



Utilizamos propiedades geométricas, para este caso.  
 De la figura se nota que

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2 + (2y)^2 = L^2$$

luego operando el sistema se tiene

$$4x^2 + (2y)^2 = a^2$$

$$x^2 + (2y)^2 = L^2$$

restando la ecuación inferior de la superior se obtiene para  $x$

$$x = \sqrt{\frac{a^2 - L^2}{3}}$$

Esto es cierto siempre y cuando  $a^2 - L^2 > 0$ .

# IX OLIMPIADA BOLIVIANA DE FISICA

27 al 29 de Julio de 2004

Huanuni – Oruro

## Prueba Experimental por delegaciones

### Interferencia

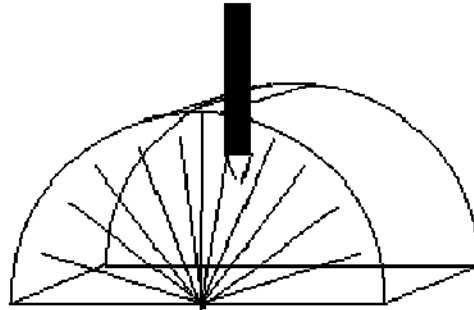
#### 1.- Objetivo.

Observar el fenómeno de interferencia.

Determinar la separación entre surcos en un CD (Disco Compacto).

#### 2.- Equipo.

Un puntero láser, un CD y un dispositivo para leer los ángulos de los máximos de interferencia como se muestra en la figura.



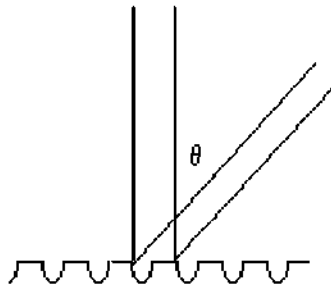
El puntero láser nos permite tener un haz de luz bastante fino y monocromático. En este caso es rojo. La longitud de onda del láser es, según se especifica en el propio puntero, de 630 a 680 nm.

Tomaremos entonces:  $\lambda = (655 \pm 25) \text{ nm}$

#### 3.- Experimento.

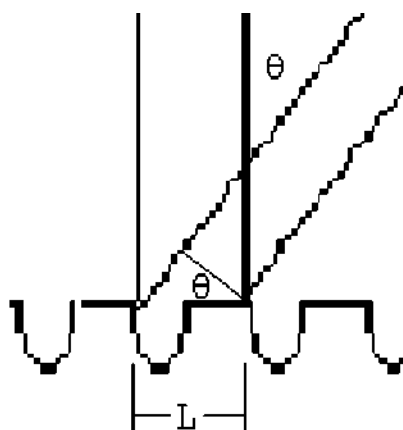
Se coloca el dispositivo que se muestra en la figura sobre el CD y se observan los máximos de interferencia sobre el papel que está pegado al bastidor semicircular. Con el transportador se miden los ángulos correspondientes al primer y segundo máximos de interferencia.

En la siguiente figura mostramos el fenómeno de interferencia.



Dos rayos incidentes que caen perpendicularmente a la superficie con surcos son difractados por éstos. Para que los rayos difractados en dos rendijas consecutivas interfieran positivamente es necesario que en la diferencia de recorrido de ambos quepa un número entero de longitudes de onda ( $n\lambda$ ).

En la siguiente figura ampliada se ilustra esto.



Si  $L$  es la separación entre surcos y  $\theta$  el ángulo de los rayos difractados, de modo que se produzca una interferencia constructiva que forme un máximo, entonces:

$$L \sin \theta_n = n\lambda$$

$$L = \frac{n\lambda}{\sin \theta_n}$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$  es un número entero.  $n=0$  corresponde a un ángulo cero,  $n=1, 2, \dots$  corresponden al primer, segundo, etc. máximos.

Se pueden observar claramente los primeros y segundos máximos de interferencia. Se miden los ángulos y de ellos se calcula  $L$  que es la separación entre surcos. Realice varias medidas.

$\theta_1$ [°]	$\theta_2$ [°]

**Ojo:** Los errores de los ángulos deben estar en radianes.

Al final tomar el promedio de ambos resultados.

**IX Olimpiada Boliviana de Física**  
**Huanuni – Oruro**  
**27 al 29 de Julio de 2004**

**PRUEBA EXPERIMENTAL POR DELEGACIONES.**

**SOLUCION.**

Estos fueron datos obtenidos con el mismo equipo:

$\theta_1$ [°]	$\theta_2$ [°]
26	61.5
26.5	63.5
26	63
25.5	60
27	60
25	65
27	64
25	60
27.5	65
$\bar{\Theta}_1 = 25.9 \pm 0.3$	$\bar{\Theta}_2 = 62.7 \pm 0.7$

$$\bar{\Theta} = \frac{\sum \Theta_i}{N}$$

$$Err_{\bar{\Theta}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\Theta_i - \bar{\Theta})^2}{N-1}$$

$$L = \frac{n\lambda}{\text{sen } \bar{\Theta}_n}$$

$$Err_L = nL \left( \frac{Err_{\lambda}}{\lambda} + \frac{Err_{\bar{\Theta}_n}}{\text{tg } \bar{\Theta}_n} \right)$$

$$\lambda = (655 \pm 25) \text{ nm}$$

$$n = 1: \quad L = 1497 \pm 76$$

$$n = 2: \quad L = 1474 \pm 65$$

$$\bar{L} = (1485 \pm 70) \text{ nm}$$

$$= (1.48 \pm 0.07) \mu\text{m}$$

$$\cong 1.5 \mu\text{m}$$

---

# REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

## COMITÉ EDITORIAL

### Sociedad Boliviana de Física

Dr. Eduardo Palenque Vidaurre

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: ozono@mail.megalink.com

Tel.: (591-2)2799155

Fax:(591-2)2792622

### Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: avelarde@fiums.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax:(591-2)2792622

