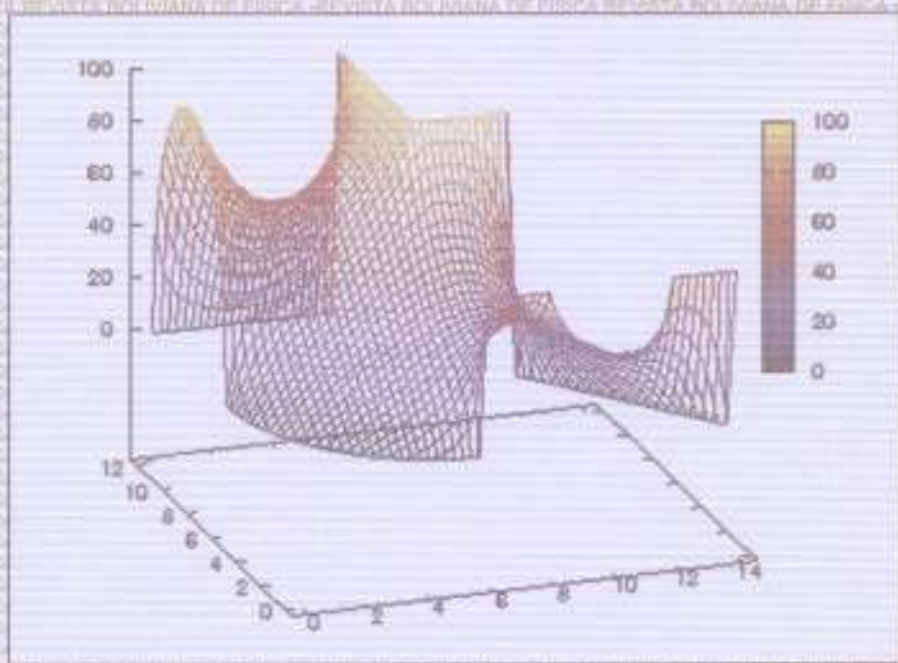


REVISTA BOLIVIANA DE FISICA

NÚMERO 19

NOV. 2011 • LA PAZ • BOLIVIA



REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

Ésta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Dr. Diego Sanjinés Castedo

Email: sanjines@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Dr. Eduardo Palenque Vidaurre

Email: edyruy@yahoo.es

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos

Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

CONSEJO EDITORIAL

Dr. Oscar Antonio Rondón

Institute of Nuclear and Particle Physics
University of Virginia
McCormick Road, Charlottesville, VA 22901
804 924-6787, USA
Email: or@virginia.edu

Dr. Carlos Navia

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense
Av. Gen. Milton Tavares de Souza
24210-340, Niterói, RJ-Brasil
Email: gfcnoj@portela.if.uff.br

Dr. Pedro Pereyra Padilla

Área de Física Teórica
y Materia Condensada
Uniiversidad Autónoma Metropolitana
Azcapotzalco
México DF
Email: pereyrapedro@gmail.com

Dr. Juan C. Muzzio

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
Universidad Nacional de La Plata
La Plata-Argentina
Email: jmuzzio@fcaglp.fcaglp.unlp.edu.ar

Dr. Oscar Saavedra

Dipartimento di Fisica Generale
Universita di Torino, Italia
Email: saavedra@to.infn.it

Dr. Jason Gallas

Instituto de Física
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil
Email: jgallas@if.ufrgs.br

Dr. Daniel Biggemann Tejero

Max Planck Institute of Microstructure Physics
Weinberg 2, 06120 Halle, Germany
Email: biggemann@gmail.com

ISSN 1562-3823



Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
Y
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 19
NOVIEMBRE DE 2011

Revista Boliviana de Física

ISSN 1562-3823

Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica

<http://biblioweb.dgsca.unam.mx/latindex>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

Diseño: A. Ticona

Dirección: Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.

Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

Portada: Solución de la Ecuación de Laplace para una Membrana elástica delgada estacionaria. *Autor:* Franz Suvo Mamani

Formato $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$. *Tipo de fuente utilizada:* newcentury

IMPRESO EN BOLIVIA — PRINTED IN BOLIVIA

CONTENIDO

A. ARTÍCULOS

CARACTERIZACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS MEDIANTE PERIODICIDADES	<i>G. M. Ramírez Ávila & J. A. C. Gallas</i>	1
BÚSQUEDA DE LA COMPONENTE DE ALTA ENERGÍA DE DESTELLOS DE RAYOS GAMA (GRB) CON EL EXPERIMENTO INCA II	<i>Wara Chamani & Alfonso Velarde</i>	11
SIMULACIÓN DEL PROBLEMA DE N CUERPOS CARGADOS: EL ÁTOMO CLÁSICO	<i>V. M. Peñafiel</i>	19
SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES POR EL MÉTODO DE MONTE CARLO	<i>Franz Sucho Mamani</i>	24
TRATAMIENTO DE ABERRACIÓN ESFERICA MEDIANTE SERIE FOCAL	<i>Adrián Tellería</i>	34
DISTRIBUCIÓN DE POTENCIA ELECTROMAGNÉTICA EN UN RECINTO METÁLICO	<i>Evaristo Mamani & Diego Sanjinés C.</i>	42

D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

15 ^{ava} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA, 5 ^{ta} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA	<i>Bustos R. et al.</i>	59
--	-------------------------	----

CARACTERIZACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS MEDIANTE PERIODICIDADES

CHARACTERIZATION OF DYNAMICAL SYSTEMS THROUGH PERIODICITIES

G. M. RAMÍREZ ÁVILA[†] & J. A. C. GALLAS[‡]

[†] Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639
La Paz – Bolivia

[†] AG Nichtlineare Dynamik
Institut für Physik
Humboldt Universität zu Berlin
Robert-Koch-Platz 4. Berlín, Alemania

[‡] Instituto de Física
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Física
Universidade Federal de Paraiba
58051-970 João Pessoa, Brasil

(Recibido 9 de mayo de 2011; aceptado 10 de junio de 2011)

RESUMEN

Se caracterizan diferentes sistemas dinámicos descritos por mapas mediante el cálculo de periodicidades. Este método es alternativo a los diagramas de bifurcación utilizando los exponentes de Lyapunov ya que no sólo permite visualizar las estructuras existentes en el espacio de parámetros, tales como los “camarones”, sino también proporciona el detalle de los regímenes oscilatorios lo cual puede tener importancia desde el punto de vista práctico.

Descriptores: sistemas dinámicos no-lineales — bifurcación — caos — fractales

Código(s) PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.45.Df

ABSTRACT

We characterize, by means of periodicities, some dynamical systems represented by maps. This is an alternative method to the common bifurcation diagrams computed by using the Lyapunov exponents and allows us to visualize the typical structures onto the parameter space such as the “shrimps” but in addition with the detail of the oscillatory regimes which could be important from a practical viewpoint.

Subject headings: dynamical systems (nonlinear) — bifurcation (nonlinear dynamics) — chaos (numerical simulations) — fractals (nonlinear dynamics)

1. INTRODUCCIÓN

Un aspecto muy importante en el estudio de sistemas dinámicos es el concerniente a los que tienen carácter no lineal lo cual permite estudiar no solamente cuestiones relacionadas a la estabilidad sino también posibles comportamientos caóticos. Los sistemas dinámicos pueden ser representados ya sea por mapas (ecuaciones en diferencia) o mediante flujos continuos (ecuaciones diferenciales). Cuando los sistemas son no lineales, su estudio se encara a menudo de manera numérica puesto que en general es difícil encontrar soluciones analíticas. Aspectos tales como bifurcaciones, periodicidades y caos

son parte básica de la denominada Dinámica No Lineal y existen varias formas de abordarlos (ver libros introductorios tales como Argyris et al. (1994); Nocolis (1995); Sprott (2003); Strogatz (1994); Tel & Gruiz (2006). En el presente trabajo se caracterizan diferentes sistemas dinámicos representados por mapas mediante el cálculo de las periodicidades en los mismos, aspecto que fue desarrollado inicialmente en Gallas (1993a,b) y más recientemente en Freire & Gallas (2011a,b); Nascimento et al. (2011). Por otra parte, se compara esta caracterización con otros métodos tales como los diagramas de bifurcación y el cálculo de exponentes de Lyapunov.

El artículo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 se introduce el mapa logístico y se describen las periodicidades en el mismo. En la Sección 3 se analiza el mapa de Hénon y principalmente la estructura de su espacio de parámetros por

[†]mravila@fiumsa.edu.bo

<http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/>

[‡]jpgallas@if.ufrgs.br

<http://www.if.ufrgs.br/jgallas/>

medio de periodicidades. En la Sección 4 se analizan algunas regiones del espacio de parámetros del mapa Tinkerbell, donde se encuentran estructuras de periodicidad diferentes a los típicos “camarones”. En la Sección 5 se estudia el comportamiento en el espacio de parámetros de un modelo de neurona, en el que parece ser importante el rol que juegan las periodicidades. Finalmente, en la Sección 6 se dan las conclusiones y perspectivas de la investigación realizada.

2. EL MAPA LOGÍSTICO

La denominada ecuación logística surge hace mucho tiempo como modelo alternativo de crecimiento de población diferente al Maltusiano que tiene un carácter exponencial. Su primera formulación se debe al matemático bruselense J. F. Verhulst (Delmas 2004; Verhulst 1838). Este modelo, descrito por una ecuación diferencial, es utilizado ampliamente en demografía y ecología (Gabriel et al. 2005; Meade 1988). La importancia del trabajo de Verhulst se refleja en los homenajes que se le rindieron conmemorando los 200 años de su nacimiento, especialmente en su ciudad natal donde tuvo lugar la conferencia Verhulst 200 on Chaos de cuyas memorias se editó un libro con una revisión detallada de la ecuación logística y sus aplicaciones (Ausloos & Dirickx 2005). Sin embargo, este modelo puede ser reducido a un mapa y en esta forma, ser analizado de una manera más simple pero a la vez más profunda. El mapa logístico puede ser expresado en la forma:

$$x_{i+1} = 4\mu x_i(1 - x_i), \quad (1)$$

siendo x la variable dinámica y μ el parámetro de control. El análisis del mapa logístico constituye una de los elementos básicos de la dinámica no lineal pues permite estudiar comportamientos que van desde la estacionariedad, pasando por comportamientos periódicos cada vez más complicados hasta llegar al caos (ausencia de periodicidad), solamente variando el parámetro de control.

Justamente, el término caos es introducido en 1975 en razón a un estudio del mapa logístico (Li & Yorke 1975). Numerosos estudios fueron realizados utilizando este simple modelo que sin embargo presenta una dinámica complicada (May 1976). Particularmente, el aspecto caótico que presenta este sistema para ciertos valores de μ ha sido abordado bajo diferentes perspectivas; desde cálculos sencillos para mostrar el surgimiento de ciclos de período 3 como consecuencia de una bifurcación tangente y que emerge luego de un comportamiento caótico (Bechhoefer 1996; Gordon 1996; Saha & Strogatz 1995); hasta el desarrollo de nuevos conceptos tales como el de intermitencia (Hirsch et al. 1982). Por otra parte, partiendo del análisis de las cascadas de desdoblamiento de período en el mapa logístico, se pudieron generalizar y universalizar algunos resultados (Feigebaum 1978, 1979). En la Fig. 1 se muestran tres formas de caracterización del mapa logístico: (a) diagrama de bifurcación, (b) exponentes de Lyapunov y (c) periodicidades. Todas estas re-

presentaciones nos muestran claramente la diferencia entre comportamiento periódico y caótico; así en la Fig. 1(a) se identifican las cascadas de desdoblamiento de período y las regiones oscuras del diagrama representan situaciones de caos. En la Fig. 1(b), las regiones periódicas se diferencian de las caóticas en que para las periódicas, el exponente de Lyapunov es negativo ($\lambda \leq 0$), en tanto que para las caóticas, es positivo ($\lambda > 0$). La distribución de periodicidades se muestra como una especie de escalones en la Fig. 1(c), correspondiendo al escalón cero el comportamiento caótico del sistema.

Lo interesante de trabajar con periodicidades radica en el hecho de identificar más finamente el comportamiento oscilatorio del sistema, lo cual no queda muy claro en las otras representaciones. Sin embargo, una desventaja es que para tener una buena determinación de las periodicidades, es necesario un proceso de iteración largo; lo anterior se aplica también al cálculo de exponentes de Lyapunov pues se debe alcanzar la estabilidad de estos.

Para finalizar esta sección, se debe resaltar el hecho de que el mapa logístico es quizás el ejemplo tomado más a menudo para encarar el estudio de nuevos conceptos. Ver por ejemplo: Lind et al. (2005); Masoller & Marti (2005).

3. EL MAPA DE HÉNON

En 1976, Hénon propone un modelo reduccionista (Hénon 1976) capaz de reproducir de modo computacionalmente más simple los resultados provenientes del paradigmático modelo de Lorenz (Lorenz 1963). En su forma más sencilla puede expresarse como:

$$T : \begin{cases} x_{i+1} = 1 - ax_i^2 + by_i, \\ y_{i+1} = x_i. \end{cases} \quad (2)$$

Esta transformación tiene como una de sus características más importantes la de preservar el área en el espacio de fases cuando $|b| = 1$ puesto que $J = 1$; siendo J , el determinante jacobiano, lo que significa que bajo esta condición, el sistema que describe es conservativo. Un gran número de estudios ha sido realizado acerca del mapa de Hénon, entre los que podemos destacar el análisis de desdoblamientos de período (Bountis 1981), el análisis de puntos fijos que dan lugar a ciclos límites con diferentes períodos (Hitzl & Zele 1985); la exploración exhaustiva en el espacio de parámetros donde se encuentran las estructuras de “camarón” (Gallas 1993b; Lorenz 2008); el análisis con diagramas isoperiódicos (Cabral et al. 1993; Gallas 1994) y de las cuencas de atracción (Rech et al. 2005), entre otros.

La ruta al caos en el mapa de Hénon puede ocurrir a través de una cascada de desdoblamiento de período como se muestra en la Fig. 2 en la que se fija el valor del parámetro a y se varía b . Se hace la misma caracterización que para el mapa logístico y se observan algunos aspectos importantes tales como bifurcaciones con colisiones de borde similares a las expuestas en Nusse et al. (1994); Nusse & Yorke (1992). Volveremos sobre este aspecto en el estudio del mapa Tinkerbell.

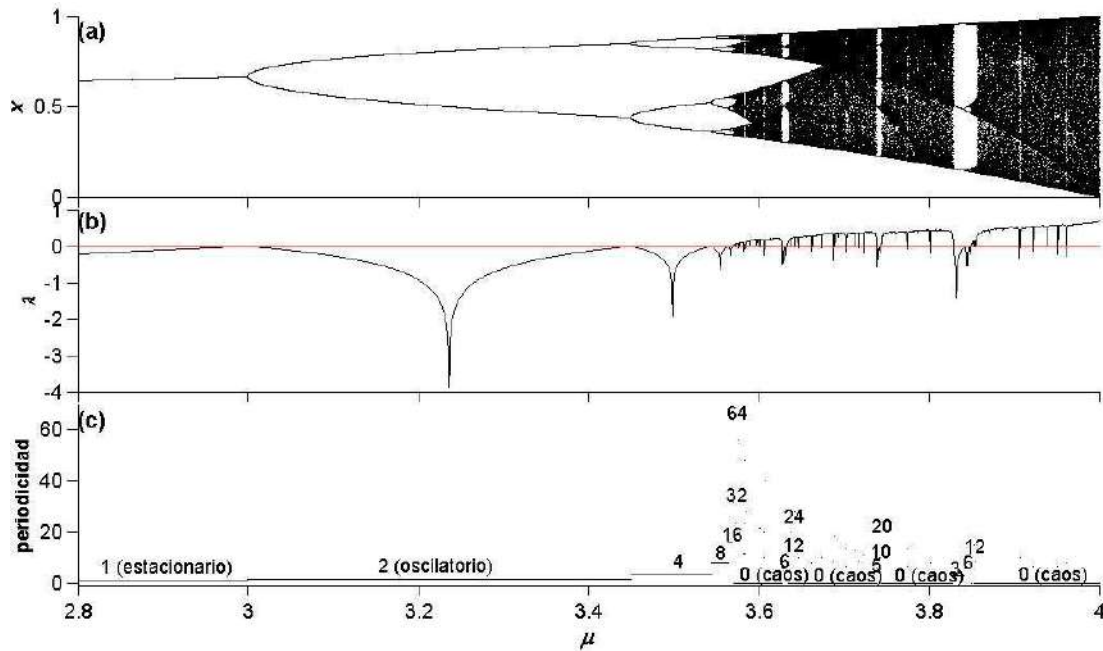


FIG. 1.— (Color online) Caracterización dinámica del mapa logístico en función del parámetro de control μ , mediante (a) un diagrama de bifurcación, (b) los exponentes de Lyapunov y (c) las periodicidades.

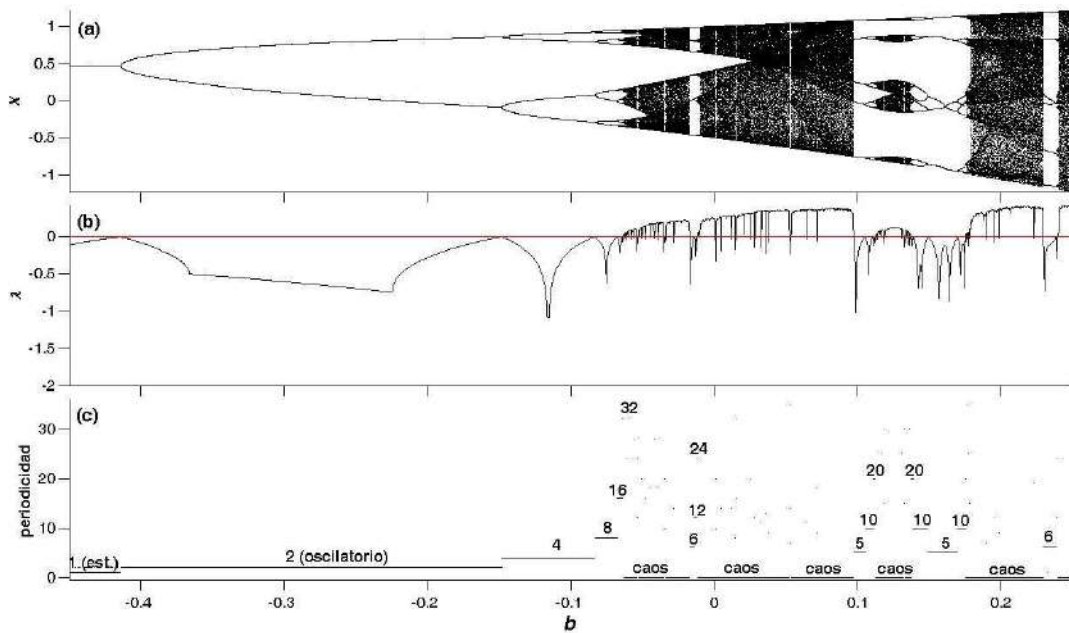


FIG. 2.— (Color online) Caracterización dinámica del mapa de Hénon en función del parámetro de control b , mediante (a) un diagrama de bifurcación, (b) los exponentes de Lyapunov y (c) las periodicidades, cuando $a = 1.5$.

En la Fig. 3, mostramos un diagrama de fases para el mapa de Hénon, considerando los mayores exponentes de Lyapunov (a) y las periodicidades (b). Utilizando la misma región que se reporta en Gallas (1993b). Como se puede notar, las estructuras que denotan comportamiento periódico tienen la forma de “camarones”. Del diagrama obtenido a partir de los mayores exponentes de Lyapunov, si bien se pueden identificar algunas regiones de superestabilidad al interior de los camarones, aparte de eso, no se pueden identificar las periodicidades que corresponden a cada una de estas estructuras lo que

se consigue fácilmente si se utiliza el diagrama de periodicidades. Es interesante observar que los camarones no son completamente isoperiódicos y que en los bordes de los mismos existen desdoblamiento de período que como es natural, conducen a la región caótica.

4. MAPA TINKERBELL

El mapa Tinkerbell, aparece en general como un ejemplo académico de sistema dinámico (Alligood et al. 1996; Sprott 2003). Sin embargo, dadas sus características, ofrece una riqueza dinámica que puede

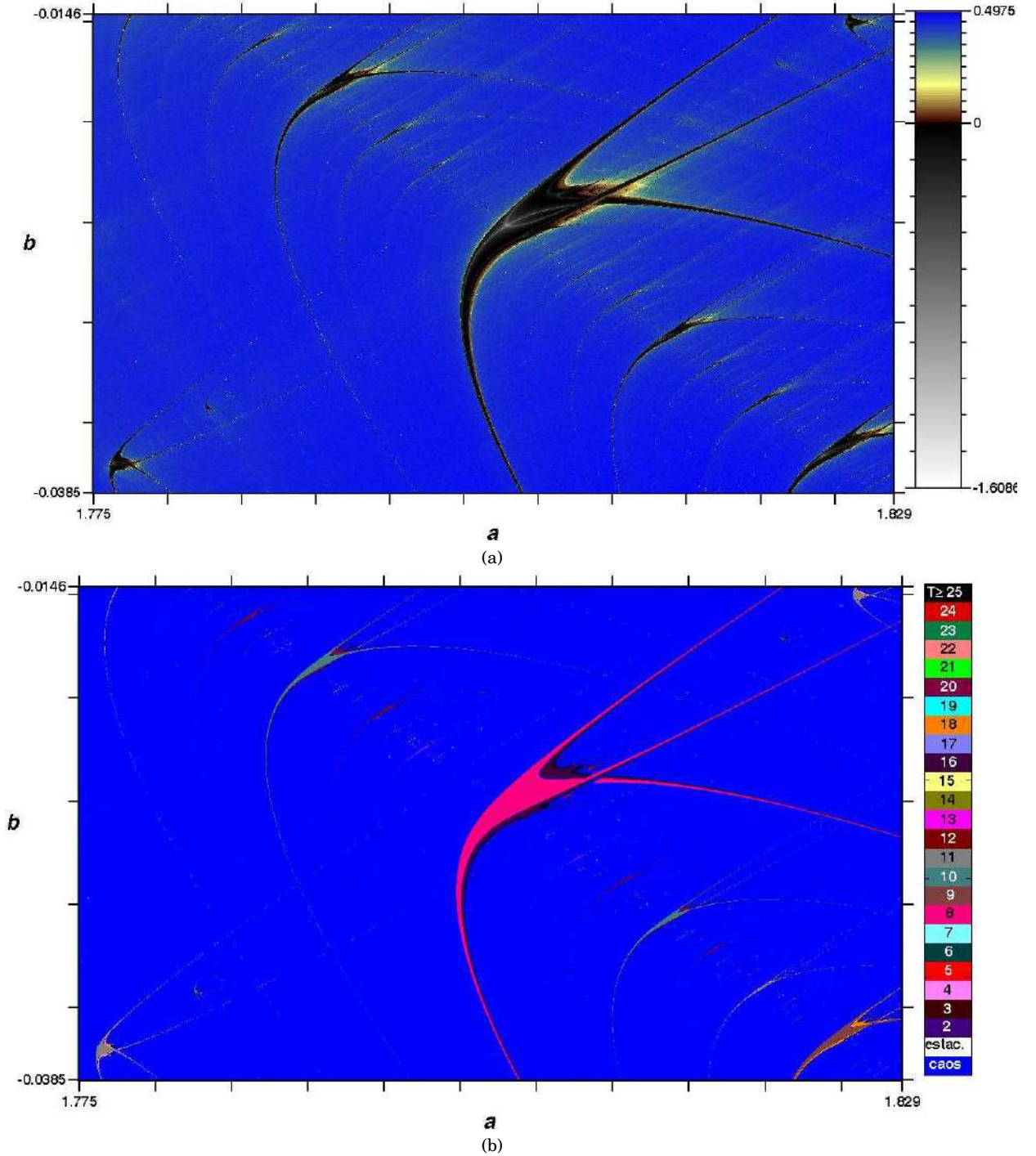


FIG. 3.— (Color online) Espacio de parámetros del mapa de Hénon obtenido a partir de (a) los mayores exponentes de Lyapunov y (b) las periodicidades; en este caso, cada color de la barra a la derecha corresponde a una determinada periodicidad; las situaciones de caos y estacionariedad están indicadas por los colores de los cuadros inferiores (azul y blanco respectivamente) y la situación en que la periodicidad es mayor o igual a 25 por el color negro, correspondiente al cuadro superior de la barra.

ser explotada. La forma explícita de este mapa es:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + ax_n + by_n, \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n + cx_n + dy_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Una de sus características es la de presentar una estructura fractal en las fronteras de la cuenca de atracción, tal como se observa en la Fig. 4. La forma de la cuenca de atracción es geoméricamente la misma para otros valores de los parámetros a pe-

sar de que el comportamiento pueda resultar totalmente diferente. Así, se puede tener una cuenca completamente caótica como la de la Fig. 4(a) o una cuenca completamente periódica con otros valores de parámetros, tal como se muestra en la Fig. 4(b).

Por otra parte, dado que existen 4 parámetros de control en el modelo, se pueden obtener diferentes secciones del espacio de parámetros, cada una de las cuales tiene aspectos interesantes a estudiar. Por

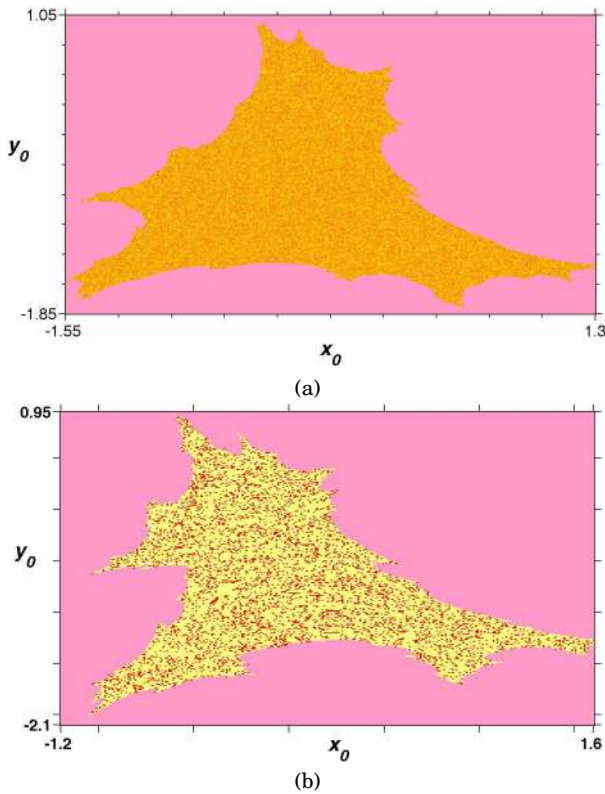


FIG. 4.— (Color online) Cuencas de atracción (a) caótica para el modelo Tinkerbell cuando los valores de los parámetros son: $a = 0.5$, $b = -0.6$, $c = 2.2$ y $d = 0.5$. (b) periódica con $a = -0.51$, $b = -0.9$, $c = 2.2$ y $d = 0.5$. Las regiones rojas corresponden a periodicidades de orden 5 en tanto que las amarillas son de orden 15. En ambos casos, la zona rosa indica que para esos valores de parámetros, no se tiene convergencia.

simplicidad, nos abocaremos a la sección del espacio de parámetros (a, b) que se muestra en la Fig. 5. Como se pudo observar en la Fig. 4, existen muchas regiones en las cuales se tiene divergencia; sin embargo, se pueden localizar regiones en las cuales existen estructuras periódicas rodeadas de caos. En la Fig. 5(a) se ven dos de estas regiones separadas por una región donde el comportamiento del sistema es estacionario.

También, se ve que parece haber una suerte de conexión entre estructuras de igual periodicidad, lo que se resalta mediante flechas para el caso de periodicidades 5 y 7. Es interesante observar en la Fig. 5(b), una de estas regiones, en la cual se nota la presencia de secuencias de camarones y otras estructuras periódicas que indican rutas degeneradas al caos similares a las encontradas en Gallas (1993a). En particular, la secuencia que va de periodicidad 1 a ∞ y que se muestra con la flecha blanca. Por supuesto, existen otras secuencias considerando estas mismas estructuras multiperiodicas. Así, se tendrán por ejemplo, secuencias:

$$\begin{aligned}
 &3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - \dots \\
 &6 - 8 - 10 - 12 - 14 - 16 - 18 - 20 - \dots \\
 &12 - 16 - 20 - 24 - 28 - 32 - 36 - 40 - \dots
 \end{aligned}$$

La forma en la que se distribuyen las regiones periódicas nos lleva a pensar que la ruta al caos no necesariamente ocurre a través de una cascada de desdoblamiento de período y que más bien tienen lugar otro tipo de bifurcaciones como la de colisiones de frontera que se mencionó al analizar el mapa de Hénon. Se ve también la existencia de estructuras periódicas menores y cuyas periodicidades también parecen seguir una cierta secuencia. Por último, se debe señalar también que las estructuras periódicas encontradas en el mapa Tinkerbell, tienen una morfología diferente a la de los “camarones” que se encuentra en la mayor parte de los sistemas dinámicos, tanto discretos como continuos.

5. UN MODELO DE NEURONA

Como es sabido, el cerebro —en particular de los humanos— es uno de los sistemas complejos más difíciles de analizar y aunque en los últimos años se ha avanzado considerablemente en Neurociencia, hay todavía aspectos que permanecen oscuros en relación a la funcionalidad del mismo. El cerebro tiene como piezas fundamentales a las neuronas que pueden llegar en número a 10^{11} . Estas neuronas están conectadas entre sí formando redes altamente complejas pues el número de vínculos que puede tener cada neurona puede llegar a 10^4 .

Existen diferentes tipos de neuronas y desde hace muchos años se ha tratado de modelizar las mismas tanto individualmente como cuando se conectan a otras. Una neurona es considerada como un sistema que no está en equilibrio y que además posee varios mecanismos de retroalimentación y de retardo, los cuales permiten el carácter oscilatorio de la misma (Abarbanel et al. 1996). Una de las características del comportamiento de las neuronas es la de poseer excitabilidad eléctrica. Por otra parte, se destacan el potencial de reposo y el potencial de acción como típicos en el funcionamiento neuronal. Dado que existen muchos tipos de neuronas y cada una de ellas con diferentes características, se han propuesto diferentes modelos para la descripción de las mismas. El primer modelo propuesto fue el de Hodgkin-Huxley en 1952 (Hodgkin & Huxley 1952) que fue la parte culminante de una serie de trabajos experimentales con neuronas de calamar gigante.

Posteriormente, se postularon otros modelos que trataron de expresar de forma más simple las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de las neuronas. Todos estos modelos consisten en sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales por lo que su solución analítica resulta casi imposible. Es así, que en general se aborda el problema de manera numérica. Con el afán de simplificar estos modelos, Rulkov plantea un modelo consistente en un mapa con dos variables que permite rescatar los comportamientos más importantes en las neuronas, tales como el hecho de tener oscilaciones sostenidas, situaciones de estacionariedad y las denominadas ráfagas o “bursts” consistentes en episodios oscilatorios de tipo “spikes” (picos) seguidos por fases de estacionariedad o “silencio” (Rulkov 2001, 2002). El modelo se

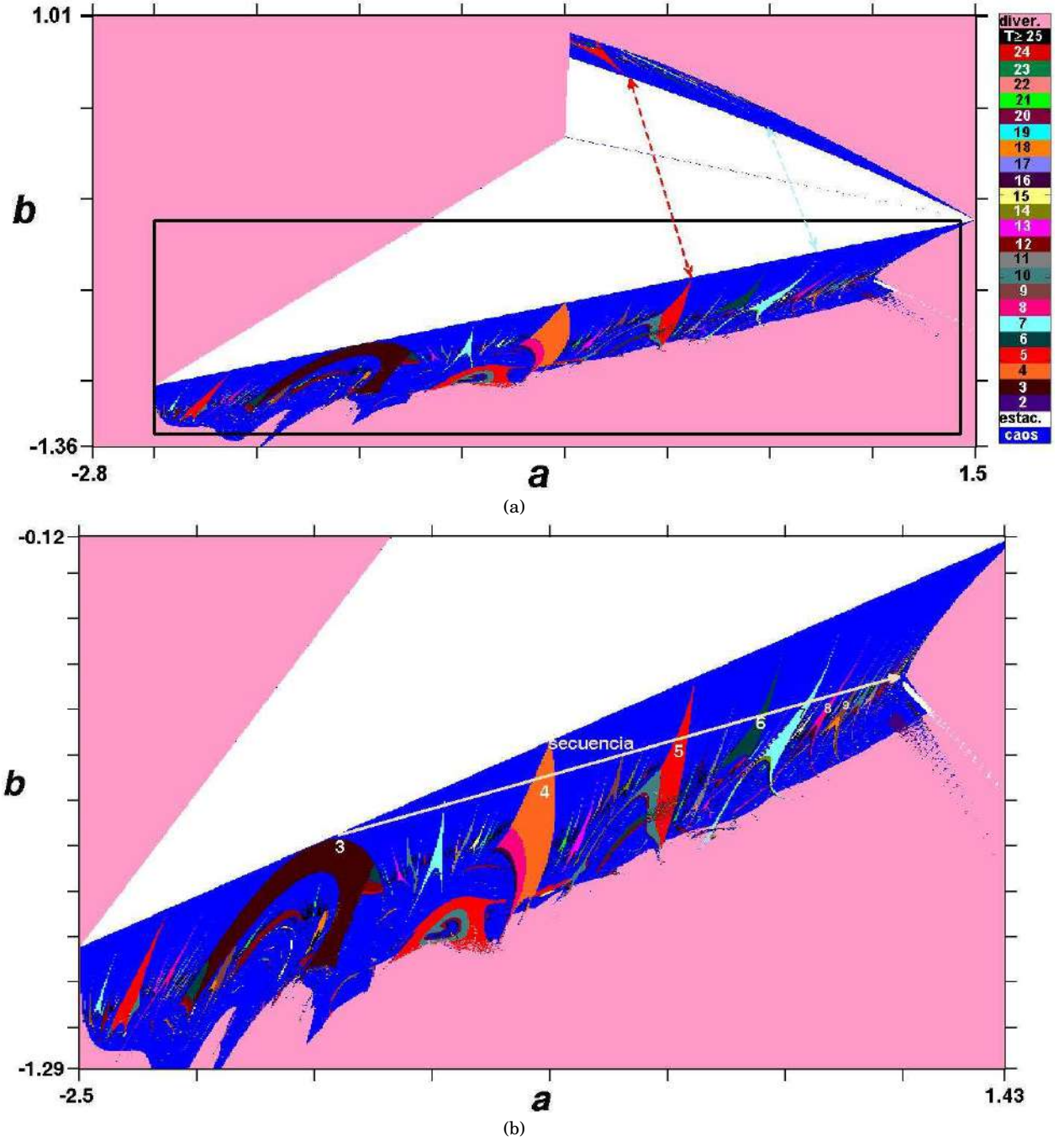


FIG. 5.— (Color online) Espacio de parámetros (a, b) para el mapa Tinkerbell utilizando periodicidades para su caracterización. (a) Dos regiones que presentan estructuras periódicas y caos, separadas por una región de estacionariedad. (b) Magnificación de la región encuadrada en (a), donde se observan secuencias bien definidas en las estructuras mayores y otras para las menores. La flecha blanca indica una secuencia en la que participan las regiones periódicas de mayor tamaño. Se utiliza para denotar las periodicidades un código de colores similar al de la Fig. 3, donde enfatizamos que la región azul corresponde a caos, la blanca a estacionariedad y la rosa a divergencia.

expresa por:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n - \mu(x_{n+1}) + \mu\sigma, \end{aligned} \quad (4)$$

donde x y y son las variables dinámicas rápida y lenta respectivamente cuando el parámetro μ toma valores pequeños como por ejemplo $\mu = 0.001$. Siguiendo los valores típicos considerados en Rulkov (2002), se pueden determinar 3 regiones en el espacio

de parámetros (σ, α) , tal como se muestra en la Fig. 6; estos parámetros son los que determinan el comportamiento de la neurona y están en relación con las influencias externas aplicadas. En los recuadros, se observan los comportamientos típicos de la variable x .

Como se puede ver, la determinación de la frontera entre la región de “ráfagas de picos” (“burst of spikes”) y la región de picos continuos (oscilaciones

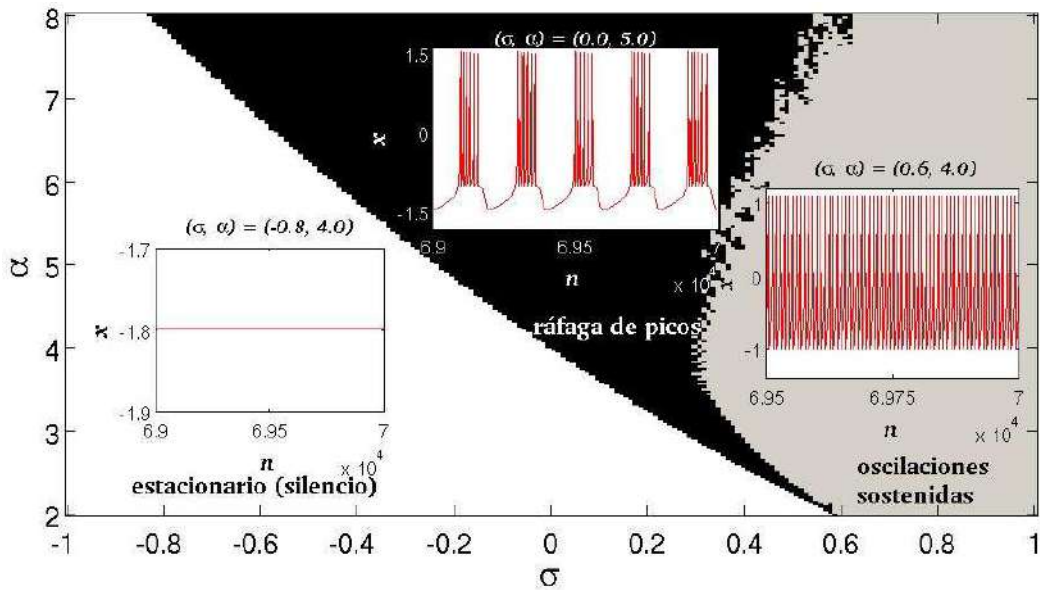


FIG. 6.— (Color online) Regiones en el espacio de parámetros (σ, α) , donde se distinguen las regiones de estacionariedad o silencio, la de oscilaciones sostenidas (spikes) y la de ráfagas de picos (burst of spikes), donde los recuadros muestran ejemplos de la evolución temporal de la variable x en cada una de estas regiones.

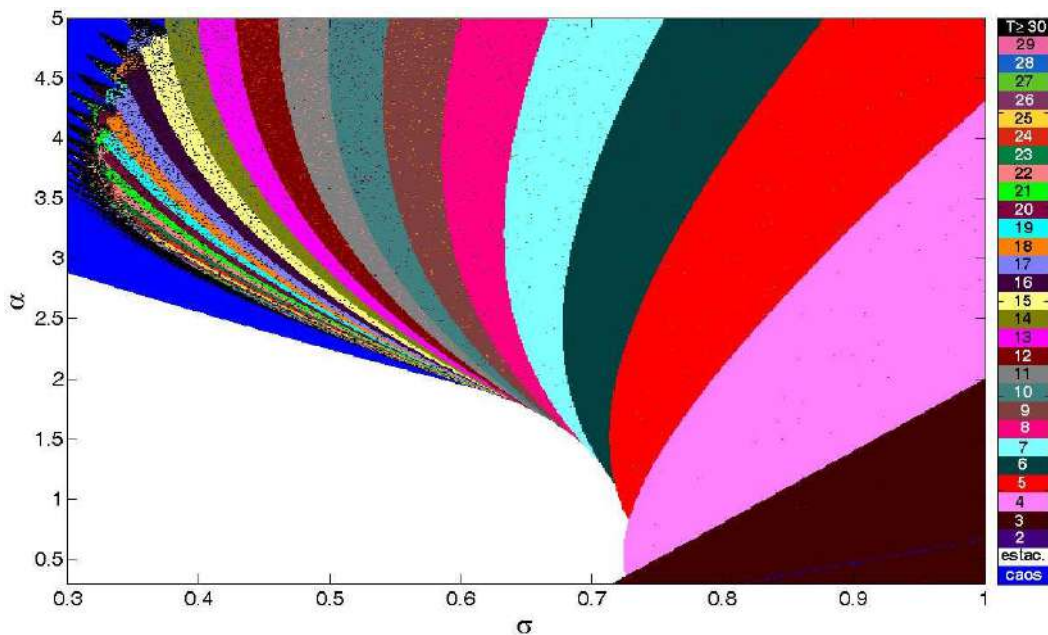


FIG. 7.— (Color online) Periodicidades en el espacio de parámetros del modelo de Rulkov. Se utiliza un código de colores similar al de la Fig. 3 con el objeto de identificar las regiones de estacionariedad y caos.

sostenidas) no queda muy bien delimitada; en particular, la región inferior de la “ráfaga de picos” podría ser considerada con más propiedad como una región de oscilaciones en las que existe un impulso como si se tratase de una función delta de Dirac y que además, como se explicará posteriormente en la Fig. 9(a), se trata de una región caracterizada por un comportamiento caótico. Para un análisis más fino, se procede en la Fig. 7 a estudiar con mayor detalle esta área del espacio de parámetros.

Llamamos también la atención sobre el hecho de que las fronteras reportadas en Rulkov (2002) no coinciden plenamente con las que nosotros determi-

namos haciendo un exhaustivo barrido de los valores de los parámetros. Como se puede ver en la Fig. 7, las periodicidades en la región de oscilaciones sostenidas están bien definidas y disminuyen en pasos de 1 luego de que el sistema sale de la ventana caótica. Es interesante notar también que las áreas correspondientes a periodicidades menores aumentan a medida que la periodicidad disminuye, lo que es coherente si se piensa que la ruta al caos implica ventanas de periodicidad cada vez más estrechas. Para tener una idea más clara de cómo ocurre la bifurcación, se representa en la Fig. 8, la misma caracterización dinámica utilizada en las Figs. 1 y 2, donde

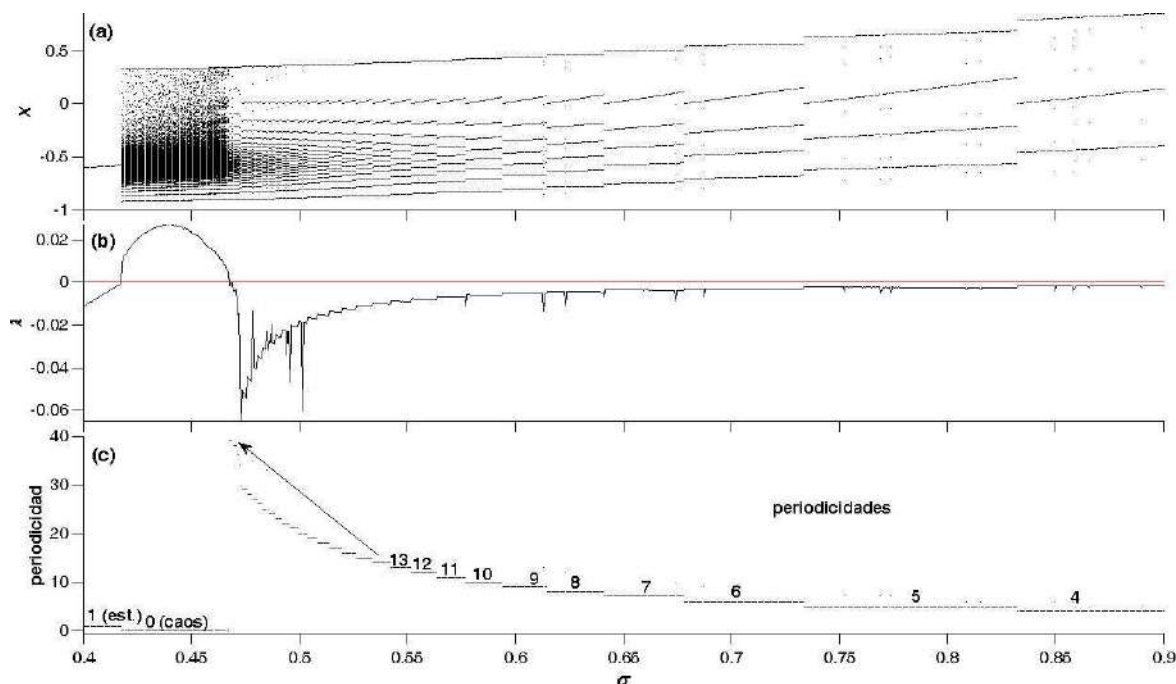


FIG. 8.— (Color online) Caracterización dinámica para el modelo de Rulkov en función del parámetro de control σ , mediante (a) un diagrama de bifurcación, (b) los exponentes de Lyapunov y (c) las periodicidades, cuando $\alpha = 2.5$ y $\mu = 0.001$.

es interesante observar el paso de la estacionariedad al caos sin mediar una cascada de desdoblamiento de período.