### Carrera de Física

Lic. Deterlino Urzagasti

Casilla 8635, La Paz - Bolivia

e-mail: urza@fiums.edu.bo

Tel.: (591-2)2792999

Fax:(591-2)2792622

---

### Objetivos

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

La RBF publica artículos, revisiones y colaboraciones en lengua castellana. Se reciben también artículos escritos en inglés, los que son traducidos al castellano por los editores para su publicación.

### Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

### Instrucciones para los autores

Las colaboraciones enviadas para su publicación deberán estar escritas preferentemente en castellano. Trabajos escritos en inglés podrán ser aceptados por el Comité Editorial y, pasado el proceso de aceptación serán traducidos al castellano para su publicación en la RBF.

Los autores deberán enviar su contribución preferentemente en formato LATEX. Para ello necesitarán el formato de la RBF especificado en los archivos *rbfi.cls* y *rbfi.tex*, los cuales, podrán ser enviados por correo electrónico o podrán ser obtenidos de la página de *internet* de la Carrera de Física de la U.M.S.A. ([www.umsanet.edu.bo/fisica/](http://www.umsanet.edu.bo/fisica/)). En caso contrario, los autores podrán enviar su contribución en formato de texto (extensión *.txt*) ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. En cualquier caso, las figuras deberán ser enviadas preferentemente en formato *postscript* (extensiones *.ps* o *.eps*), o en su defecto en el formato con la extensión *.jpg*.

Las contribuciones, o cualquier consulta sobre la RBF, deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

---

## REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

### COMITÉ EDITORIAL

<b>Sociedad Boliviana de Física</b>	<b>Instituto de Investigaciones Físicas</b>	<b>Carrera de Física</b>
<b>Dr. Eduardo Palenque Vidaurre</b> Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: ozono@mail.megalink.com Tel.: (591-2)2799155 Fax:(591-2)2792622	<b>Lic. Alfonso Velarde Chávez</b> Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: avelarde@fiumsa.edu.bo Tel.: (591-2)2792999 Fax:(591-2)2792622	<b>Lic. Deterlino Urzagasti</b> Casilla 8635, La Paz - Bolivia e-mail: urza@fiumsa.edu.bo Tel.: (591-2)2792999 Fax:(591-2)2792622

---

### CONSEJO EDITORIAL

<b>Dr. Ramiro de La Reza</b> Observatorio Nacional CNPq Rua General Bruce 586 20921-400 Rio de Janeiro-Brasil e-mail: delareza@danp6.on.br	<b>Dr. Paulo Murilo Castro de Oliveira</b> Instituto de Fisica Universidade Federal Fluminense C.P. 1002966, Niteroi, RJ-Brasil e-mail: pmco@regulus.if.uff.br
<b>Dr. Juan C. Muzzio</b> Facultad de Ciencias Astrnómicas y Geofísicas Universidad Nacional de La Plata La Plata-Argentina e-mail: jmuzzio@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar	<b>Dr. Carlos Navia</b> Instituto de Física Universidad Federal Fluminense Av. Gen. Milton Tavares de Souza 24210-340, Niteroi, RJ-Brasil e-mail: gfcnoj@portela.if.uff.br
<b>Dr. Oscar Antonio Rondón</b> Institute of Nuclear and Particle Physics University of Virginia McCormick Road, Charlottesville, VA 22901 804 924-6787, USA e-mail: or@virginia.edu	<b>Dr. Oscar Saavedra</b> Dipartimento di Fisica Generale Universita di Torino, Italia e-mail: saavedra@to.infn.it
<b>Dr. Edison H. Shibuya</b> Instituto de Fisica Gleb Wataghin Universidade Estadual de Campinas C.P. 6165, 13.083-970 Campinas, SP-Brasil e-mail: shibuya@ifi.unicamp.br	<b>Dr. Guillermo G. Cabrera</b> Instituto de Fisica Gleb Wataghin Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP e-mail: cabrera@ifi.unicamp.br
<b>Dr. Piero Galeotti</b> Dipartimento di Fisica Generale Universita di Torino, Italia e-mail: galeotti@to.infn.it	<b>Dr. Hector Vucetich</b> Departamento de Física Fac. de Ciencias Exactas - Univ. Nac. de La Plata. C.C. N 67 - 1900 La Plata - Argentina e-mail: vucetich@venus.fisica.unlp.edu.ar, vucetich@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar
<b>Dr. Marco Billó</b> Dept. of Theoretical Physics University of Turin e-mail: billo@to.infn.it	<b>Dr. Newton Figueiredo</b> Universidade Federal de Itajubá C.P.50-CEP:37500-903, Itajubá-MG-Brasil e-mail: newton@efei.br
<b>Dr. Diego García Lambas</b> IATE - OAC Laprida 854, 5000-Córdoba-Argentina e-mail: dgl@mail.oac.uncor.edu	<b>Dr. Thyrso Villela</b> INPE, C.P. 515 12201-970 SJ dos Campos, SP-Brasil e-mail: villela@gemini.das2.inpe.br

---