Para finalizar nuestro análisis del modelo de neurona, nos concentramos en la región donde se tienen las ráfagas de picos pues en algunos sectores de la misma se presenta un comportamiento caótico. En la Fig. 9(a) se representa esta región mediante exponentes de Lyapunov y en la Fig. 9(b) a través de un análisis contando el número de picos de las ráfagas, cuando estas son periódicas. Se observa que el número de picos en las ráfagas tiende a aumentar cuando los parámetros σ y α crecen. Debemos mencionar también que variando el valor del parámetro μ para las mismas regiones del espacio de parámetros (σ, α) , se observa que la región caótica es mayor cuando el valor de μ disminuye.

Existen otros modelos de neurona basados en mapas cuyas descripciones se exponen en Ibarz et al. (2011).

6. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

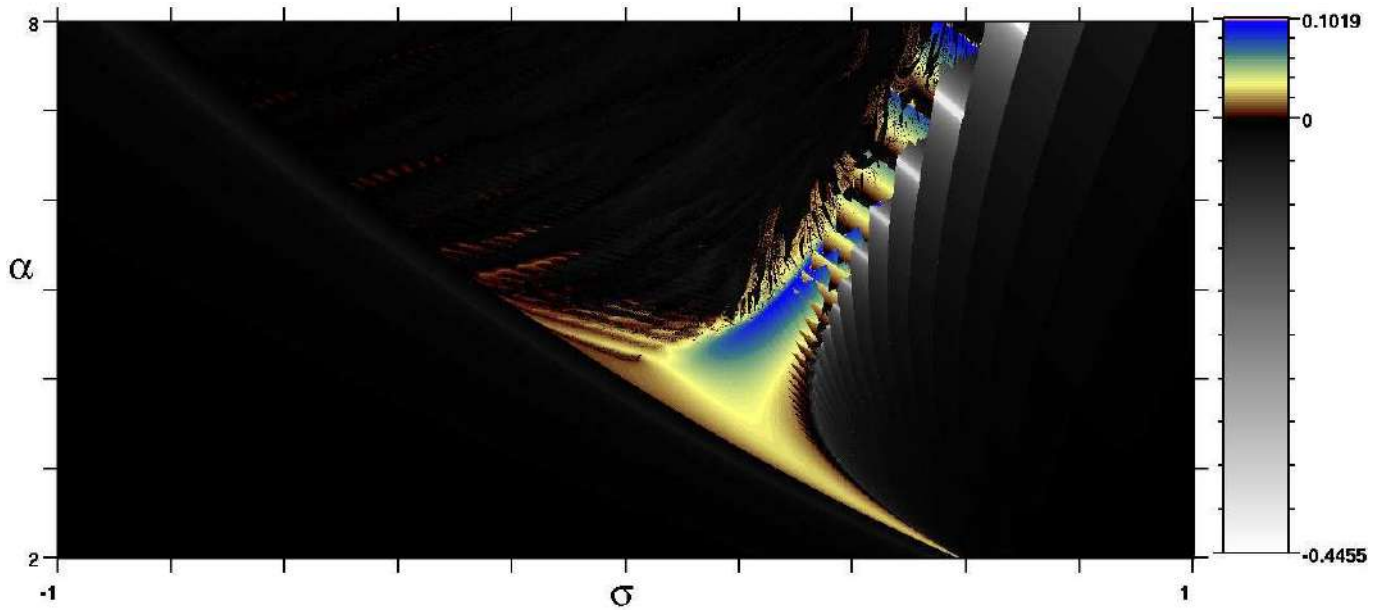
En primer lugar, se verificó la pertinencia del cálculo de periodicidades como una alternativa útil y sencilla para la caracterización de sistemas dinámicos.

Comparando las caracterizaciones mediante exponentes de Lyapunov y periodicidades, una de las ventajas de trabajar con las últimas es la de poder discriminar cada orden de periodicidad y verificar las posibles secuencias de las mismas que permiten tener una idea más clara de cómo se presenta la ruta hacia el caos. Sin embargo, uno de los problemas de trabajar con periodicidades es el de tener que considerar tiempos bastante largos en las regiones donde se presentan las bifurcaciones pues

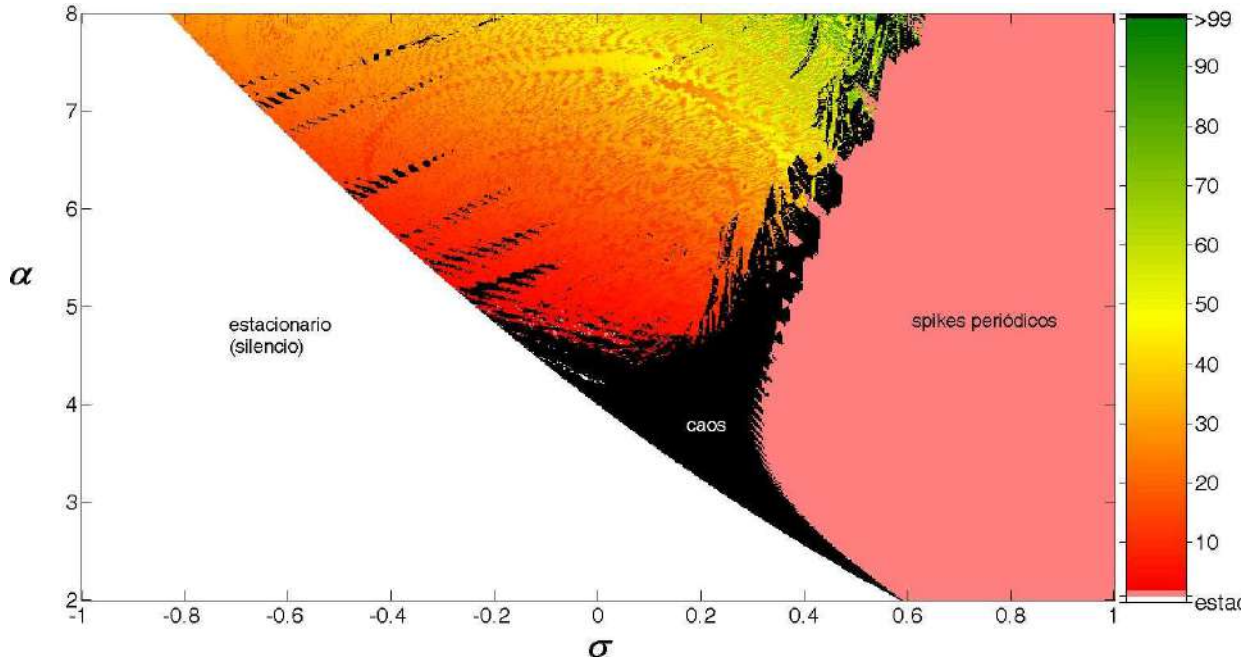
de lo contrario, se obtienen resultados erróneos que parecerían mostrar caos en todas las fronteras entre periodicidades.

El análisis de modelo de neurona de Rulkov muestra resultados interesantes pues nos permite identificar 3 zonas con características bien definidas. En la región de oscilaciones sostenidas, la ruta al caos ocurre a través de una cascada pero no con desdoblamiento de período sino con un aumento discreto de la periodicidad (en pasos de uno). Por otro lado, la salida del caos es directamente hacia la estacionariedad. Adicionalmente, el análisis en la región donde se presentan ráfagas de picos, nos indica que existen regiones caóticas que podemos identificarlas mediante el cálculo de exponentes de Lyapunov y además, se puede también describir el comportamiento de estas ráfagas mediante la cuantificación del número de picos por ráfaga cuando estas ráfagas son periódicas. Esto es importante puesto que permite escoger el comportamiento de acuerdo al sistema que se estudia. Este tipo de comportamiento, se observa también en algunas especies de luciérnagas macho (Moiseff & Copeland 1995; Ramírez et al. 2011) y este modelo eventualmente podría ser aplicado para estudiar la emisión de flashes de estos insectos. Otra aplicación de esta clase de modelo se puede dar en sistemas que describen ritmos biológicos en los que ocurren ráfagas de picos como los que se mencionan en Goldbeter (1996) y más específicamente en lo referente a oscilaciones de Ca^{2+} (Dupont & Combettes 2009). Es importante el estudio de mapas similares no sólo individualmente sino también formando redes tal como lo hacen las neuronas.

El análisis de periodicidades puede ser relacionado con ciertas series típicas como la de Farey estudiadas



(a)



(b)

FIG. 9.— (Color online) Espacio de parámetros para el modelo de Rulkov considerando (a) los exponentes de Lyapunov. La barra de colores indica el valor de los mayores exponentes de Lyapunov. (b) El número de picos por ráfaga; en negro se representan las regiones caóticas y en colores las regiones donde existe periodicidad. La región blanca significa que no existen ráfagas de picos.

en otros sistemas que presentan multiestabilidades como en Albadily et al. (1989); Ringland et al. (1990) y aún más recientemente en Freire & Galas (2011b). Finalmente, el análisis de periodicidades puede ser reemplazado por un análisis de conteo de picos en series de tiempo periódicas provenientes de sistemas continuos tal como se hizo en Freire & Galas (2011b).

GMRA agradece al Deutscher Akademischer Austausch Dienst (DAAD) por la beca de investigación otorgada. JACG agradece al Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por el financiamiento para la investigación y también agradece a la Air Force Office of Scientific Research (AFOSR) por el apoyo bajo contrato FA9550-07-1-0102.

AGRADECIMIENTOS

REFERENCIAS

Abarbanel, H. D., Rabinovich, M. I., Selverston, A., Bazhenov, M. V., Huerta, R., Sushchik, M. M., & Rubchinsky, L. L. 1996, *Physics-Uspekhi* **39**, 337

Albadily, F. N., Ringland, J., & Schell, M. 1989, *The Journal of Chemical Physics* **90**, 813

- Alligood, K., Sauer, T. D., & Yorke, J. A. 1996, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems* (Springer-Verlag, New York)
- Argyris, J., Faust, G., & Haase, M. 1994, *An Exploration to Chaos* (Elsevier Science B. V., Amsterdam)
- Ausloos, M. & Dirickx, M. 2005, *The Logistic Map: Map and the Route to Chaos: From the Beginning to Modern Applications* (Springer-Verlag, Heidelberg)
- Bechhoefer, J. 1996, *Mathematics Magazine* **69**, 115
- Bountis, T. C. 1981, *Physica D* **3**, 577
- Cabral, F., Lago, A., & Gallas, J. A. C. 1993, *International Journal of Modern Physics C* **4**, 553
- Delmas, B. 2004, *Math. & Sci. hum./ Mathematics and Social Sciences* **167**, 51
- Dupont, G. & Combettes, L. 2009, *Chaos* **19**, 037112
- Feigenbaum, M. J. 1978, *J. Stat. Phys.* **19**, 25
- 1979, *J. Stat. Phys.* **21**, 669
- Freire, J. G. & Gallas, J. A. C. 2011a, *Physical Chemistry Chemical Physics* **13**, 12191
- 2011b, *Phys. Lett. A* **375**, 1097
- Gabriel, J. P., Saucy, F., & Bersier, L. F. 2005, *Ecological Modelling* **185**, 147
- Gallas, J. A. C. 1993a, *Phys. Rev. E* **48**, R4156
- 1993b, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2714
- 1994, *Physica A* **202**, 196
- Goldbeter, A. 1996, *Biochemical Oscillations and Cellular Rhythms. The Molecular Bases of Periodic and Chaotic Behaviour* (Cambridge University Press, Cambridge)
- Gordon, W. B. 1996, *Mathematics Magazine* **69**, 118
- Hénon, M. 1976, *Communications in Mathematical Physics* **50**, 69
- Hirsch, J. E., Huberman, B. A., & Scalapino, D. J. 1982, *Phys. Rev. A* **25**, 519
- Hitzl, D. L. & Zele, F. 1985, *Physica D* **14**, 305
- Hodgkin, A. L. & Huxley, A. F. 1952, *Journal of Physiology* **117**, 500
- Ibarz, B., Casado, J. M., & Sanjuán, M. A. F. 2011, *Phys. Rep.* **501**, 1
- Li, T. Y. & Yorke, J. A. 1975, *The American Mathematical Monthly* **82**, 985
- Lind, P. G., Gallas, J. A. C., & Herrmann, H. J. 2005, *Coherence in Complex Networks of Oscillators*, 77, in the *Logistic Map: Map and the Route to Chaos: From the Beginning to Modern Applications* (Springer Verlag, Heidelberg)
- Lorenz, E. N. 1963, *Journal of the Atmospheric Sciences* **20**, 130
- 2008, *Physica D* **237**, 1689
- Masoller, C. & Marti, A. C. 2005, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 134102
- May, R. M. 1976, *Nature* **261**, 459
- Meade, N. 1988, *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society)* **151**, 491
- Moiseff, A. & Copeland, J. 1995, *J. Insect Behav.* **8**, 395
- Nascimento, M. A., Gallas, J. A. C., & Varela, H. 2011, *Physical Chemistry Chemical Physics* **13**, 441
- Nicolis, G. 1995, *Introduction to Nonlinear Science* (Cambridge University Press, Cambridge)
- Nusse, H. E., Ott, E., & Yorke, J. A. 1994, *Phys. Rev. E* **49**, 1073
- Nusse, H. E. & Yorke, J. A. 1992, *Physica D* **57**, 39
- Ramírez, G. M., Deneubourg, J. L., Guisset, J. L., Wessel, N., & Kurths, J. 2011, *EPL (Europhysics Letters)* **94**, 60007
- Rech, P. C., Beims, M. W., & Gallas, J. A. C. 2005, *Phys. Rev. E* **71**, 017202
- Ringland, J., Issa, N., & Schell, M. 1990, *Phys. Rev. A* **41**, 4223
- Rulkov, N. F. 2001, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 183
- 2002, *Phys. Rev. E* **65**, 041922
- Saha, P. & Strogatz, S. 1995
- Sprott, J. C. 2003, *Chaos and Time-Series Analysis* (Oxford University Press)
- Strogatz, S. H. 1994, *Nonlinear Dynamics and Chaos. With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering* (Perseus Books, New York)
- Tel, T. & Gruiz, M. 2006, *Chaotic Dynamics. An Introduction Based on Classical Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge)
- Verhulst, P. F. 1838, *Correspondance Mathématique et Physique* **10**, 113

BÚSQUEDA DE LA COMPONENTE DE ALTA ENERGÍA DE DESTELLOS DE RAYOS GAMMA (GRB) CON EL EXPERIMENTO INCA II

SEARCH OF THE HIGH ENERGY COMPONENT OF GAMMA RAY BURSTS (GRB) WITH THE INCA II EXPERIMENT

WARA CHAMANI[†] & ALFONSO VELARDE[‡]

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639
La Paz – Bolivia

(Recibido 4 de julio de 2011; aceptado 8 de agosto de 2011)

RESUMEN

INCA II es un experimento que emplea los detectores del arreglo BASJE (Bolivian Air Shower Joint Experiment) situado en el monte Chacaltaya, Bolivia. INCA II opera desde septiembre de 2009 y emplea la técnica de las partículas individuales para la búsqueda y estudio de destellos de rayos gamma (GRB) en el rango de energías de 1GeV a un 1TeV . En este trabajo se muestran los resultados de simulaciones para la determinación de la sensibilidad del experimento a la detección de los GRB, así como el análisis de datos para el estudio de estabilidad de los detectores; además se realiza la búsqueda de alguna significancia estadística en los registros debido a algún evento registrado por los satélites. Finalmente se calcula el límite superior de la fluencia de la energía de GRB para que éstos puedan ser detectados.

Descriptor: destellos de rayos gamma — rayos cósmicos — observatorios y pruebas de campo

Código(s) PACS: 95.85.Pw, 96.50.S-, 95.45.+i

ABSTRACT

INCA II is an experiment that uses the detectors of the BASJE project (Bolivian Air Shower Joint Experiment) located at Mount Chacaltaya, Bolivia. INCA II has been running since September 2009 and employs the single-particle technique for the search and study of gamma ray bursts (GRB) in the energy interval $1\text{GeV} - 1\text{TeV}$. In this work we show the results of the simulations for determining the sensitivity of this experiment to detect GRB, as well as the data analysis of the detectors stability. We also look for some statistical significance of data registered by the satellites due to some event or other activity. Finally, we calculate the energy fluence upper limit of GRB so that they can be detected.

Subject headings: gamma ray bursts — cosmic rays — observatories and site testing

1. INTRODUCCIÓN

Los estallidos de rayos gamma o gamma-ray bursts (GRB), son los eventos más energéticos y brillantes en el universo. Los GRBs son principalmente observados por satélites, y su componente más energética ($> 1\text{GeV}$) puede ser detectada en altas montañas. El experimento INCA II fue instalado en septiembre de 2009, que emplea los detectores de centello del arreglo de chubascos atmosféricos de BASJE en el monte de Chacaltaya, para observar la componente de alta energía de los GRBs en coincidencia con satélites y otros experimentos detectando partículas con energías mayores a 1GeV , usando la técnica de las partículas individuales (Vernetto 2000).

[†]Email: nosferatum.777@yahoo.es

[‡]Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

2. ARREGLO EXPERIMENTAL

El antecedente a este experimento fue INCA que funcionó en el periodo: diciembre de 1996 hasta marzo de 2001. Fue una colaboración entre el IIF-UMSA, la Universidad de Torino y el Instituto Tecnológico del Japón. El arreglo experimental consistió de 12 centelladores de $2 \times 2\text{m}^2$ del proyecto BASJE distribuidos sobre un área de $20 \times 20\text{m}^2$. Durante ese periodo se estudiaron posibles eventos en correlación con los 135 eventos detectados por el satélite BATSE, ningún evento significativo fue encontrado (Cabrera & et al. 1999). Desde septiembre de 2009 se ha renovado el arreglo de BASJE, con un área de detección de $600 \times 700\text{m}^2$, INCA II utiliza las señales de este nuevo arreglo, que consiste de 12 detectores de $2 \times 2\text{m}^2$ y 37 detectores de $1 \times 1\text{m}^2$ (figura 1).

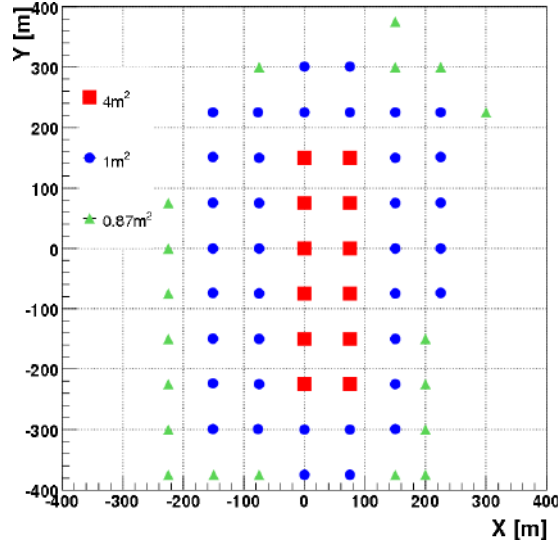


FIG. 1.— Nuevo arreglo experimental de BASJE. INCA II emplea los detectores de 4 m^2 y de 1 m^2 .

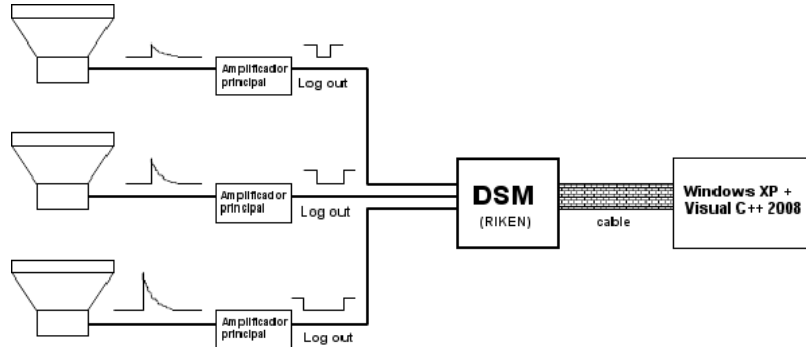


FIG. 2.— Arreglo experimental de INCA II, sistema de adquisición de datos.

3. SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS

Para el registro del conteo de partículas fue diseñado un detector - monitor multicanal llamado BASJE - INCA Detector Spectrum Monitor (DSM) (Tsunesada & Tajima 2009). Este dispositivo tiene 64 canales de entrada y mide los conteos de las señales con 8 discriminadores (bins) cada 10 segundos para los 49 detectores.

La señal proveniente de un detector es preamplificada de modo que genera pulsos de la forma exponencial $V_N(t) = NV_1 \exp(-t/\tau)$, donde N es el número de partículas y V_1 es el voltaje de salida en el caso de una partícula, τ el tiempo de decaimiento. Luego la señal es amplificada generando señales rectangulares “Log out” de manera que el contador DSM fue diseñado para este tipo de señales. El número de partículas en el detector o densidad local es medido a partir del ancho de pulso. El ancho del pulso de la salida de un discriminador es logarítmicamente proporcional al altura del pulso de la señal exponencial y así al número de partículas.

El tiempo de decaimiento (τ) del pulso exponencial de un amplificador es de alrededor $1.2\mu\text{s}$ y cada detector es calibrado de modo que el “Log out” tenga un ancho $T_o = 0.8\mu\text{s}$.

Por cada detector se tienen 8 contadores de

diferentes ancho de pulso, con valores menores a $0.5, 1.0, 2.2, 3.3, 4.5, 5.6, 6.8$ y $7.9\mu\text{s}$. Los registros son llevados a cabo cada 10segundos , el conteo a partícula individual de un detector de 4m^2 es de $20000/10\text{s}$ y $5000/10\text{s}$ para uno de 1m^2 .

Para el registro de datos del DSM se emplea una computadora con *Windows XP* y un software diseñado en *Visual C++ 2009 Express Edition*. Los datos del DSM están escritos en formato binario. Un dato (cada 10segundos) incluye el tiempo en *Día Juliano Modificado*, temperatura, presión y los conteos de los 49 detectores con sus respectivos 8bins .

4. SENSIBILIDAD DE INCA II

Los GRBs pueden ser observados con un arreglo de detectores (en nuestro caso de centelleo) a grandes altitudes, detectando las partículas secundarias de chubascos puramente electromagnéticos desarrollados en la atmósfera. A fin de evaluar la sensibilidad de INCA II a la detección de GRBs en el rango de energías $1\text{GeV} - 1\text{TeV}$, se realizó una simulación Monte Carlo, empleando el paquete CORSIKA (CORSIKA 2010). Para este propósito se ha escogido una combinación entre el modelo de interacciones hadrónicas a bajas energías como GHEISHA y un modelo de interacciones hadrónicas a altas e-

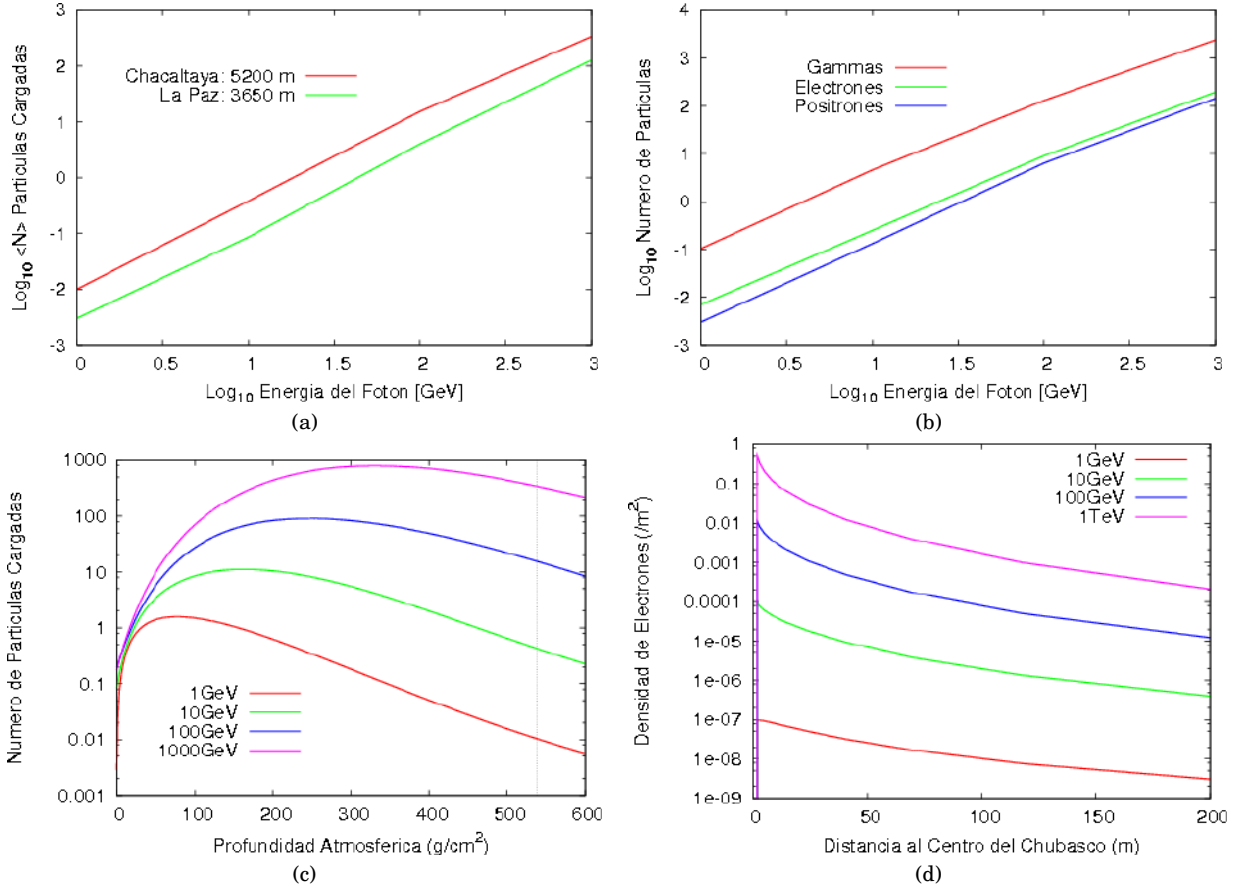


FIG. 3.— (a) Número medio de partículas cargadas alcanzando los niveles de 5200m y 3500m, generados por un fotón primario con incidencia vertical en la atmósfera, en función de la energía del fotón. (b) Partículas secundarias generadas al nivel de Chacaltaya. (c) Desarrollo longitudinal de partículas cargadas descrita por la función de Gaisser-Hillas. (d) Distribución lateral de electrones dado por la función NGK.

nergías como QGSJETII, debido a que el primero trata con energías menores de 80GeV y el segundo con energías mayores a 10^{11}eV ; también las opciones EGS4 y NGK fueron incluidas para la simulación de chubascos puramente electromagnéticos.

4.1. Distribuciones de Partículas

Las simulaciones fueron ejecutadas, inicialmente, para fotones primarios con incidencia vertical (ángulo cenital $\theta = 0^\circ$), con índice espectral $\alpha = 2$ que toma en cuenta la absorción en el espacio intergaláctico a través de la producción de pares (Vernetto 2000). Con el objeto de comparar la sensibilidad a grandes altitudes, en la figura 3a se muestran las distribuciones de partículas cargadas en función de la energía del fotón primario a 5200m.s.n.m. y 3500m.s.n.m. ; en la figura 3b también se muestran las distribuciones de partículas secundarias producidas al nivel de Chacaltaya.

En la figura 3c se muestra la distribución longitudinal del número medio de partículas cargadas para las energías de 1GeV , 10GeV , 100GeV y 1TeV , descritas por la función de Gaisser-Hillas, que tiene la forma:

$$N(t) = N_{max} \left(\frac{t - X_o}{X_{max} - X_o} \right)^{\frac{X_{max} - X_o}{\sigma}} \exp\left(-\frac{X_{max} - t}{\sigma}\right) \quad (1)$$

Donde $N(t)$ es el número de partículas como función de la profundidad atmosférica t , X_o la profundidad en la primera interacción y σ el camino libre medio de interacción. Por otro lado en la figura 3d se muestra la distribución lateral de Nishimura-Kamata-Greisen (NKG) para electrones.

4.2. Evaluación de la Sensibilidad

La evaluación de la sensibilidad a la detección de GRBs depende de diferentes parámetros del GRB. Considerando la ecuación diferencial del espectro de energías de los GRBs (Castellina & et al. 1997), dado por:

$$\frac{dN}{dE} = kE^{-\alpha} \left[\frac{\text{fotones}}{\text{cm}^2 \text{s GeV}} \right], \quad (2)$$

extendiéndose desde 1GeV hasta una energía de corte E_{max} con un tiempo de duración Δt . Entonces el número de eventos del GRB es dado de la siguiente forma:

$$N_s = k\Delta t \int_{1\text{GeV}}^{E_{max}} A_{eff}(E) E^{-\alpha} dE \quad (3)$$

Donde A_{eff} es el área efectiva del detector.

4.2.1. Area Efectiva

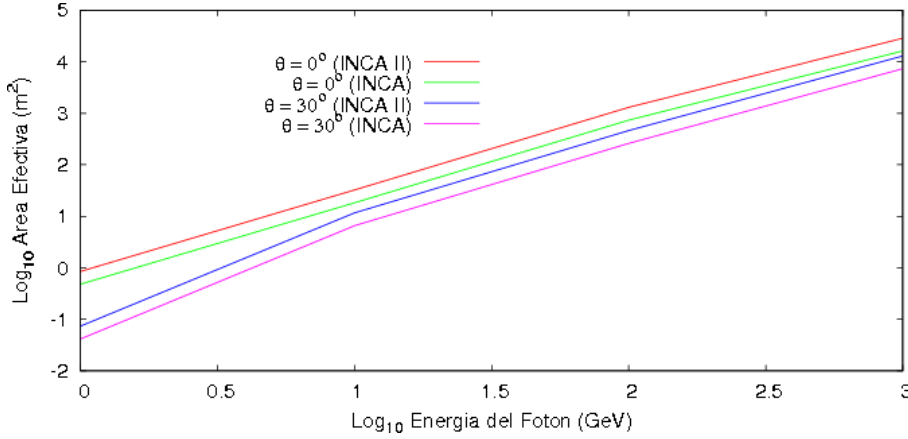


FIG. 4.— Area efectiva de INCA II comparada a INCA, como función de la energía del fotón para dos ángulos cenitales θ .

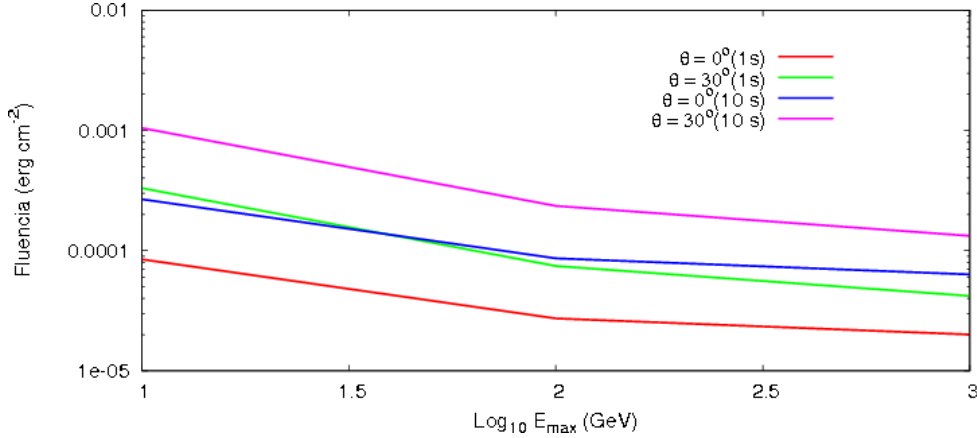


FIG. 5.— Mínima fluencia de energía que INCA II puede observar en el rango $1\text{GeV} < E < E_{max}$, en función de la máxima energía del espectro E_{max} para un GRB de una duración $\Delta t = 1\text{s}$ y 10s , para dos ángulos cenitales.

De acuerdo al análisis estadístico dado por Castellina & et al. (1997) en área efectiva del detector A_{eff} , esta dada por:

$$A_{eff}(E, \theta) \approx A_d \cdot \bar{N}_e(E, \theta) \cdot \cos\theta, \quad (4)$$

donde A_d es el área total de detección, (\bar{N}_e) el número medio de partículas cargadas por un fotón primario de energía E alcanzando el nivel de observación y θ el ángulo de incidencia. Puesto que INCA II trabaja con la técnica de las partículas individuales con 49 centelladores, 12 de 4m^2 y 37 de 1m^2 , podemos calcular el área efectiva total como:

$$A_{eff} = 85 \cdot \bar{N}_e(E, \theta) \cdot \cos\theta \quad (5)$$

La figura 4 muestra el área efectiva de INCA II comparada a INCA para GRBs con incidencia vertical y un ángulo cenital de 30° . El área efectiva de INCA II es 1.8 veces más sensible que INCA.

5. SEÑAL DEL GRB

Con la técnica de las partículas individuales, una señal proveniente de un GRB, es detectable con una significancia estadística de $n = 4$ desviaciones estándar. El número de partículas N_s tiene que ser significativamente mayor al fondo de fluctuaciones estadísticas $\sigma_b = \sqrt{A_d B \Delta t}$, donde B es el fondo de

cuentas y Δt el tiempo de duración del GRB, así $N_s/\sigma_b > n$. Para los siguientes cálculos es necesario mencionar que el conteo de fondo de partículas a 5200m.s.n.m. es $B = 500$ cuentas $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$, y para determinar el valor mínimo del coeficiente k del espectro de energía de los GRBs, se establece $n = 4$ y hallamos la siguiente relación:

$$k\Delta t \int_{1\text{GeV}}^{E_{max}} A_d \bar{N}_e(E, \theta) \cos\theta E^{-\alpha} dE = 4\sqrt{A_d B \Delta t} \quad (6)$$

5.1. Fluencia de Energía

Para la evaluación de la mínima fluencia de energía que INCA II puede observar, asumimos que el flujo de rayos gamma en la atmósfera es descrito como en (2) en el rango de energía de $1\text{GeV} \div E_{max}$,

$$F = k\Delta t \int_{1\text{GeV}}^{E_{max}} E^{-\alpha+1} dE \quad (7)$$

La figura 5 muestra la mínima fluencia de energía para un GRB detectable, con una duración de $\Delta t = 1\text{s}$ o 10s como función de E_{max} , para dos ángulos cenitales. Con el nuevo arreglo de INCA II la mínima fluencia $F(E > 1\text{GeV})$ es del orden de $10^{-5}\text{erg} \cdot \text{cm}^{-2}$.

6. ANÁLISIS DE DATOS

6.1. Estabilidad de los Detectores

Debido a la naturaleza probabilística del registro de partículas provenientes de un chubasco atmosférico extenso, en un futuro análisis de eventos de GRBs es necesario determinar si los detectores muestran estabilidad.

En las figuras 6 y 7 se muestran las distribuciones de cuentas (de un día) de los detectores *L00*, *S00* y *G00* con sus *8bins* o discriminadores. El ajuste realizado muestra que todos exhiben una distribución muy cercana a una función normal. El análisis se realizó para los 49 y todos se ajustan a tal función, con una bondad de ajuste: $0.90 < r^2 < 0.98$.

6.2. Registros de Cuentas

En la figura 8 se muestran los registros durante 10 días sin la corrección por la presión, de los detectores *S*, *G* y *L*, en el bin 0. A fin de no saturar los gráficos con muchos datos (debido a los 49 detectores), se muestran solo algunos registros de los mismos.

6.3. Búsqueda de un GRB

En principio, el análisis de datos consiste en la búsqueda de excesos significativos sobre el fondo de registros de los detectores en coincidencia con aquellos que son registrados por los satélites (GRBOX 2010).

Debido a fallas técnicas, como cortes inesperados de energía, rayos o ruido, lamentablemente para muchos eventos registrados por los satélites que se encuentran justamente dentro del ángulo de visión de Chacaltaya, no se tienen los registros en aquellos días, pero al menos existen 2 registros completos, para analizar posibles eventos significativos debido a GRBs.

En particular se ha analizado el registro disponible para el evento de *GRB101017A*, que tuvo una duración de 70 segundos, su inicio a 10:32:47 y con una posición de 291.377 (Ascensión Recta) y -35.141 (Declinación).

Para establecer alguna correlación con este evento, se realizaron sobre los registros, básicamente el siguiente análisis:

- La corrección por la presión de los 49 registros.
- Los contajes fueron normalizados al segundo y al metro cuadrado.
- Se eliminaron los intervalos donde el contaje sufre una caída o es interrumpida en algún punto.
- Los contajes de cada detector fueron sumados, para obtener la distribución total de cuentas versus el tiempo, donde se busca la señal del GRB.
- Empíricamente se buscó si hubo alguna señal en coincidencia (en el tiempo) con el evento.

- Se realizó un análisis de distribuciones de fluctuaciones estadísticas alrededor de 20 minutos entorno al intervalo de tiempo del GRB, del número de cuentas versus la desviación estándar, para los *8bins* de cada detector en la distribución total de contaje.

Las figuras 9 y 10 muestran las distribuciones mencionadas anteriormente, las curvas se ajustan a distribuciones de Gauss, con *r.m.s.* en el intervalo de 1.01 y 1.20. Se concluye que no se detectó ningún evento significativo en ninguno de los 8 discriminadores (en los gráficos se muestran solamente los primeros 4), porque no se ha encontrado alguna fluctuación mayor a 4 sigmas (desviación estándar), que permitiría confirmar una correlación con el evento detectado por el satélite.

6.4. Límites en la Fluencia de Energía

Finalmente se realizó un análisis para determinar los límites en la fluencia de energía del experimento durante el año 2010, es decir se seleccionaron los 13 eventos de GRBs (GRBOX 2010), aquellos que tienen ángulos zenitales menores a 60 grados. Las fluencias han sido calculadas como se describe en la sección 5, con 4 desviaciones estándar, suponiendo que el espectro del GRBs se extiende desde la región de 1GeV hasta 1TeV con un índice espectral de $\alpha = 2$. En la figura 11a se muestran los límites que, se extiende desde $10^{-5}\text{erg}\cdot\text{cm}^{-2}$ hasta $10^{-1}\text{erg}\cdot\text{cm}^{-2}$, dependiendo del ángulo zenital y el tiempo de duración del evento. Se observa que la tendencia es similar a aquella que fue reportada por INCA (Castellina & et al. 2001) (figura 11b).

7. CONCLUSIONES

A partir de las simulaciones con el paquete CORSIKA se han obtenido la distribución de partículas secundarias que se producen al nivel de observación generadas por el chubasco electromagnético del rayo gamma primario, a partir de ello se ha determinado la sensibilidad del experimento a los GRBs, calculando básicamente el límite en la fluencia de energía y el área efectiva del experimento para el rango de energía que se pretende estudiar de 1GeV hasta 1TeV . Se ha visto que INCA II es 1.8 veces más sensible que el pasado experimento INCA.

La distribución de contaje de todos los detectores con sus *8bins* respectivos se ajustan a la curva de gaus, que en promedio muestra una buena estabilidad de los detectores en el tiempo, excepto cuando existen cortes inesperados, ruido o rayos. Se ha estudiado solo un evento de GRB, debido a que se contaba con muy pocos registros para analizar en correlación con lo registrado por los satélites. Con la técnica de la búsqueda de anomalías estadísticas, se han buscado sobre los registros alguna señal que supere 4 desviaciones estándar y también alguna fluctuación significativa alrededor de 20 minutos del evento de GRB, y no se ha encontrado ningún exceso significativo (figuras 9 y 10).

Finalmente se ha comparado la distribución de

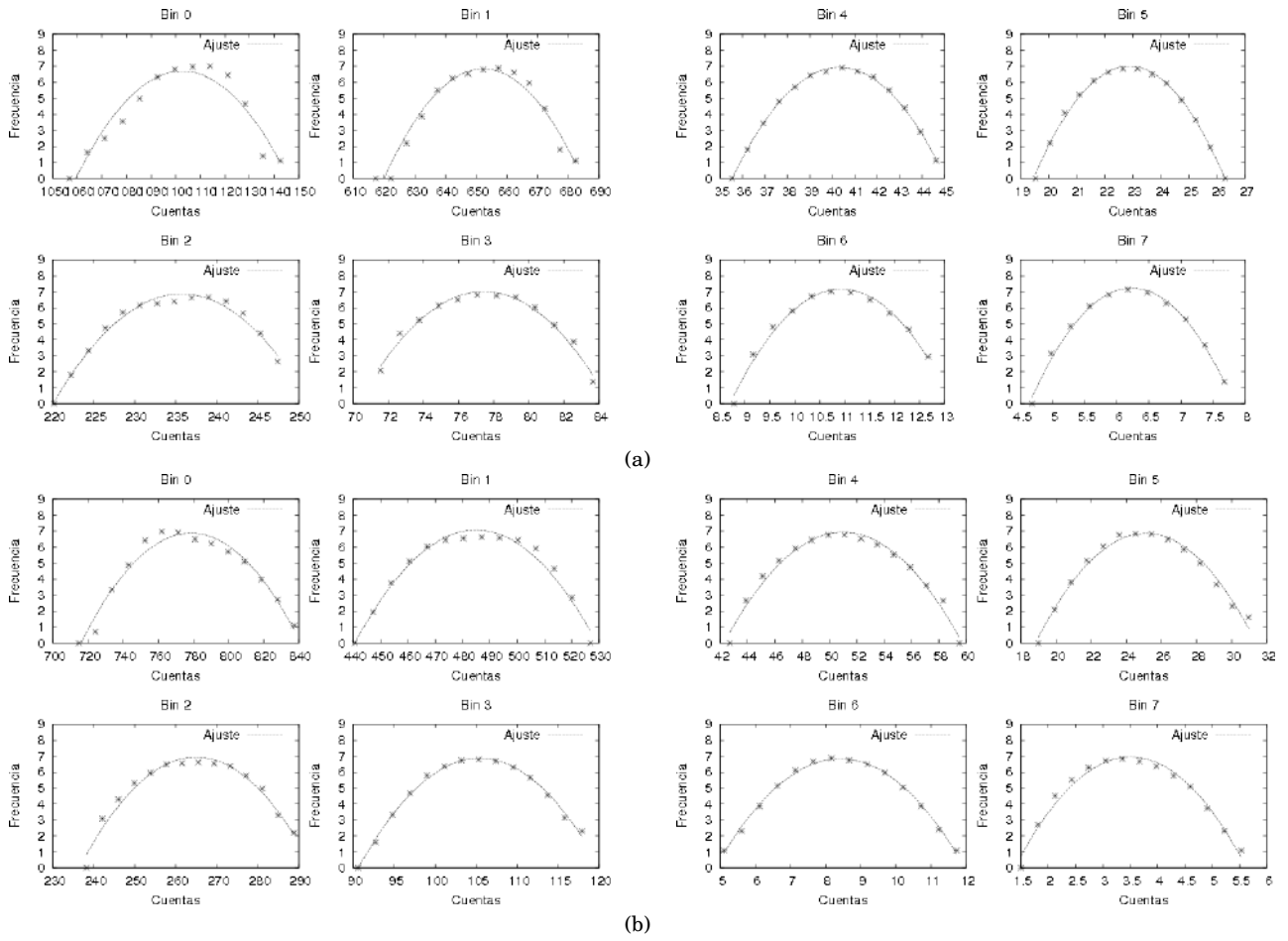


FIG. 6.— Distribuciones de conteaje a lo largo de un día de los detectores (a) $L00$ y (b) $S00$ para los $8bins$. Todos se ajustan a una función normal.

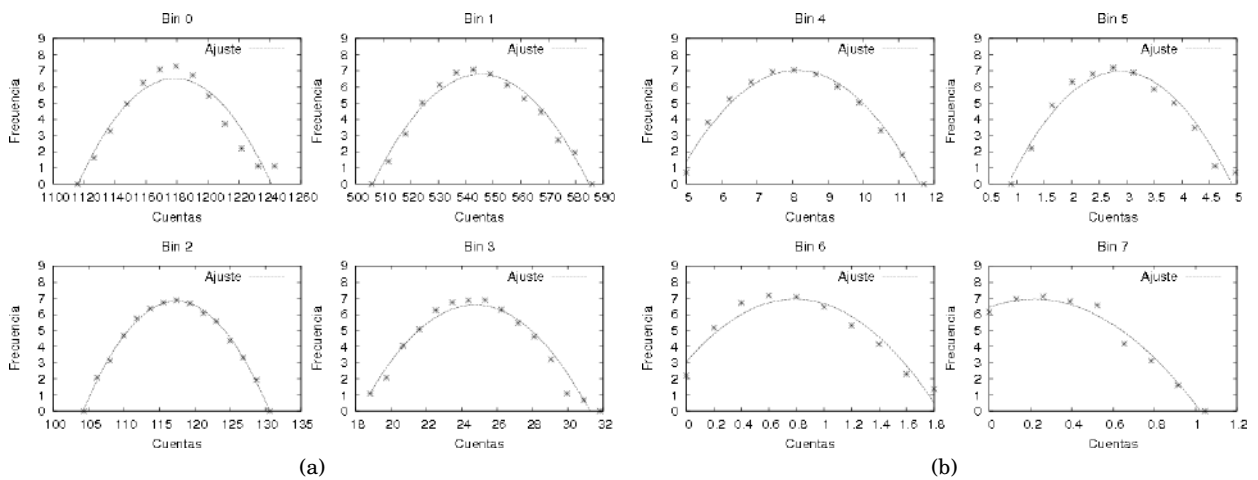


FIG. 7.— Distribuciones de conteaje a lo largo de un día del detector $G00$ para los $8bins$.

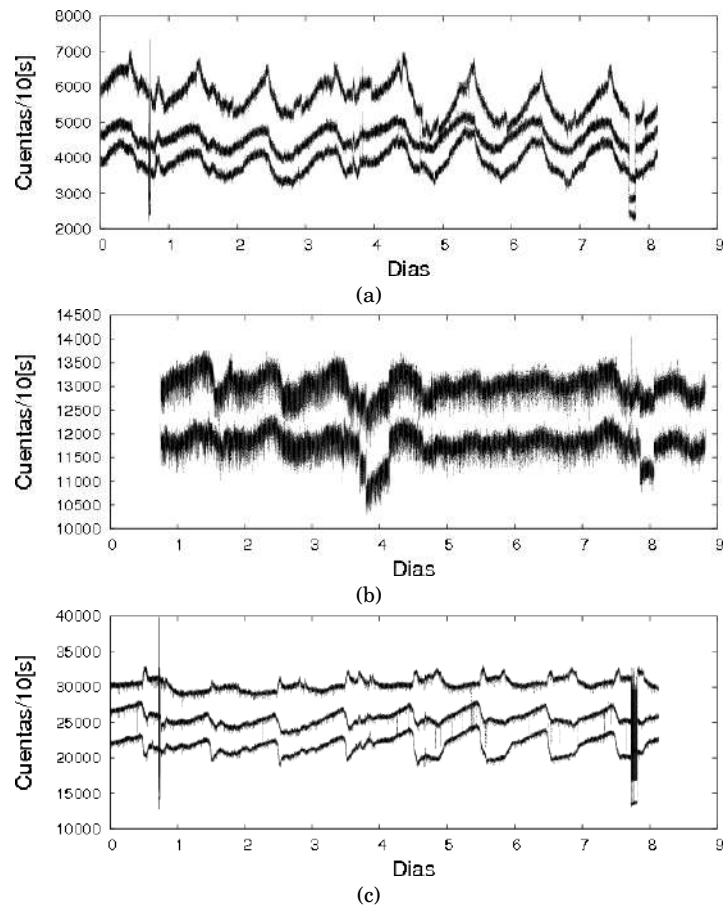


FIG. 8.— Variación temporal durante 10 días de los detectores (a) *S*, (b) *G* y (c) *L*.

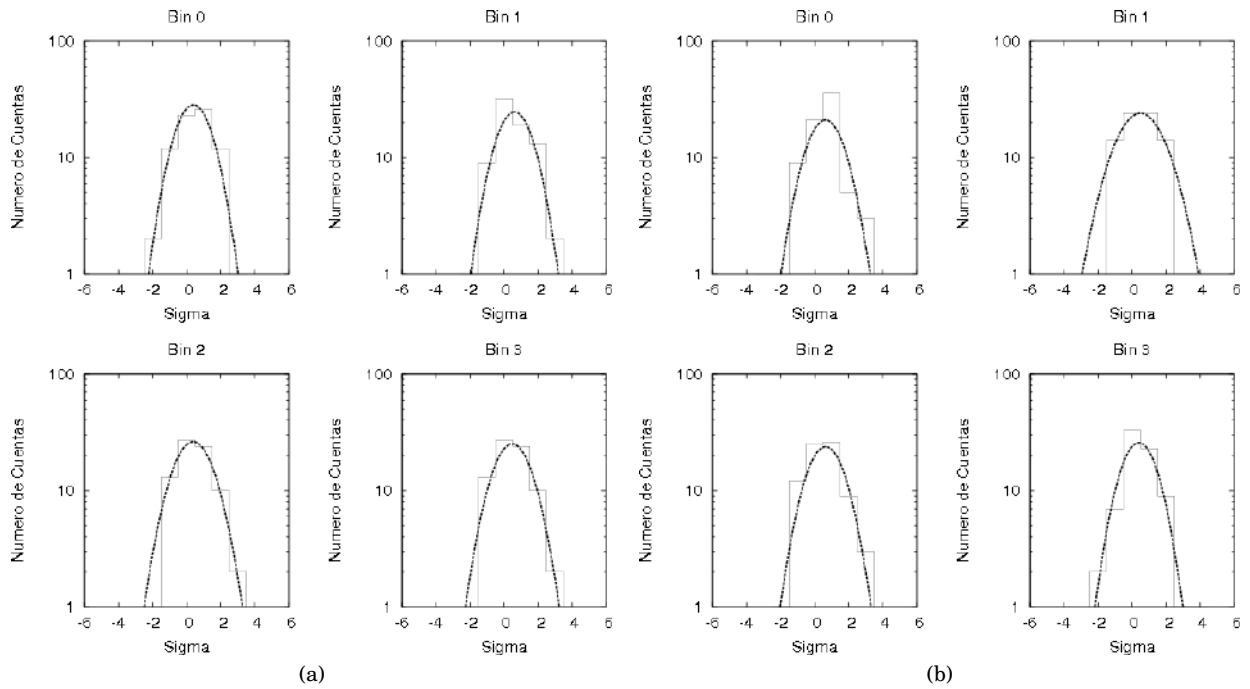


FIG. 9.— Análisis para la búsqueda de alguna fluctuación estadística generada por el GRB mayor a 4 desviaciones estándar (sigma) para los detectores (a) *L*, (b) *G*, para los 4bins.

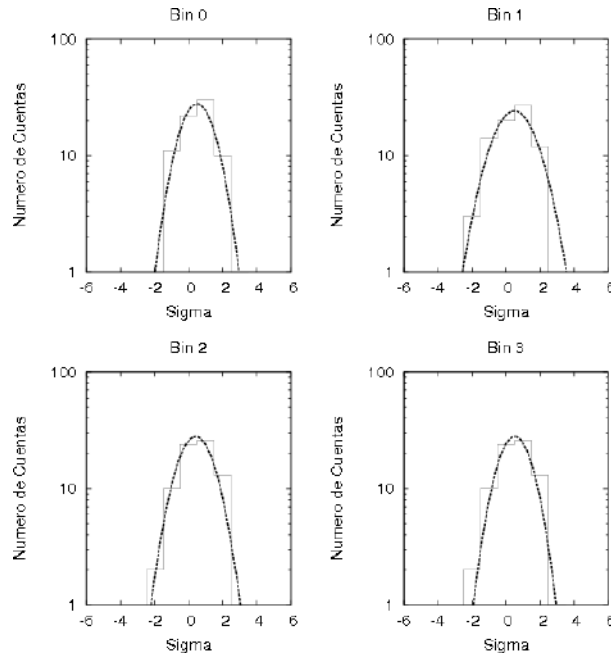


FIG. 10.— Análisis para la búsqueda de alguna fluctuación estadística generada por el GRB mayor a 4 desviaciones estándar (sigma) para el detector *S*, para los 4bins.

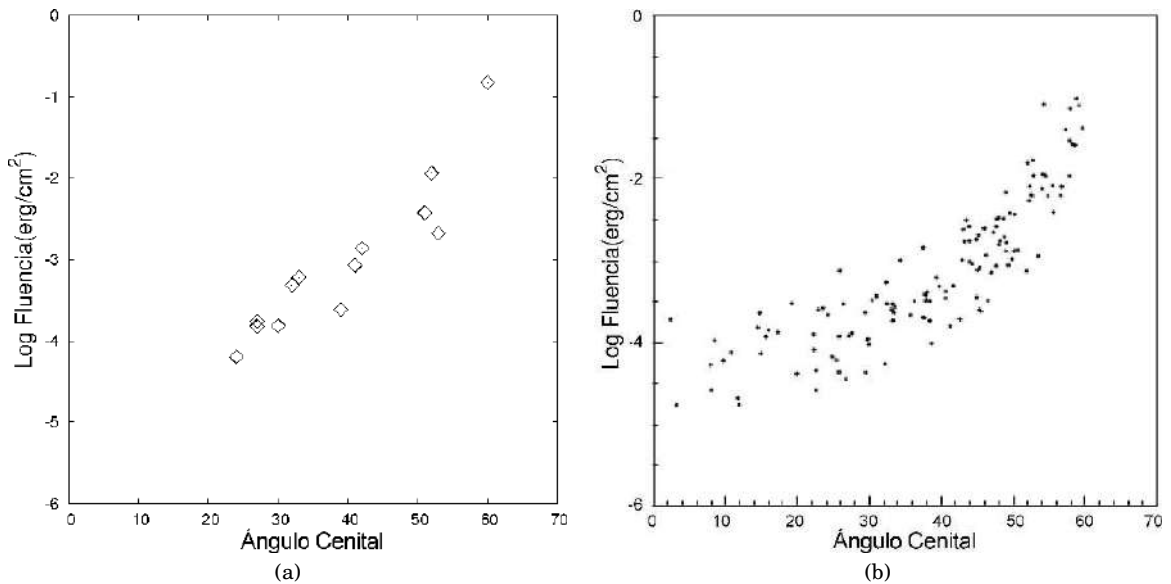


FIG. 11.— Límites de la fluencia de la energía en el rango de energía de $1\text{GeV} - 1\text{TeV}$ para (a) INCA II para 13 GRBs y (b) INCA de 135 GRBs, como función del ángulo zenital del evento.

la fluencia de la energía para 13 GRBs que ocurrieron en el campo de visión de Chacaltaya, con la distribución del pasado experimento INCA, se ha visto que la tendencia es similar y además el límite superior de la fluencia determinado por simulación (figura 5) de $10^{-5}\text{erg}\cdot\text{cm}^{-2}$ es similar a aquel que se calcula con datos experimentales (figura 11a).

AGRADECIMIENTOS

W. Chamani agradece a los profesores Oscar Saavedra, Yoshiki Tsunesada y Johannes Knapp por sus útiles comentarios y sugerencias y a los ingenieros Norio Tajima y Pedro Miranda por su valioso apoyo en el arreglo experimental.

REFERENCIAS

Cabrera, R. & et al. 1999, *Astron. Astrophys. Suppl.*, 138
 Castellina, A. & et al. 1997, *Il Nuovo Cimento*, 20C 2, 137
 —. 2001, ICRC
 CORSIKA. 2010, <http://www-ik.fzk.de/corsika/>
 GRBOX. 2010, <http://lyra.berkeley.edu/grbox/grbox.php>

Tsunesada, Y. & Tajima, N. 2009, *BASJE-INCA Detector Spectrum Monitor (IIF - UMSA)*
 Vernetto, S. 2000, *Astroparticle Physics* 13

SIMULACIÓN DEL PROBLEMA DE N CUERPOS CARGADOS: EL ÁTOMO CLÁSICO

SIMULATION OF THE N CHARGED BODIES PROBLEM: THE CLASSICAL ATOM

V. M. PEÑAFIEL[†]

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639
La Paz – Bolivia

(Recibido: 22 de julio de 2011; aceptado: 25 de agosto de 2011)

RESUMEN

Un conjunto de rutinas computacionales, diseñado para calcular y visualizar -en tiempo real- las trayectorias de N cuerpos cargados y urgidos, en consecuencia, por fuerzas electromagnéticas de tipo Coulomb-Abraham-Lorentz, ha sido empleado en la solución explícita y completa de la ecuación de movimiento del “átomo clásico”. El código encargado de evaluar el efecto de tales interacciones es de particular interés, obviamente, por contener el término de radiación por desaceleración, proporcional a la derivada temporal de la aceleración y sujeto de recelo por su difícil tratamiento analítico e interpretación. Los resultados permiten representar gráficamente las trayectorias y obtener una estimación razonable del “tiempo de colapso” de este sistema.

Descriptores: radiación de cargas en movimiento — técnicas computacionales y simulaciones — electrodinámica clásica

Código(s) PACS: 41.60.-m, 02.70.-c, 03.50.De

ABSTRACT

A set of computational routines has been employed for calculating in real time the trajectories of N charged bodies which are acted upon by electromagnetic forces of the Coulomb-Abraham-Lorentz type. These routines yield the complete solution of the motion equation for the “classical atom”. The computer code that evaluates the interaction effect is interesting in itself because it contains the radiation damping term, which is proportional to the time-derivative of the acceleration; this is often a cumbersome analytical and interpretational task. The results permit the graphical representation of the trajectories and, a reasonable estimate of the “collapse time”.

Subject headings: radiation by moving charges — computational techniques and simulations — classical electrodynamics

1. INTRODUCCIÓN

La capacidad de los computadores actuales permite ya cierta sofisticación en el cálculo y despliegue gráfico de sistemas complejos, como el problema de N cuerpos eléctricamente cargados, el cual puede ser simulado en tiempo real para un apreciable número de componentes. Se ha diseñado, al efecto, una serie de rutinas (ensamble 32) de las cuales, en el presente trabajo, interesa sólo la que evalúa las ecuaciones de movimiento; aplicándola al caso de dos partículas con cargas y masas propias del protón y el electrón, sistema conocido en la literatura como el “átomo clásico”.

Un procedimiento rápido (y obvio) de estimar el

tiempo que tardaría un electrón en caer sobre el protón en un átomo, clásicamente tratado, es el de recurrir a la fórmula de Larmor para un dipolo rotatorio

$$\langle P \rangle = \frac{2r^2 e^2 \omega^4}{3c^3} = -\frac{dU}{dt}$$

y combinarla con las variables obtenidas para una trayectoria circular:

$$mr\omega^2 = \frac{e^2}{r^2}$$
$$U = E = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}$$

para obtener, con $r_0 = e^2/mc^2$ (radio clásico del

[†]vmiguel@fiums.edu.bo

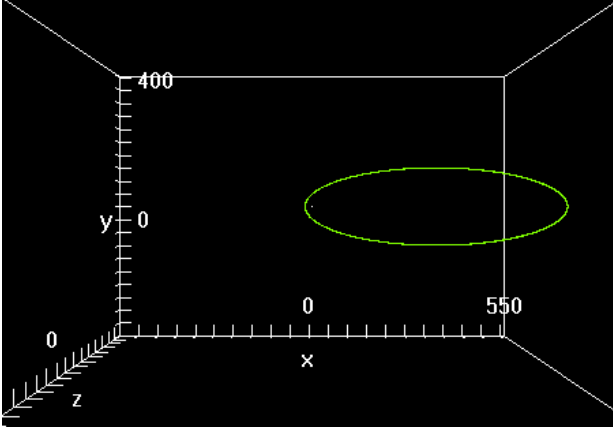


FIG. 1.— Trayectoria elíptica estable: 20000 puntos calculados con únicamente la fuerza de Coulomb.

electrón),

$$\frac{dr^3}{dt} = -4cr_0^2.$$

Integrada ésta desde r_B (radio de Bohr), para $t = 0$, hasta 0 para $t = t_{colapso}$, queda, usando las magnitudes usuales,

$$t_{colapso} = \frac{r_B^3}{4cr_0^2} = 1.6 \times 10^{-11} [s]. \quad (1)$$

Otra manera de estimar este “tiempo de colapso” es, por supuesto, la de resolver completamente las ecuaciones de movimiento para tal sistema. En lo que sigue, se describirá la respectiva solución numérica, orientada a ese propósito. Simultáneamente, los resultados obtenidos sirven para validar la aproximación del esquema simulador.

2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

En un sistema aislado con N partículas cargadas, despreciando las interacciones gravitacionales, actúan las fuerzas de Coulomb y las de Abraham-Lorentz; el conjunto se puede escribir:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{ij} &= k'_1 q_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}, \\ \vec{B}_{ij} &= k'_2 q_j \frac{\vec{v}_j \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}, \\ \vec{F}_{ij} &= q_i [\vec{E}_{ij} + \vec{v}_i \times \vec{B}_{ij}], \\ m_i \vec{a}_i &= \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} + k'_3 q_i^2 \frac{d\vec{a}_i}{dt}; \end{aligned} \quad (2)$$

siendo

$$k'_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9 \left[\frac{Nm^2}{C^2} \right],$$

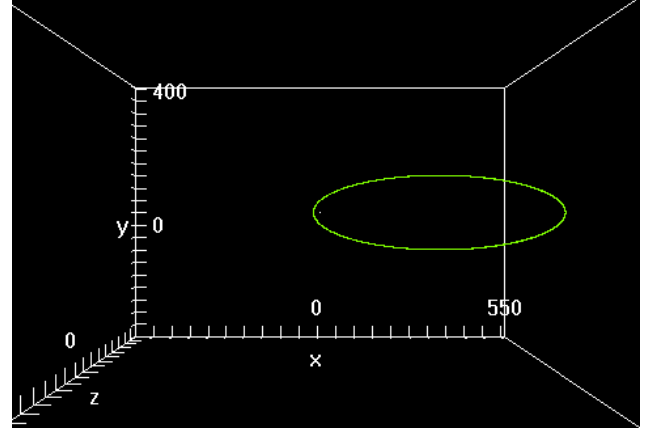


FIG. 2.— Trayectoria elíptica estable: 20000 puntos calculados con las fuerzas de Coulomb y Lorentz. Casi indistinguible de la que aparece en el fig. 1

$$k'_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \left[\frac{Ns}{A^2} \right],$$

$$k'_3 = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} = 2.224 \times 10^{-16} \left[\frac{Ns}{A^2 m} \right].$$

El hecho de que, al margen de las variables, las constantes cubren un intervalo de 25 órdenes de magnitud no es relevante para la simulación pues las magnitudes de unas y otras pueden ser dimensionadas internamente; sin embargo, el propósito inmediato aquí es el de verificar la corrección de las soluciones de la ec. (1); entonces, para un tratamiento numérico apropiado es necesaria la renormalización en el siguiente sentido:

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i \times 10^{-\alpha}; \quad t \rightarrow t \times 10^{-\beta},$$

de modo que, agrupando las potencias de 10, una vez que los valores numéricos de todas las magnitudes relevantes (como $q = e = 1.602 \times 10^{-16}$) han sido incluidas en las ecuaciones de movimiento (y absorbidas en las constantes auxiliares k''_1, k''_2 y k''_3), se tiene

$$m_i \vec{a}_i = k''_1 \times 10^{2+3\alpha-2\beta} \vec{E}'_i + k''_2 \times 10^{\alpha-14} \vec{B}'_i + k''_3 \times 10^{\beta-23} \dot{\vec{a}}_i.$$

Elijiendo $\alpha = 13$ y $\beta = 19$, se obtiene un esquema numéricamente más manejable:

$$m_i \vec{a}_i = k_1 \vec{E}'_i + k_2 \vec{B}'_i + k_3 \dot{\vec{a}}_i, \quad (3)$$

con

$$\vec{E}'_i = \sum_{j=1}^N \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}$$

y

$$\vec{B}'_i = \sum_{j=1}^N \frac{\vec{v}_j [\vec{v}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] - (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}.$$

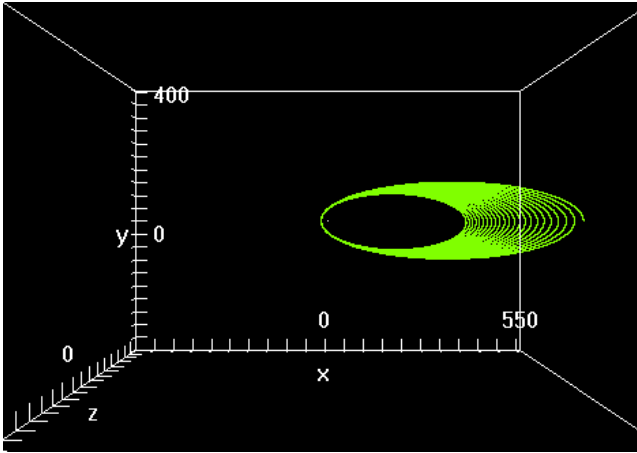


FIG. 3.— 60000 puntos de la trayectoria espiral elíptica descrita por el electrón sometido a la fuerza de Coulomb-Abraham-Lorentz.

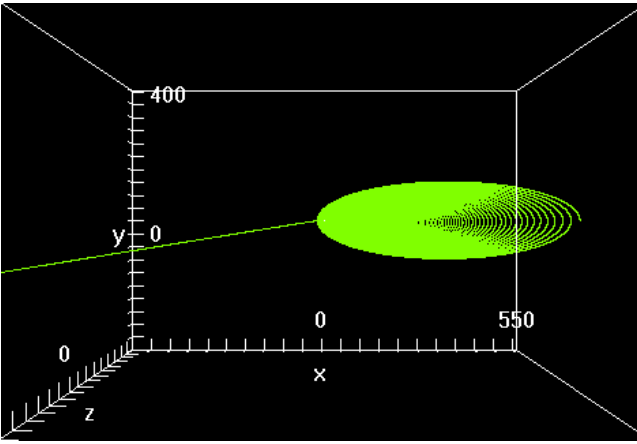


FIG. 4.— Trayectoria espiral elíptica del electrón hasta el punto de colapso. 340000 puntos en total.

Las constantes devienen

$$\begin{aligned} k_1 &= 23063.208 \quad , \\ k_2 &= 0.2566 \quad , \\ k_3 &= 0.0005707 \quad ; \end{aligned}$$

además, puesto que $N = 2$,

$$m_1 = m_p = 16726.217 \quad ; \quad m_2 = m_e = 9.109 \quad .$$

Finalmente, las unidades a emplear durante el cálculo son $[\vec{r}] = [m\text{\AA}]$ (mili angstroms) y $[t] = [das]$ (deci ato segundos).

3. EVOLUCIÓN TEMPORAL DEL ÁTOMO CLÁSICO

La forma de (3) permite “conectar” o “desconectar” cada una de las fuerzas usando el valor inicial de las constantes k o cambiándolo a cero, según el caso. Así, con $k_2 = k_3 = 0$ y los valores iniciales

$$\begin{aligned} x_{10} &= -0.288 & y_{10} &= 0.0 & z_{10} &= 0.0 \\ v_{x10} &= 0.0 & v_{y10} &= -0.000273 & v_{z10} &= 0.0 \\ x_{20} &= 529.2 & y_{20} &= 0.0 & z_{20} &= 0.0 \\ v_{x20} &= 0.0 & v_{y20} &= 0.50 & v_{z20} &= 0.0 \quad , \end{aligned}$$

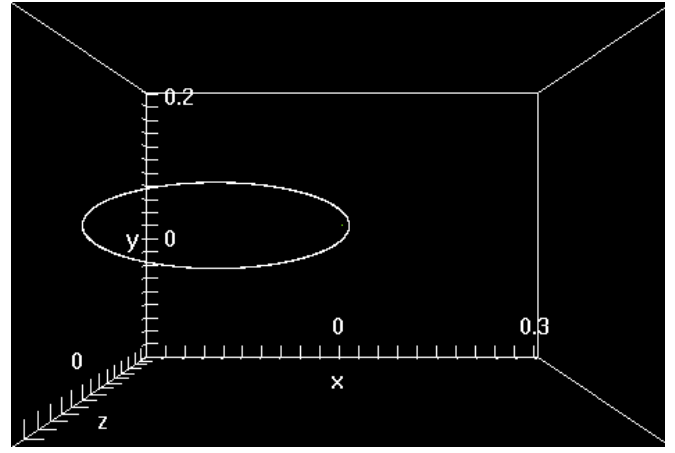


FIG. 5.— Trayectoria elíptica estable de la carga positiva (el protón). Corresponde a los mismos resultados de los que aparecen en la fig. 1 ampliados aproximadamente 1000 veces (ver las escalas de los ejes x, y).

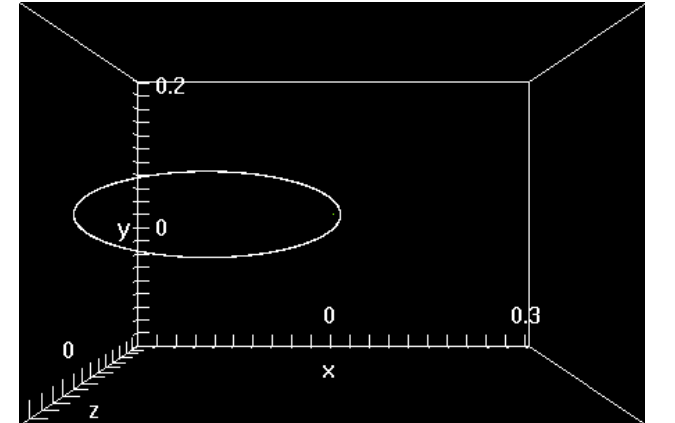


FIG. 6.— Trayectoria elíptica estable del protón afectado por las fuerzas de Coulomb y Lorentz (20000 puntos).

obtenidos fijando el radio inicial del electrón igual al radio de Bohr $x_{20} = r_B = 529.2 [m\text{\AA}]$ y variando gradualmente las velocidades iniciales, se logra -sólo para la interacción coulombiana- órbitas estables (figuras 1 y 5).

Las órbitas del electrón y del protón resultantes de la acción adicional de la fuerza de Lorentz (figuras 5 y 6) son casi indistinguibles de las anteriores (figs. 1 y 2). Las velocidades involucradas no son, inicialmente al menos, suficientemente grandes para que el efecto magnético (una pequeña fuerza atractiva) sea numéricamente significativo.

Ahora, el cómputo de las trayectorias cuando la atenuación radiativa se añade a las anteriores interacciones, se muestra en las figuras 3 y 7, correspondiendo al comportamiento esperado: las dos partículas “caen” espiralmente una hacia la otra.

La evaluación iterativa continuada para la fuerza de Coulomb-Abraham-Lorentz implica el “colapso” del sistema. Cuando la distancia alcanza algún valor pequeño ($\approx 1.4 [m\text{\AA}]$), el algoritmo diverge. Las soluciones espurias se ven en las figuras 4 y 8 en forma de trazos rectos finales (en direcciones opuestas).

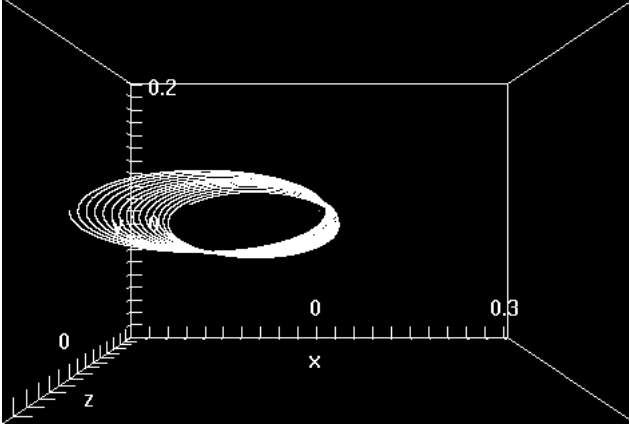


FIG. 7.— Parte de la trayectoria del protón cuando el frenado por radiación es tomado en cuenta.

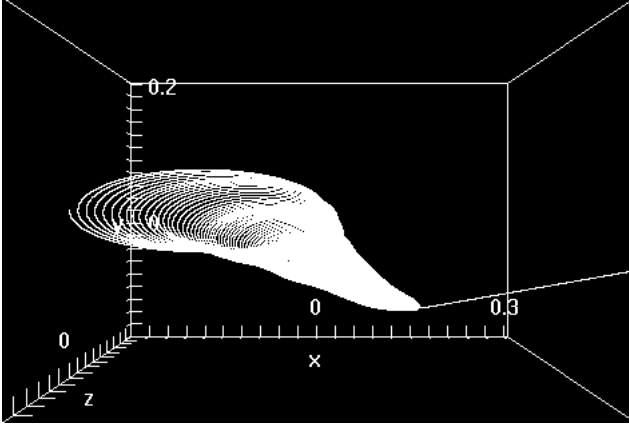


FIG. 8.— Trayectoria espiral del protón (plano $z=0$) hasta el punto de colapso. 340000 puntos.

4. TIEMPO DE COLAPSO

La rutina de cómputo, en cada iteración, determina primero las distancias entre partículas luego, sucesivamente, las componentes cartesianas de las fuerzas de Coulomb y Lorentz usando las expresiones que acompañan a la ec. (3). Para la fuerza de frenado, \vec{a}_i requiere el registro de las aceleraciones previas, de modo que $\vec{a}_i \approx (\vec{a}_{iactual} - \vec{a}_{iprevio})/\Delta t$. Entonces, hasta el primer orden (Euler), $\vec{v}_i = \vec{a}_i \Delta t$ y, posteriormente, $\vec{r}_i = \vec{v}_i \Delta t$. El paso $\Delta t = 0.05[*das*]$ mostró ser suficiente para un comportamiento razonablemente rápido y regular.

Como la evolución de las trayectorias concluye cuando, a distancias pequeñas, la ecuación de movimiento produce soluciones espurias, los valores no regulares deben ser ignorados para, mediante un procedimiento de extrapolación, encontrar el tiempo total para el cual $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = 0$. Ahora, la distancia interparticular oscila entre máximos y mínimos relativos sucesivos; el seguimiento a éstos es, por supuesto, más útil que el registro completo. La figura 3. muestra esas dos envolventes, desde el punto inicial r_B hasta el comienzo de la inestabilidad.

Por otra parte, la figura 10 refleja el tratamiento seguido para encontrar el tiempo de colapso el cual, básicamente, consiste en el ajuste (cuadrados

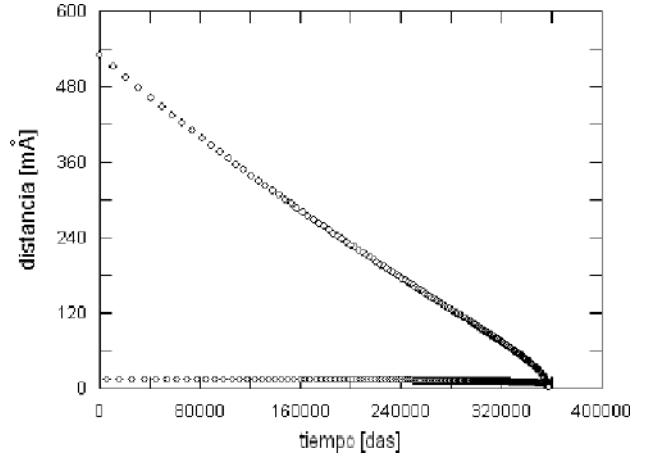


FIG. 9.— Envolvente del registro de las distancias entre las partículas en función del tiempo (sin tomar en cuenta el paso temporal Δt).

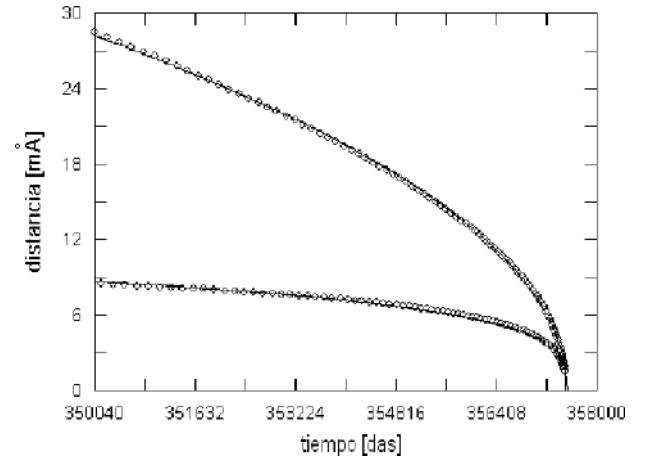


FIG. 10.— Ajuste de la curva $d = a(b-t)^{1/c}$ a los últimos 92 puntos regulares de la gráfica en la fig. 9. Se advierte la proximidad de los ceros de la ecuación, no obstante la gran diferencia en la inclinación de los valores previos de máximos y mínimos relativos.

mínimos) de la función

$$d = a(b-t)^{1/c}$$

a los últimos 92 puntos del registro de máximos y mínimos relativos; esto es,

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
Máximos	0.3656653	357527.42829	2.052633
Mínimos	0.8823065	357503.12226	3.894156

y, claro, los valores interesantes son los que corresponden al parámetro *b* y no todos los dígitos resultan realmente significativos. Basta escribir $t = 3.575 \times 10^5[*das*]$; el tiempo de colapso es esta cantidad multiplicada por el paso temporal Δt , esto es,

$$t_{colapso} = 1.79 \times 10^4[*das*] = 1.79 \times 10^{-15}[*s*]. \quad (4)$$

El valor en (4) es cerca de diez mil veces menor que el de (3). Probablemente la diferencia tiene que ver con la forma de la trayectoria -muy elíptica para (3)- y la presencia de la fuerza de Lorentz, cuya magnitud

crece al aumentar paulatinamente las velocidades de las partículas.

Conviene notar también que, no obstante la curiosa forma de las trayectorias, especialmente la del protón, todo el proceso tiene lugar en el plano $z = 0$, como debe ser en virtud de la conservación del momento angular.

5. CONCLUSIONES

La deducción de la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz (2) y la discusión de sus propiedades aparecen detalladas en varios lugares Jackson (1975), Landau & Lifshitz (1966), Hartemann & Luhmann (1995). La utilidad y el interés del átomo clásico, ya sea para encontrar soluciones estables bajo radiación electromagnética o como límite semiclásico del átomo de Bohr, se refleja en trabajos como Braun (1993) y Uzer et al. (1991).

La solución numérica emprendida aquí, permite comprobar directamente que la atenuación radiativa -proporcional a la derivada de la aceleración- conduce a resultados aceptables cuando su contribución a la ecuación de movimiento es pequeña -casi como una perturbación-. En el caso presente, esta contribución es intrínsecamente menor en ocho órdenes de magnitud respecto de la fuerza dominante (Coulomb); el descenso espiral de la órbita, en-

tonces, se confirma plenamente.

Por otra parte, el ensayo con los valores iniciales lleva a la inferencia de que las órbitas elípticas son mucho más probables que la circular. Por tanto, el tiempo de colapso estimado a partir de la fórmula de Larmor debe ser una especie de cota superior para los tiempos de colapso.

Finalmente, para los fines que motivaron este trabajo, existe confiabilidad en la simulación de un sistema de N cuerpos cargados a condición de que:

- (i) la presencia del término de frenado por radiación se mantenga permanentemente pequeña respecto de las otras fuerzas y
- (ii) se prevea en cada iteración -y para todos los componentes del sistema- una restricción a la aproximación excesiva; ello se logra, sin duda, estipulando expresamente, en el algoritmo, que los N cuerpos deben poseer una extensión finita determinada.

Las rutinas computacionales fueron elaboradas específicamente para un entorno amigable que permita ciertos rangos de variación en los parámetros. Se espera que la versión final esté disponible en la internet Peñafiel (2011).

REFERENCIAS

- Braun, P. A. 1993, *Rev. Mod. Phys.* **65-1**, 115
 Hartemann, F. V. & Luhmann, N. C. 1995, *Phys. Rev. Lett.* **74-7**, 1107
 Jackson, J. D. 1975, *Classical Electrodynamics* (Second Edition, John Wiley and Sons, Inc.)
 Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 1966, *Teoría Clásica de los Campos* (Reverté S.A.)
 Peñafiel, V. M. 2011, <http://www.fiumsa.edu.bo>
 Uzer, T., Farrelly, D., Milligan, J. A., Raines, P. E., & Skelton, J. P. 1991, *Science* **253**, 42

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES POR EL MÉTODO MONTE CARLO

SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THE MONTECARLO METHOD

FRANZ SUXO MAMANI[†]

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639
La Paz – Bolivia

(Recibido 26 de agosto de 2011; aceptado 5 de septiembre de 2011)

RESUMEN

Se obtiene soluciones de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) como ser la ecuación de Laplace para una región plana irregular y la ecuación del calor para una región plana circular y regular. Para ello se utiliza el método Monte Carlo a fin de simular paseos aleatorios que se realizan en regiones discretizadas que resultan de las EDP desarrolladas en diferencias finitas. La forma de discretización limita las direcciones de paso entre los nodos de la región y a la vez asigna probabilidades de transición entre dichos nodos. La idea de la metodología es que para determinar el valor de un nodo (i.e., la solución de un punto de la región discretizada) se lanza varias partículas desde el nodo y se las hace evolucionar de acuerdo a las probabilidades de transición hasta que choquen con el borde de la región discretizada, terminando así el paseo aleatorio; este borde constituye la condición de contorno de las EDP. Se presentan los resultados para la ecuación del calor en una placa delgada para seis instantes; los resultados de la ecuación de Laplace se presentan mediante dos situaciones físicas distintas: una membrana elástica delgada estacionaria y la distribución estacionaria de temperatura en una placa delgada.

Descriptores: técnicas computacionales y simulaciones — métodos de diferencias finitas — aplicaciones de métodos de Monte Carlo

Código(s) PACS: 02.70.-c, 02.70.Bf, 02.70.Uu

ABSTRACT

We use the Monte Carlo method to obtain solutions of partial differential equations (PDE) such as the Laplace equation for a flat irregular region and the heat equation for a flat circular and regular region. With this method we simulate random walks in the discrete regions that result from the PDE developed as finite differences. The discretization process limits the possible directions between the region nodes and assigns them transition probabilities. To determine the value of the node (i.e., the solution for a point in the discretized region) we launch from the node several particles and let them evolve according to their probabilities until they reach the boundary region, which is the boundary condition for the PDE. We present the results of this method for the heat equation in a thin board for six different instants. For the Laplace equation the results correspond to two different physical systems: a stationary and elastic thin membrane and the stationary temperature distribution of a thin board.

Subject headings: computational techniques and simulations — finite-difference methods — applications of Monte Carlo methods

1. INTRODUCCIÓN

Problemas físicos de estado estacionario o problemas de evolución temporal son modelados a través de EDP's elípticas y parabólicas respectivamente, estas ecuaciones tienen una difícil solución por métodos

exclusivamente analíticos cuando las condiciones de contorno e inicial no son sencillas, y en muchos casos no es posible encontrar una solución analítica, en especial problemas físicos reales que tienen regiones con una geometría no muy regular.

Existen varios métodos numéricos, como por ejemplo el Método ADI (Press 1995) y el Método de Crank-Nicholson (Kreyszig 2000) que son bastante flexi-

[†]znarf@correo.nu

bles para las condiciones iniciales y condiciones de contorno del problema, estos métodos consisten en desarrollar las EDP's en diferencias finitas y mediante operaciones matriciales obtener la solución. Y en relación a problemas que tienen regiones no tan regulares está el método de elementos finitos, en el que intervienen matrices y ecuaciones integrales¹.

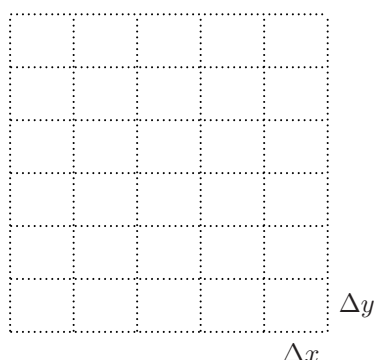
La importancia de la aplicación del método Monte Carlo para resolver EDP's elípticas y parabólicas, radica en que se pueden asociar a un modelo probabilístico artificial de factores aleatorios, transformando el proceso de la solución del problema a simples conteos y promedios.

Un ejemplo sencillo para resolver la Ecuación de Laplace de una región plana cuadrada asociando un modelo probabilístico² se realiza con la siguiente analogía (Sheid 1972). *Un perro que está perdido en un laberinto cuadrado que tiene corredores interiores, en cada intersección escoge una dirección al azar y sigue hasta la siguiente intersección donde escoge de nuevo al azar y así sucesivamente, ¿Cuál es la probabilidad que un perro que parta de una determinada intersección emerja eventualmente por el lado sur?* Según las condiciones de contorno el lado sur tiene el valor de 1 y los restantes lados el valor de 0, y estas intersecciones o probabilidades son la solución del problema.

Entonces, el propósito del presente trabajo es, mostrar una metodología para resolver EDP's a través de dos problemas específicos; la Ecuación de Laplace para una región plana irregular y la Ecuación del Calor para una región plana circular regular.

2. DISCRETIZACIÓN DE REGIONES

Al igual que los métodos numéricos mencionados, la metodología a seguir se basa también en desarrollar las EDP's en Diferencias Finitas, con la finalidad de Discretizar la Región.



Si se considera el Laplaciano $\nabla^2 u$ de una EDP para una Región Plana, su desarrollo en diferencias fini-

¹ Métodos Matemáticos versión 30/1/2008, <http://matematicas.uclm.es/ind-cr/metnum/index.html>

² Se asocia el modelo probabilístico a la Iteración de Gauss-Seidel y la Super-Relajación

tas debe tomar en cuenta la Geometría de la Región (forma de la Frontera).

2.1. Región Rectangular

El Laplaciano de una geometría rectangular se debe discretizar en Coordenadas Rectangulares. Entonces el desarrollo del Laplaciano $\nabla^2 u$ en coordenadas rectangulares es:

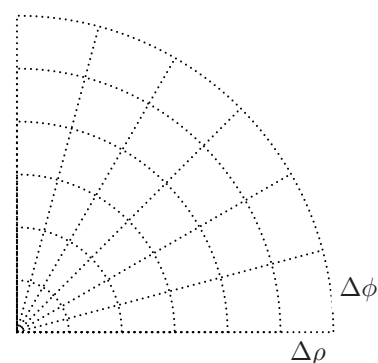
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{U_{(i+1,j)} - 2U_{(i,j)} + U_{(i-1,j)}}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{U_{(i,j+1)} - 2U_{(i,j)} + U_{(i,j-1)}}{(\Delta y)^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\nabla^2 u = \frac{U_{(i+1,j)} + U_{(i-1,j)}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{(i,j+1)} + U_{(i,j-1)}}{(\Delta y)^2} - 2 \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right] U_{(i,j)} \quad (1)$$

2.2. Región Circular

El Laplaciano de una geometría circular se debe discretizar en Coordenadas Polares.



Si tenemos $\rho = i\Delta\rho$ y $\phi = j\Delta\phi$ entonces el desarrollo del Laplaciano $\nabla^2 u$ en coordenadas polares es:

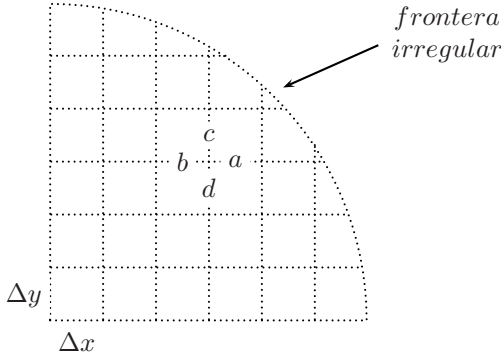
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{U_{(i,j)} - U_{(i-1,j)}}{\Delta \rho} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} &= \frac{U_{(i+1,j)} - 2U_{(i,j)} + U_{(i-1,j)}}{(\Delta \rho)^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} &= \frac{U_{(i,j+1)} - 2U_{(i,j)} + U_{(i,j-1)}}{(\Delta \phi)^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\nabla^2 u = \frac{U_{(i+1,j)}}{(\Delta \rho)^2} + \left(1 - \frac{1}{i}\right) \frac{U_{(i-1,j)}}{(\Delta \rho)^2} + \frac{U_{(i,j+1)} + U_{(i,j-1)}}{(\Delta \rho)^2 (i\Delta \phi)^2} - \frac{1}{(\Delta \rho)^2} \left[2 - \frac{1}{i} + \frac{2}{(i\Delta \phi)^2} \right] U_{(i,j)} \quad (2)$$

2.3. Región Irregular

Una geometría se dice que es irregular cuando las divisiones (Δ 's) no son constantes. Este tipo de geometrías por simplicidad se deberían discretizar en Coordenadas Rectangulares (Si una región circular se desarrolla en coordenadas rectangulares, está región llega a ser una región irregular).



Las distancias a, b y c, d son constantes e iguales a Δx y Δy respectivamente, excepto cerca a la *frontera irregular* en el cual $a < \Delta x$ y $c < \Delta y$. Por tanto, de manera general tenemos: $a, b \leq \Delta x$ y $c, d \leq \Delta y$, entonces el desarrollo del Laplaciano $\nabla^2 u$ de una geometría irregular es:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{2bU_{(i+1,j)} - 2(a+b)U_{(i,j)} + 2aU_{(i-1,j)}}{ab(a+b)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{2dU_{(i,j+1)} - 2(c+d)U_{(i,j)} + 2cU_{(i,j-1)}}{cd(c+d)} \end{aligned} \right\}$$

$$\nabla^2 u = \frac{2bU_{(i+1,j)} + 2aU_{(i-1,j)}}{ab(a+b)} + \frac{2dU_{(i,j+1)} + 2cU_{(i,j-1)}}{cd(c+d)} - 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} \right) U_{(i,j)} \quad (3)$$

Para cualquier región en dos dimensiones sea irregular o no pero que esté desarrollada en coordenadas rectangulares, se utiliza la Ec. (3) de manera general (Véase que la Ec. (1) es un caso especial de la Ec. (3)).

3. PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

Al desarrollar las EDP's en Diferencias Finitas, además de Discretizar la Región, también se pueden obtener Probabilidades de Transición que se tienen entre los nodos de la región.

Para tal objetivo, partimos de la Ec. (4) que es una EDP homogénea que no contiene el término de la función sin derivar $f_{(x,y,z,\dots)}$, sin embargo aún esta ecuación es bastante general al cual se aplica el siguiente teorema que se propone en el presente trabajo.

Teorema. *En el desarrollo en diferencias finitas de cualquier ecuación diferencial parcial donde todos los términos poseen derivadas de primer orden o mayor; puede afirmarse que, el coeficiente del término en el cual se desarrolla la serie es igual al negativo de la suma de coeficientes que ocupan los términos vecinos. Entonces, despejando el término en el que se desarrolla la serie, los coeficientes resultantes de los términos vecinos pueden ser tratables como probabilidades.*

$$\begin{aligned} &\vartheta_{(x,y,z,\dots)} \frac{\partial^n f_{(x,y,z,\dots)}}{\partial x^n} + \beta_{(x,y,z,\dots)} \frac{\partial^{n-1} f_{(x,y,z,\dots)}}{\partial x^{n-1}} + \dots + \gamma_{(x,y,z,\dots)} \frac{\partial f_{(x,y,z,\dots)}}{\partial x} \\ &+ \delta_{(x,y,z,\dots)} \frac{\partial^m f_{(x,y,z,\dots)}}{\partial y^m} + \mu_{(x,y,z,\dots)} \frac{\partial^{m-1} f_{(x,y,z,\dots)}}{\partial y^{m-1}} + \dots + \varphi_{(x,y,z,\dots)} \frac{\partial f_{(x,y,z,\dots)}}{\partial y} + \dots \\ &+ \zeta_{(x,y,z,\dots)} \frac{\partial^r f_{(x,y,z,\dots)}}{\partial x^{r_i} \partial y^{r_j} \partial z^{r_k} \dots} + \eta_{(x,y,z,\dots)} \frac{\partial^{r-1} f_{(x,y,z,\dots)}}{\partial x^{r'_i} \partial y^{r'_j} \partial z^{r'_k} \dots} + \dots + \xi_{(x,y,z,\dots)} \frac{\partial^2 f_{(x,y,z,\dots)}}{\partial x \partial y} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Demostración. De la fórmula de interpolación con diferencias hacia adelante de Gregory-Newton (Kreyszig 2000):

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i f(x_0) \quad x = x_0 + r\Delta x$$

$$\Delta^k f(x_j) = \Delta^{k-1} f(x_{j+1}) - \Delta^{k-1} f(x_j) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Se obtienen las Ecs. (5) que son las derivadas n-

ésimas de la función $f_{(x,y,z,\dots)}$, donde estas ecuaciones llevan una sumatoria de coeficientes binomiales por cada variable que es derivado.

Estas derivadas n-ésimas pueden descomponerse aislando un término determinado de la(s) sumatoria(s), en este caso; cuando $(i = a)$ en la primera y cuando $(i = a \wedge j = b \wedge k = c \wedge \dots)$ en la segunda. Resultando de esta manera las Ecs. (6).

Entonces, al desarrollar alrededor de (x_a, y_b, \dots) la

Ec. (4) en Diferencias Finitas utilizando las Ecs. (6) se obtiene la Ec. (7), donde la función en el punto de desarrollo está despejada (a modo de ilustración solo

se reemplazaron dos términos representativos pero generales; la derivada n-ésima de una variable y la derivada r-ésima cruzada).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^n f(x,y,z,\dots)}{\partial x^n} &= \frac{(-1)^n}{(\Delta x)^n} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(x_i, y, z, \dots) \\ \frac{\partial^n f(x,y,z,\dots)}{\partial x^{n_i} \partial y^{n_j} \partial z^{n_k} \dots} &= \frac{(-1)^n}{(\Delta x)^{n_i} (\Delta y)^{n_j} (\Delta z)^{n_k} \dots} \sum_{i=0}^{n_i} \sum_{j=0}^{n_j} \sum_{k=0}^{n_k} \dots (-1)^{i+j+k+\dots} \binom{n_i}{i} \binom{n_j}{j} \binom{n_k}{k} \dots f(x_i, y_j, z_k, \dots) \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^n f(x,y,\dots)}{\partial x^n} &= \frac{(-1)^n}{(\Delta x)^n} \left[(-1)^a \binom{n}{a} f(x_a, y, \dots) - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq a}}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} f(x_i, y, \dots) \right] \\ \frac{\partial^n f(x,y,\dots)}{\partial x^{n_i} \partial y^{n_j} \dots} &= \frac{(-1)^n}{(\Delta x)^{n_i} (\Delta y)^{n_j} \dots} \left[(-1)^{a+b+\dots} \binom{n_i}{a} \binom{n_j}{b} \dots f(x_a, y_b, \dots) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq a \wedge j \neq b \wedge \dots}}^{n_i} \sum_{j=0}^{n_j} \dots (-1)^{i+j+\dots+1} \binom{n_i}{i} \binom{n_j}{j} \dots f(x_i, y_j, \dots) \right] \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} f(x_a, y_b, \dots) &= (DEN)^{-1} \left[\vartheta(x,y,\dots) \frac{(-1)^n}{(\Delta x)^n} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq a}}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} f(x_i, y_b, \dots) + \dots + \zeta(x,y,\dots) \frac{(-1)^r}{(\Delta x)^{r_i} (\Delta y)^{r_j} \dots} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq a \wedge j \neq b \wedge \dots}}^{r_i} \sum_{j=0}^{r_j} \dots (-1)^{i+j+\dots+1} \binom{r_i}{i} \binom{r_j}{j} \dots f(x_i, y_j, \dots) + \dots \right] \\ DEN &= \vartheta(x,y,\dots) \frac{(-1)^n}{(\Delta x)^n} (-1)^a \binom{n}{a} + \dots + \zeta(x,y,\dots) \frac{(-1)^r}{(\Delta x)^{r_i} (\Delta y)^{r_j} \dots} (-1)^{a+b+\dots} \binom{r_i}{a} \binom{r_j}{b} \dots + \dots \end{aligned} \right\} (7)$$

Por tanto, haciendo uso de la siguiente propiedad de coeficientes binomiales (Spiegel 1986):

($i = a \wedge j = b \wedge k = c \wedge \dots$). Entonces:

$$\left. \begin{aligned} \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots (-1)^n \binom{n}{n} &= 0 \\ \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} &= 0 \\ \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} &= (-1)^a \binom{n}{a} \\ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq a}}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} &= (-1)^a \binom{n}{a} \\ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq a \wedge j \neq b \wedge \dots}}^{n_i} \sum_{j=0}^{n_j} \dots (-1)^{i+j+\dots+1} \binom{n_i}{i} \binom{n_j}{j} \dots &= \\ (-1)^{a+b+\dots} \binom{n_i}{a} \binom{n_j}{b} \dots & \end{aligned} \right\}$$

Se puede aislar y despejar el coeficiente cuando ($i = a$), y de manera semejante cuando existe una composición de coeficientes binomiales, es decir cuando

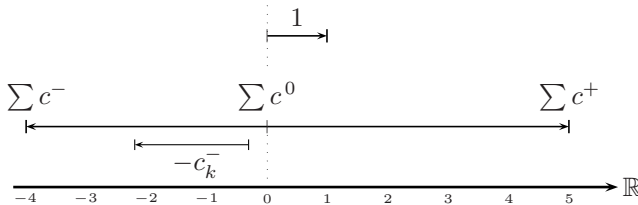
Finalmente, utilizando estas dos últimas igualdades al sumar todos los coeficientes de los términos $f_{(x_i, y_j, \dots)}$ del numerador (términos vecinos) de la Ec. (7), resulta que, la sumatoria es igual al denominador del mismo ³.

Entonces, al ser distribuido el denominador a todos los términos $f_{(x_i, y_j, \dots)}$, la sumatoria de los coeficientes resultantes es igual a la unidad. Con tal resultado queda demostrado el Teorema propuesto aplicado a la Ec. (4). \square

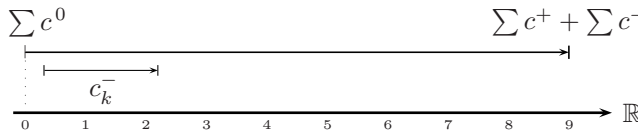
3.1. Normalización de Coeficientes

Los coeficientes de la Ec. (7) cuando se reparte el denominador pueden tener valores; positivos, negativos ó ceros. Pero la sumatoria de dichos coeficientes es igual a la unidad. Véase el siguiente esquema.

$$1 = \sum c^+ - \sum c^- + \sum c^0$$



Pero al cambiar el signo de los coeficientes negativos a positivo se obtiene el siguiente esquema.



En el cual la longitud de un determinado coeficiente c_k (sea positivo, negativo o cero) y la longitud total no cambia. Por tanto, se puede normalizar ⁴ los coeficientes cambiándole el signo a los negativos y dividiendo a cada coeficiente por la longitud total. Entonces, estos coeficientes resultantes de la normalización pueden ser tratables como Probabilidades.

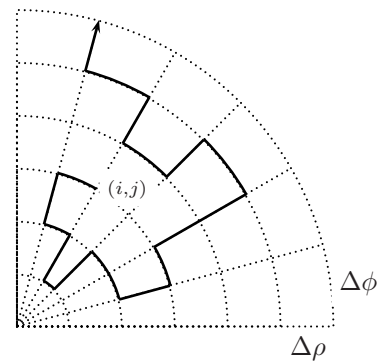
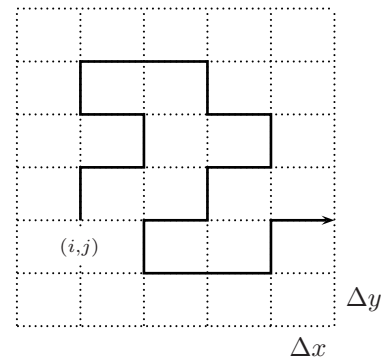
4. EL MÉTODO MONTE CARLO

La Región Discretizada más las Direcciones y Probabilidades de Transición obtenidas mediante el desarrollo por Diferencias Finitas, nos permite realizar Paseos Aleatorios en dicha región. Además es necesario la generación de Numeros Aleatorios en toda la trayectoria del paseo aleatorio, siendo este el fundamento del método Monte Carlo.

³ También se puede llegar al mismo resultado utilizando desarrollos de interpolación con diferencias hacia atrás o diferencias centrales

⁴ Si al aplicar el Teorema a una ecuación, todos los coeficientes resultan positivos, no es necesario realizar el proceso de normalización

El algoritmo del método Monte Carlo para aproximar u consiste en lo siguiente: Para conocer el valor de solución u en un nodo (i, j) de la región, se lanza una partícula desde ese nodo y se la hace evolucionar de acuerdo a las direcciones y probabilidades de transición calculadas, hasta que choca con la frontera de la región ⁵, almacenándose el valor del dato de frontera en ese punto. Se repite este procedimiento para una gran cantidad de partículas, y se estima el valor de $u_{(i,j)}$ como el promedio de esos valores. Gráficamente se muestra a continuación paseos aleatorios en regiones rectangulares y circulares respectivamente.



4.1. Condiciones de Frontera

Si una partícula simulada llega a una frontera que tiene Condiciones de Contorno de Dirichlet o Condiciones Iniciales, termina el paseo aleatorio de la misma. Pero no sucede lo mismo cuando la partícula llega a una frontera que tiene Condiciones de Contorno de Neumann, en este caso se debe desarrollar el gradiente en diferencias finitas centrada en la frontera.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_{(i+1,j)} - U_{(i-1,j)}}{2\Delta x}$$

Donde $U_{(i+1,j)}$ está fuera de la región. Si el gradiente es igual a cero entonces se tiene $U_{(i+1,j)} = U_{(i-1,j)}$ que puede ser reemplazado en la ecuación

⁵ Dependiendo de la condición de frontera; Dirichlet, Neumann o Condiciones Iniciales la partícula termina o continúa el paseo aleatorio

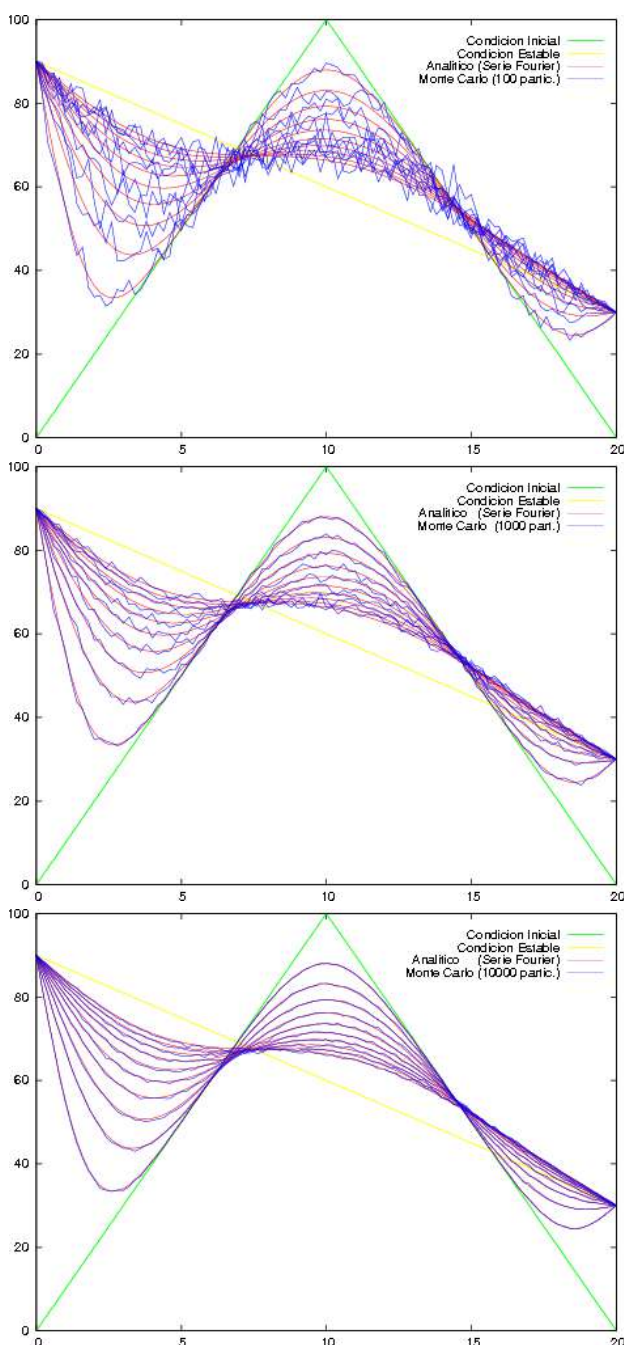


FIG. 1.— Solución de la Ecuación del Calor Analítica y por Monte Carlo

que lleva las probabilidades de transición para generar una nueva ecuación, que se utiliza cuando la partícula llega a esta frontera.

4.2. Comparación de resultados

Se compara soluciones obtenidas por este método con soluciones analíticas de problemas que tienen condiciones de Dirichlet, Neumann e Iniciales.

- En la Fig. (1) se muestra la solución de la Ecuación del Calor unidimensional para diez instantes de tiempo.
- En la Fig. (2) se muestra la solución de la

Ecuación de Laplace bidimensional.

Comparando la solución Analítica con el Método de Montecarlo para 100, 1000 y 10000 partículas en ambos casos.

5. LA ECUACIÓN DE LAPLACE

Se resuelve la Ecuación de Laplace, Ec. (8), en coordenadas rectangulares para una región irregular en el plano, ver Fig. (3).

$$\nabla^2 u = 0 \tag{8}$$

Entonces $u = u(x,y)$. El problema tiene condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann que se listan a continuación.

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= 60 & (6 \leq x \leq 8) \vee (12 \leq x \leq 14) \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= 0 & (8 < x < 12) \wedge (y = 0) \\ u(x,6) &= 100 & 6 < x \leq 9 \\ u(x,12) &= 0 & 0 \leq x < 12 \\ u(0,y) &= 100\sqrt{1 - \left(\frac{y-9}{3}\right)^2} & 6 \leq y \leq 12 \\ u(6,y) &= 100 & 6 \leq y \leq 12 \\ u(x,y) &= 0 & (0 < x < 6) \wedge (0 < y < 6) \\ u(x,y) &= 0 & (9 < x < 14) \wedge (0 < y < 6) \end{aligned} \right\}$$

Para desarrollar la Ecuación de Laplace en diferencias finitas, se reemplaza el Laplaciano en coordenadas rectangulares para una región irregular, que es la Ec. (3), en la Ec. (8).

$$\frac{2bU_{(i+1,j)} + 2aU_{(i-1,j)}}{ab(a+b)} + \frac{2dU_{(i,j+1)} + 2cU_{(i,j-1)}}{cd(c+d)} - 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd}\right)U_{(i,j)} = 0$$

Luego, según la definición se procede a despejar el término central $U_{(i,j)}$.

$$U_{(i,j)} = \frac{bcd}{(a+b)(ab+cd)}U_{(i+1,j)} + \frac{acd}{(a+b)(ab+cd)}U_{(i-1,j)} + \frac{abd}{(c+d)(ab+cd)}U_{(i,j+1)} + \frac{abc}{(c+d)(ab+cd)}U_{(i,j-1)}$$

En el cual se tiene, cuatro direcciones de transición: $U_{(i+1,j)}$, $U_{(i-1,j)}$, $U_{(i,j+1)}$ y $U_{(i,j-1)}$, entonces el paseo aleatorio se realiza en el plano, donde las condiciones de contorno son los bordes de la región plana, ver Fig. (3). Y las probabilidades de transición a esas direcciones son los valores de sus respectivos coeficientes.

5.1. Resultados

Los resultados obtenidos se presentan gráficamente para dos situaciones físicas distintas:

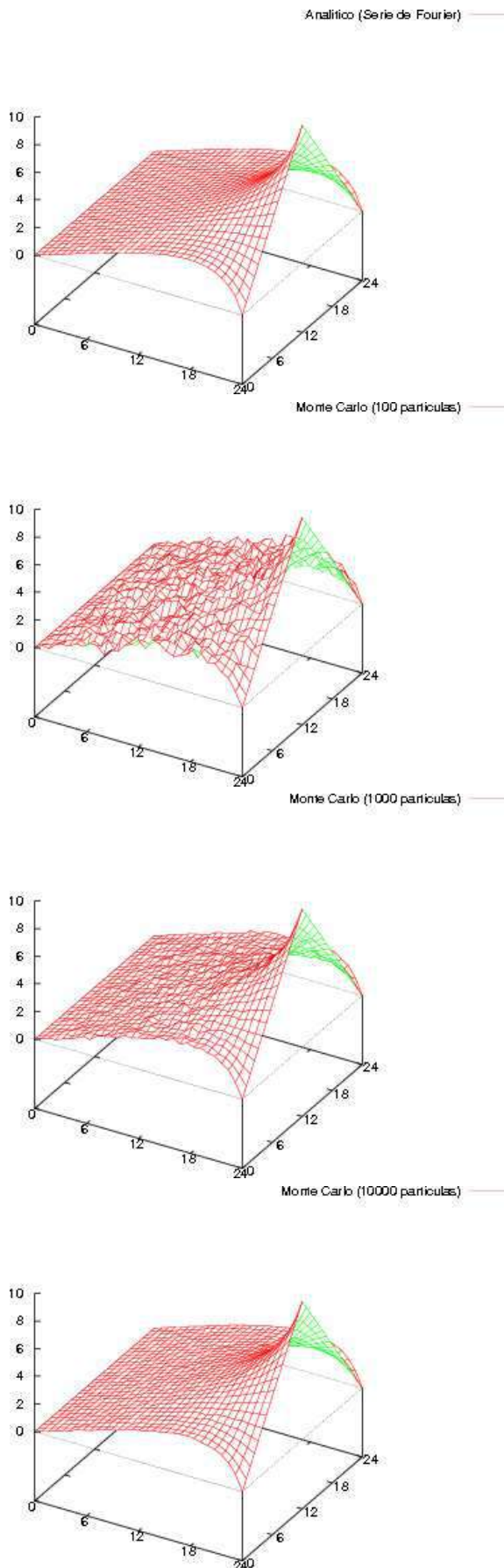


FIG. 2.— Solución de la Ecuación de Laplace Analítica y por Monte Carlo

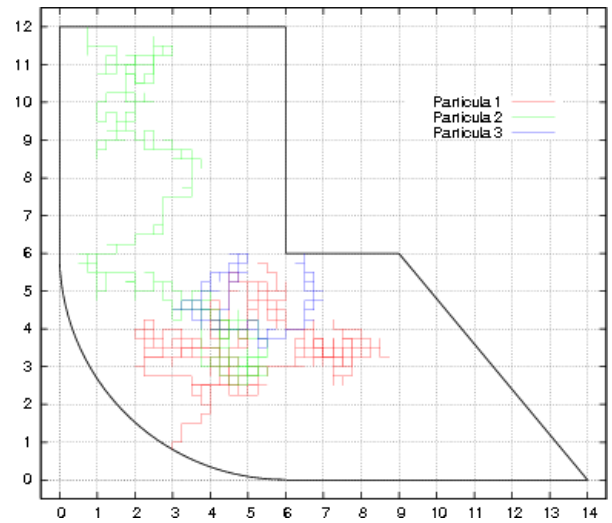


FIG. 3.— Dimensiones espaciales de la región plana irregular. También se muestran tres paseos aleatorios

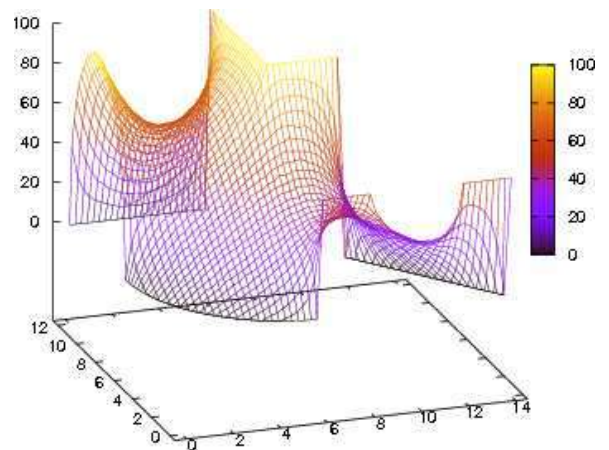


FIG. 4.— Se muestra la solución de la Ecuación de Laplace para una Membrana elástica delgada estacionaria

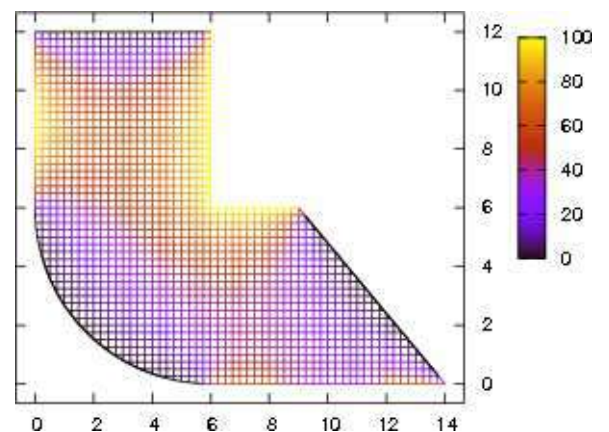


FIG. 5.— Se muestra la solución de la Ecuación de Laplace para la Temperatura estacionaria en una placa delgada

1. Una membrana elástica delgada estacionaria. Que es deformada en los bordes según las condiciones de contorno dadas, ver Fig. (4).
2. La temperatura estacionaria en una placa delgada

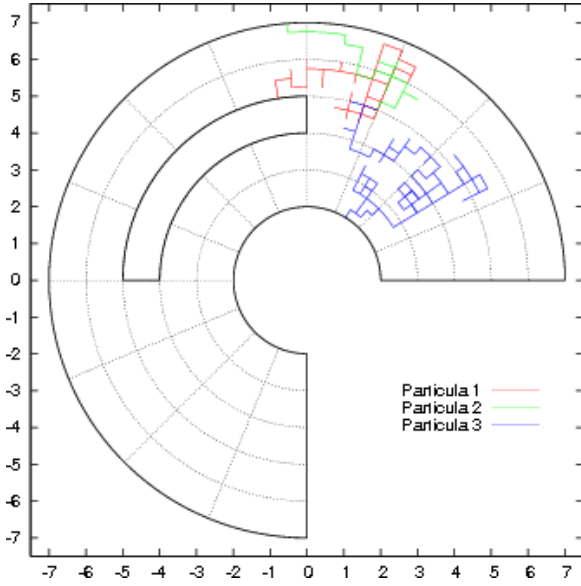


FIG. 6.— Dimensiones espaciales de la región plana circular regular. También se muestran tres paseos aleatorios

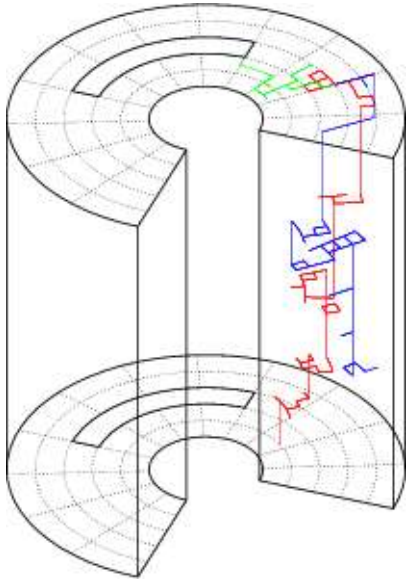


FIG. 7.— Se muestran tres paseos aleatorios realizados en la región discretizada del problema (volumen cilíndrico).

gada. Los bordes están a temperaturas según las condiciones de contorno, ver Fig. (5).

6. LA ECUACIÓN DEL CALOR

Se resuelve la Ecuación del Calor, Ec. (9), en coordenadas polares para una región circular regular en el plano, ver Fig. (6).

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (9)$$

Entonces $u = u(\rho, \phi, t)$. La condición Inicial más las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann que

tiene el problema se listan a continuación.

$$\left. \begin{aligned} u_{(\rho, \phi, t)} &= 100 & t &= 0 \\ u_{(2, \phi, t)} &= \frac{400}{3\pi} \phi & 0 \leq \phi \leq \frac{3}{4}\pi \\ u_{(2, \phi, t)} &= 200 - \frac{400}{3\pi} \phi & \frac{3}{4}\pi < \phi \leq \frac{3}{2}\pi \\ u_{(7, \phi, t)} &= 100 \sqrt{1 - \left(\frac{\phi - \frac{3}{4}\pi}{\frac{3}{4}\pi} \right)^2} & 0 \leq \phi \leq \frac{3}{2}\pi \\ \frac{\partial u_{(\rho, \phi, t)}}{\partial \phi} &= 0 & (2 < \rho < 7) \wedge (\phi = 0) \\ u_{(\rho, \frac{3\pi}{2}, t)} &= 0 & 2 < \rho < 7 \\ u_{(4, \phi, t)} &= 0 & \frac{1}{2}\pi \leq \phi \leq \pi \\ u_{(5, \phi, t)} &= 0 & \frac{1}{2}\pi \leq \phi \leq \pi \\ u_{(\rho, \frac{\pi}{2}, t)} &= 0 & 4 < \rho < 5 \\ u_{(\rho, \pi, t)} &= 0 & 4 < \rho < 5 \end{aligned} \right\}$$

La Ec. (2) es el desarrollo de la parte espacial de la Ecuación del Calor, y de la parte temporal, es la Ec.(10).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U_{(i,j,k)} - U_{(i,j,k-1)}}{\Delta t} \quad (10)$$

Por tanto, reemplazando la Ec. (2) y Ec.(10) en la Ec.(9), se obtiene el desarrollo en diferencias finitas de la Ecuación del Calor.

$$\begin{aligned} & \frac{U_{(i+1,j,k)}}{(\Delta \rho)^2} + \left(1 - \frac{1}{i}\right) \frac{U_{(i-1,j,k)}}{(\Delta \rho)^2} \\ & + \frac{U_{(i,j+1,k)} + U_{(i,j-1,k)}}{(\Delta \rho)^2 (i \Delta \phi)^2} + \frac{1}{\kappa \Delta t} U_{(i,j,k-1)} \\ & - \frac{1}{(\Delta \rho)^2} \left[2 - \frac{1}{i} + \frac{2}{(i \Delta \phi)^2} + \frac{(\Delta \rho)^2}{\kappa \Delta t} \right] U_{(i,j,k)} = 0 \end{aligned}$$

Realizando los siguientes cambios de variable para una mejor manipulación:

$$\alpha = \frac{\kappa \Delta t}{(\Delta \rho)^2} \quad \beta_{(i)} = \frac{1}{(i \Delta \phi)^2} \quad \gamma_{(i)} = \frac{1}{i}$$

Se procede a despejar el término central $U_{(i,j,k)}$ según la definición.

$$\begin{aligned} U_{(i,j,k)} &= \frac{\alpha}{1 + \alpha(2 + 2\beta - \gamma)} U_{(i+1,j,k)} + \frac{\alpha(1 - \gamma)}{1 + \alpha(2 + 2\beta - \gamma)} U_{(i-1,j,k)} \\ & + \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha(2 + 2\beta - \gamma)} U_{(i,j+1,k)} + \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha(2 + 2\beta - \gamma)} U_{(i,j-1,k)} \\ & + \frac{1}{1 + \alpha(2 + 2\beta - \gamma)} U_{(i,j,k-1)} \end{aligned}$$

En el cual se tiene, cinco direcciones de transición, cuatro espaciales: $U_{(i+1,j,k)}$, $U_{(i-1,j,k)}$, $U_{(i,j+1,k)}$, $U_{(i,j-1,k)}$ y una temporal $U_{(i,j,k-1)}$. La dirección temporal hace que el paseo aleatorio se realice en un volumen cilíndrico, ver Fig. (7), donde las superficies

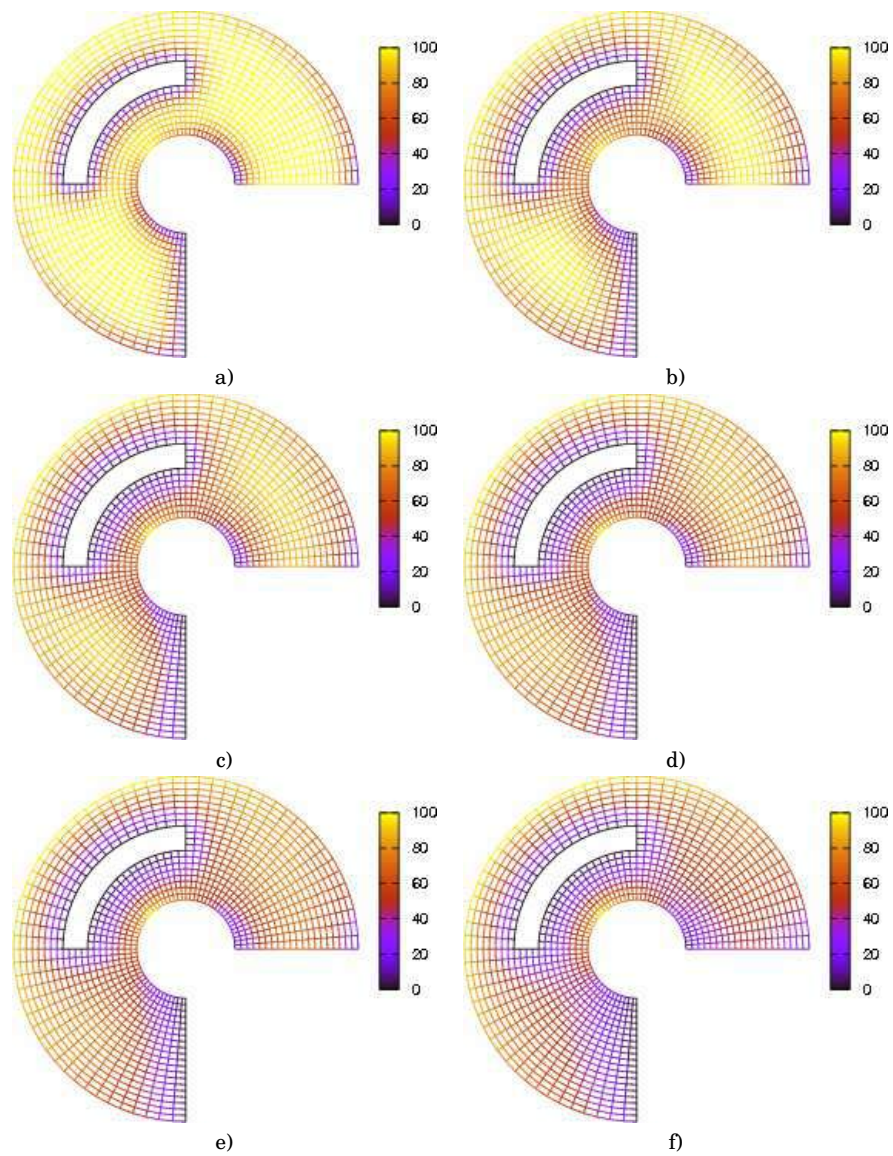


FIG. 8.— Se muestra la solución de la Ecuación del Calor de una región plana circular regular para seis instantes de tiempo consecutivamente, posteriores a la condición inicial. La paleta de colores muestra el rango de temperatura de 0 a 100.

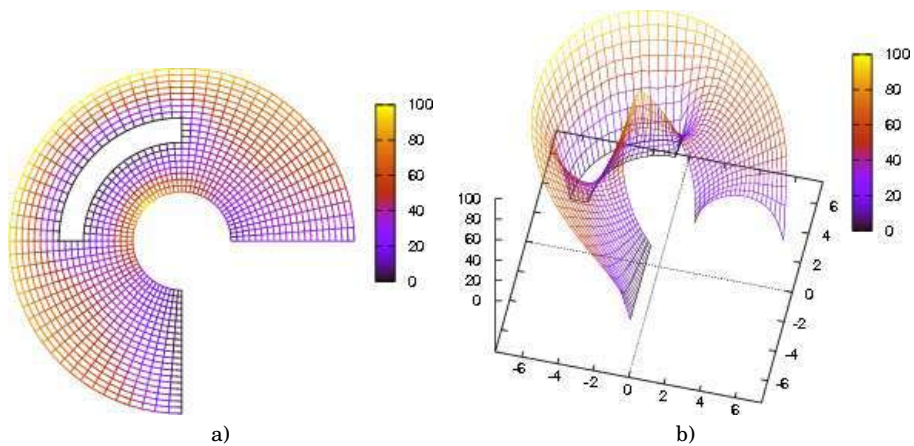


FIG. 9.— Solución de la Ecuación de Laplace en coordenadas polares para una región plana circular regular. El inciso a) muestra la temperatura estacionaria en una placa delgada. El inciso b) muestra a una membrana elástica delgada estacionaria.

laterales son las condiciones de contorno y la superficie inferior es la condición inicial. Y las probabilidades de transición a esas direcciones son los valores de sus respectivos coeficientes.

6.1. Resultados

Los resultados obtenidos son presentados gráficamente mediante seis instantes de tiempo consecutivos, posteriores a la condición inicial, ver Fig. (8). El primer inciso de la gráfica muestra que predominan las Condiciones Iniciales en un comienzo, mientras que el último inciso, muestra a las Condiciones de Contorno como predominantes.

Finalmente, en un tiempo relativamente largo, solo sobrevive la información de las condiciones de contorno y la información de las condiciones iniciales desaparece totalmente. Entonces los resultados de la Ecuación del Calor deben desembocar en los resultados de la Ecuación de Laplace al transcurrir el tiempo.

Entonces para fines comparativos, se obtiene la solución de la Ec. (11), que es la Ecuación de Laplace para este problema, cuyos resultados se muestran en la Fig. (9).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (11)$$

Observando la Fig. (8) y la Fig. (9), se puede comprobar, que en un tiempo relativamente largo, el proceso de difusión del calor se detiene llegando a un estado estacionario.

7. CONCLUSIONES

El método Monte Carlo aplicado para resolver EDP's es destinado especialmente para las ecuaciones Elípticas y Parabólicas, porque estas modelan fenómenos que inducen un proceso de achatamiento o promediado, donde las ecuaciones de Laplace y del Calor abordados en este trabajo son un buen ejemplo de este tipo de EDP's.

La eficacia del método se comprueba al comparar resultados en problemas que tienen soluciones analíticas, obteniéndose buena aproximación a medida que se aumenta el número de partículas en las simulaciones. Por tanto se aplica el método con la seguridad de obtener buenos resultados en problemas que tienen regiones no muy simétricas los cuales no tienen una solución analítica.

Por otra parte, en este trabajo se resolvieron problemas que tienen dos dimensiones espaciales, tanto en la Ecuación de Laplace como en la Ecuación del Calor. Pero el método se puede extender a tres dimensiones espaciales sin ninguna dificultad en ambos casos, porque lo único que cambia es, el aumento en una dimensión de la región discretizada en el cual se realiza el paseo aleatorio.

REFERENCIAS

- Kreyszig, E. 2000, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. II, Métodos Numéricos para Ecuaciones Diferenciales Parciales, 551, 427
- Perez, V. 2008, Métodos Matemáticos, Diferencias Finitas para Ecuaciones de Evolución, 147, 148, 160
- Press, R. 1995, Numerical Recipes in C, Partial Differential Equations, 831, 832
- Sheid, F. 1972, Análisis Numérico, Sistemas Lineales, La Iteración de Gauss-Seidel y la Super-Relajación, Los Métodos de Monte Carlo, 340, 404
- Spiegel, M. 1986, Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas, La Fórmula del Binomio y Coeficientes Binomiales, 4

TRATAMIENTO DE ABERRACIÓN ESFERICA MEDIANTE SERIE FOCAL

TREATMENT OF SPHERICAL ABERRATION BY FOCAL SERIES

ADRIÁN TELLERÍA†

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639
La Paz – Bolivia

(Recibido 9 de agosto de 2011; aceptado 27 de septiembre de 2011)

RESUMEN

Se presenta un método iterativo para la corrección de las aberraciones de un microscopio electrónico de transmisión de alta resolución (con resolución puntual de 1.77 Å). El método se basa en la técnica de correlación de fase compensada para el alineamiento de las imágenes experimentales. La técnica empleada permitió calcular la función de onda de los electrones en el plano de salida de la muestra antes de pasar por el sistema de proyección y ser afectada por la aberración esférica de la lente objetivo. Se comprobó que la resolución fue mejorada hasta por lo menos 1.4 Å. La resolución de los “dumbbells” de silicio confirma este resultado. Se puede realizar pruebas adicionales con otros materiales para determinar la resolución alcanzada.

Descriptor: microscopía electrónica de alta resolución — aberraciones ópticas — procesamiento óptico e imagenología

Código(s) PACS: 68.37.Og, 42.15.Fr, 42.30.-d

ABSTRACT

We present an iterative method for the correction of aberrations in an high resolution transmission electron microscope (with point resolution of 1.7 Å). The method is based on the technique of compensated phase correlation for the alignment of the experimental images. This technique helped us for calculating the wave function of electrons in the outgoing plane of the sample before passing through the projection system and be affected by the spherical aberration of the objective lens. We found that the resolution has been increased at least by 1.4 Å. The resolution of silicon dumbbells confirm this result. Additional tests with other materials can be made to determine the achieved resolution.

Subject headings: high-resolution transmission electron microscopy — optical aberrations — imaging and optical processing

1. INTRODUCCIÓN

La nanotecnología ha tenido un avance significativo hasta el día de hoy, debido a esto, nace la necesidad de caracterizar sistemas cada vez menores. Un instrumento útil para esta caracterización es el microscopio electrónico de transmisión. Este microscopio nos permite analizar muestras con resolución atómica, pero las imágenes obtenidas tienen aberraciones e imperfecciones, debido a las limitaciones del microscopio.

Existen métodos para corregir estas aberraciones, ya sea el corrector en la columna del microscopio, desarrollado por Haider y que recién empezó a operar como un prototipo en el laboratorio de microscopía electrónica del Forschungszentrum de Jülich, el año 2003 con el Prof. Knut Urban, estando disponible

comercialmente en el microscopio Titan 300 de la FEI, el año 2005; o mediante técnicas computacionales que mejoran la calidad de la imagen, dando información mas exacta al momento del análisis de la muestra.

2. TEORÍA

2.1. TEM

Un microscopio electrónico de transmisión, (TEM, *Transmission Electron Microscope*), es un instrumento que utiliza electrones de alta energía (típicamente entre 200 – 300keV) en lugar de luz, esto, debido a que la longitud de onda de De Broglie de los electrones es menor que la longitud de onda de la luz (William & Carter 1998). Las fuentes de estos electrones, que normalmente se encuentran en la parte superior del microscopio, pueden ser cañones termoiónicos compuestos por un filamento

†telleria@fiumsa.edu.bo

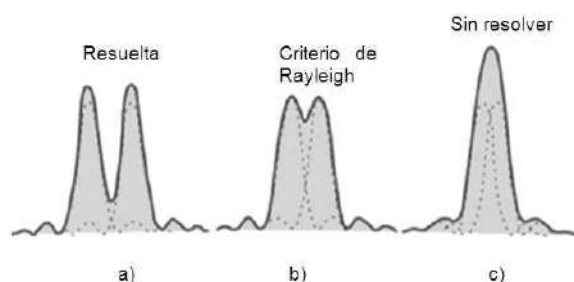


FIG. 1.— a) Perfil de intensidades del disco de Airy para dos fuentes puntuales que se pueden resolver. b) Los discos están separados tal que el máximo de una coincide con el mínimo de la otra. La distancia entre picos está dada por R. c) Los dos discos de Airy están tan cerca que no se puede llegar a distinguirlos.

de tungsteno o LaB_6 , también mediante un cañón de emisión de campo. Este último trabaja con campos eléctricos intensos para arrancar electrones del filamento (William & Carter 1998).

Para poder analizar una muestra, esta debe ser lo suficientemente delgada para que los electrones puedan atravesarla.

Los haces de electrones son difractados por la muestra y luego proyectados por un sistema de lentes magnéticas. Debido a la naturaleza cilíndrica de las lentes, los haces más próximos al eje óptico, convergen después que los haces lejanos a éste, este efecto es conocido como aberración esférica (Born & Wolf 1959). La aberración esférica en un TEM, solo puede ser corregida quebrando la simetría cilíndrica de las lentes, mediante sistemas de multipolos (Haider et al. 1998; Scherzer. 1949) introducidos en la columna del microscopio o mediante una técnica de reconstrucción de la función onda de los electrones antes de atravesar la lente objetiva (plano de salida de la muestra) vía software. Este último puede ser mediante iteraciones (IWFR) o máxima probabilidad (MAL) (Meyer et al. 2002; Allen et al. 2004; Coene et al. 1996).

Finalmente, los electrones son proyectados a un sistema de detección.

2.2. Resolución

La mínima distancia entre dos puntos que el ojo humano puede distinguir o resolver es típicamente entre $0.1 - 0.2mm$, dependiendo de cuan buena sea la vista. A esta distancia se la denomina resolución. Un instrumento útil para poder resolver distancias interatómicas, es el TEM. Los TEM de alta resolución (HRTEM high resolution TEM) actuales tienen resoluciones menores que un angstrom (0.5\AA para el TITAN-ULTIMATE y 0.8\AA para el JEOL JEM-ARM200F, ambos con correctores de aberración esférica en la columna del microscopio) (www.fei.com; www.gatan.com).

El poder de resolución de un microscopio es diferente a su magnificación. Magnificar una fotografía indefinidamente usando lentes de mayor potencia, solamente hará que la imagen se ponga borrosa e

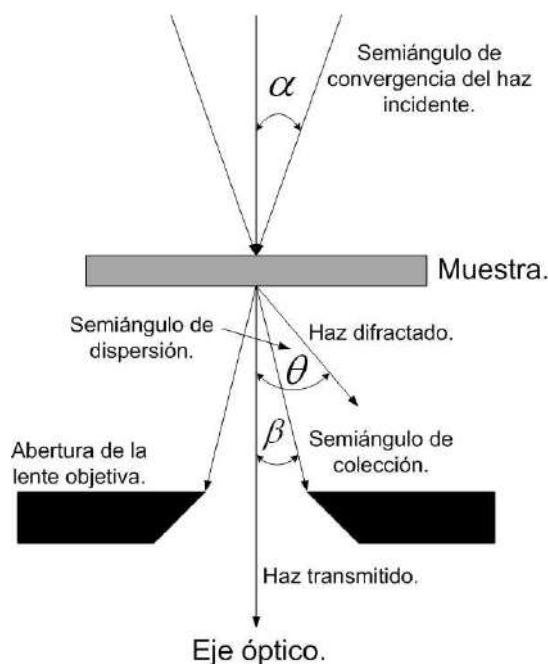


FIG. 2.— Semiángulos mas importantes en TEM. α semiángulo de convergencia del haz, β semiángulo de colección y θ semiángulo de dispersión.

ilegible. Por lo tanto, una mera ampliación no mejora la resolución.

La resolución angular R de un sistema óptico se puede estimar (a través de la abertura y la longitud de onda de la luz), por el criterio de Rayleigh (William & Carter 1998). Este criterio afirma que dos fuentes puntuales son resueltas cuando el máximo de difracción principal de una imagen coincide con el primer mínimo de la otra, como se muestra en la Fig.1.

Considerando la difracción por una abertura circular, se tiene:

$$D = 1.22 \frac{\lambda}{\text{sen}(\theta)}. \quad (1)$$

El factor 1.22; se deriva de un cálculo de la posición del primer anillo oscuro central del disco de Airy, dado por la difracción del patrón. Para el caso del microscopio, la resolución depende de la abertura angular y se representa como:

$$R = 0.61 \frac{\lambda}{\beta}. \quad (2)$$

λ es la longitud de onda de la luz que incide la muestra y β es el semiángulo de colección, entre el eje óptico y la abertura objetiva, como se muestra en la Fig. 2.

2.3. Contraste en el TEM

El contraste en una imagen se origina porque los electrones que inciden en la muestra, con intensidades uniformes, pierden esa uniformidad al ser dispersados. Esta diferencia de intensidades es captada por el sistema de detección y traducida como contrastes en la imagen. Cuando formamos imágenes

usando un TEM, podemos obtener la imagen con el punto central, o utilizar los electrones dispersados. La manera en que se eligen los electrones para formar las imágenes es incertando una abertura en la lente objetiva, como se muestra en la Fig. 2. Esta bloquea la mayor parte del patrón de difracción, excepto aquellos haces que atraviesan la abertura de la lente objetiva. Usando las unidades externas del microscopio podemos mover dicha abertura para seleccionar los haces que pasarán. Si el haz directo es seleccionado llamamos a la imagen resultante, imagen de campo claro, y si seleccionamos los electrones dispersados llamamos a la imagen resultante, imagen de campo oscuro. Para obtener imágenes de alta resolución utilizamos todos los haces, los difractados y el haz directo.

El contraste de fase se origina por la diferencia de fase en los electrones difractados (Willian & Carter 1998). Este contraste es difícil de interpretar porque es sensible a muchos factores, como ser, el grosor de la muestra, orientación cristalográfica o factores de dispersión de la muestra y variación del foco o astigmatismo de la lente objetiva. Estos factores pueden ser optimizados para obtener imágenes con resolución atómica.

La distinción entre imágenes de contraste de fase y otra forma de imágenes TEM, es el número de haces colectados por la abertura objetiva, utilizados para formar la imagen.

Imágenes con contraste de fase, requieren la selección de todos los haces difractados.

2.4. HRTEM

En la difracción clásica de la microscopía electrónica de transmisión, la imagen puede ser construida utilizando un haz (difractado o transmitido) ver Fig. 2. Sin embargo, en la microscopía de alta resolución (High Resolution Transmission Electron Microscopy), se usa el contraste de fase. Esta técnica de imagen, permite obtener mayor resolución (Allen et al. 2004). La función de onda de los electrones difractados por la muestra, al pasar por el sistema de lentes magnéticas, es modulada por una función proporcional a $\exp(-i\chi(u))$, donde $\chi(u)$ es la función de modulación en fase de la lente objetiva y u la distancia en el espacio recíproco. Esta función describe cómo se modula la función de onda al propagarse hasta el plano imagen y está dada por:

$$\chi(u) = \pi\lambda\Delta f u^2 + 0.5\pi\lambda^3 C_S u^4. \quad (3)$$

Donde λ es la longitud de onda de los electrones y C_S la aberración esférica de la lente objetiva. Usando la ecuación 3, se encuentra la función de transferencia para el proceso de formación de la imagen, que está dada por (Willian & Carter 1998).

$$T_F(u) = 2\sin(\chi(u)). \quad (4)$$

Esta función modula las intensidades de los electrones difractados por diferentes planos atómicos, como se muestra en la Fig. 3.

La función de transferencia no se extiende indefinidamente para altas frecuencias u , porque es

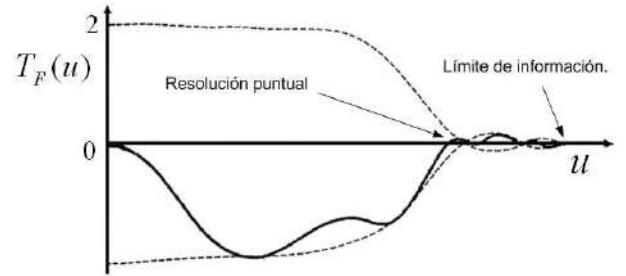


FIG. 3.— Función de transferencia versus la frecuencia espacial u , acotada por la función envolvente (línea punteada), $\Delta f = -100$ nm, $C_S = 2.2$ mm. Imagen tomada del libro "Transmission electron microscopy Imaging III".

acotada por una función envolvente que depende de los factores del microscopio, como ser aberración cromática, coherencias espaciales y temporales. La presencia de ceros en la función de transferencia, significa brechas en la salida del espectro que no contribuyen con la señal; es como si esas frecuencias estuviesen filtradas. El primer cero de la función de transferencia indica la resolución puntual del microscopio y en el valor de frecuencia espacial donde la envolvente se anula, se conoce como límite de información.

La mejor función de transferencia es aquella con menor número de ceros y engloba valores mayores de alta frecuencia espacial.

Scherzer en 1949, (Scherzer, 1949), propuso que la función de transferencia podría ser optimizada compensando el efecto de la aberración esférica con un valor negativo particular de Δf .

Este valor es conocido como "Desfocalización de Scherzer o foco de Scherzer" representado como:

$$\Delta f_{Sch} = -1.2(C_S\lambda)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Con este valor de foco, la función de transferencia se optimiza de tal manera que tiene el máximo valor posible de la frecuencia espacial u antes del primer cero. Si propagamos la función de onda que sale de la muestra $\psi_0(r)$ (plano de salida) hacia el plano de observación, donde se obtiene la imagen (plano imagen) mediante el sistema de lentes magnéticas con aberraciones coherentes $t(r)$, esta propagación puede ser descrita por la siguiente convolución (Allen et al. 2004):

$$\psi(r) = \psi_0(r) \otimes t(r) \quad (6)$$

Si se expresa esta función de onda en el espacio recíproco se obtiene:

$$\Psi(u) = \Psi_0(u)T(u) \quad (7)$$

Donde $T(u)$ es expresada como:

$$T(u) = A(u)\exp[-i\chi(u)]. \quad (8)$$

$A(u)$ es una función cuadrada igual a la unidad para valores de $|u| \leq u_{max}$ y cero para otro valor. u_{max} es el valor de frecuencia espacial, que coincide con el límite de información.

Para el caso bidimensional, el vector u en el espacio recíproco está dado por el número complejo $\omega = \lambda u_x +$

$i\lambda u_y$ (Meyer et al. 2002), y la función de modulación para este caso está dada por (Meyer et al. 2002):

$$\chi(\omega) = \frac{2\pi}{\lambda} \text{Re} \left[0.5\Delta f \omega^* \omega + \frac{1}{4} C_{s\omega} \omega^2 \right]. \quad (9)$$

2.5. Coherencia espacial

Debido a que la fuente de electrones tiene un tamaño finito, el haz contiene una distribución de direcciones incidentes. Estas son cuantificadas por la convergencia del semiángulo β . La función de coherencia espacial está dada por (Allen et al. 2004):

$$E_{es}(u) = \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{4\lambda^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \chi(u) \right]^2 \right\}. \quad (10)$$

2.6. Coherencia temporal

La diferencia de energías de los electrones al salir del cañón, hace que el haz de electrones sea temporalmente incoherente. Aunque la dispersión en energías del haz incidente sea de pocos eV, la diferencia en la longitud focal de la lente objetiva para distintas energías es relevante. La función de coherencia temporal se expresa como (Allen et al. 2004):

$$E_{\Delta}(u) = \exp \left\{ -\frac{\Delta^2}{4} \left[\frac{\partial}{\partial \Delta f} \chi(u) \right]^2 \right\}. \quad (11)$$

Donde Δ es la propagación del foco, debido a las fluctuaciones de corriente en las lentes magnéticas.

2.7. Serie focal

Este método, consiste en tomar una serie de imágenes de una misma muestra y región, a diferentes focos. Esto se debe a que cada imagen lleva consigo diferente información de la función de transferencia, con su respectivo foco. Toda esa información de las funciones de transferencia es utilizada para poder reconstruir la función de onda de los electrones en el plano de salida, mediante métodos iterativos.

2.8. Alineación de imágenes

Durante el proceso de adquisición de imágenes, la muestra puede desplazarse debido a diversos factores externos, como temperatura y vibraciones. Por ese motivo, es necesario alinear todas las imágenes para realizar la reconstrucción de la función de onda. Una forma de alinear es usar el método de correlación cruzada entre dos imágenes, que está dada por $C_C(r) = FFT^{-1}[a_1^* a_2]$, donde a_1 y a_2 son las transformadas de Fourier de las imágenes y * indica la conjugada; sin embargo el método no es eficiente para imágenes periódicas. El método de correlación de fase, que utiliza un análisis del dominio de las frecuencias espaciales, estima el desplazamiento entre dos imágenes del mismo objeto con distinto foco.

Considerando dos imágenes i_1 e i_2 y aplicando la transformada de Fourier en 2D, se obtienen I_1 e I_2 (Meyer et al. 2002). La función de correlación de fase esta dada por:

$$C_F(r) = FFT^{-1} \left[F(u) \frac{I_1^* I_2}{|I_1^* I_2|} \right]. \quad (12)$$

Donde FFT^{-1} es la transformada rápida de Fourier inversa, $F(u)$ es un factor real, isotrópico y positivo, que se usa para suprimir la influencia de altas frecuencias, que en muchos casos son solamente ruido y $|I_1^* I_2|$ es el módulo del producto de las transformadas.

Para obtener una correlación de fase con mayor precisión, se puede compensar la correlación y así encontrar la diferencia exacta de foco entre cada imagen. Esta compensación está dada por la función:

$$C_{FC}(r) = FFT^{-1} \left[F(u) \frac{\cos(\chi(u)) I_1^* I_2}{|\cos(\chi(u)) I_1^* I_2 + h|} \right], \quad (13)$$

donde h es un factor positivo que evita la existencia de ceros en el denominador.

2.9. Método de reconstrucción de la función de onda de salida

Este es un método cuyo objetivo es encontrar una imagen sin aberración esférica. Para la reconstrucción de la función de onda de salida mediante iteraciones, se deben seguir los siguientes pasos (Allen et al. 2004):

1. En una serie de imágenes, cada una tomada con diferente foco, el algoritmo necesita una semilla, que en este caso es la fase para cada uno de los planos de las imágenes. Se establece la fase inicial $\phi_n^1 = 0$ para todos los planos.

El superíndice indica la primera iteración ($j = 1$) y el subíndice n indica el número de imágenes.

2. La función de onda se define como, $\psi_n^j(r) = \sqrt{I_n(r)} \exp[i\phi_n^j(r)]$.
3. Calcular la transformada de Fourier de la función de onda para cada plano y obtener $\Psi_n^j(u)$. Propagar estas funciones al plano de salida donde $\Delta f = 0$.

$$\Psi_{n,0}^j(u) = \Psi_n^j(u) [T(u) E_s(u) E_{\Delta}(u)]^{-1}. \quad (14)$$

$\Psi_{n,0}^j(u)$ es la función de onda propagada para cada plano n .

4. Se construye la función de onda promedio $\Psi_{pro}^j(u) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Psi_{n,0}^j(u)$. Donde N es el número total de imágenes.

5. Propagar la función de onda promedio al plano imagen, para cada imagen con su respectivo Δf , obteniendo la nueva función de onda:

$$\tilde{\Psi}_n^j(u) = \Psi_{pro}^j(u) [T(u) E_s(u) E_{\Delta}(u)] \quad (15)$$

6. Al obtener la transformada inversa de Fourier de la función encontrada en el paso 5 se tiene $\tilde{\psi}_n^j(r) = \sqrt{\tilde{I}_n^j(r)} \exp[i\tilde{\phi}_n^j(r)]$, para cada imagen.

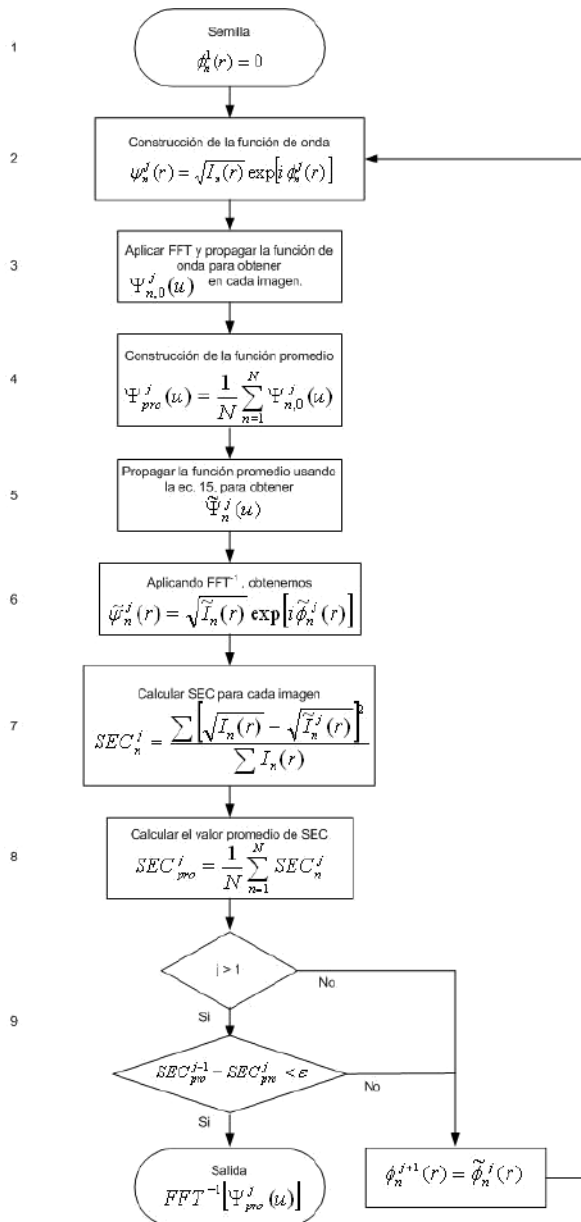


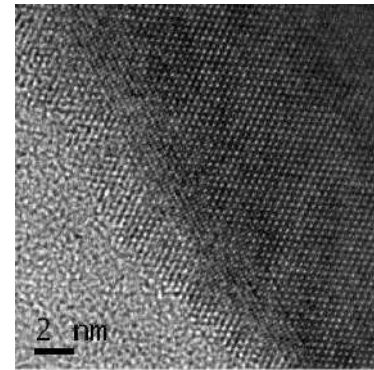
FIG. 4.— Diagrama del flujo del método reconstrucción de onda mediante iteración. FFT representa la transformada de Fourier rápida.

7. Calcular la suma de errores cuadráticos, para cada imagen usando:

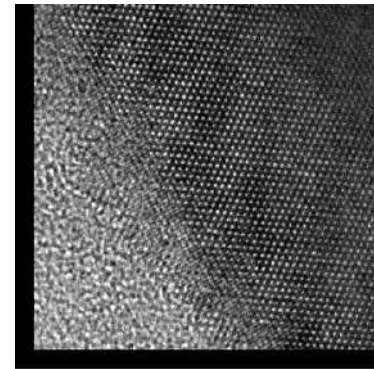
$$SEC_n^j = \frac{\sum \left(\sqrt{I_n(r)} - \sqrt{I_n^j(r)} \right)^2}{\sum I_n(r)}. \quad (16)$$

Las sumatorias se dan sobre cada pixel de las imágenes.

8. Calcular el promedio $SEC_{pro}^j = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N SEC_n^j$.
9. Si $SEC_{pro}^{j-1} - SEC_{pro}^j$ es menor que ϵ , donde ϵ es un parámetro de convergencia adecuado, la



a)



b)

FIG. 5.— a) Imagen de referencia para el método de serie focal. b) Imagen alineada con respecto a la imagen a), donde la parte oscura indica cuanto se desplazó la imagen (en pixeles) para quedar alineada.

función de onda reconstruida es completada y esta imagen está dada por la transformada inversa de Fourier de $\Psi_{pro}^j(u)$.

En la Fig. 4 se tiene el diagrama de flujo para la reconstrucción de la función de onda.

3. PROCEDIMIENTO DE ALINEACIÓN DE LAS IMÁGENES

Se utilizaron 8 imágenes de alta resolución de domos de germanio crecidos en un substrato de Si(001) orientados en el eje de zona [110] (Motoro et al. 2009), con una variación de foco de $-5nm$ entre ellas. Las imágenes fueron tomadas en un microscopio JEOL JEM-3010URP, de $300keV$. De las 8 imágenes de 1024×1024 pixels, se tomó una (donde la información esté centrada) y se la utilizó como referencia para el alineamiento de las demás. Para la función $F(u)$, mencionada en la ecuación 12, se eligió una gaussiana bidimensional, porque cumple con las características dadas.

Utilizando el entorno matemático “DigitalMicrograph[®]” (www.gatan.com) y usando la ecuación 13; se encontró la función de correlación de fase compensada, que permitió cuantificar el desplazamiento (en pixeles) de una imagen con respecto a la imagen de referencia y la diferencia de foco entre cada una de ellas, la corrección de foco encontrada fue de $-8nm$. Con esa información se corrigió la imagen desplazada para que quede perfectamente alineada, ver Fig. 5. Este procedimiento fue realizado para cada una de las imágenes restantes.

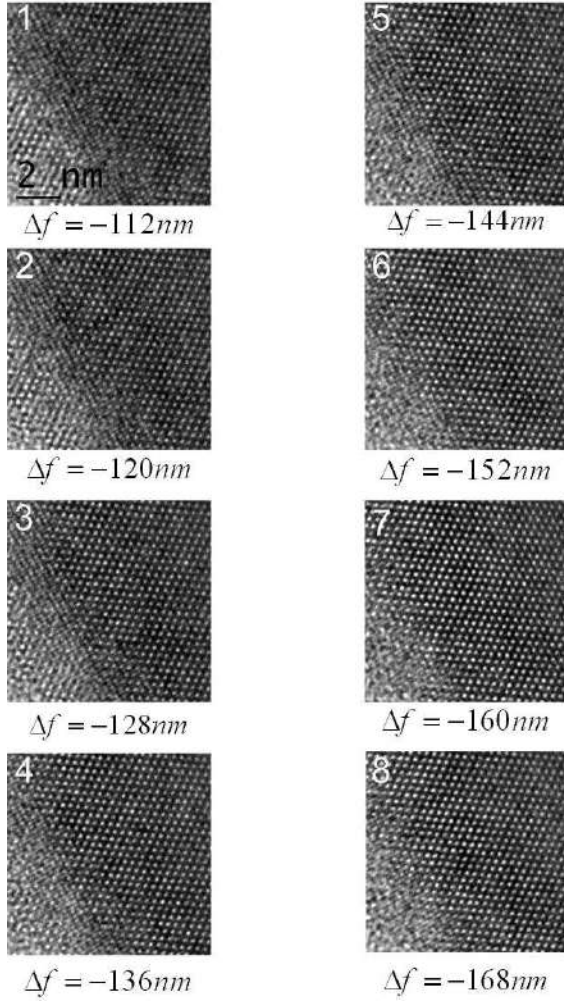


FIG. 6.— 8 imágenes alineadas (512×512 píxeles) para realizar la serie focal. Cada una de ellas se encuentran a distinto foco Δf .

Una vez completado el alineamiento de las imágenes, se escogió una región en la que todas contengan la misma información. De todo el juego de imágenes alineadas se selecciona una región de 512×512 píxeles, común a todas ellas, ver Fig. 6.

4. RECONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA EN EL PLANO DE SALIDA

Usando el algoritmo descrito en la sección 2.9, se encontró las funciones de onda para cada imagen, con una fase inicial $\phi_n^1 = 0$.

Utilizando las ecuaciones 9 y 10, se calculó la función de coherencia espacial, que está dada por

$$E_{es}(u_x, u_y) = \exp\{-\beta^2 \pi^2 [\Delta f(u_x + u_y) + Cs\lambda^2(u_x^3 + u_y^3) + Cs\lambda^2(u_x^2 u_y + u_x u_y^2)]^2\}. \quad (17)$$

De igual forma la función de coherencia temporal se calculó con la ecuación 11 y haciendo las opera-

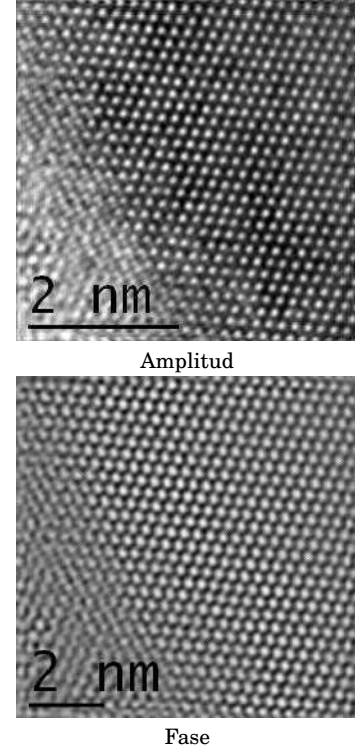


FIG. 7.— Imágenes de la amplitud y fase de la función de onda reconstruidas.

ciones adecuadas se llegó a la siguiente expresión

$$E_{\Delta}(u_x, u_y) = \exp\left[-\frac{(\Delta\pi\lambda)^2}{4}(u_x^2 + u_y^2)^2\right]. \quad (18)$$

Con la ecuación 14, se propagaron las funciones de onda al plano objeto, donde $\Delta f = 0$.

El arreglo bidimensional dado por el producto de las tres funciones mencionadas anteriormente, tiene regiones cuyos valores son cero, debido a la función $T(u)$, por lo que al momento de propagar las funciones, existen valores infinitos en dichas regiones. Estos valores impiden seguir con el desarrollo del método y para evitarlos, se adicionó un valor pequeño al producto de las funciones espaciales, temporales y de aberración coherente, antes de la propagación. Posteriormente, se realizó los pasos del 4 al 9 mencionados en la sección 2.9.

Los parámetros que se usaron para realizar el método, fueron: $\lambda = 0.01969 \text{ \AA}$, (correspondiente a electrones de 300 keV), $C_S = 7 * 10^6 \text{ \AA}$, $\Delta = 32 \text{ \AA}$, $\beta = 0.0001 \text{ rad}$, $u_{max} = 0.77 \text{ \AA}^{-1}$ y el parámetro de convergencia elegido fue $\epsilon = 0.0001$.

Con estos valores y haciendo uso del diagrama de flujo mostrado en la Fig. 4, se realizó la primera iteración. El valor de la suma de error cuadrático fue $SEC_{pro}^1 = 0.716604$ y como se mostró en el paso 6 de la sección 2.9, se obtuvo la nueva función de onda, de la cual, separando la parte imaginaria se adquirió las fases para cada imagen y con la parte real las imágenes relacionadas con la amplitud.

Estas nuevas fases se introdujeron en la función de onda mostrada en el paso 2, de la sección 2.9, para

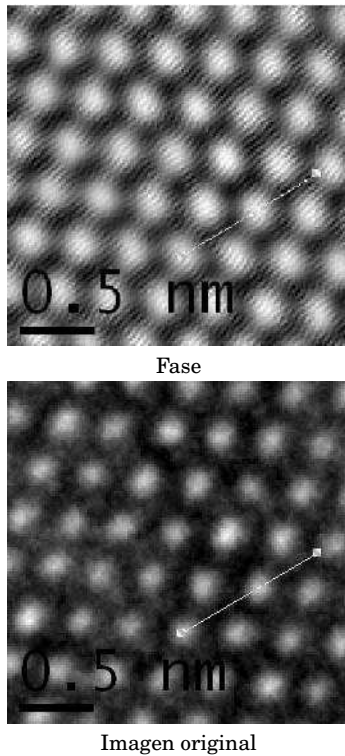


FIG. 8.— Comparación de la fase con la imagen original tomada en el foco $\Delta f = -152nm$.

luego realizar la siguiente iteración. Esta segunda iteración entregó un valor de $SEC_{pro.}^2 = 0.716425$, por tanto la diferencia entre los errores cuadráticos fue $SEC_{pro.}^2 - SEC_{pro.}^1 = 0.000179$, como es mayor que el parámetro de convergencia ϵ , usamos las nuevas fases de las imágenes para realizar una nueva iteración.

El nuevo valor de la suma de error cuadrático fue $SEC_{pro.}^3 = 0.716368$. La diferencia entre este valor y el anterior fue $SEC_{pro.}^3 - SEC_{pro.}^2 = 0.000057$, este valor cumple con la condición del parámetro de convergencia, por lo tanto aplicando la transformada inversa de Fourier a la función de onda promedio, se encontró la función de onda reconstruida. Esta función lleva la información de la amplitud y de la fase de la onda. La Fig. 7 muestra la imagen reconstruida de la amplitud y la fase libre de aberraciones.

5. ANALISIS DE LAS IMÁGENES

La imagen reconstruida cuenta con mejor resolución y mejor contraste, lo que permite hacer mediciones con mas precisión, como por ejemplo la medición entre distancias interplanares.

La calidad y resolución de la imagen reconstruida es superior a cualquiera de las imágenes originalmente tomadas por el microscopio, la Fig. 8 muestra esta comparación, entre la imagen inicial tomada con un $\Delta f = -152nm$ y la imagen de la fase reconstruida.

Se observa que en la fase, los *dumbbells* de silicio, como se los conoce en la literatura, logran ser resueltos. Estos son las regiones oscuras en la fase, donde se puede observar imágenes de las columnas

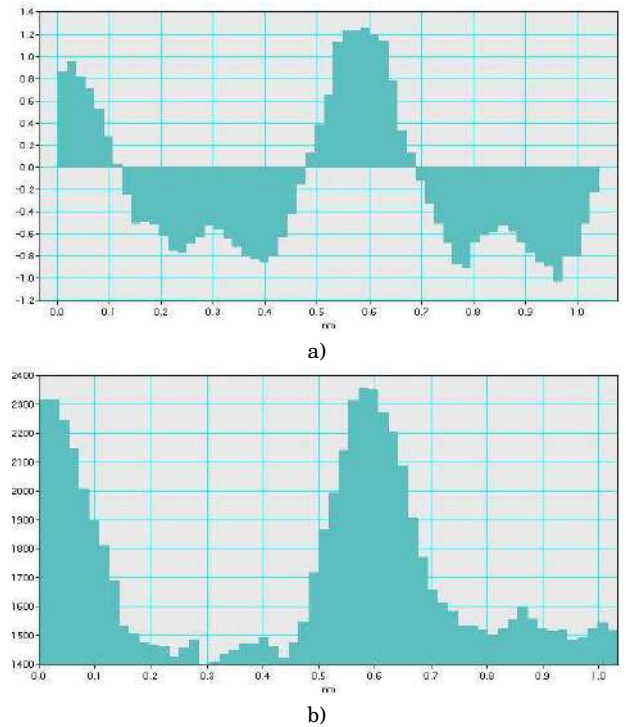


FIG. 9.— a) Perfil de intensidades de la fase. b) Perfil de intensidades de la imagen original.

atómicas de silicio.

Un perfil de intensidad (de la región que corresponde a las líneas de color azul mostradas en la Fig. 8) de ambas imágenes se muestra en la Fig. 9, con la aclaración de que las escalas no son las mismas.

Como se observa en la figura, los valores de los picos para la fase son negativos, esto debido a que los átomos corresponden a las regiones oscuras en la fase. La distancia medida entre estos picos, correspondiente a la separación de las columnas atómicas de los *dumbbells* de silicio fue 1.4 Å.

Este valor, limitado por los pixeles en la Fig. 8, prácticamente coincide con el valor real de 1.36 Å. En la imagen original, se observa un menor contraste y peor resolución que no consigue resolver los *dumbbells*.

6. CONCLUSIONES

El método de alineamiento de imágenes mediante la correlación de fase compensada y la reconstrucción de la función de onda libre de aberraciones mediante el método serie focal, fue aplicada con éxito al Si a lo largo del eje de zona [110]. La calidad de las imágenes (contraste mejorado, ruido reducido, etc.) reconstruidas en relación a las imágenes originales fue mejorada. La resolución punto a punto del microscopio utilizado (1.7 Å) fue mejorada por lo menos hasta 1.4 Å, donde se consiguieron resolver los *dumbbells* de silicio.

Futuramente podrían utilizarse combinaciones y/o comparaciones con otros algoritmos de serie focal, optimizar los resultados y minimizar el tiempo de cómputo, haciendo que el algoritmo sea más eficiente.

Para la determinación de la resolución alcanzada por la técnica serie focal, podrían utilizarse otros sistemas cristalinos con distancias interplanares distintas.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Dr. Daniel Biggemann que gracias a sus trabajos en el Laboratorio de Microscopía Electrónica del LABORATORIO NACIONAL DE LUZ SINCROTRON (Campinas Brazil), pudo proporcionarme las imágenes de alta resolución y el software.

REFERENCIAS

- Allen, L. J., McBride, W., Leary, N. L., & Oxley, M. P. 2004, *Ultramicroscopy* **100**, 104
Born, M. & Wolf, E. 1959, *Principles of Optics* (London)
Coene, W. M. J., Thust, A., de Beeck, M. O., & Dyck, D. V. 1996, *Ultramicroscopy* **64**, 135
Haider, M., Rose, H., Uhlemann, S., Schwan, E., Kabius, B., & Urban, K. 1998, *Ultramicroscopy* **75**, 60
Meyer, R. R., Kirkland, A. I., & Saxton, W. O. 2002, *Ultramicroscopy* **92**, 109
Moto, L. A., Leite, M. S., Biggemann, D., Peternella, F. G., Batenburg, K. J., Medeiros-Rivero, G., & Ramirez, A. J. 2009, *The Journal of Physical Chemistry C Letters* **113**, 9022
Scherzer, O. 1949, *JAP* **20**, 29
William, D. B. & Carter, C. B. 1998, *Transmission electron microscopy, Basics I* (New York)
William, D. B. & Carter, C. B. 1998, *Transmission electron microscopy, Imaging III* (New York)

DISTRIBUCIÓN DE POTENCIA ELECTROMAGNÉTICA EN UN RECINTO METÁLICO

DISTRIBUTION OF ELECTROMAGNETIC POWER WITHIN A METALLIC ENCLOSURE

EVARISTO MAMANI[†] & DIEGO SANJINÉS C.^{††}

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639
La Paz – Bolivia

(Recibido 3 de agosto de 2011; aceptado 30 de septiembre de 2011)

RESUMEN

En este trabajo se estudia la distribución de potencia electromagnética en el interior de un recinto metálico con una apertura sobre la que incide una onda monocromática plana desde el exterior. Se utiliza el método de reemplazar a la apertura como fuente de los campos eléctrico y magnético calculando las correspondientes corrientes eléctrica y magnética; este método analítico conduce directamente a potenciales vectoriales de los que se obtiene los campos eléctrico y magnético, y luego el promedio temporal del vector de Poynting que produce un “mapa” de la distribución de potencia electromagnética en el interior del recinto. La “apertura radiante” se modela por una guía de ondas rectangular a fin de lograr consistencia con las condiciones de contorno apropiadas. Las expresiones analíticas obtenidas se evalúan numéricamente para obtener dicho mapa así como para verificar los resultados conocidos del límite de longitud de onda pequeña y de longitud de onda comparable al tamaño de la apertura. Asimismo se verifica el resultado para la condición trivial de una apertura de dimensiones nulas (jaula de Faraday). Los resultados generales de este trabajo son satisfactorios y permiten su verificación experimental.

Descriptor: electromagnetismo clásico aplicado — propagación de ondas electromagnéticas — guías de onda

Código(s) PACS: 41.20.q, 41.20.Jb, 84.40.Az

ABSTRACT

We study the distribution of electromagnetic power within a metallic enclosure when exposed to a monochromatic plane wave that passes through a slit located on the enclosure. We use the method of replacing the slit with a source of electric and magnetic fields and calculate the corresponding currents. This analytical method yields the vector potentials and the fields, and thereafter we calculate the time-average of the Poynting vector, which allows to draw a “map” of the electromagnetic power within the enclosure. The model for the “radiant slit” is a rectangular wave guide so that the appropriate boundary conditions are satisfied. The analytical expressions produced by this work are evaluated numerically to obtain the “map”, as well as to verify the known limiting cases of small wavelength and a wavelength comparable in size to the slit dimensions. When the slit has a null size we obtain the Faraday cage effect, as expected. The general results of this work are satisfactory and allow for their experimental verification.

Subject headings: applied classical electromagnetism — electromagnetic wave propagation — waveguides

1. INTRODUCCIÓN

Cualquier equipo electrónico que se encuentra en un ambiente electromagnético está sujeto a perturbaciones de diferente naturaleza. Usualmente se uti-

liza blindajes metálicos para proteger dicho equipo. El caso ideal es el conocido como “Jaula de Faraday”, que anula la componente eléctrica del campo en el interior del recinto por lo que la potencia correspondiente es cero. Cuando existen aperturas en el recinto la onda electromagnética penetra en su interior y puede afectar al equipo electrónico. Este es el motivo

[†]evaristomamani@gmail.com

^{††}diegosanjinescastedo@gmail.com

que inspira este trabajo pues se investigará cómo se distribuye la potencia electromagnética adentro del recinto por causa de las aperturas.

Existen modelos analíticos (ver, por ejemplo, Ali et al. 2005) y numéricos (Cerri & Primiani 1992) para calcular la efectividad de un blindaje. El resultado presentado por Bethe (Bethe 1944) para un pequeño agujero afirma que la eficiencia del blindaje se verá notablemente reducida. Su solución sólo se aplica a geometrías simples (McDonald 1985) para formas más complejas de aperturas se necesitan técnicas numéricas (Arvas & Harrington 1983). Un método analítico simple acude a un modelo de líneas de transmisión donde el recinto en forma de caja rectangular se considera como una guía de ondas (Robinson et al. 1996 y Dawson et al. 1998). Así, el voltaje y corriente en un punto dado del circuito de la línea de transmisión equivalen al campo eléctrico y magnético respectivamente en ese punto.

Las formulaciones analíticas coinciden razonablemente bien con las simulaciones numéricas en el cálculo de la eficiencia de un blindaje. Se puede mencionar: el método de elementos finitos, el método de dominio-tiempo de diferencias finitas, el método de los momentos (Kimmel & Singer 1995 y Wallyn & Zutter 2001), el método de la línea de transmisión, y métodos híbridos. Asimismo existen paquetes computacionales para calcular la eficiencia de un blindaje, por ejemplo Emap5¹.

En este trabajo se utiliza la teoría electromagnética (ecuaciones de Maxwell) para la determinación de los campos eléctrico y magnético en función de sus correspondientes potenciales vectoriales. Se utiliza asimismo el método de momentos junto al método de Galerkin a fin de acoplar los campos eléctrico y magnético y garantizar su continuidad en la apertura. Aunque el método general utilizado en este trabajo permite modelar un recinto metálico de cualquier forma y con un número arbitrario de aperturas, por razones de simplicidad consideraremos sólo el modelo elemental de un recinto en forma de un paralelepípedo recto con una apertura rectangular, pues éste conserva las características que serán esenciales en el tratamiento de un problema más general. En lo que respecta a la onda electromagnética incidente, se considerará una onda plana que tiene una dirección y orientación arbitrarias, así como cualquier frecuencia. En la sección 2 se describe el modelo del paralelepípedo recto (aún con varias aperturas) y se propone la aproximación de tratar a la apertura rectangular como si fuera una guía de ondas. En la sección 3 se desarrolla de manera concisa la relación fundamental entre los potenciales vectoriales eléctrico y magnético y los campos correspondientes. La sección 4, que es el núcleo de este trabajo, comprende el desarrollo analítico de las expresiones para los campos con las que se calculará la potencia electromagnética promedio en el interior del recinto. En la sección 5 se reporta los resultados de aplicar numéricamente las expresiones calcu-

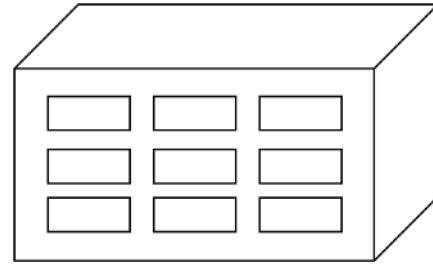


FIG. 1.— Geometría de un recinto metálico (paralelepípedo recto) con aperturas rectangulares

ladas en la sección 4 a los casos de incidencia normal e incidencia oblicua de la onda electromagnética sobre la apertura del recinto. En la sección 6 se describe un procedimiento heurístico para simular numéricamente el problema central de este trabajo y así disponer de otro método para confirmar, hasta donde lo permitirían las aproximaciones supuestas, las predicciones físicas anunciadas en los resultados.

2. FORMULACIÓN Y MODELADO DEL PROBLEMA

Considere un recinto metálico en forma de un paralelepípedo recto con aperturas rectangulares ubicadas en la cara frontal donde incide una onda electromagnética plana y monocromática. El problema consiste de la determinación de los campos eléctrico (\vec{E}) y magnético (\vec{H}), y de aquí calcular la distribución de potencia electromagnética ($\vec{S} \propto \vec{E} \times \vec{H}$) en dicho recinto. La onda puede incidir desde cualquier dirección y tener cualquier orientación espacial.

En las ecuaciones de Maxwell los campos (\vec{E} y \vec{H}) se relacionan con las cargas y corrientes eléctricas (ρ y \vec{J}), pero no existen los equivalentes de cargas y corrientes magnéticas de conducción (ρ_m y \vec{M}). Las ecuaciones permiten explicar la totalidad de los fenómenos de radiación, pero en algunos casos, como el de las antenas de apertura, conviene sustituir los campos eléctricos y magnéticos por fuentes equivalentes (ver, por ejemplo, Collin 1980). La introducción del concepto de corriente magnética simplifica los cálculos, como por ejemplo en las espiras donde el problema del hilo eléctrico circular podría estudiarse como una corriente magnética perpendicular a la superficie que contiene a la espira.

En la Figura 1, la onda incidente plana induce campos eléctricos sólo en las aperturas, pero se anulan en las demás regiones del metal. Se utilizará entonces el modelo de aproximación propuesto por Ali (Ali et al. 2005) para los campos eléctricos en las aperturas como si éstas fueran guías de onda rectangulares.

3. ASPECTOS PRELIMINARES: DETERMINACIÓN DE LOS CAMPOS USANDO POTENCIALES VECTORIALES

Las fuentes de radiación pueden ser de dos tipos: vector densidad de corriente eléctrica (\vec{J}) y vector densidad de corriente magnética (\vec{M}). Algunos problemas que involucran corrientes eléctricas pueden ser proyectados en forma equivalente a problemas

¹ Disponible en <http://www.emclab.umr.edu/emap5/>

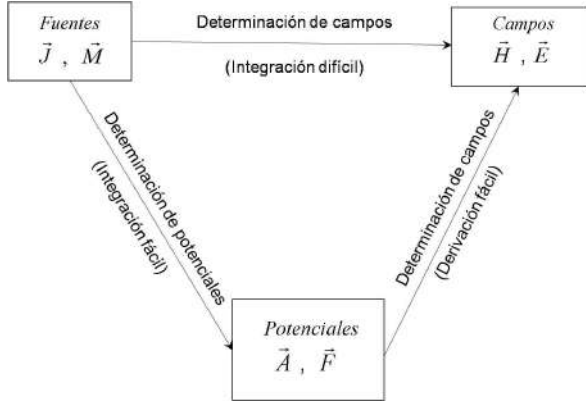


FIG. 2.— Relación entre los potenciales vectoriales magnético y eléctrico (\vec{A} y \vec{F}) para determinar los correspondientes campos (\vec{H} y \vec{E}) en función de las fuentes magnética y eléctrica (\vec{J} y \vec{M}).

que involucran corrientes magnéticas como afirma Collin (Collin 1980; el uso de corrientes magnéticas es simplemente una herramienta matemática, aunque tales corrientes no existan). La figura 2 muestra los caminos por los cuales pueden tratarse los problemas electromagnéticos que involucran campos de radiación. La fuente \vec{J} produce el potencial vectorial magnético (\vec{A}) y la fuente \vec{M} produce el potencial vectorial eléctrico (\vec{F}).

Dentro de la aproximación de ondas planas y monocromáticas, se puede proponer como solución de las ecuaciones de Maxwell (Jackson 1996):

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},\end{aligned}\quad (1)$$

de tal forma que dichas ecuaciones se reescriben como:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= \rho_m, \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + i\omega \vec{D}, \\ \nabla \times \vec{E} &= -i\omega \vec{B} - \vec{M}.\end{aligned}\quad (2)$$

Recordemos que el uso de los potenciales en la determinación de los campos permite aplicar el principio de superposición, es decir, los campos totales (\vec{E} , \vec{H}) en algún punto específico resultan de la suma de los campos debidos a las corrientes eléctricas (\vec{E}_A , \vec{H}_A) y los campos debidos a las corrientes magnéticas (\vec{E}_F , \vec{H}_F):

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_A + \vec{E}_F, \\ \vec{H} &= \vec{H}_A + \vec{H}_F,\end{aligned}\quad (3)$$

donde \vec{E}_A y \vec{H}_A resultan del potencial vectorial magnético \vec{A} (que se obtiene de las fuentes eléctricas \vec{J} y ρ) y \vec{E}_F y \vec{H}_F resultan del potencial vectorial eléctrico \vec{F} (que se obtiene de las fuentes magnéticas \vec{M} y ρ_m).

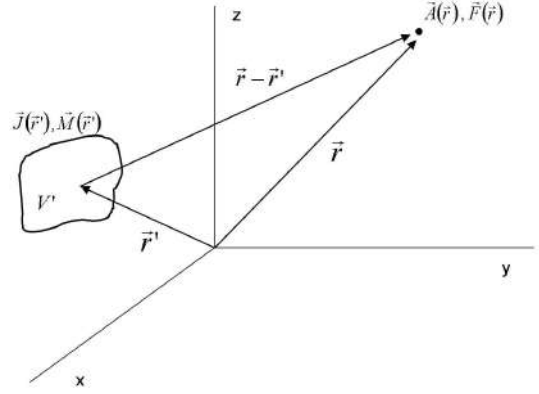


FIG. 3.— Potenciales vectoriales magnético y eléctrico (\vec{A} y \vec{F}) generados por las fuentes magnética y eléctrica (\vec{J} y \vec{M}) distribuidas en la región finita V' .

Si se combina las ecuaciones de Maxwell (2) para el caso eléctrico ($\vec{F} = \vec{M} = \vec{0}$, $\rho_m = 0$) y para el caso magnético ($\vec{A} = \vec{J} = \vec{0}$, $\rho = 0$), y además se utiliza el calibre de Lorentz (ver, por ejemplo, Jackson 1996), se obtiene las ecuaciones de onda vectoriales inhomogéneas de Helmholtz:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} &= -\mu \vec{J}, \\ \nabla^2 \vec{F} + k^2 \vec{F} &= -\epsilon \vec{M},\end{aligned}\quad (4)$$

cuyas soluciones tienen la forma usual (ver, por ejemplo, Khan et al. 2005):

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV', \\ \vec{F}(\vec{r}) &= \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{V'} \vec{M}(\vec{r}') \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV';\end{aligned}\quad (5)$$

la región de integración correspondiente se indica en la figura 3.

4. DESARROLLO DEL MODELO

En una guía de ondas rectangular de dimensiones $L \times W$ las componentes del campo eléctrico transversal están dadas por (ver, por ejemplo, Wangness 1994):

$$\begin{aligned}E_x &= E_{0x} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right), \\ E_y &= E_{0y} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right), \\ E_z &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico en las aperturas se expresará en forma similar al de una guía de ondas rectangular, cuyas amplitudes deberán ser determinadas de acuerdo a las condiciones de contorno del problema original. Así, después de trasladar el origen del sistema de coordenadas (x, y) al centro de la apertura (x_{cr}, y_{cr}) como se muestra en la figura 4, se obtiene el campo eléctrico en la apertura:

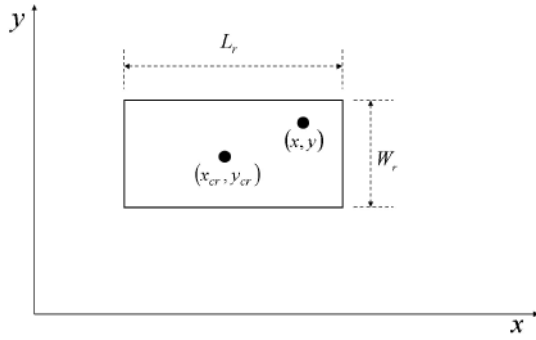


FIG. 4.— Coordenadas del centro de la r -ésima apertura y de un punto arbitrario de la apertura.

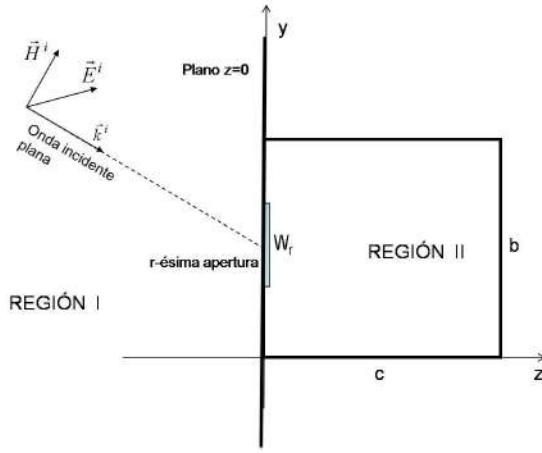


FIG. 5.— Corte lateral (en $x = 0$) del recinto metálico cuyo interior es la REGIÓN II y cuyo exterior es la REGIÓN I; se aprecia las componentes eléctrica y magnética de la onda incidente plana sobre la r -ésima apertura.

$$\begin{aligned} \vec{E}^A &= \sum_r \left\{ \sum_{p,q} V_{rpq} \cos\left[\frac{p\pi}{L_r}\left(\frac{L_r}{2} + x - x_{cr}\right)\right] \right. \\ &\quad \times \left. \sin\left[\frac{q\pi}{W_r}\left(\frac{W_r}{2} + y - y_{cr}\right)\right] \hat{i} \right. \\ &\quad + \sum_{p,q} U_{rpq} \sin\left[\frac{p\pi}{L_r}\left(\frac{L_r}{2} + x - x_{cr}\right)\right] \\ &\quad \times \left. \cos\left[\frac{q\pi}{W_r}\left(\frac{W_r}{2} + y - y_{cr}\right)\right] \hat{j} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

donde: U_{rpq}, V_{rpq} son las amplitudes de los p, q -ésimos modos correspondientes a la r -ésima apertura (diferente de cero en las aperturas y cero en otro lugar); L_r, W_r son el largo y ancho de la r -ésima apertura; R es el número total de aperturas y (x_{cr}, y_{cr}) es la coordenada del centro de la r -ésima apertura.

Usando el teorema de equivalencia (Apéndice A) se puede reemplazar los campos en las aperturas dados en (7) por las siguientes corrientes magnéticas equivalentes:

$$\begin{aligned} \vec{M}^A &= \hat{n} \times \vec{E}^A = -\hat{k} \times \vec{E}^A \\ &= -\hat{k} \times \sum_r \sum_{p,q} [\hat{i} V_{rpq} \Phi_{rpqy} + \hat{j} U_{rpq} \Psi_{rpqx}] \\ &= \sum_{r,p,q} [\hat{i} U_{rpq} \Psi_{rpqx} - \hat{j} V_{rpq} \Phi_{rpqy}] \\ &= \sum_{\alpha} [\hat{i} U_{\alpha} \Psi_{\alpha x} - \hat{j} V_{\alpha} \Phi_{\alpha y}], \end{aligned} \quad (8)$$

donde α es la triada de índices (r, p, q) que se suman y:

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha x} &= \sin\left[\frac{p\pi}{L_r}\left(\frac{L_r}{2} + x - x_{cr}\right)\right] \cos\left[\frac{q\pi}{W_r}\left(\frac{W_r}{2} + y - y_{cr}\right)\right], \\ \Phi_{\alpha y} &= \cos\left[\frac{p\pi}{L_r}\left(\frac{L_r}{2} + x - x_{cr}\right)\right] \sin\left[\frac{q\pi}{W_r}\left(\frac{W_r}{2} + y - y_{cr}\right)\right], \end{aligned} \quad (9)$$

tal que $U_{\alpha}, V_{\alpha} \neq 0$ si $(x, y) \in$ apertura y $U_{\alpha}, V_{\alpha} = 0$ si $(x, y) \notin$ apertura (donde “apertura” es la región definida en términos de L_r y W_r en la figura 4).

El problema de determinar el campo electromagnético para un recinto rectangular con aperturas puede ser dividido en dos regiones: región I ($z \leq 0$) que es la región externa al recinto donde se tiene el campo incidente (todas las cantidades con superíndice “i”) y el campo reflejado (todas las cantidades con superíndice “r”) y por otra parte la región II ($0 < z \leq c$) que es la región interna al recinto donde se tiene el campo transmitido (todas las cantidades sin superíndices). Esto se muestra en la figura 5 en una vista lateral.

El problema en el interior del recinto es similar al de una cavidad resonante rectangular que es irradiada por varias fuentes de corrientes magnéticas equivalentes. El problema externo consiste de fuentes de corrientes magnéticas equivalentes situadas en el plano $z = 0$ que se supone infinito; los valores de las amplitudes U_{α}, V_{α} son determinados por el acoplamiento de las ecuaciones en las regiones I y II.

4.1. Campo electromagnético afuera del recinto

El campo electromagnético afuera del recinto se obtiene a través de la superposición del campo incidente y del campo debido a la radiación en las aperturas.

A continuación se calculará el campo electromagnético debido a una onda incidente plana para cualquier ángulo de incidencia y orientación. Supondremos que una onda plana armónica irradia el recinto como se muestra en la figura 6.

El campo magnético incidente puede ser escrito como:

$$\vec{H}^i = (H_{\theta}^i \hat{\theta}^i + H_{\phi}^i \hat{\phi}^i) e^{-i \vec{k}^i \cdot \vec{r}}, \quad (10)$$

cuyas componentes cartesianas son:

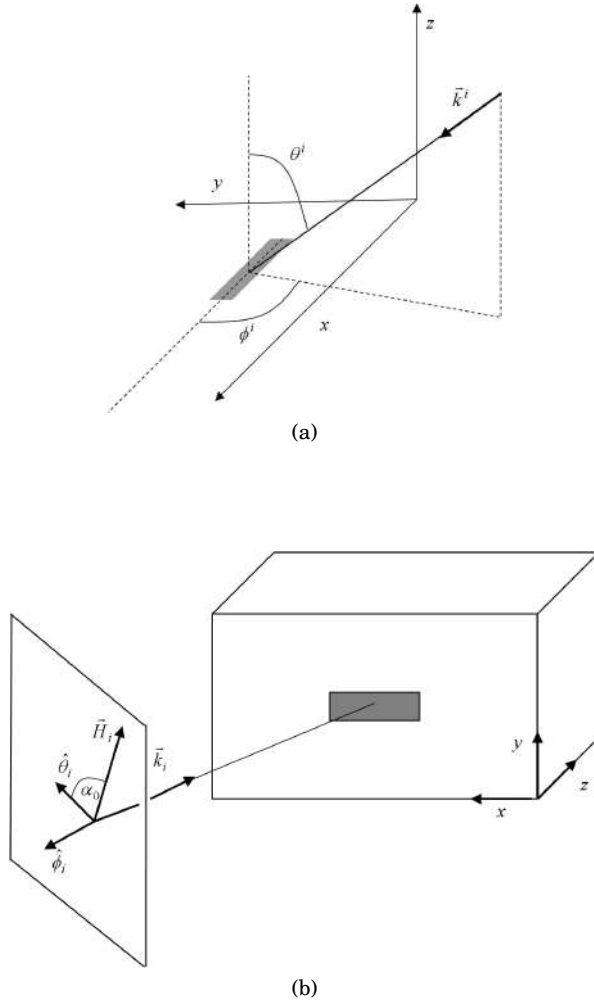


FIG. 6.— Representación tridimensional de la figura 5; en este caso se especifica los ángulos θ^i y ϕ^i de la dirección de incidencia de la onda plana (grafico a) y sus correspondientes vectores unitarios $\hat{\theta}^i$ y $\hat{\phi}^i$ (grafico b).

$$\begin{aligned} H_x^i &= H^i (\cos \alpha_0^i \cos \theta^i \cos \phi^i - \sin \alpha_0^i \sin \phi^i) e^{-i\vec{k}^i \cdot \vec{r}}, \\ H_y^i &= H^i (\cos \alpha_0^i \cos \theta^i \sin \phi^i + \sin \alpha_0^i \cos \phi^i) e^{-i\vec{k}^i \cdot \vec{r}}, \\ H_z^i &= -H^i \cos \alpha_0^i \sin \theta^i e^{-i\vec{k}^i \cdot \vec{r}}, \end{aligned} \quad (11)$$

donde: k_0 es el número de onda (con $\vec{k}^i = k_0 \hat{k}^i$), ϕ^i

y θ^i son los ángulos de incidencia, y α_0^i es el ángulo de orientación. Las expresiones en (11) se obtuvieron haciendo una transformación simple de coordenadas esféricas a cartesianas. Para calcular la radiación del campo debido a las aperturas (campo reflejado), considérese la apertura situada sobre el plano $z = 0$; el campo debido a la corriente magnética \vec{M} se puede obtener a partir del potencial vectorial eléctrico \vec{F}^r como se afirma en (Jackson 1996) y en (Khan et al. 2005):

$$\begin{aligned} \vec{E}^r(\vec{M}_r) &= -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F}^r, \\ \vec{H}^r(\vec{M}_r) &= -i\omega(\vec{F}^r + \frac{1}{k_0^2} \nabla(\nabla \circ \vec{F}^r)), \end{aligned} \quad (12)$$

donde \vec{F}^r está dado por:

$$\vec{F}^r = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \int 2\vec{M}_r \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} ds, \quad (13)$$

con $ds = dx'dy'$ el área infinitesimal de la apertura; el factor 2 se debe al reflejo de la densidad de corriente magnética tanto externa ($z \leq 0$) como interna ($0 < z \leq c$); (ver, por ejemplo, Balanis 1985 cap. 12) y (Chalmer et al. 1978) recordemos que en la derivación de las ecuaciones para el campo electromagnético no se consideró fronteras o contornos, por lo que se supuso que el plano $z = 0$ es infinito, lo que para fines de nuestro problema es una buena aproximación (Sewell et al. 1998) y (Gardner & Costache 1995).

A fin de resolver la integral en (13), aplicaremos la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \frac{e^{-k_z|z-z'|}}{k_z} \\ &\times e^{-ik_x(x-x')-ik_y(y-y')}, \end{aligned} \quad (14)$$

que se sustituye en (13), junto con $k_0^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ (k_0 es el número de onda en el espacio libre). Así, las componentes cartesianas de \vec{F}^r en (13) son:

$$\begin{aligned} F_x^r &= \frac{\epsilon_0}{4\pi^2} \int dk_x dk_y \frac{e^{-ik_z|z|}}{ik_z} e^{-i(k_x x + k_y y)} \sum_{\alpha} \int ds e^{i(k_x x' + k_y y')} U_{\alpha} \Psi_{\alpha x} \\ F_y^r &= -\frac{\epsilon_0}{4\pi^2} \int dk_x dk_y \frac{e^{-ik_z|z|}}{ik_z} e^{-i(k_x x + k_y y)} \sum_{\alpha} \int ds e^{i(k_x x' + k_y y')} V_{\alpha} \Phi_{\alpha y}. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
E_x^r &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\alpha} V_{\alpha} \int dk_x dk_y e^{-ik_z|z|} \phi_{\alpha y} e^{-i(k_x x + k_y y)}, \\
E_y^r &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\alpha} U_{\alpha} \int dk_x dk_y e^{-ik_z|z|} \psi_{\alpha x} e^{-i(k_x x + k_y y)}, \\
E_z^r &= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{\alpha} \int dk_x dk_y e^{-ik_z|z|} \left(\frac{V_{\alpha} \phi_{\alpha y} k_x + U_{\alpha} \psi_{\alpha x} k_y}{k_z} \right) e^{-i(k_x x + k_y y)}, \\
H_x^r &= -\frac{\omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \sum_{\alpha} \int dk_x dk_y e^{-ik_z|z|} e^{-i(k_x x + k_y y)} \left[U_{\alpha} \psi_{\alpha x} \left(\frac{k_0^2 - k_x^2}{k_z} \right) - V_{\alpha} \phi_{\alpha y} \left(\frac{k_x k_y}{k_z} \right) \right], \\
H_y^r &= \frac{\omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \sum_{\alpha} \int dk_x dk_y e^{-ik_z|z|} e^{-i(k_x x + k_y y)} \left[V_{\alpha} \phi_{\alpha y} \left(\frac{k_0^2 - k_y^2}{k_z} \right) - U_{\alpha} \psi_{\alpha x} \left(\frac{k_x k_y}{k_z} \right) \right], \\
H_z^r &= -\frac{\omega \epsilon_0}{4\pi^2 k_0^2} \sum_{\alpha} \int dk_x dk_y e^{-ik_z|z|} (-k_x U_{\alpha} \psi_{\alpha x} + k_y V_{\alpha} \phi_{\alpha y}) e^{-i(k_x x + k_y y)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Estas expresiones en (16) se obtuvieron utilizando las ecuaciones (12) que dan los campos en función del potencial vectorial eléctrico (15). Además en (16) se utilizó el resultado de las transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha y}(k_x, k_y) &= \int dS \Phi_{\alpha y} e^{ik_x x' + ik_y y'}, \\
\psi_{\alpha x}(k_x, k_y) &= \int dS \Psi_{\alpha x} e^{ik_x x' + ik_y y'}.
\end{aligned} \tag{17}$$

En el apéndice B se muestra el cálculo completo.

4.2. Campo electromagnético adentro del recinto

Las corrientes magnéticas equivalentes sobre las aperturas irradian campos electromagnéticos adentro del recinto, por lo que el campo en algún punto interior se obtiene por la superposición de los campos debidos a cada fuente de corriente magnética equivalente. De este modo el campo debido a la r -ésima apertura tendrá la forma de las ecuaciones (12). Sin embargo, el potencial vectorial eléctrico que aparece en estas ecuaciones satisface la ecuación de onda inhomogénea correspondiente a la segunda ecuación en (4):

$$\nabla^2 \vec{F} + k_0^2 \vec{F} = -\epsilon_0 \vec{M}_r, \tag{18}$$

donde se supuso una variación temporal de los campos de la forma armónica $e^{i\omega t}$. Si $G(x, y, z, x', y', z')$ es

la función de Green para el interior del recinto, entonces la solución \vec{F} de (18) se puede escribir como

$$\vec{F} = \int dx' dy' dz' G(x, y, z, x', y', z') \vec{M}_r(x', y', z'). \tag{19}$$

Utilizando el procedimiento usual para resolver ecuaciones diferenciales inhomogéneas con el método de la función de Green, se obtiene las componentes del potencial vectorial eléctrico:

$$\begin{aligned}
F_x^x &= \sum_{\alpha\beta} \frac{\epsilon_0 \epsilon_0 m \epsilon_0 n U_{\alpha}}{k_I a b \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \\
&\quad \times \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta, x}, \\
F_y^y &= \sum_{\alpha\beta} \frac{\epsilon_0 \epsilon_0 m \epsilon_0 n V_{\alpha}}{k_I a b \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \\
&\quad \times \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta, y},
\end{aligned} \tag{20}$$

donde $\alpha = (r, p, q)$ y $\beta = (m, n)$ son los conjuntos de índices que se suman.

Utilizando las ecuaciones (12) y derivando parcialmente las componentes en x y en y del potencial vectorial eléctrico dados en (20), se tienen las componentes del campo eléctrico y magnético:

$$\begin{aligned}
E_x^x &= 0 \\
E_y^x &= \frac{1}{ab} \sum_{\alpha\beta} U_\alpha \frac{\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{\text{sen}(k_I c)} \text{sen}(k_I(z-c)) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,x} \\
E_z^x &= -\frac{\pi}{ab^2} \sum_{\alpha\beta} U_\alpha \frac{n\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,x} \\
E_x^y &= -\frac{1}{ab} \sum_{\alpha\beta} V_\alpha \frac{\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{\text{sen}(k_I c)} \text{sen}(k_I(z-c)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,y} \\
E_y^y &= 0 \\
E_z^y &= \frac{\pi}{a^2 b} \sum_{\alpha\beta} V_\alpha \frac{m\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,y} \\
H_x^x &= -\frac{i\omega\epsilon_0}{abk_0^2} \sum_{\alpha\beta} U_\alpha \frac{\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \left(k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right) \cos(k_I(z-c)) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,x} \\
H_y^x &= \frac{i\omega\epsilon_0\pi^2}{a^2 b^2 k_0^2} \sum_{\alpha\beta} U_\alpha \frac{mn\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,x} \\
H_z^x &= \frac{i\omega\epsilon_0\pi}{a^2 b k_0^2} \sum_{\alpha\beta} U_\alpha \frac{m\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \text{sen}(k_I(z-c)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,x} \\
H_x^y &= \frac{i\omega\epsilon_0\pi^2}{a^2 b^2 k_0^2} \sum_{\alpha\beta} V_\alpha \frac{mn\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,y} \\
H_y^y &= -\frac{i\omega\epsilon_0}{abk_0^2} \sum_{\alpha\beta} V_\alpha \frac{\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \left(k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right) \cos(k_I(z-c)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,y} \\
H_z^y &= \frac{i\omega\epsilon_0\pi}{ab^2 k_0^2} \sum_{\alpha\beta} V_\alpha \frac{n\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}{k_I \text{sen}(k_I c)} \text{sen}(k_I(z-c)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) I_{\alpha\beta,y}
\end{aligned} \tag{21}$$

Hasta el momento parecería que las soluciones en las diferentes regiones del recinto (afuera y adentro) son distintas. Sin embargo, para tener una solución única del campo electromagnético en todo el espacio se debe satisfacer condiciones de continuidad sobre las superficies comunes (en este caso $z = 0$). Así, las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético deben ser continuas en las aperturas para producir las ecuaciones integrales acopladas con las amplitudes de las corrientes magnéticas como incógnitas (Beck & Cockrell 2005). Estas ecuaciones que se obtienen en combinación con el método de momentos (ver, por ejemplo, Fernandez 2004 y Zozaya 2008) se pueden resolver para dichas amplitudes, como se detalla a continuación.

4.3. Condiciones de continuidad

El campo magnético total dentro de la cavidad se escribe como:

$$\begin{aligned}
H_x &= H_x^x + H_x^y, \\
H_y &= H_y^x + H_y^y.
\end{aligned} \tag{22}$$

Utilizando la continuidad del campo magnético tangencial (Goudos & Samaras 2000) a través de las

aperturas ubicadas en el plano $z = 0$, se tiene:

$$H_x^i \Big|_{z=0} + H_x^r \Big|_{z=0} = H_x^x \Big|_{z=0} + H_x^y \Big|_{z=0}, \tag{23}$$

$$H_y^i \Big|_{z=0} + H_y^r \Big|_{z=0} = H_y^x \Big|_{z=0} + H_y^y \Big|_{z=0}. \tag{24}$$

Estas ecuaciones se obtuvieron suponiendo que sobre el recinto incide una onda plana desde $z = -\infty$. Usando las componentes del campo magnético en (16) junto con (21), y seleccionando a $\Psi_{\alpha'x}$ para (23) y $-\Phi_{\alpha'y}$ para (24) como funciones de prueba, se aplica el método de Galerkin (ver, por ejemplo, Andrade 1982) para reducir las ecuaciones (23) y (24):

$$I_{\alpha'x}^i = \sum_{\alpha} \left(U_{\alpha} Y_{\alpha\alpha'}^{xx} + V_{\alpha} Y_{\alpha\alpha'}^{xy} \right), \tag{25}$$

$$I_{\alpha'y}^i = \sum_{\alpha} \left(U_{\alpha} Y_{\alpha\alpha'}^{yx} + V_{\alpha} Y_{\alpha\alpha'}^{yy} \right), \tag{26}$$

donde:

$$\begin{aligned}
Y_{\alpha\alpha'}^{xx} &= -\frac{i\omega}{abk_0^2} \sum_{\beta} \frac{\epsilon_0\epsilon_0m\epsilon_0n}{k_I \text{sen}(k_Ic)} \left(k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right) \cos(k_Ic) I_{\alpha'\beta,x} I_{\alpha\beta,x} + \frac{\omega\epsilon_O}{4\pi^2k_0^2} \int dk_x dk_y \psi_{\alpha x} \psi_{\alpha'x}^* \left(\frac{k_0^2 - k_x^2}{k_z}\right), \\
Y_{\alpha\alpha'}^{xy} &= \frac{i\omega\pi^2}{a^2b^2k_0^2} \sum_{\beta} \frac{mn\epsilon_0\epsilon_0m\epsilon_0n}{k_I \text{sen}(k_Ic)} \cos(k_Ic) I_{\alpha'\beta,x} I_{\alpha\beta,y} + \frac{\omega\epsilon_O}{4\pi^2k_0^2} \int dk_x dk_y \phi_{\alpha y} \psi_{\alpha'x}^* \left(\frac{k_x k_y}{k_z}\right), \\
Y_{\alpha\alpha'}^{yx} &= -\frac{i\omega\pi^2}{abk_0^2} \sum_{\beta} \frac{\epsilon_0\epsilon_0m\epsilon_0n}{k_I \text{sen}(k_Ic)} \cos(k_Ic) I_{\alpha'\beta,y} I_{\alpha\beta,x} + \frac{\omega\epsilon_O}{4\pi^2k_0^2} \int dk_x dk_y \psi_{\alpha x} \phi_{\alpha'y}^* \left(\frac{k_x k_y}{k_z}\right), \\
Y_{\alpha\alpha'}^{yy} &= \frac{i\omega}{abk_0^2} \sum_{\beta} \frac{\epsilon_0\epsilon_0m\epsilon_0n}{k_I \text{sen}(k_Ic)} \left(k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right) \cos(k_Ic) I_{\alpha'\beta,y} I_{\alpha\beta,y} + \frac{\omega\epsilon_O}{4\pi^2k_0^2} \int dk_x dk_y \phi_{\alpha y} \phi_{\alpha'y}^* \left(\frac{k_0^2 - k_y^2}{k_z}\right),
\end{aligned} \tag{27}$$

además se pueden escribir las siguientes integrales (sobre la apertura) cuyo cálculo y resultados se muestran en los apéndices B y C:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha'x}^i &= \int ds H_x^i \Psi_{\alpha'x}, \\
I_{\alpha'y}^i &= -\int ds H_y^i \Phi_{\alpha'y}, \\
\psi_{\alpha x} &= \int ds \Psi_{\alpha x} e^{ik_x x + ik_y y}, \\
\phi_{\alpha y} &= \int ds \Phi_{\alpha y} e^{ik_x x + ik_y y}, \\
I_{\alpha'\beta,x} &= \int ds \Psi_{\alpha'x} \text{sen}\left(\frac{m\pi(x' + x_{cr})}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y' + y_{cr})}{b}\right), \\
I_{\alpha'\beta,y} &= \int ds \Phi_{\alpha'y} \cos\left(\frac{m\pi(x' + x_{cr})}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi(y' + y_{cr})}{b}\right).
\end{aligned} \tag{28}$$

5. RESULTADOS

El resultado que corresponde al caso más sencillo es el de una onda electromagnética plana que incide de forma normal a la superficie metálica donde está la apertura. Otro resultado que se reporta es el del caso general de incidencia oblicua para cualquier dirección del vector \vec{k}^i en la figura 5. En ambos casos se calcula la distribución de la potencia promediada en el tiempo en el interior del recinto. Para efectos de la validación de las expresiones obtenidas en este trabajo, se tomó los límites de una longitud

de onda muy pequeña y, por otra parte, de un recinto muy grande comparados con el tamaño de la apertura. En estos dos casos los resultados coinciden con aquellos reportados en los textos (ver, por ejemplo, Hecht & Zajac 2003). Las simulaciones muestran las regiones más expuestas a los efectos de la interferencia y de aquí se interpretan los resultados obtenidos por este método. Vale la pena notar que el patrón de distribución de potencia sufre un corte abrupto (i.e., potencia nula) en la dirección transversal al plano de la apertura, lo que sugiere una analogía con el caso de longitud de onda pequeña; sin embargo, adentro de este “rayo” difractado se puede notar una distribución de potencia que no es intuitivamente predecible. Este efecto de corte es una consecuencia directa de las condiciones de contorno para el recinto metálico.

5.1. Caso de incidencia normal

Consideremos la incidencia normal de una onda plana sobre una apertura simple ubicada en el plano $z = 0$; el campo magnético de esta onda está orientado a lo largo del eje x (cf. figura 5). En este caso en la ecuación (26) $I_{\alpha'y}^i = 0$. El cálculo de $I_{\alpha'x}^i$ definida en (28) da como resultado (trasladando el origen del sistema de referencia al centro de la apertura):

$$I_{\alpha'x}^i = H_x^i L_r' W_r' (1 - \cos p'\pi) / p'\pi \tag{29}$$

para $q' = 0$ y $I_{\alpha'x}^i = 0$ para $q' \neq 0$.

El cálculo de $Y_{\alpha\alpha'}^{xx}$ definida en (27) para el modo fundamental ($\alpha = \alpha' = (1, 1, 0)$) da como resultado:

$$Y_{110110}^{xx} = -\frac{i\omega}{abk_0^2} \sum_{\beta} \frac{\epsilon_0\epsilon_0m\epsilon_0n}{k_I \text{sen}(k_Ic)} \left(k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right) \cos(k_Ic) I_{110\beta,x}^2 + \frac{\omega\epsilon_O}{4\pi^2k_0^2} \int dk_x dk_y \psi_{110x} \psi_{110x}^* \left(\frac{k_0^2 - k_x^2}{k_z}\right), \tag{30}$$

donde

$$I_{\alpha'x}^i = I_{110x}^i = \frac{2H_x^i LW}{\pi}, \tag{31}$$

$$\psi_{110x} \psi_{110x}^* = \left[\frac{\pi L / k_y}{(\pi/2)^2 - (k_x L/2)^2} \text{sen}(k_y W/2) \cos(k_x L/2) \right]^2, \tag{32}$$

$$I_{110\beta,x} = \frac{4Lba^2}{n\pi^2(a^2 - m^2L^2)} \text{sen}(m\pi x_c/a) \cos(m\pi L/2a) \text{sen}(n\pi W/2b) \cos(n\pi y_c/b). \quad (33)$$

En forma análoga, de (27) se obtiene: $Y_{110110}^{xy} = Y_{110110}^{yx} = Y_{110110}^{yy} = 0$. Luego, las soluciones para las amplitudes son: $U_{110} = I_{110x}^i / Y_{110110}^{xx}$, $V_{110} = 0$. Entonces, las componentes del campo electromagnético en el interior del recinto son:

$$E_x = E_x^x + E_x^y, \quad E_y = E_y^x + E_y^y, \quad E_z = E_z^x + E_z^y; \quad (34)$$

$$H_x = H_x^x + H_x^y, \quad H_y = H_y^x + H_y^y, \quad H_z = H_z^x + H_z^y. \quad (35)$$

Para el caso del modo fundamental, las componentes eléctrica y magnética con superíndice “y” son proporcionales a $V_{110} = 0$ y por lo tanto se anulan. Reescribiendo explícitamente dichas componentes se tiene:

$$\begin{aligned} E_x &= 0, \\ E_y &= \frac{U_{110}}{ab} \sum_{\beta} \frac{\epsilon_0 m \epsilon_0 n}{\text{sen}(k_I c)} \text{sen}(k_I(z-c)) \text{sen}(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) I_{110\beta x}, \\ E_z &= -\frac{U_{110}\pi}{ab^2} \sum_{\beta} \frac{n\epsilon_0 m \epsilon_0 n}{k_I \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \text{sen}(m\pi x/a) \text{sen}(n\pi y/b) I_{110\beta x}, \\ H_x &= -\frac{i\omega\epsilon_0 U_{110}}{abk_0^2} \sum_{\beta} \frac{\epsilon_0 m \epsilon_0 n}{k_I \text{sen}(k_I c)} \left(k_0^2 - (m\pi/a)^2\right) \cos(k_I(z-c)) \text{sen}(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) I_{110\beta x}, \\ H_y &= \frac{i\omega\epsilon_0 \pi^2 U_{110}}{a^2 b^2 k_0^2} \sum_{\beta} \frac{mn\epsilon_0 m \epsilon_0 n}{k_I \text{sen}(k_I c)} \cos(k_I(z-c)) \cos(m\pi x/a) \text{sen}(n\pi y/b) I_{110\beta x}, \\ H_z &= \frac{i\omega\epsilon_0 \pi U_{110}}{a^2 b k_0^2} \sum_{\beta} \frac{m\epsilon_0 m \epsilon_0 n}{k_I \text{sen}(k_I c)} \text{sen}(k_I(z-c)) \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) I_{110\beta x}. \end{aligned} \quad (36)$$

Finalmente, el vector de Poynting dentro del recinto será:

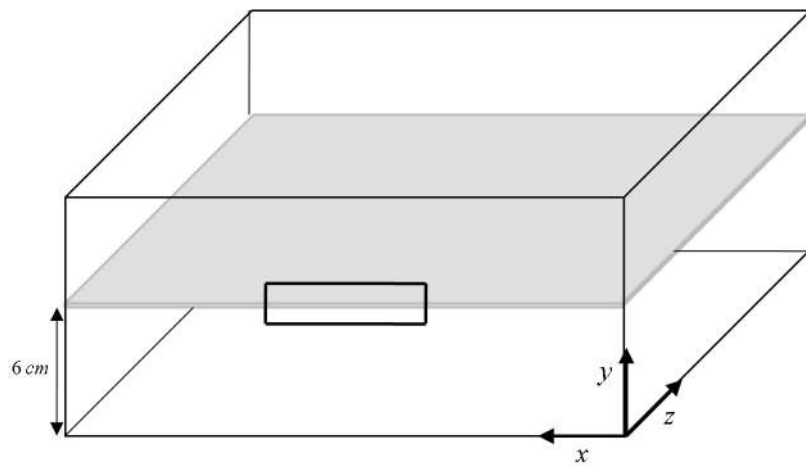
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = (E_y H_z - E_z H_y) \hat{i} + E_z H_x \hat{j} - E_y H_x \hat{k}, \quad (37)$$

donde $|\vec{S}| = \sqrt{\vec{S} \cdot \vec{S}^*}$, con \vec{S}^* el conjugado del vector de Poynting.

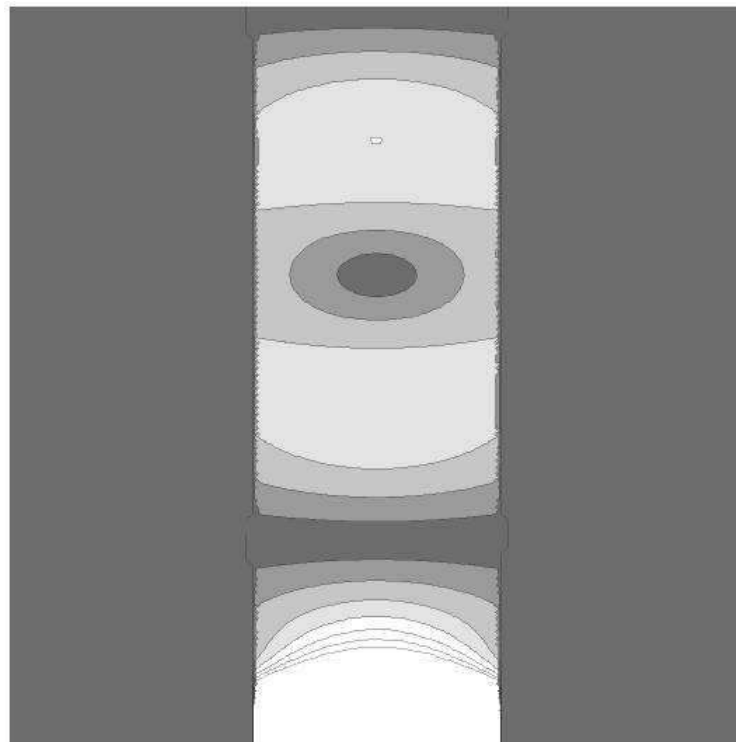
A continuación se realiza la simulación numérica para un caso específico que corresponde al recinto metálico descrito en la figura 6: una onda plana incide perpendicularmente sobre la cara $z = 0$ con una única apertura rectangular (\vec{k}^i paralelo al eje z). La frecuencia de la onda es 850 MHz. El campo magnético tiene magnitud 0.124 A/m y está orientado a lo largo del eje x . El recinto metálico rectangular tiene 30 cm de ancho, 12 cm de altura y 30 cm de profundidad. La apertura tiene 10 cm de ancho y 0.5 cm de altura y su centro coincide con el centro de la cara. En la figura 7 se muestra el resultado de la simulación para la distribución de la potencia electromagnética en el interior del recinto. La gráfica muestra las curvas de nivel de la magnitud del vector de Poynting $|\vec{S}|$ en el plano xz a una altura $y = 6$ cm.

Nótese que de acuerdo a las condiciones de (8), los valores de U_{α} y V_{α} implican que $|\vec{S}| \neq 0$ si $(x, y) \in$

apertura y $|\vec{S}| = 0$ si $(x, y) \notin$ apertura, lo que se traduce en un corte abrupto en la potencia electromagnética afuera de la región proyectada por la apertura hacia el interior del recinto. Adentro de esta región hay una distribución de potencia que no es homogénea y que disminuye de manera no-monótona, cuyos valores numéricos fueron calculados según los resultados analíticos de este trabajo. En la figura 8 se eliminó la condición de borde metálico de (8) y al mismo tiempo se hizo tender a infinito el tamaño del recinto (altura y ancho). Si se mantiene constante el tamaño de la apertura y se varía la longitud de onda de la radiación hacia valores cada vez más pequeños, se recupera los resultados conocidos para patrones de difracción (ver, por ejemplo, Hecht & Zajac 2003). En la figura 8a se observa el caso del patrón de difracción para una radiación incidente con longitud de onda $\lambda = 0.35L$, obteniéndose el patrón conocido cuando λ y L son similares. En los casos de las figuras 8b, 8c, y 8d se tiene que λ/L es igual a 0.01, 0.001, 0.0001 respectivamente. Como se puede ver en los casos (b), (c) y (d) de la figura 8, a medida que la longitud de onda decrece, el patrón de difracción tiende a aproximarse a la forma de la apertura. En la sección 7 (CONCLUSIONES) se especifica los valores numéricos correspondientes a este caso.



(a)



(b)

FIG. 7.— Distribución de potencia electromagnética en el interior del recinto metálico descrito en (a). El recinto tiene 30 cm de ancho, 30 cm de profundidad y 13 cm de altura; la apertura tiene 10 cm de ancho y 0.5 cm de altura. La onda electromagnética incidente está orientada a lo largo del eje x y tiene una longitud de onda $\lambda=35$ cm. En el gráfico (b) se muestra esta distribución correspondiente al plano sombreado en el gráfico (a); las regiones claras corresponden a una mayor potencia de la radiación y las regiones oscuras a una menor potencia. Se puede notar en (b) que la distribución de potencia está definida en una región rectangular que es la proyección de la apertura hacia el interior del recinto; esto ocurre debido a la condición de borde de la apertura consistente con el modelo de guía de onda. Un aspecto relevante de esta distribución es que la disminución de potencia hacia el interior del recinto no es monótona.

5.2. Caso de incidencia oblicua

Para este caso, en el cual la onda electromagnética plana puede incidir con cualquier ángulo de inciden-

cia y orientación, las ecuaciones para I_{rppq_x} y I_{rppq_y} , en coordinación con el apéndice C, se reducen a:

$$I_{110x}^i = \frac{4\pi H^i (\cos \alpha_0 \cos \theta^i \cos \phi^i - \text{sen } \alpha_0 \text{sen } \phi^i) \cos(k_0 L/2 \text{sen } \theta^i \cos \phi^i) \text{sen}(k_0 W/2 \text{sen } \theta^i \text{sen } \phi^i)}{L k_0 \text{sen } \theta^i \text{sen } \phi^i ((\pi/L)^2 - (k_0 \text{sen } \theta^i \cos \phi^i)^2)} \times e^{-ik_0 \text{sen } \theta^i (\cos \phi^i x_c + \text{sen } \phi^i y_c)}, \quad (38)$$

$$I_{110y}^i = 0.$$

Por lo tanto, todos los resultados de la sección anterior se pueden utilizar ya que son independientes de los ángulos de incidencia y de orientación; se debe tomar en cuenta la ecuación (38) para las amplitudes U_{110} .

De (36) y (38) puede observarse que la distribución del campo electromagnético depende de los ángulos de incidencia θ^i , ϕ^i y del ángulo de orientación α_0 del campo eléctrico. Podemos entonces calcular a continuación la potencia promedio del campo electromagnético para todos los ángulos de incidencia dentro de la semiesfera que abarca $\Omega = 2\pi$ sterorradianes, i.e.,

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \text{sen } \theta = 2\pi; \quad (39)$$

así, para una función f arbitraria, el promedio sobre dicha semiesfera es

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \text{sen } \theta f(\theta, \phi). \quad (40)$$

La potencia promedio $\langle S \rangle$ es proporcional a $\langle U_{110}^2 \rangle$ pues ϕ^i , θ^i y α_0 sólo aparecen en U_{110} en (36); Así, ya que $U_{110} \propto I_{110x}^i$ con la dependencia angular indicada en (38), entonces:

$$\langle S \rangle \propto \langle U_{110}^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi^i \int_0^{\pi/2} d\theta^i \text{sen } \theta^i \times \int_0^{2\pi} d\alpha_0 U_{110}^2(\theta^i, \phi^i, \alpha_0). \quad (41)$$

Utilizando los resultados anteriores a un caso específico con las características mostradas en la figura 9, puede observarse una distribución de potencia electromagnética en las región proyectada desde la apertura hacia el interior del recinto; afuera de esta región la potencia es nula.

En general, la distribución de potencia electromagnética depende de los ángulos de incidencia (θ^i , ϕ^i) y de orientación (α_0), tal como se desprende de las ecuaciones (37) y (38) donde $|\vec{S}| \propto I_{110x}^i$. En la figura 10 se muestra el resultado para $|\vec{S}|$ vs. (θ^i , ϕ^i), confirmando que la potencia es alta para una incidencia normal a la superficie con la apertura.

6. UN PROCEDIMIENTO HEURÍSTICO PARA LA SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA

Si bien en este trabajo se desarrolló un estudio analítico del problema en cuestión, éste también podría simularse numéricamente de manera aproximada. Esta simulación permitiría una verificación directa del efecto de "corte abrupto" de la distribución de potencia en el interior del recinto (cf. sección 5 - RESULTADOS y figuras 7 y 9), como una consecuencia de las condiciones de contorno del recinto. A continuación se da los pasos para un procedimiento heurístico que permita dicha simulación numérica:

1. Como aproximaciones fundamentales se supone: (a) que los efectos que pueda producir el campo magnético así como su variación temporal en la distribución de potencia son despreciables en comparación con los efectos debidos al campo eléctrico; (b) que el metal que conforma el recinto tiene conductividad infinita y por ello los electrones se acomodan instantáneamente para anular cualquier campo eléctrico en el metal.
2. Se divide un periodo de la onda electromagnética incidente en un cierto número N de intervalos temporales (digamos $N \sim 100$) en donde se obtendrá soluciones estáticas para la distribución de potencia.
3. Se establece las condiciones de contorno para el potencial eléctrico (V): $V = 0$ (o cualquier otra constante) en la parte metálica del recinto, mientras que $V(x, y, z = 0) \neq 0$ en la apertura se calcula a partir del campo eléctrico instantáneo en ese lugar.
4. Se resuelve numéricamente la ecuación de Laplace en el interior del recinto por el método de relajación. Se obtiene así $V(x, y, z)$ que permite calcular el campo eléctrico instantáneo en el interior del recinto.
5. Se repite el cálculo para el siguiente intervalo temporal; sólo varía el campo eléctrico instantáneo en la apertura.

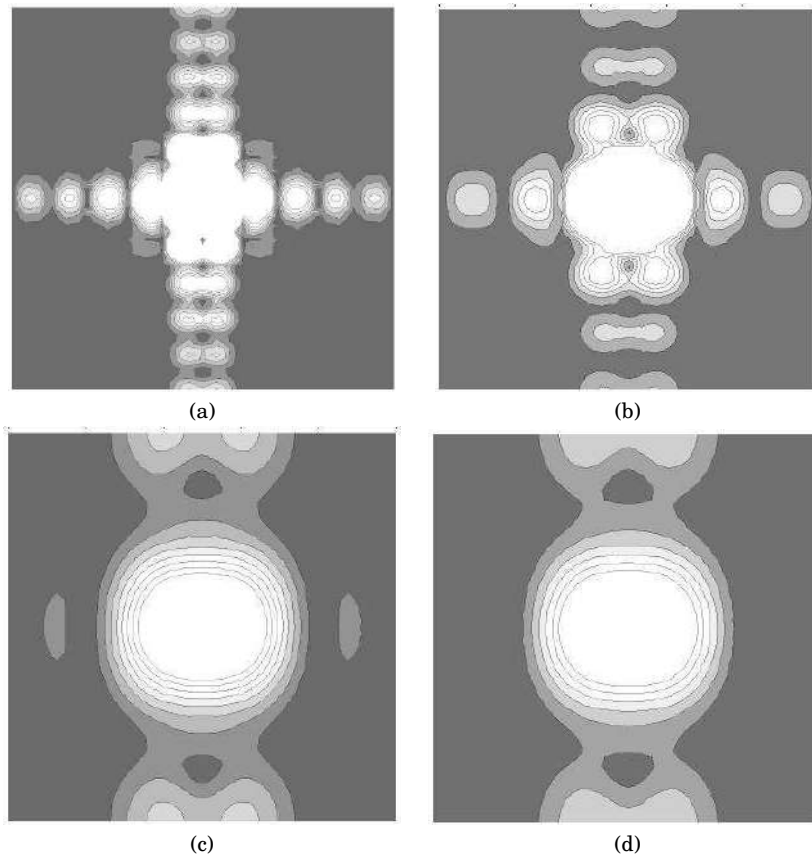


FIG. 8.— Patrón de difracción de la onda incidente en la figura 8. En este caso el plano en el que está la apertura no es conductor; su ancho y su altura son mucho mayores que el largo L de la apertura. En el gráfico (a) se observa el caso del patrón de difracción para una radiación incidente con longitud de onda $\lambda = 0.35L$, obteniéndose el patrón conocido cuando λ y L son similares. En los casos (b), (c), y (d) se tiene que λ/L es igual a 0.01, 0.001, 0.0001 respectivamente. Puede notarse que a medida que λ decrece con respecto a L , el patrón de difracción se localiza y tiende a adquirir la forma de la apertura, como debe ser (ver, por ejemplo, Hecht & Zajac 2003).

6. Después de N pasos de cálculo, se obtiene el promedio temporal de la potencia electromagnética en el interior del recinto correspondiente a un periodo de la onda incidente (entendiendo que sólo se está considerando la parte eléctrica de dicha potencia).

Este sencillo -aunque numéricamente voluminoso- procedimiento permite prever que en el caso de un recinto metálico, la condición de contorno $V = 0$ “obliga” a $V(x, y, z)$, y de aquí, al campo eléctrico y a la potencia, a tomar valores numéricos pequeños en las proximidades del contorno metálico, lo que puede identificarse directamente como la causa del referido fenómeno de “corte abrupto”. Ciertamente, cuando se elimina la condición de contorno metálico ($V = 0$), se espera entonces obtener una distribución espacial de potencia correspondiente al caso conocido de una apertura que funciona como un radiador efectivo de ondas electromagnéticas en todas las direcciones, que es lo que se observa en la figura 8.

La eventual comparación entre una simulación numérica y los resultados analíticos de este trabajo, permitiría saber si dicho efecto de “corte abrupto” es un resultado del modelo rectangular de guía de ondas o se trata de un efecto físico más general que podría ocurrir para cualquier forma de apertura y de recinto metálico. Este asunto se propone pues como

una perspectiva interesante para una próxima investigación.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó una investigación analítica y numérica para hallar la distribución de potencia electromagnética en el interior de un recinto metálico, como consecuencia de la incidencia de una onda electromagnética plana a través de una apertura ubicada en una cara del recinto; éste es un paralelepípedo recto cuya apertura está ubicada en cualquier lugar de la cara frontal (figura 6).

El método analítico que se utiliza consiste de reemplazar las aperturas por fuentes de corrientes magnéticas que se integran para obtener los correspondientes potenciales vectoriales eléctrico y magnético, de donde se obtiene por diferenciación los campos eléctrico y magnético. La condición de contorno que corresponde al recinto metálico con una apertura rectangular se supone que se puede modelar por una guía de ondas rectangular, lo que permite obtener los campos eléctrico y magnético en estado estacionario. De aquí se obtiene la distribución de potencia electromagnética requerida. Cuando el tamaño de la apertura disminuye hasta desaparecer, se obtiene -como se espera- una potencia nula, que es el efecto de Jaula de Faraday.

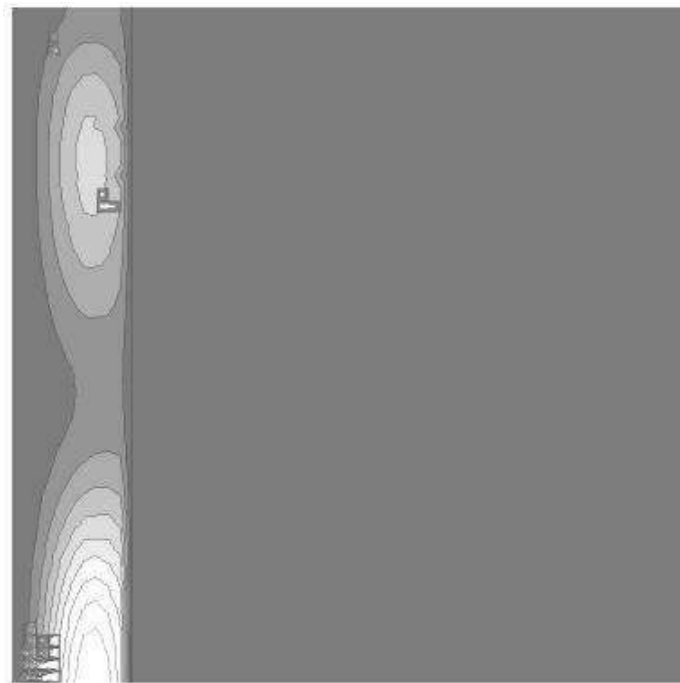
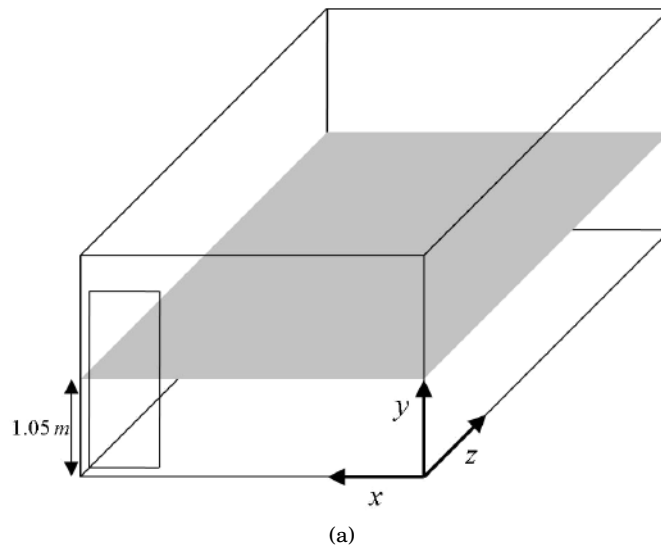


FIG. 9.— Distribución de potencia electromagnética en el interior del recinto metálico descrito en (a). El recinto tiene 6 m de ancho, 10 m de profundidad y 3 m de altura; la apertura tiene 1 m de ancho y 2 m de altura. La onda electromagnética incidente, a diferencia del caso de la figura 7, incide desde todas las direcciones posibles (2π sterorradianes) hacia la apertura vertical; la longitud de onda es $\lambda=35$ cm. En el gráfico (b) se muestra esta distribución correspondiente al plano sombreado en el gráfico (a); al igual que en la figura 7, las regiones claras y oscuras corresponden a una mayor y menor potencia respectivamente. Las características cualitativas de este caso son las mismas que las de la figura 7, excepto que en este caso la incidencia de la radiación desde todas las direcciones posibles tiene el efecto de ser promediada y en consecuencia producir una distribución de potencia similar a la que se obtendría si la incidencia de la onda fuera normal.

El resultado central de este trabajo se muestra en la figura 7, donde, como esperaríamos, la potencia es mayor cerca de la apertura y va disminuyendo hacia el interior del recinto. Sin embargo, nótese que de manera interesante dicha disminución de potencia *no es monótona*, encontrándose regiones en donde la potencia aumenta y luego disminuye, lo que podría tener aplicaciones importantes en dispositivos metálicos que se usan como blindaje electromagnético.

A continuación, en la figura 8 se muestra el caso límite de una apertura que yace sobre un plano infinito no-conductor, es decir, se tomó el ancho y la altura del recinto de la figura 7a mucho mayores que el largo L de la apertura, eliminando además la condición de que este plano infinito sea metálico. Puede notarse que a medida que λ decrece con respecto a L , el patrón de difracción se localiza y tiende a adquirir la forma de la apertura, como debe ser (ver, por ejemplo, Hecht & Zajac 2003).

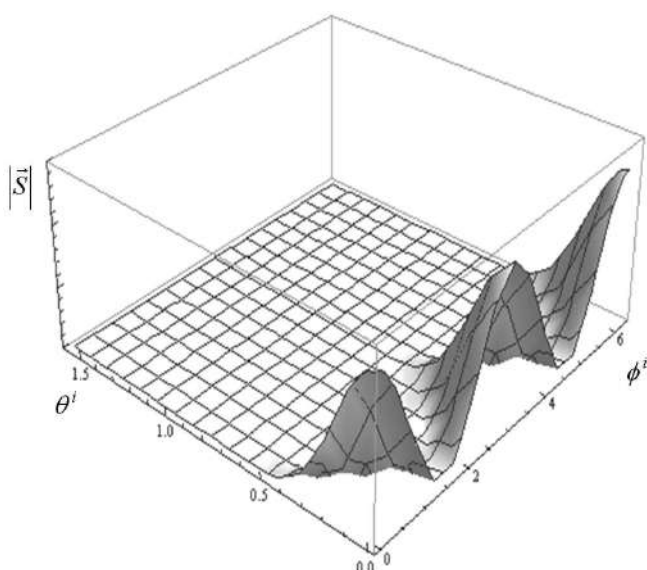


FIG. 10.— Distribución de potencia electromagnética en función del ángulo de incidencia y de la orientación del campo incidente. La dependencia de la potencia de los ángulos de incidencia está relacionada con la expresión $I_{110x^i}^i$ dada en (38), que a su vez se relaciona con $|\vec{S}|$ de acuerdo a (41). Esto es lo que se muestra en esta figura, donde el máximo que se presenta para $\theta^i = 0$ corresponde a la incidencia normal, como era de esperar.

En la figura 9 se muestra la distribución de potencia electromagnética en el interior del recinto metálico descrito en (a). El recinto tiene 6 m de ancho, 10 m de profundidad y 3 m de altura; la apertura tiene 1 m de ancho y 2 m de altura. La onda electromagnética incidente, a diferencia del caso de la figura 7, incide desde todas las direcciones posibles (2π sterorradianes) hacia la apertura vertical; la longitud de onda es $\lambda=35$ cm. En el gráfico (b) se muestra esta distribución correspondiente al plano sombreado en el gráfico (a); al igual que en la figura 7, las regiones claras y oscuras corresponden a una mayor y menor potencia respectivamente. Las características cualitativas de este caso son las mismas que las de la figura 7, excepto que en este caso la incidencia de la radiación desde todas las direcciones posibles tiene el efecto de ser promediada y en consecuencia producir una distribución de potencia similar a la que se obtendría si la incidencia de la onda fuera normal.

En general, la distribución de potencia electromagnética en el interior del recinto varía en función del ángulo de incidencia y de la orientación del campo incidente, sin embargo esta potencia es mayor conforme el ángulo de incidencia tiende a la normal. La dependencia de la potencia de los ángulos de incidencia está relacionada con la expresión $I_{110x^i}^i$ dada en (38), que a su vez se relaciona con $|\vec{S}|$ de acuerdo a (41). Esto es lo que se muestra en la figura 10, donde el máximo que se presenta para $\theta^i = 0$ corresponde a la incidencia normal.

Señalemos finalmente que en este trabajo se obtuvo el efecto de Jaula de Faraday al hacer tender a cero el tamaño de la apertura en (21); se repro-

duce los campos correspondientes a una guía de onda rectangular extendiendo hacia el infinito la profundidad del recinto metálico y haciendo que las dimensiones de las aperturas coincidan con las de la cara frontal del recinto. De este modo se logra reproducir analíticamente el campo electromagnético de una guía de ondas rectangular. Podemos concluir que el modelo propuesto en este trabajo satisface analíticamente las condiciones límite requeridas, además de proporcionar resultados numéricos novedosos que pueden ser verificados experimentalmente.

AGRADECIMIENTOS

Uno de nosotros (E.M.) agradece el desinteresado apoyo del Dr. Gustavo Demarco (Centro Atómico de Bariloche, Argentina), quien gentilmente proporcionó sugerencias e información valiosa para desarrollar este trabajo.

APÉNDICE

A. Corrientes magnéticas equivalentes

Para establecer el método de resolución de problemas de radiación por medio de las corrientes magnéticas equivalentes, veamos dos teoremas de la teoría electromagnética que justifican este método.

Teorema de Unicidad : *Dado un volumen V encerrado por una superficie S en cuyo interior no hay fuentes de ningún tipo, si se conocen las componentes tangenciales en S de \vec{E} o de \vec{H} producidas por las fuentes exteriores a V , entonces la solución que se obtenga para cualquier punto de V es única.*

Este teorema establece las condiciones que se deben cumplir para garantizar que la solución a un problema regido por las ecuaciones de Maxwell sea único. Esto es importante y especialmente útil en los problemas que se resuelven sin emplear las fuentes reales y empleando en su lugar un conjunto de corrientes equivalentes, cuyas características quedarán claras a continuación cuando se enuncie el teorema de equivalencia.

Teorema de Equivalencia : *Toda fuente (corriente) originada por \vec{E} o \vec{H} se puede sustituir por otra fuente equivalente que conduzca a la misma solución de las ecuaciones de Maxwell en una región determinada.*

El teorema de equivalencia se apoya en el teorema de unicidad cuando establece cómo son estas corrientes equivalentes ya que deben elegirse de modo que se obtenga la misma solución que con las fuentes originales.

Observando la figura 1 de este apéndice y suponiendo que las únicas fuentes presentes son las encerradas por la superficie S , los campos eléctrico y magnético en el exterior de S se pueden calcular a partir de las corrientes \vec{J} , o bien, por el teorema de unicidad, si se conocen las componentes tangenciales

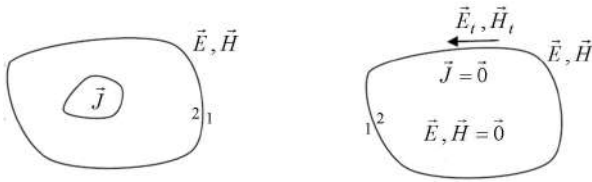


FIG. 1.— Cálculo del campo electromagnético cuando se tiene una fuente encerrada por una superficie S .

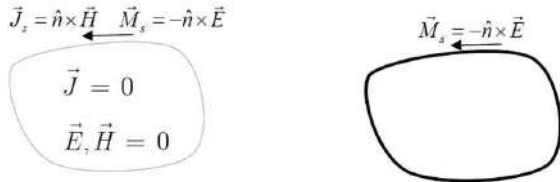


FIG. 2.— Corrientes equivalentes en la superficie limitante del problema.

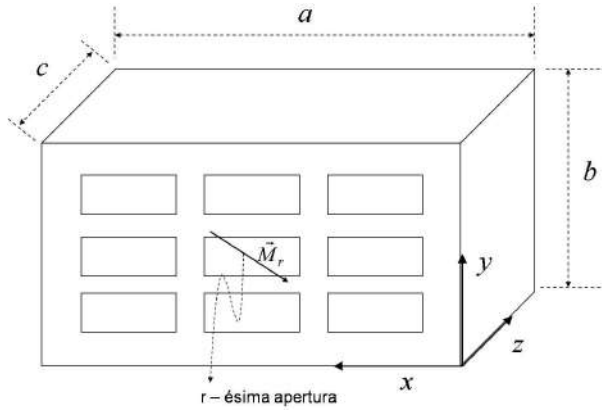


FIG. 3.— Equivalencia de las aperturas y las corrientes magnéticas.

a S de los campos eléctrico y magnético también será posible obtener dicha solución en el exterior de S . Luego, si eliminamos las fuentes originales y añadimos unas nuevas, éstas deben asegurar que se satisfagan las condiciones de contorno existentes en S . Con este propósito podemos escoger como corrientes equivalentes las proporcionadas por las condiciones de contorno generalizadas y que están

asociadas a la existencia de una discontinuidad en el campo eléctrico y magnético tangencial $\vec{M}_s = -\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)$ y $\vec{J}_s = \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)$, siendo 1 el medio externo, 2 el medio interno y \hat{n} un vector unitario que apunta a la región donde se desea obtener la solución, en este caso la región 1.

Dado que sólo estamos interesados en obtener la solución en el medio 1, es posible simplificar la obtención de las corrientes equivalentes obligando a que el campo en la región 2 (región interna) sea nulo. En este caso podemos escribir las corrientes equivalentes de manera más sencilla como:

$$\vec{M}_s = -\vec{n} \times \vec{E}_t \quad y \quad \vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}_t.$$

Alternativamente, también es posible utilizar un modelo de equivalencia en el que la región interna se rellena de un conductor perfecto, lo que "cortocircuita" las corrientes eléctricas equivalentes.

En el primer caso de la figura 2 (de este apéndice) las corrientes equivalentes \vec{J}_s y \vec{M}_s emiten radiación en el espacio libre. En el segundo caso, las corrientes \vec{M}_s también radian en presencia de un cuerpo metálico con superficie S . El teorema de equivalencia asegura que eligiendo las corrientes como se ha indicado, ambos problemas proporcionan la misma solución y, además, ésta es igual a la que proporciona el problema original en la misma región.

Una de las aplicaciones más comunes corresponde al caso de superficies conductoras con aperturas. Las condiciones de contorno en una superficie perfectamente conductora son:

$$\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0} \quad y \quad \vec{n} \cdot \vec{H} = 0,$$

con $\vec{n} \cdot \vec{E} \neq 0$ y $\vec{n} \times \vec{H} \neq \vec{0}$. Por ello, según Jackson (Jackson 1996), al querer calcular el campo electromagnético, que es una integral en toda la superficie que rodea el volumen del cuerpo conductor, conviene extender dicha integral solamente a las aperturas en lugar de toda la superficie. En la figura 3 (de este apéndice) se observa un recinto metálico con aperturas rectangulares que se reemplazan por fuentes de corrientes magnéticas.

B. Transformada de Fourier de $\phi_{\alpha y}$ y $\psi_{\alpha x}$

La integral de las ecuaciones (17) a lo largo de las aperturas da como resultado:

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha y}(k_x, k_y) &= \frac{L_r W_r e^{ik_x x_{cr} + ik_y y_{cr}}}{4i} e^{i(p+q)\pi/2} \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{p\pi}{2} + \frac{k_x L_r}{2}\right)}{p\pi/2 + k_x L_r/2} + \frac{e^{-ip\pi} \text{sen}\left(\frac{p\pi}{2} - \frac{k_x L_r}{2}\right)}{p\pi/2 - k_x L_r/2} \right) \\ &\times \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{q\pi}{2} + \frac{k_y W_r}{2}\right)}{q\pi/2 + k_y W_r/2} - \frac{e^{-iq\pi} \text{sen}\left(\frac{q\pi}{2} - \frac{k_y W_r}{2}\right)}{q\pi/2 - k_y W_r/2} \right), \end{aligned}$$

$$\psi_{\alpha x}(k_x, k_y) = \frac{L_r W_r e^{ik_x x_{cr} + ik_y y_{cr}}}{4i} e^{i(p+q)\pi/2} \left(\frac{\sin(\frac{p\pi}{2} + \frac{k_x L_r}{2})}{p\pi/2 + k_x L_r/2} + \frac{e^{-ip\pi} \sin(\frac{p\pi}{2} - \frac{k_x L_r}{2})}{p\pi/2 - k_x L_r/2} \right) \\ \times \left(\frac{\sin(\frac{q\pi}{2} + \frac{k_y W_r}{2})}{q\pi/2 + k_y W_r/2} + \frac{e^{-iq\pi} \sin(\frac{q\pi}{2} - \frac{k_y W_r}{2})}{q\pi/2 - k_y W_r/2} \right).$$

C. Cálculo de $I_{\alpha\beta,x}$ y $I_{\alpha\beta,y}$

La integral de las ecuaciones (28) a lo largo de las aperturas da como resultado:

$$I_{\alpha\beta,x} = np\pi^2 L_r \left(\cos(p\pi) \sin\left(\frac{m\pi}{a}(x_{cr} + \frac{L_r}{2})\right) + \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(\frac{L_r}{2} - x_{cr}\right)\right) \right) \\ \times \left(\cos(q\pi) \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y_{cr} + \frac{W_r}{2}\right)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(\frac{W_r}{2} - y_{cr}\right)\right) \right) \\ \times \frac{1}{b((p\pi)^2 - (m\pi L_r/a)^2)((q\pi/W_r)^2 - (n\pi/b)^2)}, \\ I_{\alpha\beta,y} = mq\pi^2 W_r \left(\cos(q\pi) \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(y_{cr} + \frac{W_r}{2}\right)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{b}\left(\frac{W_r}{2} - y_{cr}\right)\right) \right) \\ \times \left(\cos(p\pi) \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(x_{cr} + \frac{L_r}{2}\right)\right) + \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(\frac{L_r}{2} - x_{cr}\right)\right) \right) \\ \times \frac{1}{a((q\pi)^2 - (n\pi W_r/b)^2)((p\pi/L_r)^2 - (m\pi/a)^2)},$$

$$I_{\alpha'x}^i = iH^i (\cos \alpha_0 \cos \theta^i \cos \phi^i - \sin \alpha_0 \sin \phi^i) (1 - \cos(p'\pi) e^{-ik_0 \sin \theta^i \cos \phi^i L_{r'}}) (1 - \cos(q'\pi) e^{-ik_0 \sin \theta^i \sin \phi^i W_{r'}}) \\ \times \frac{p'\pi/L_{r'} e^{-ik_0 \sin \theta^i (\cos \phi^i x_{cr'} + \sin \phi^i y_{cr'})} k_0 \sin \theta^i \sin \phi^i e^{ik_0 \sin \theta^i (\cos \phi^i L_{r'} + \sin \phi^i W_{r'})/2}}{(p'\pi/L_{r'})^2 - (k_0 \sin \theta^i \cos \phi^i)^2 (q'\pi/W_{r'})^2 - (k_0 \sin \theta^i \sin \phi^i)^2},$$

$$I_{\alpha'y}^i = -iH^i (\cos \alpha_0 \cos \theta^i \sin \phi^i + \sin \alpha_0 \cos \phi^i) (1 - \cos(p'\pi) e^{-ik_0 \sin \theta^i \cos \phi^i L_{r'}}) (1 - \cos(q'\pi) e^{-ik_0 \sin \theta^i \sin \phi^i W_{r'}}) \\ \times \frac{q'\pi/W_{r'} e^{-ik_0 \sin \theta^i (\cos \phi^i x_{cr'} + \sin \phi^i y_{cr'})} k_0 \sin \theta^i \cos \phi^i e^{ik_0 \sin \theta^i (\cos \phi^i L_{r'} + \sin \phi^i W_{r'})/2}}{(p'\pi/L_{r'})^2 - (k_0 \sin \theta^i \cos \phi^i)^2 (q'\pi/W_{r'})^2 - (k_0 \sin \theta^i \sin \phi^i)^2}.$$

REFERENCIAS

- Ali, Z., Bunting, F., & Deshpande, M. 2005, IEEE Trans. Electromag. Compat. **47**, 112
- Andrade, F. S. 1982, Galerkin Method and the Solution of the Orr-Sommerfeld Equation (Instituto de Física, Universidad Federal de la Bahia, Salvador - Brazil)
- Arvas, E. & Harrington, R. F. 1983, IEEE Trans. Antennas Propagat. **AP-31-5**, 719
- Balanis, C. 1985, Advanced Engineering Electromagnetics (Academic Press - U.S.A.)
- Beck, F. B. & Cockrell, C. R. 2005, Electromagnetic shielding effectiveness of rectangular enclosure with perforated walls (NASA Langley Research Center, Hampton)
- Bethe, H. A. 1944, Phys. Rev. **66**, 163
- Cerri, G. & Primiani, V. M. 1992, IEEE Trans. Electromag. Compat. **34**, 423
- Chalmer, M., Butler, Y., & Samil, R. 1978, IEEE Transactions on electromagnetic and propagation **26**, 82
- Collin, R. 1980, Field Theory of Guided Waves (Prentice Hall - U.S.A.)
- Dawson, J. F., Robinson, M. P., Thomas, D. W. P., Ganley, M. D., Marvin, A. C., Porter, S. J., Benson, T. M., & Christopolous, J. F. 1998, IEEE Trans. Electromag. Compat. **40**, 240
- Fernandez, J. C. 2004, Electromagnetismo (Universidad de Buenos Aires - Argentina)
- Gardner, C. L. & Costache, G. I. 1995, IEEE Trans. Electromag. Compat. **37**, 5
- Goudos, S. K. & Samaras, T. 2000, IEEE Trans. Electromag. Compat. **35**, 120
- Hecht, E. & Zajac, A. 2003, Optics (Ed. Alhambra - España)
- Jackson, J. D. 1996, Electrodinámica Clásica (Ed. Alhambra - España)
- Khan, Z., Bunting, C., & Deshpande, M. 2005, IEEE Trans. on Electromag. Compat. **47**, 113
- Kimmel, M. & Singer, H. 1995, IEEE Electromag. Compat. **14**, 208
- McDonald, N. A. 1985, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **MTT-33-11**, 1146
- Robinson, M. P., Turner, J. D., Thomas, D. W. P., Dawson, J. F., Ganley, M. D., Marvin, A. C., Porter, S. J., Benson, T. M., & Christopolous, J. F. 1996, IEEE Trans. on Electromag. **17**, 32
- Sewell, P., Turner, D., Robinson, M., & Benson, T. 1998, IEEE Proc. - Sci. Meas. Technol. **145**, 62
- Wallyn, W. & Zutter, D. D. 2001, IEEE Electromag. Compat. **13**, 691
- Wangsness, R. 1994, Campos Electromagnéticos (Noriega Editores, Ed. Limusa - México)
- Zozaya, A. 2008, Método de los Momentos (LABEMA, Universidad de Carabobo - Venezuela)

15^{ava} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA,
5^{ta} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
SOLUCIONES EXAMEN NACIONAL
6^{to}, 7^{mo}, 8^{vo} DE PRIMARIA - 1^{ro}, 2^{do}, 3^{ro} DE SECUNDARIA

BUSTOS R.¹, SUBIETA V.¹, TAVERA W.², BRAÑEZ A.¹, CENTENO E.¹, RALJEVIC M.², MUÑOZ R.³, MORALES G.⁴, GUAYGUA T.⁷, ESPINOZA E.⁶, JEMIO C.⁵, ANDRADE M.⁵, GUZMÁN R.⁵, MAMANI R.⁸, MARTINEZ L.⁹, JUSTINIANO I.¹⁰, PAYLLO J. P.¹¹, BURGOS B.¹², ORTEGA M.¹³, COPA V.¹⁴, ORTEGA L.¹⁵, VARGAS C.¹⁶, AÑAGUAYA J.¹⁷, CHOQUE G.¹⁸, CHAMBI M.¹⁹, FUENTES L.⁵, CONDORI V.²⁰, BELTRÁN R.²¹, QUISBERTH J.¹⁹, QUIROZ Z.²², CABRERA J.²³, BEJARANO C.¹², GUTIERREZ H.⁶

¹Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), Carrera de Física, La Paz

²Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)

³Planetario Max Schreier, Física UMSA

⁴Asociación Sigma Octante

⁵Universidad Mayor de San Simón (UMSS), Facultad de Ciencia y Tecnología, Cochabamba

⁶Universidad Mayor Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCH), Facultad de Tecnología – Carrera de Ingeniería de Sistemas, Sucre

⁷Universidad Técnica de Oruro (UTO), Facultad Nacional de Ingeniería (FNI), Oruro

⁸Universidad Autónoma Tomás Frías (UATF), Carrera de Física, Potosí

⁹Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA), Santa Cruz de la Sierra

¹⁰Colegio María Auxiliadora, Cobija Pando

¹¹Colegio 12 de Agosto, Yacuiba Tarija

¹²Colegio Evangélico J. Antelo, Guayaramerín Beni

¹³Colegio Trinidad, Beni

¹⁴Colegio Domingo Savio, Chuquisaca Sucre

¹⁵Colegio Hno. Felipe Palazó'n, Tarija

¹⁶Unidad Educativa Vida y Luz, Sucre

¹⁷Colegio Nazareno Basil Miller, El Alto La Paz

¹⁸Unidad Educativa Tomas Frías, Potosí

¹⁹Unidad Educativa Rogelio Penacho Balcazar, Cobija Pando

²⁰Unidad educativa San Andrés, La Paz

²¹Unidad Educativa CEDEIN 6 de Marzo, El Alto La Paz

²²Colegio Instituto Americano, La Paz &

²³Colegio Amor de Dios, La Paz

RESUMEN

La 15^{ava} Olimpiada Boliviana de Física y la 5^{ta} Olimpiada Boliviana de Astronomía y Astrofísica (15^{ava} OBF y 5^{ta} OBAA) se llevaron a cabo simultáneamente y con éxito del 5 al 8 de noviembre de 2010 en la ciudad de Cochabamba en los ambientes del centro de convenciones Casa Campestre en Quillacollo.

La organización del evento contó con la participación de los siguientes organismos e instituciones: COMITÉ OLÍMPICO BOLIVIANO DE FÍSICA, SOBOFI, la Asociación de profesores de Física, Química, Biología y Matemática, agrupados en AMEC (Asociación para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias), la Asociación de Astronomía Sigma Octante.

Se contó con la presencia de diez delegaciones: Beni, Chuquisaca, Cochabamba, La Paz, Oruro, Pando, Potosí, Santa Cruz de la Sierra, Tarija y Yacuiba. En esta Olimpiada se evaluaron las categorías de 6to, 7mo, 8vo de primaria y 1ro, 2do, 3ro de secundaria. La categoría de 4to de secundaria no participó en esta olimpiada, ellos participaron en las dos etapas previas de la clasificación para la (15^{ava} OBF y 5^{ta} OBAA), y los ganadores de esta categoría tienen como principal premio el ingreso libre y directo a las universidades comprometidas con el proyecto.

En esta olimpiada se concentraron cerca de trescientas personas entre estudiantes, profesores, madres y padres de familia que acompañaron a sus hijos, quienes compartieron sus experiencias, costumbres y culturas.

Este evento se realizó con la presencia de un importante físico boliviano, el Lic. Marco Viscarra, Docente de la Carrera de Física de la UMSS y el Astrónomo Germán Morales, de Astronomía Sigma Octante, quienes compartieron sus conocimientos a través de conferencias para los estudiantes olímpicos, profesores asistentes y público en general, así como también formaron parte del comité evaluador. Se demostraron conceptos físicos en coordinación con

estudiantes universitarios en la actividad titulada: La Magia De La Física (proyecto desarrollado por los universitarios Ariel Brañez y Edwin Centeno de la Carrera de Física de la Facultad de Ciencias Puras y Naturales de la UMSA).

Las categorías de 6to, 7mo, 8vo de Primaria se evaluaron en la modalidad de Examen Teórico y las categorías de 1ro, 2do, 3ro de Secundaria tuvieron dos modalidades de evaluación: Teórica y experimental u observacional.

La información referente a la 15^{ava} Olimpiada Boliviana de Física, fue publicada en el número 18 de la Revista Boliviana de Física.

OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA



OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

Descriptores: Olimpiadas de Física, Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica

Subject headings: Physics Olympiads, Astronomy and Astrophysics Olympiads

MEDALLAS: 5^{ta} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA6^{TO} DE PRIMARIA

Nº	NOMBRE DEL ESTUDIANTE	DEPARTAMENTO	MEDALLA
1	MATEO FRANCISCO ZARATE OCAMPO	TARIJA	ORO
2	ALBERTO BALCAZAR TORREZ	TARIJA	ORO
3	JOSE ARMANDO VILLCA COA	SUCRE	ORO
4	DIONEL DEL CARPIO CRUZ LORA	SUCRE	PLATA
5	NATHALI SARA GOMEZ VELASQUEZ	YACUIBA	BRONCE
6	ADA BELEN ALVAREZ FERNANDEZ	SANTA CRUZ	BRONCE
7	RODRIGO EDUARDO LOPEZ TORRICO	ORURO	BRONCE
8	YALHIMAR DIVICO LUCIA	PANDO	MENCION

7^{MO} DE PRIMARIA

Nº	NOMBRE DEL ESTUDIANTE	DEPARTAMENTO	MEDALLA
1	LEONARDO LUIS ROSPIGLIOSI PARDO	LA PAZ	ORO
2	BORIS VICTOR MONASTERIOS RAMOS	SUCRE	ORO
3	CAMILO JORGE ORTIZ MENDOZA	ORURO	PLATA
4	MAURICIO TORRICOS RODRIGUEZ	TARIJA	PLATA
5	PAUL OJOPI CODIMA	COCHABAMBA	BRONCE
6	OMAR CORAITE OVANDO	ORURO	BRONCE
7	LIZ CAROL ROCA ZAMBRANA	SANTA CRUZ	BRONCE
8	SERGIO BERNABE VELASQUEZ GARNICA	LA PAZ	BRONCE
9	BRYAN TORREZ VACA	YACUIBA	BRONCE
10	MARIA MERCEDES SENSANO CABRERA	SANTA CRUZ	MENCION
11	ALAN ARIEL REJAS ESCUDERO	SUCRE	MENCION
12	CERENY LAURA VELASQUEZ LINNEO	YACUIBA	MENCION
13	ANA BELEN OROSCO LEIVA	TARIJA	MENCION

8^{VO} DE PRIMARIA

Nº	NOMBRE DEL ESTUDIANTE	DEPARTAMENTO	MEDALLA
1	ROMULO RODRIGO QUISPE PACHECO	SANTA CRUZ	ORO
2	MARIA LAURA FLORES SANCHEZ	SANTA CRUZ	ORO
3	EDSON RODOLFO CLROS VILLARROEL	ORURO	ORO
4	JHAMEL CELMA CRUZ LORA	SUCRE	PLATA
5	JOSE IVAN CHALLAPA CONDORI	ORURO	PLATA
6	NELIDA ESQUETI QUISPE	YACUIBA	BRONCE
7	ADRIAN SIERRA MARTINEZ	TARIJA	MENCION
8	MARIA LUCIA WAYAR DE LA QUINTANA	TARIJA	MENCION
9	KALEB IRAHOAL AZAD	PANDO	MENCION
10	SANTIAGO KOMADINA GEFFROY	COCHABAMBA	MENCION

1^{RO} DE SECUNDARIA

N°	NOMBRE DEL ESTUDIANTE	DEPARTAMENTO	MEDALLA
1	JORGE ANDRES IBARRA MOGRO	TARIJA	ORO
2	DIEGO AGUIRRE MOREIRA	COCHABAMBA	ORO
3	MARCO ANTONIO ESPINOZA AYALA	LA PAZ	PLATA
5	RICARDO GIORDANO ROJAS DEL CASTILLO	COCHABAMBA	PLATA
6	GUTIERREZ QUISBERT KENDALL ROBERT	YACUIBA	PLATA
7	CRISTIAN TORRICOS RODRIGUEZ	TARIJA	BRONCE
8	ADRIAN FELIX CHOQUEVILLCA VILLANUEVA	SANTA CRUZ	MENCION
9	GIOVANNI GALINDO AÑEZ	PANDO	MENCION
10	GARY ROGER ADOLFO CHAVEZ ANDRADE	LA PAZ	MENCION
11	SEBASTIAN NAVARRO LEMA	TARIJA	MENCION
12	MARIA GABRIELA PEÑA	COCHABAMBA	MENCION
13	LUCIA MARCELA VILLALBA SALINAS	ORURO	MENCION
14	FLORES VARGAS RENATO	ORURO	MENCION

2^{DO} DE SECUNDARIA

N°	NOMBRE DEL ESTUDIANTE	DEPARTAMENTO	MEDALLA
1	TAPIA MERCADO CESAR FERNANDO	ORURO	ORO
2	ALVARO MARTINEZ TORREZ	SANTA CRUZ	ORO
3	MARIANA MADELEN VASQUEZ SANCHEZ	LA PAZ	PLATA
4	CELINA QUISPE FLORES	SUCRE	BRONE
5	DIEGO ALBERTO HUMEREZ CACERES	TARIJA	BRONE
7	JHOSELIN ANAVE ZENTENO	ORURO	MENCION
9	XIOMARA ELENA CARDONA VARGAS	SANTA CRUZ	MENCION

3^{RO} DE SECUNDARIA

N°	NOMBRE DEL ESTUDIANTE	DEPARTAMENTO	MEDALLA
1	SANJINEZ ORTIZ MONICA ALEJANDRA	SANTA CRUZ	ORO
2	JORGE ALEJANDRO ALVAREZ ARANIBAR	TARIJA	PLATA
3	DENNIS GUSTAVO VENTURA LLAVE	ORURO	PLATA
4	OMAR RENATO GARRIDO HAYES	SANTA CRUZ	PLATA
5	SANTIAGO MAURICIO MEJIA	COCHABAMBA	BRONCE
6	TANIA LORENA CAIHUARA CASTELLANOS	TARIJA	BRONCE
7	DANIELA GUEVARA GUERRA	LA PAZ	BRONCE
8	EMILY BRENDA LAPACA FLORES	ORURO	MENCION
9	VALERIA D E LA S MUÑECAS GONZALES	LA PAZ	MENCION
10	LAURA LOPEZ CUNO	COCHABAMBA	MENCION
11	CARLOS ANDRES PIZARROSO TRONCOSO	COCHABAMBA	MENCION
12	CARLOS ISIDRO CHOQUE MENA	SANTA CRUZ	MENCION

5^{ta} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y
ASTROFÍSICA
Cochabamba, 5 al 8 de noviembre de 2010
SEXTO DE PRIMARIA
PRUEBA TEÓRICA

PARTE CONCEPTUAL (40%)

I. ENCIERRE LA RESPUESTA CORRECTA

- En el siglo XVI, el modelo Ptolemaico fue sustituido por el modelo de:
a) Copérnico b) Kepler c) Galileo d) Ninguno
- La Tierra se formó, como todos los restantes planetas del Sistema Solar, hace aproximadamente:
a) 2.5 millones de años b) 10 billones de años
c) 4,6 miles de millones de años d) ninguno
- El cráter más grande conocido en la Luna es:
a) Bailly b) María c) Mar de los Humores
d) Bahía del Arcoíris e) Ninguno
- Los primeros en postular el sistema heliocéntrico fueron los:
a) Mayas b) Sumerios c) Griegos d) Árabes
e) Ninguno

II. COMPLETAR LAS SIGUIENTES ORACIONES

- La tierra primigenia se formó por la colisión y fusión de fragmentos de rocas más pequeñas, de los denominados planetesimales.
- Bajo los mares, el espesor de la corteza oscila entre los cinco y ocho kilómetros, pero debajo de los continentes llega a alcanzar una profundidad de hasta cuarenta kilómetros.
- La superficie limítrofe entre la corteza granítica y la basáltica se denomina discontinuidad de Conrad en honor a su descubridor.
- La luna orbita alrededor de nuestro planeta como un gran satélite en un espacio de tiempo de 27,3 días, se mueve una vez alrededor de la tierra y también una vez alrededor de su propio eje, la velocidad con la que gira alrededor de la tierra es de unos 3700 kilómetros por hora.
- Los Asteroides tienen órbitas alrededor del Sol, que en la mayoría de los casos se encuentran entre Marte y Júpiter.

III. ASOCIAR CADA FRASE CON EL TERMINO CORRECTO

- Se extiende en el espacio hasta una altura de aproximadamente 2400 kilómetros.
- Representa tres cuartos de la masa de la atmósfera y prácticamente toda la humedad disponible se encuentra en su ancho cinturón, que llega a tener aproximadamente 18 kilómetros.

- Se extiende a partir de la tropopausa hasta una altura de unos 80 kilómetros, en esta región se encuentra la capa de ozono que absorbe la gran mayoría de los rayos ultravioletas.
- Se sitúa entre 80 y mil kilómetros de altura, la temperatura asciende de forma constante a causa de la radiación del sol y puede alcanzar valores por encima de los 400°C.

- O esfera de disipación.

- La Atmósfera
- La troposfera
- La estratosfera
- La Termosfera
- La exosfera

- La atmósfera, se extiende en el espacio hasta una altura de aproximadamente 2400 kilómetros.

- La troposfera, representa tres cuartos de la masa de la atmósfera y prácticamente toda la humedad disponible se encuentran en su ancho cinturón que llega a tener aproximadamente 18 kilómetros.

- La estratosfera, se extiende a partir de la tropopausa hasta una altura de unos 80 kilómetros, en esta región se encuentra la capa de ozono que absorbe la gran mayoría de los rayos ultravioleta.

- La termosfera, se sitúa entre 80 y mil kilómetros de altura, la temperatura asciende de forma constante a causa de la radiación del sol y puede alcanzar valores por encima de los 400°C.

- La exosfera, o esfera de disipación.

PARTE PRÁCTICA (60%)

- La masa de Saturno es de 5.64×10^{26} Kg. y su Volumen es de $9.05 \times 10^{23} m^3$ a) calcule su densidad, b) Si el planeta se colocara en un océano suficientemente grande flotaría o se hundiría. Justifique su respuesta.

$$\text{Sol. a) } \rho = 5.64 \times 10^{26} \text{ kg} / 9.05 \times 10^{23} m^3$$

$$\rho = 623.2044 [kg/m^3]$$

- Flotaría puesto que su densidad es menor a la del agua.

- El radio de Júpiter es en promedio 10.95 veces el radio promedio de la Tierra y una

masa 317.4 veces la de nuestro planeta. Calcule la proporción de la densidad de masa de Júpiter ρ_J y la densidad de masa de la Tierra ρ_T , dada por ρ_J/ρ_T .

Sol.

$$\rho_J = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3}$$

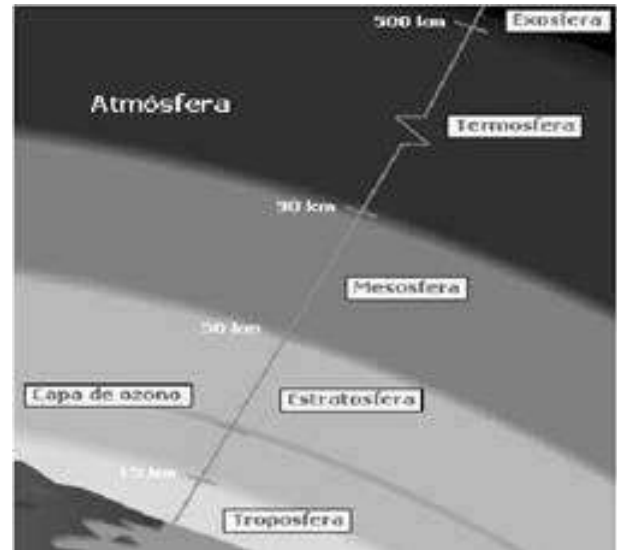
$$\rho_T = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$$

$$\rightarrow \frac{\rho_J}{\rho_T} = \frac{\frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3}}{\frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}} = \frac{317.4M_T}{10.95 \times 10^3 R_T^3} \cdot \frac{R_T^3}{M_T}$$

$$\rightarrow \frac{\rho_J}{\rho_T} = 0.24$$

3. Dibuje todas las capas de la atmósfera terrestre con sus respectivas distancias.

Sol.



5^{ta} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y
ASTROFÍSICA
Cochabamba, 5 al 8 de noviembre de 2010
SÉPTIMO DE PRIMARIA
PRUEBA TEÓRICA

PARTE CONCEPTUAL (40%)

I. ENCIERRE LA RESPUESTA CORRECTA

1. Una de los Satélites de Neptuno es:
a) Talasa b) Io c) Tetis d) Desdémona e) ninguno

II. COMPLETAR LAS SIGUIENTES ORACIONES

2. En el caso de los eclipses solares anulares, la luna se encuentra cerca de su posición mas alejado de la tierra, por lo que aparece una decima parte mas pequeña que cuando esta mas cercana.
3. Mercurio completa una órbita alrededor del Sol en 88 días terrestres.
4. Mercurio solo se puede ver poco antes de la salida del Sol y algo después de su puesta.
5. La rotación propia de Venus es retrógrada, es decir gira alrededor de su propio eje al contrario que lo hacen la mayoría de los planetas.
6. Los meteoroides son casi siempre fragmentos de cometas y asteroides, que se extinguen cuando caen sobre la Tierra o al entrar en la atmósfera terrestre, y los vemos como estrellas fugaces o meteoros.
7. Cometas están compuestos por polvo y gases congelados.
8. Ceres fue el primer asteroide descubierto (año 1801).

III. RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS

9. ¿Cuáles son los grupos diferenciados de planetas que existen en nuestro sistema solar?

Sol. Los planetas interiores y los planetas exteriores.

10. Haga una lista de los planetas que junto a Saturno también poseen anillos.

Sol. Júpiter, Urano y Neptuno.

11. ¿En qué fase se encuentra la Luna cuando se produce un eclipse total de Luna?

Sol. Está llena ya que por entrar en el cono de sombra de la tierra, debe estar opuesta al sol.

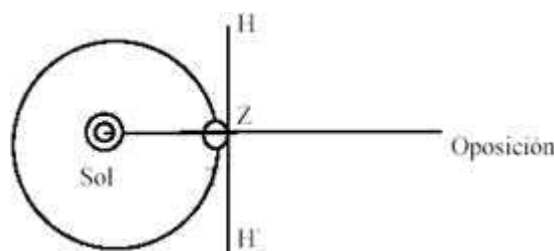
12. De los ocho planetas que existen en nuestro sistema solar, ¿cuáles son posibles de ver a simple vista en el cielo nocturno?

Sol. Mercurio, Venus, Marte, Júpiter, Saturno. (Urano en condiciones favorables se puede ver a simple vista como un pequeño punto luminoso).

PARTE PRÁCTICA (60%)

1. ¿A que hora culmina Júpiter cuando está en oposición?

Sol.



Como se puede ver en el grafico Júpiter en oposición culmina a media noche.

2. La masa de Saturno es de $5.64 \times 10^{26} \text{ kg}$ y su radio es de $6.0 \times 10^7 \text{ m}$ a) calcule su densidad, b) Si el planeta se colocara en un océano suficientemente grande ¿Flotaría o se hundiría? Explique.

Sol. a)

$$\rho = \frac{5.64 \times 10^{26} \text{ Kg}}{\frac{4}{3}\pi (6.0 \times 10^7)^3} = 623.2044 \left[\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right]$$

b) Flotaría puesto que su densidad es menor a la del agua.

3. El radio de Júpiter es en promedio 10.95 veces el radio promedio de la Tierra y una masa 317.4 veces la de nuestro planeta. Calcule la proporción de la densidad de masa de Júpiter ρ_J y la densidad de masa de la Tierra ρ_T , dada por ρ_J/ρ_T .

Sol.

$$\rho_J = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3}$$

$$\rho_T = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$$

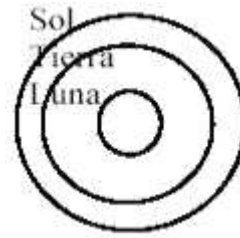
$$\rightarrow \frac{\rho_J}{\rho_T} = \frac{\frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3}}{\frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}} = \frac{317.4 M_T}{10.95 \times 10^3 \frac{R_T^3}{R_T^3}}$$

$$\rightarrow \frac{\rho_J}{\rho_T} = 0.24$$

4. En qué fase se encuentra la Luna cuando esta sale por el horizonte oriental el mismo momento que el Sol se pone en el horizonte occidental.

Sol. Luna llena

Sol.



5. ¿Cómo se produce un eclipse solar? (Acompañe su explicación con un gráfico)

5^{ta} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y
ASTROFÍSICA
Cochabamba, 5 al 8 de noviembre de 2010
OCTAVO DE PRIMARIA
PRUEBA TEÓRICA

PARTE CONCEPTUAL (40%)

I. RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS

1. En un eclipse anular, ¿en qué sector de su órbita se encuentra la Luna?

Sol. La luna debe estar cerca al apogeo.

2. ¿A qué hora culmina Júpiter cuando está en oposición.

Sol. Júpiter en oposición culmina a media noche.

3. ¿Aparte de Júpiter, qué otros planetas pueden culminar a media noche? Elabora una lista de dichos planetas.

Sol. Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.

4. Cuando la Luna sale por el horizonte a media noche, ¿en qué fase se encuentra?

Sol. Cuarto menguante.

5. De los ocho planetas que existen, ¿cuáles son posibles de ver a simple vista?

Sol. Mercurio, Venus, Marte, Júpiter, Saturno. (Urano en condiciones favorables se puede ver a simple vista como un pequeño punto luminoso).

6. La temperatura en la superficie de los planetas, ¿Aumenta o disminuye a medida que nos alejamos del Sol?

Sol. Disminuye, ya que la radiación solar disminuye.

7. ¿En qué se diferencian de la Tierra los planetas gigantes?

Sol. Tienen densidades menores de la tierra; son prácticamente gaseosos, compuestos de hidrogeno, helio, metano; son muy masivos o sus masas son muy grandes en comparación de la tierra, y se han formado muy lejos del sol.

8. ¿Cuáles son los planetas gaseosos del sistema solar?

Sol. Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno.

9. ¿Cual de los planetas tiene una densidad menor a la del agua?

Sol. Saturno.

10. ¿Qué nos dice de la composición de la Tierra el hecho de que su densidad sea de $5.5g/cm^3$?

Sol. Está compuesta de materiales metálicos como de hierro y níquel, además de silicio que tienen densidades algo mayores o algo menores a la de la tierra.

PARTE PRÁCTICA (60%)

1. El radio de la órbita terrestre es $1.49 \times 10^{11}[m]$. Esta longitud se denomina una unidad astronómica. Expresar un año luz en unidades astronómicas.

Sol. 63271.47 UA

2. La densidad del gas interestelar en nuestra galaxia se estima que es de $1.0 \times 10^{-21}[kg/m^3]$, suponiendo que el gas es principalmente hidrógeno; estimar el número de átomos de hidrógeno por centímetro cúbico.

Sol. El Hidrogeno

$$(1molH/10.4L) \times (1gH/1molH) \times (1000L/1m^3) =$$

$$= (1gH/10.4m^3)$$

$$(1gH/10.4m^3) \rightarrow 6.023 \times 10^{23}$$

$$1.0 \times 10^{-21} \rightarrow x$$

$$x = 62639.2atm/m^3 \times (1m^3/100cm^3)$$

$$x = 0.063atm/cm^3$$

3. La velocidad de la luz en el vacío es $2.9979 \times 10^8 m/s$,

a) expresarla en millas por hora.

b) ¿Cuántas vueltas alrededor de la Tierra podría dar un rayo de luz en un segundo?,

c) ¿Qué distancia recorre en un año y qué nombre recibe esta distancia?

Sol. a) $2.997 \times 10^8 m/s \times (1milla/1.6093 \times 10^{-3}m) \times (3600s/1h) = 6.7 \times 10^{14} millas/h$

b) $2 \times \pi \times 6387 \times 0.62 = 2.5 \times 10^4 millas$

$c = 2.9977m/s$

$x = (2.9977/2) \times \pi \times 6387 \times 10^3 = 7.5$

veces

c) $2.9977 \times 10^8 m/s \times (31561920/s) \times (m/s) = 9.4613 \times 10^{12} km/años$

Un año luz.

4. ¿Cuánto tiempo tarda la luz del Sol en llegar a Urano?

Sol. $2.9977 \times 10^8 m/s \times (1/2.87 \times 10^{12}m) = 1.0444 \times 10^{-4} s$

Datos útiles:

1 milla = 1.6093 km

Numero de Avogadro = 6.023×10^{23} moléculas/mol

DSOL-URANO = 2.87×10^9 km

5^{ta} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
Cochabamba, 5 al 8 de noviembre de 2010
 PRIMERO DE SECUNDARIA
PRUEBA TEÓRICA

PARTE CONCEPTUAL (60%)

I. COMPLETE LOS SIGUIENTES CONCEPTOS

1. Cúmulo, es una agrupación de estrellas que comparten los mismos criterios físicos.
2. La vía láctea, se puede reconocer a simple vista como una mancha blanquecina.
3. Enana Blanca, la más conocida es la compañera de Sirio, que fue la primera en descubrirse.
4. Estrellas de neutrones, la materia está condensada, tienen un diámetro de unos 20 kilómetros y su densidad es enormemente grande.

II. RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS

5. Si estando en algún lugar de Bolivia, vemos el cielo a diario, aproximadamente a la misma hora, notaremos que muchas estrellas que aparecen en invierno no aparecen en verano ¿Por qué?

Sol. Porque la tierra se encuentra al otro lado de su órbita, por tanto, de noche vemos otras regiones del cielo que no eran visibles medio año antes.



Ciclo nocturno de verano

Ciclo nocturno de invierno (sur)

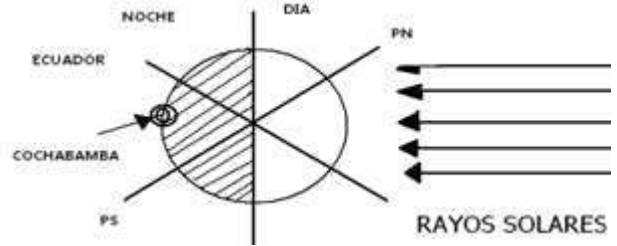
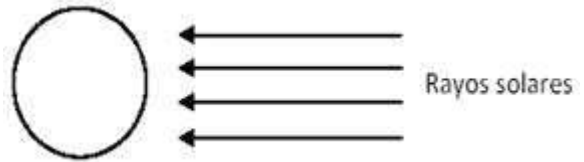
6. ¿Cómo se vería el cielo de día si la Tierra no tuviera atmósfera?

Sol. Si la tierra no tuviera atmósfera. La luz solar alcanzaría nuestros ojos directamente desde el disco solar, no recibiríamos luz difundida y el cielo aparecería tan negro como por la noche (los astronautas pueden observar durante el día las estrellas, la Luna y los planetas debido a que están fuera de la atmósfera). El color negro de la noche es debido a que, a la atmósfera que rodea al observador, apenas llega luz y por tanto no se puede dar suficiente difusión.

7. En el dibujo que se muestra, el círculo representa la Tierra iluminada por el Sol (cuyos rayos llegan paralelos). Complete el dibujo con la línea divisoria día-noche, eje terrestre, ecuador y

la posición de Cochabamba a media noche, para el 21 de Junio.

Sol.



8. ¿Hacia qué lugar del cielo hay que apuntar para ver un astro que tiene las siguientes coordenadas horizontales: acimut= 135° y altura= 90°?

Sol. Hay que apuntar al cenit (en este caso no importa el acimut ya que para cualquier ángulo acimutal igualmente alcanzamos el cenit).

9. ¿Qué coordenadas horizontales tienen los siguientes puntos cardinales? (indicar acimut y altura), además, indique dónde toma el origen del acimut. a) Este. b) Noroeste. c) Sur Sur Este.

Sol. Tomando como origen el acimut sur
 a) Este: Az= 270° h=0
 b) Oeste: Az= 135° h=0
 c) SSe : Az= 337,5° h=0
 Tomando como origen el acimut sur
 a) Este: Az= 90° h=0
 b) Oeste: Az= 315° h=0
 c) SSe: Az= 157,5° h=0

10. Desde Bolivia, ¿cuánto tiempo permanece el polo sur celeste levantado sobre el horizonte?

Sol. Las 24 horas, el polo sur celeste es un punto fijo y dado que Bolivia está al sur del ecuador el polo sur celeste siempre es visible.

11. En un eclipse anular, ¿en qué sector de su órbita se encuentra la Luna?

Sol. La luna debe estar cerca al apogeo.

12. ¿Cuál es el acimut y altura del Sol cuando sale por el horizonte en cualquiera de los equinoccios?

Sol. En el equinoccio el sol cruza el ecuador celeste ($\delta=0^\circ$) por tanto al salir lo hace por el punto cardinal este $Az=90^\circ$ y $h=0$ o $Az=270^\circ$ $h=0^\circ$ (origen sur)

13. Desde Cochabamba se observa salir por el horizonte oriental Las Tres Marias que, aproximadamente, tienen las siguientes coordenadas ecuatoriales: ascensión recta igual a 6 horas y declinación igual a 0° . ¿Cuánto tiempo tardarán en ponerse (ocultarse) en el horizonte occidental?

Sol. Al ser su declinación igual a 0 se encuentran en el ecuador celeste; por tanto, tardaran 12 horas, ya que el ecuador celeste está dividido a la mitad por el plano del horizonte.

14. Responder a la anterior pregunta considerando que en vez de estar en Cochabamba el observador se encuentra en el Círculo Polar Ártico.

Sol. No importa la latitud el plano del horizonte divide al ecuador celeste por la mitad (salvo por los polos), por lo tanto también tarda 12 horas.

PARTE PRÁCTICA (40%)

1. El diámetro aparente (angular) de la Luna α , vista desde la Tierra es de 0.5° . El ángulo que subtende la Tierra, observada desde la Luna β , es varias veces mayor. a) Sean R_T y R_L los radios terrestre y lunar. Calcule \hat{a} en función de: R_T/R_L b) Encuentre el valor de β en grados

Sol.

$$\text{Tag}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R_L}{r}; \text{Tag}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{R_T}{r}$$

$$\rightarrow \frac{\alpha}{2} \ll 1$$

y

$$\frac{\beta}{2} \ll 1$$

$$\rightarrow \text{Tag}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx \frac{\alpha}{2}; \text{Tag}\left(\frac{\beta}{2}\right) \approx \frac{\beta}{2}$$

Así tenemos:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{R_L}{r}$$

y

$$\frac{\beta}{2} = \frac{R_T}{r}$$

2. Una estrella tipo G se observa con una magnitud aparente de 3.5. ¿A qué distancia se encuentra dicha estrella?

Tipo espectral	B	A	F	G	K
Magnitud absoluta visual	-4,1	+0,6	+2,6	+4,4	+5,9

Sol. Se ve de la tabla que M_v (magnitud absoluta visual) de una estrella tipo G en +4.4. Utilizando el módulo de distancia de donde obtenemos:

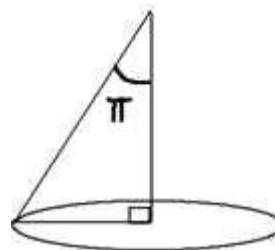
$$m - M = 5 \log_{10} d - 5$$

$$\log_{10} d = \frac{1}{5} (m - M + 5) \rightarrow d = 10^{(m-M+5)/5}$$

$$d = 6.6[pc]$$

3. Un pársec a ¿cuántas unidades astronómicas corresponde?

Sol.



Como $\pi rad = \frac{a}{D} 1''$ en radianes es:

$$\pi rad = \left(\frac{1}{3600}\right) \times \left(\frac{\pi}{180}\right)$$

$$D = \frac{a}{\pi rad} = \frac{3600 \times 180}{\pi rad} [1UA] = 206264.81UA$$

$$a = 1UA$$

5^{ta} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
Cochabamba, 5 al 8 de noviembre de 2010
 SEGUNDO DE SECUNDARIA
PRUEBA TEÓRICA

PARTE CONCEPTUAL (60%)

I. RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS

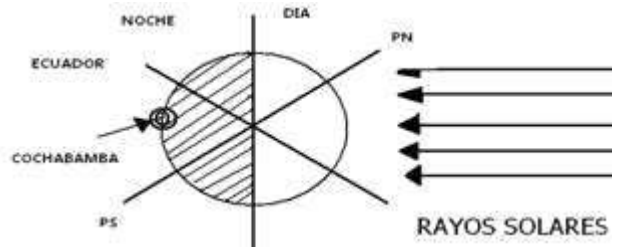
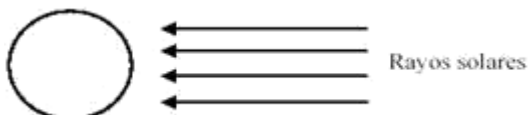
1. Las partículas de la atmósfera terrestre absorben y dispersan la luz que nos llega del Sol y de otros objetos celestes. La eficacia de los fenómenos de absorción y dispersión depende de la longitud de onda de la luz. a) ¿Por qué durante el día vemos al cielo azul y al Sol amarillo? b) Explique también por qué el sol se ve rojizo cuando está cerca del horizonte.

Sol. a) Sabemos que la luz que llega del sol a la tierra es dispersada por la atmósfera terrestre. La eficacia de la dispersión es mayor a longitudes de onda menores. Es decir, en el azul la eficacia es mayor que en el amarillo. Por lo tanto, las partículas de la atmósfera dispersan con mayor facilidad la luz del sol. Esta luz, al ser dispersada por la atmósfera, nos llega de todas las direcciones y hace que veamos el cielo azul. Cuando el Sol está en el cenit nos llega menos luz azul y lo vemos mas amarillo. Cuando el sol está cerca del horizonte su luz tiene que recorrer una mayor distancia a través de la atmósfera y las ondas que menos se dispersan son aquellas con longitud de onda más larga (rojas). Por eso, el sol se ve rojizo cuando esta cerca del horizonte.

b) Cuando el Sol se halla a una distancia angular del horizonte de 1° ó 2°, la luz crepuscular derrama sobre el borde del cielo su mágica luminosidad. Poco a poco, el resplandor amarillo se transforma en una luz rojo-anaranjada, y, finalmente, en una luminosidad centelleante color fuego.

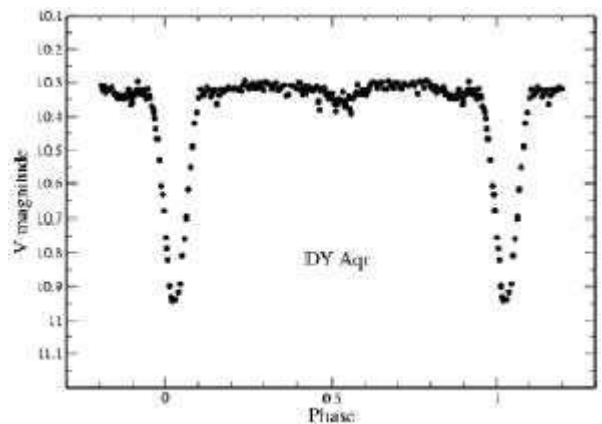
2. En el dibujo que se muestra, el círculo representa la Tierra iluminada por el Sol (cuyos rayos llegan paralelos). Complete el dibujo con la línea divisoria día-noche, eje terrestre, ecuador y la posición de Cochabamba a media noche, para el 21 de Junio.

Sol.

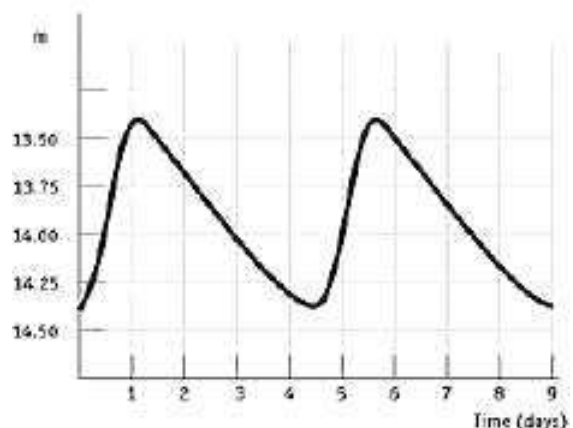


3. A lado de cada gráfico indique si se trata de una variable intrínseca o extrínseca, y cuál es el criterio que utilizó para identificarlo.

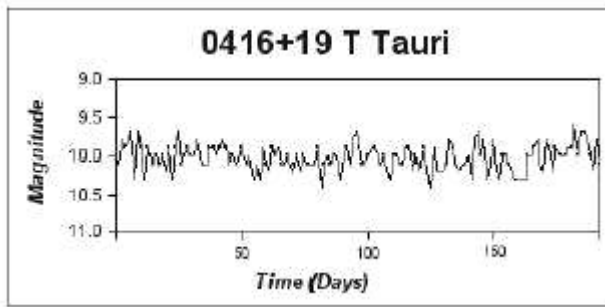
Sol.



Variable extrínseca. La curva muestra la disminución de brillo debido a que la acompañante que es más débil que la principal al pasar por delante de esta disminuye la cantidad de luz que nos llega. La variación de brillo es debido a un factor externo a la estrella.



Variable intrínseca, la variación de luz se debe a pulsaciones de la estrella (aumenta y disminuye su radio) la variación de brillo se debe a cambios de la propia estrella, este tipo de variable además tiene una variación regular.



Variable intrínseca (como de variación irregular) se debe a variaciones no periódicas en la estrella de reciente formación.

4. En un eclipse anular, ¿en qué sector de su órbita se encuentra la Luna?

Sol. La luna debe estar cerca al apogeo.

5. Hacia qué lugar del cielo hay que apuntar para ver un astro que tiene las siguientes coordenadas horizontales: acimut = 135° y altura = 90°.

Sol. Hay que apuntar al cenit (en este caso no importa el acimut ya que para cualquier ángulo acimutal igualmente alcanzamos el cenit).

6. ¿Qué coordenadas horizontales tienen los siguientes puntos cardinales? (indicar acimut y altura), además, indique dónde toma el origen del acimut. a) Este. b) Noroeste. c) Sur Sur Este.

Sol. Tomando como origen el acimut sur

- a) Este: Az= 270° h=0
 b) Oeste: Az= 135° h=0
 c) SSe : Az= 337,5° h=0

Tomando como origen el acimut sur

- a) Este: Az= 90° h=0
 b) Oeste: Az= 315° h=0
 c) SSe: Az= 157,5° h=0

7. Una estrella presenta una paralaje anual de 0.01 segundos de arco, cuál es su distancia en pársec.

Sol. Por definición, la distancia a la cual el semieje mayor de la tierra subtende un ángulo de 1" que se denomina pársec.

Dado que es un ángulo muy pequeño la relación $\pi rad = \frac{a}{D}$ es válida (πrad representa la paralaje anual, en radianes, no confundir con la constante π) Si $a = 1UA$ entonces π expresado en segundos de arco será: $\pi'' = \frac{1}{D}$ (la distancia es igual al inverso del paralaje anual).

Es así que si $\pi = 0.01'' \rightarrow d = 100pc$

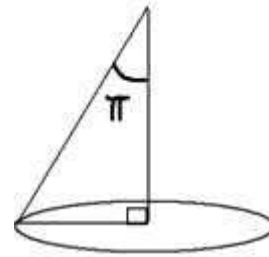
Como $\pi rad = \frac{a}{D}$ en radianes es:

$$\pi rad = \left(\frac{1}{3600} \right) \times \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$D = \frac{a}{\pi rad} = \frac{3600 \times 180}{\pi rad} [1UA] = 206264.81UA$$

8. Un pársec a ¿cuántas unidades astronómicas corresponde?

Sol.



Como $\pi rad = \frac{a}{D}$ en radianes es:

$$\pi rad = \left(\frac{1}{3600} \right) \times \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$D = \frac{a}{\pi rad} = \frac{3600 \times 180}{\pi rad} [1UA] = 206264.81UA$$

$$a = 1UA$$

9. En una Galaxia, cuál es la diferencia entre estrellas de población I y población II.

Sol. La población I está compuesta por estrellas jóvenes, con mayor abundancia de metales, se encuentran en los brazos estirados. La población II se trata de estrellas viejas, con escasa o nula existencia de metales, generalmente se hallan en el halo galáctico (cúmulos globulares) y en el bulbo galáctico.

10. ¿Está la órbita de la Luna trazada en una carta celeste? Sí, no, ¿por qué?

Sol. No porque no es un objeto fijo en la bóveda celeste como aparentan ser las estrellas.

11. El método trigonométrico para la medición de la paralaje actualmente permite medir distancias a las estrellas hasta 100 pc (cuántos pársec o años luz).

12. ¿Por qué confeccionó el astrónomo francés Charles Messier, su catálogo?

Sol. Para tener un registro de objetos en el cielo que en su época se podían confundir con cometas y así evitar tales confusiones.

13. Desde Cochabamba se observa salir por el horizonte oriental Las Tres Marías que, aproximadamente, tienen las siguientes coordenadas ecuatoriales: ascensión recta igual a 6 horas y declinación igual a 0°. ¿Cuánto tiempo tardarán en ponerse (ocultarse) en el horizonte occidental?

Sol. Al ser su declinación igual a 0 se encuentran en el ecuador celeste; por tanto, tardaran 12 horas, ya que el ecuador celeste está dividido a la mitad por el plano del horizonte.

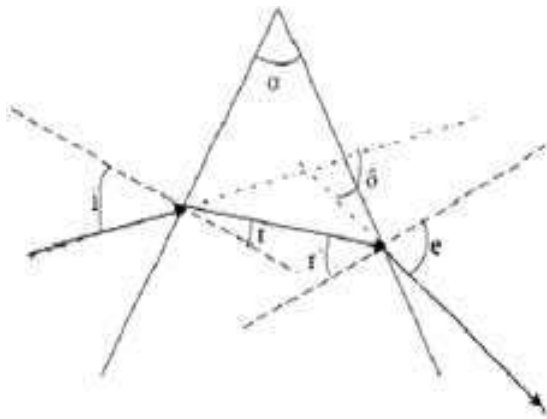
14. Responder a la anterior pregunta considerando que en vez de estar en Cochabamba el observador se encuentra en el Círculo Polar Ártico.

Sol. No importa la latitud el plano del horizonte divide al ecuador celeste por la mitad (salvo por los polos), por lo tanto también tarda 12 horas.

PARTE PRÁCTICA (40%)

1. Encontrar la relación general entre ángulo de desviación δ de un prisma, de ángulo α , e índice de refracción n , situado en el aire ($n = 1$), en función de α, i, n, r, r', e (ver figura) y a partir de esa ecuación deducir la expresión para el ángulo de desviación mínima. Determinar el ángulo de incidencia que produce la desviación mínima en un prisma de $\alpha = 60^\circ$ y $n = 1.5$.

Sol.



De la figura se deduce que:

$$i - r + e - r' = \delta$$

$$r + r' = \alpha \rightarrow \delta = i + e - \alpha$$

Aplicando la ley de Snell:

$$\text{Sen}o(i) = n\text{Sen}o(r)$$

$$n\text{Sen}o(r') = \text{Sen}o(e)$$

$$\begin{aligned} \text{Sen}o(i) + \text{Sen}o(e) &= \\ &= 2\text{Sen}o\left(\frac{i+e}{2}\right) \text{Cos}\left(\frac{i-e}{2}\right) = \\ &= n(\text{Sen}o(r) + \text{Sen}o(r')) \end{aligned} \quad (1)$$

Sustituyendo de (1)

$$\begin{aligned} 2\text{Sen}o\left(\frac{i+e}{2}\right) \text{Cos}\left(\frac{i-e}{2}\right) &= \\ &= n(\text{Sen}o(r) + \text{Sen}o(r')) \\ &\rightarrow 2\text{Sen}o\left(\frac{\delta + \alpha}{2}\right) = \\ &= \frac{n(\text{Sen}o(r) + \text{Sen}o(r'))}{\text{Cos}\left(\frac{i-e}{2}\right)} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Sen}o(r) + \text{Sen}o(r') &= \\ &= 2\text{Sen}o\left(\frac{r+r'}{2}\right) \text{Cos}\left(\frac{r-r'}{2}\right) = \\ &= 2\text{Sen}o\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{Cos}\left(\frac{r-r'}{2}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Llevando (3) a (2)

$$2\text{Sen}o\left(\frac{\delta + \alpha}{2}\right) = \frac{[n2\text{Sen}o\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{Cos}\left(\frac{r-r'}{2}\right)]}{\text{Cos}\left(\frac{i-e}{2}\right)}$$

$$\rightarrow \text{Sen}o\left(\frac{\delta + \alpha}{2}\right) = \frac{[n\text{Sen}o\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{Cos}\left(\frac{r-r'}{2}\right)]}{\text{Cos}\left(\frac{i-e}{2}\right)}$$

2. Una estrella tipo F se observa con una magnitud aparente de 3.5. ¿A qué distancia se encuentra dicha estrella?

Tipo espectral	B	A	F	G	K
Magnitud absoluta visual	-4,1	+0,6	+2,6	+4,4	+5,9

Sol. Se ve de la tabla que Mv (magnitud absoluta visual) de una estrella tipo F en +4.4. Utilizando el módulo de distancia de donde obtenemos:

$$m - M = 5 \log_{10} d - 5$$

$$\log_{10} d = \frac{1}{5} (m - M + 5) \rightarrow d = 10^{(m-M+5)/5}$$

$$d = 15.1[pc]$$

5^{ta} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
Cochabamba, 5 al 8 de noviembre de 2010
 TERCERO DE SECUNDARIA
PRUEBA TEÓRICA

PARTE CONCEPTUAL (30%)

I. RESPONDA LAS SIGUIENTES PREGUNTAS

1. Tanto la Tierra como la Luna giran alrededor de su propio eje. La Luna además, gira en una órbita casi circular alrededor de la Tierra. Sin embargo, desde la Tierra siempre se ve la misma cara de la Luna. a) Diga, qué condición se tiene que cumplir para que esto no ocurra. b) Describa el fenómeno que conduce a esta situación.

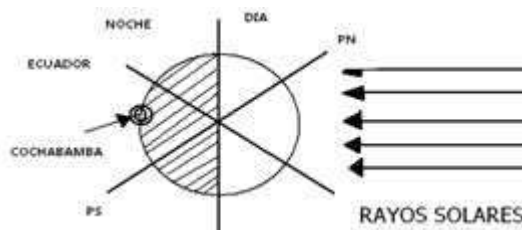
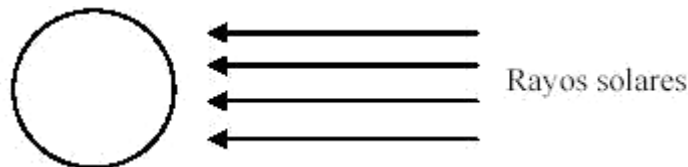
Sol. a) Vemos siempre la misma cara de la luna porque su periodo de rotación sobre si misma es igual a su periodo de traslación alrededor de la tierra, entonces el periodo de rotación de la luna no debe ser sincrónico con su periodo de traslación.

b) Como la fuerza de gravedad es un vector, depende de la distancia y del ángulo con el que aplica. Así, el lado de la luna más próximo a la tierra siente una atracción gravitacional mayor a la de otras zonas. Es decir, si desde la Tierra vemos a la Luna entonces la zona que está enfrente de la tierra siente la mayor atracción gravitacional mientras que las zonas de los lados sienten una menor atracción gravitacional (fuerza de marea). Esto hace que se produzca un alargamiento de la Luna. El mismo efecto producido por la Luna sobre la Tierra es responsable de las mareas de los océanos. La zona alargada no puede regresar instantáneamente a su forma inicial. Cuando la luna rota sobre si misma mas rápido de lo que lo hace actualmente, la zona alargada se desplazaba hacia la dirección de rotación de la Luna. La zona alargada, antes de regresar a su forma inicial, ya no estaba enfrente de la tierra. Entonces esta zona sufría una mayor atracción gravitacional. Dicha fuerza se oponía a la rotación de la Luna sobre su eje. Debido a esta oposición la velocidad de rotación de la Luna fue disminuyendo hasta llegar a la situación en la que una misma cara siempre está dirigida hacia la tierra.

2. En el dibujo que se muestra, el círculo representa la Tierra iluminada por el Sol (cuyos rayos llegan paralelos). Complete el dibujo con la línea divisoria

ria día-noche, eje terrestre, ecuador y la posición de Cochabamba a media noche, para el 21 de Junio.

Sol.



3. Una estrella presenta una paralaje anual de 0.01 segundos de arco, cuál es su distancia en pársec.

Sol. Por definición, la distancia a la cual el semieje mayor de la tierra subtende un ángulo de 1" que se denomina pársec.

Dado que es un ángulo muy pequeño la relación $\pi_{rad} = \frac{a}{D}$ es válida (π_{rad} representa la paralaje anual, en radianes, no confundir con la constante π) Si $a = 1UA$ entonces π expresado en segundos de arco será: $\pi'' = \frac{1}{D}$ (la distancia es igual al inverso del paralaje anual).

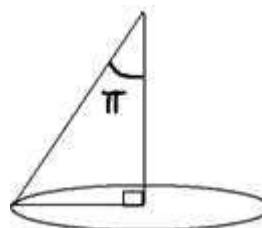
Es así que si $\pi = 0.01'' \rightarrow d = 100pc$
 Como $\pi_{rad} = \frac{a}{D} 1''$ en radianes es:

$$\pi_{rad} = \left(\frac{1}{3600} \right) \times \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$D = \frac{a}{\pi_{rad}} = \frac{3600 \times 180}{\pi_{rad}} [1UA] = 206264.81UA$$

4. Un pársec a ¿cuántas unidades astronómicas corresponde?

Sol.



Como $\pi \text{ rad} = \frac{a}{D} 1''$ en radianes es:

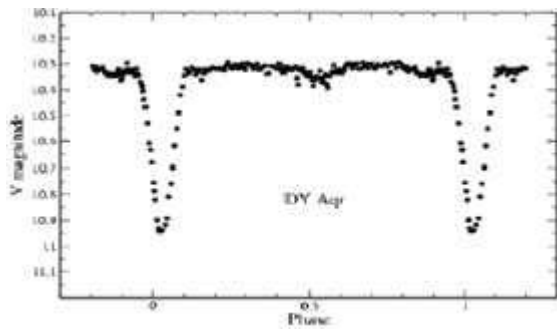
$$\pi \text{ rad} = \left(\frac{1}{3600} \right) \times \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$D = \frac{a}{\pi \text{ rad}} = \frac{3600 \times 180}{\pi \text{ rad}} [1UA] = 206264.81UA$$

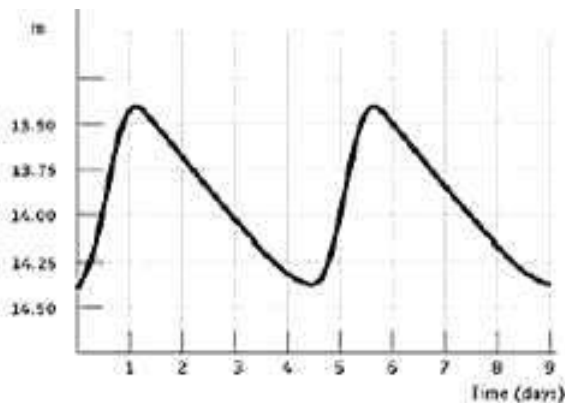
$a = 1UA$

5. A lado de cada gráfico indique si se trata de una variable intrínseca o extrínseca, y cuál es el criterio que utilizó para identificarlo.

Sol.

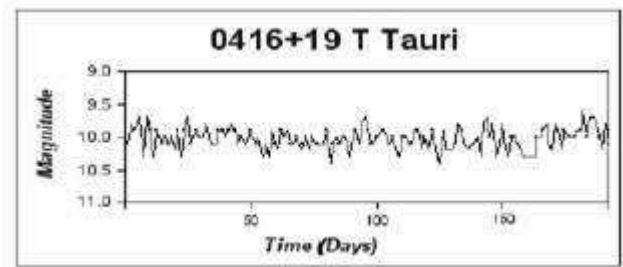


Variable extrínseca. La curva muestra la disminución de brillo debido a que la acompañante que es más débil que la principal al pasar por delante de esta disminuye la cantidad de luz que nos llega. La variación de brillo es debido a un factor externo a la estrella.



Variable intrínseca, la variación de luz se debe a pulsaciones de la estrella (aumenta y disminuye su radio) la variación de brillo se debe a cambios de la propia estrella, este tipo de variable además tiene una variación regular.

Variable intrínseca (como de variación irregular) se debe a variaciones no periódicas en la estrella de reciente formación.

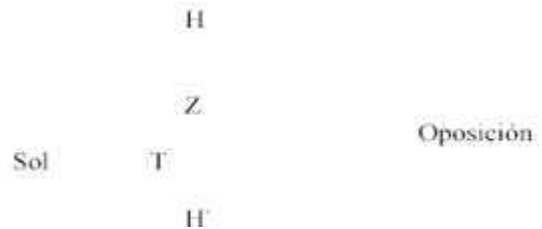


6. En un eclipse anular, ¿en qué sector de su órbita se encuentra la Luna?

Sol. La luna debe estar cerca al apogeo.

7. ¿A qué hora culmina Júpiter cuando está en oposición?

Sol. Como se puede ver en el grafico Júpiter

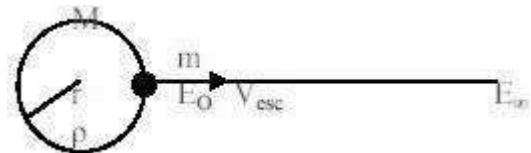


en oposición culmina a media noche.

PARTE PRÁCTICA (70%)

1. Si el radio terrestre fuese la mitad de lo que es y la densidad continúa siendo la misma, en qué proporción aumenta o disminuye la velocidad de escape.

Sol. Para la tierra:



m debe llegar al infinito con $v = 0$ por lo menos por conservación de la energía $E_0 = E_\infty$ y $E_\infty = 0$ (no ligado) o $v = 0$ para $U = 0$.

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - G\left(\frac{Mm}{r}\right) = 0$$

Como:

$$\rho = \frac{M}{v} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

La masa:

$$M = \frac{4\pi\rho r^3}{3}$$

Remplazando en la primera ecuación:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{8\pi\rho r^3}{3}}$$

$V_{esc} \propto r^2$ (V_{esc} es directamente proporcional a r).

Por tanto si el radio disminuye a la mitad la V_{esc} reduciría a la mitad.

2. Si la masa de la Tierra fuera el doble de lo que es, ¿cuál debería ser el periodo orbital de la Luna para encontrarse a la misma distancia que se encuentra actualmente?

Sol. Deduciendo de la 3ra ley de Kepler (en forma simplificada)



F es centrípeta $F = m\omega^2 r$ (2^{da} ley).

Por la ley de gravitación universal

$$F = G \left(\frac{Mm}{r^2} \right)$$

$$\rightarrow \omega^2 r = G \left(\frac{M}{r^2} \right) \rightarrow 4 \left(\frac{\pi^2}{T^2} \right) = G \left(\frac{M}{r^3} \right)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Si M se duplica entonces T disminuye por un factor de: $\sqrt{1/2}$ Como el periodo orbital de la luna es de 27.32 dias de la tierra es de 19.32 dias.

3. Una estrella tipo B se observa con una magnitud aparente de 3.5. ¿A qué distancia se encuentra dicha estrella?

Tipo espectral	B	A	F	G	K
Magnitud absoluta visual	-4,1	+0,6	+2,6	+4,4	+5,9

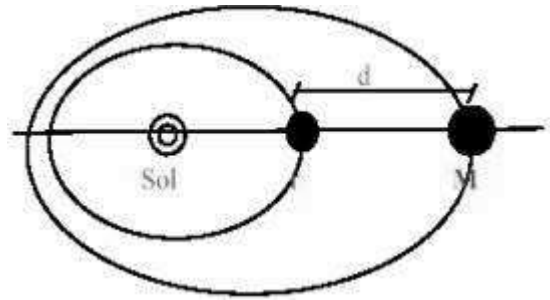
Sol. Se ve de la tabla que M_v (magnitud absoluta visual) de una estrella tipo B en +4.4. Utilizando el módulo de distancia de donde obtenemos:

$$m - M = 5 \log_{10} d - 5$$

$$\log_{10} d = \frac{1}{5} (m - M + 5) \rightarrow d = 10^{(m-M+5)/5}$$

$$d = 331 [pc]$$

4. Una sonda espacial que está orbitando Marte, envía una señal de radio a la Tierra. Si Marte se encuentra en oposición,



¿cuánto tardará en llegar dicha señal a nuestro planeta?

Sol.

$$d = d_M - d_T$$

$$d_M = 228 \times 10^6 \text{ km}$$

$$\Delta t = d/c = (d_M - d_T) / c$$

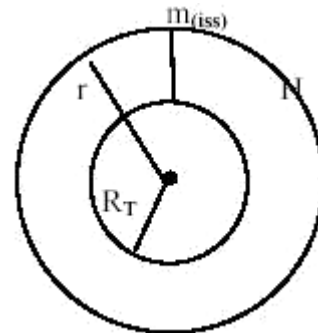
$$d_T = 149.6 \times 10^6 \text{ km}$$

$$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\Delta t = 261 \text{ seg.} = 4 \text{ min } 21 \text{ seg.}$$

5. La estación espacial internacional se encuentra orbitando la Tierra a una altura de 350 km sobre su superficie, y tiene una masa de 150 Tn. ¿Cuál es su energía orbital?

Sol.



$$r = H + R_T$$

$$H = 350 \text{ km}; R_T = 6375 \text{ km};$$

$$m_{iss} = 150 \times 10^3 \text{ km}$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G \left(\frac{Mm}{r} \right)$$

Se refiere v (de la tercera ley de Kepler deduciendo de nuevo)

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$$

Reemplazando en la anterior ecuación:

$$E = \frac{1}{2}G \left(\frac{Mm}{r} \right) - G \left(\frac{Mm}{r} \right) = -G \left(\frac{Mm}{2r} \right)$$

$$E = -G \left(\frac{Mm}{2(H + R_T)} \right)$$

$$E = -4.44 \times 10^{12} \text{ [J]}$$

6. ¿Qué velocidad debe tener una nave espacial para escapar del sistema solar cuando es lanzada desde la órbita terrestre?

Sol. m no debe llegar al infinito con $V = 0$ por lo menos por conservación de la energía $E_o = E_\infty$ y $E_\infty = 0$ (no ligado) o $V = 0$ para $U = 0$.

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - G\left(\frac{Mm}{r}\right) = 0$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Por tanto se tiene:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2 \times 6.67^{-11} \times 1.99^{30}}{146.6^9}}$$

$$v_{esc} = 42.1 \text{ km/seg.}$$

7. Calcular la masa de la Tierra utilizando los datos orbitales de la Luna.

Sol. Obteniendo un resultado parcial de la pregunta 2 (ley de Kepler) tenemos:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{r^3}$$

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

$$M = 6.02 \times 10^{24} \text{ kg}$$

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Dr. Diego Sanjinés Castedo

Email: sanjines@fiumssa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumssa.edu.bo

Dr. Eduardo Palenque Vidaurre

Email: edyruy@yahoo.es

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos

Email: aticona@fiumsaa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

Misión

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica semestralmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

Instrucciones para los autores

Los trabajos enviados para su publicación deberán estar escritos preferentemente en castellano. Trabajos escritos en inglés podrán ser aceptados por el Comité Editorial y, pasado el proceso de aceptación, serán traducidos al castellano para su publicación en la RBF.

Los autores deberán enviar sus trabajos preferentemente en los formatos $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, *MS Word*, o *sólo texto* (con extensiones *.tex*, *.doc* y *.txt*, respectivamente), ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. Las figuras deberán tener una resolución razonable a fin de que puedan ser vistas con suficiente claridad por el lector.

Los artículos científicos serán revisados por el Comité Editorial y posteriormente por un par de árbitros anónimos quienes dan el veredicto sobre si el artículo es aceptado o no.

La comunicación de los autores con los árbitros se realiza únicamente a través del editor encargado del área.

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

Conflicto de interés: Los autores que envíen artículos para su publicación en la RBF admiten que no tienen conflicto de interés en relación a los trabajos realizados y presentados.

CONTENIDO

A. ARTÍCULOS

CARACTERIZACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS MEDIANTE PERIODICIDADES

G. M. Ramírez Ávila & J. A. C. Gallas

BÚSQUEDA DE LA COMPONENTE DE ALTA ENERGÍA DE DESTELLOS
DE RAYOS GAMA (GRB) CON EL EXPERIMENTO INCA

Il Wara Chamani & Alfonso Velarde

SIMULACIÓN DEL PROBLEMA DE N CUERPOS CARGADOS:
EL ÁTOMO CLÁSICO

V. M. Peñafiel

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES POR
EL MÉTODO DE MONTE CARLO

Franz Suxo Mamani

TRATAMIENTO DE ABERRACIÓN ESFERICA MEDIANTE SERIE
FOCAL

Adrián Tellería

DISTRIBUCIÓN DE POTENCIA ELECTROMAGNETICA EN UN
RECINTO METÁLICO

Evaristo Mamani & Diego Sanjinés C.

D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

15ava OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA, 5ta OLIMPIADA BOLIVIANA
DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

Bustos R. et al.