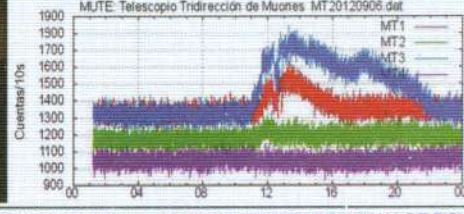
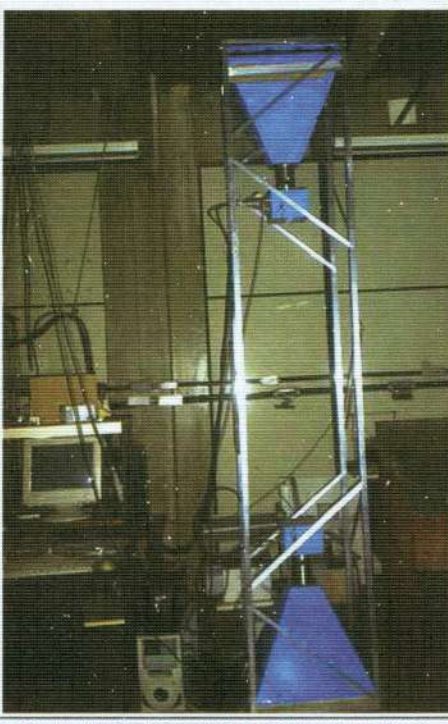
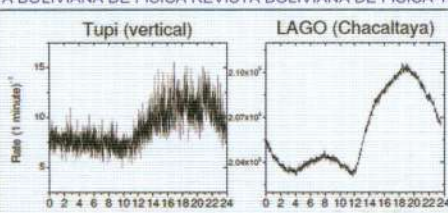


ISSN 1562-3873

# REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 22

NOV. 2012 • LA PAZ - BOLIVIA



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS  
CARRERA DE FÍSICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

---

## REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

Ésta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

### COMITÉ EDITORIAL

**Sociedad Boliviana de Física**

**Dr. Diego Sanjinés Castedo**  
Email: sanjines@fiumsa.edu.bo

**Instituto de Investigaciones Físicas**

**Lic. Alfonso Velarde Chávez**  
Email: avelarde@fiumsa.edu.bo  
**Dr. Eduardo Palenque Vidaurre**  
Email: edyruy@yahoo.es

**Carrera de Física**

**Dr. Armando R. Ticona Bustillos**  
Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

---

### CONSEJO EDITORIAL

**Dr. Oscar Antonio Rondón**

Institute of Nuclear and Particle Physics  
University of Virginia  
McCormick Road, Charlottesville, VA 22901  
804 924-6787, USA  
Email: or@virginia.edu

**Dr. Carlos Navia**

Instituto de Física  
Universidade Federal Fluminense  
Av. Gen. Milton Tavares de Souza  
24210-340, Niterói, RJ-Brasil  
Email: gfcnoj@if.uff.br

**Dr. Jason Gallas**

Instituto de Física  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Brasil  
Email: jgallas@if.ufrgs.br

**Juan Cesar Flores, PhD**

Instituto de Alta Investigación  
Universidad de Tarapaca  
Arica - Chile  
Email: cflores@uta.cl

**Dr. Thadeu Penna**

Instituto de Ciências Exatas - Volta Redonda  
Universidade Federal Fluminense  
INCT - Sistemas Complexos  
Av. Gen. Milton Tavares de Souza  
24210-340, Niterói, RJ-Brasil  
Email: tjpp@if.uff.br

**Dr. Sergio Magalhães**

Instituto de Física  
Universidade Federal Fluminense  
Av. Gen. Milton Tavares de Souza  
24210-340, Niterói, RJ-Brasil  
Email: sgmagal@gmail.com

---

ISSN 1562-3823



# Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS  
CARRERA DE FÍSICA  
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS  
Y  
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 22  
DICIEMBRE DE 2012

## **Revista Boliviana de Física**

**ISSN 1562-3823**

**Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica**

<http://biblioweb.dgsca.unam.mx/latindex>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.  
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

*Diseño:* A. Ticona

*Dirección:* Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.

Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

*Portada:* Búsqueda de señales utilizando los telescopios **TUPI** *Universidade Federal Fluminense - Brasil* y **MUTE** *Instituto de Investigaciones Físicas (UMSA) - Bolivia*, durante la fase ascendente del ciclo solar 24.

*Formato*  $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$ . *Tipo de fuente utilizada:* newcentury

IMPRESO EN BOLIVIA — PRINTED IN BOLIVIA

## CONTENIDO

### A. ARTÍCULOS

CONDICIONES DE SINCRONIZACIÓN DE DOS OSCILADORES MÓVILES	<i>R. O. E. Bustos Espinoza &amp; G. M. Ramírez Ávila</i>	1
PRUEBAS DE ALINEALIDAD POR DATOS SUBROGADOS SOBRE SERIES EXPERIMENTALES	<i>V. M. Peñafiel</i>	8
UN CRITERIO PARA LOCALIZACIÓN DINÁMICA CON BASE EN EL ESQUEMA DEL PÉNDULO DE KAPITZA EN LA RED	<i>D. Sanjinés C.</i>	14

### B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

SIMULACIÓN MONTE CARLO PARA REGISTROS DE PRECIPITACIÓN PLUVIAL	<i>V. M. Peñafiel &amp; M. Andrade</i>	21
--	--	----

### D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

UN EXPERIMENTO DEMOSTRATIVO DE ESTÁTICA	<i>R. Vilca Salinas</i>	29
16 <sup>va</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA, 6 <sup>ta</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA	<i>Bustos R. et al.</i>	33

## CONDICIONES DE SINCRONIZACIÓN DE DOS OSCILADORES MÓVILES

### SYNCHRONIZATION CONDITIONS OF TWO MOBILE OSCILLATORS

R. O. E. BUSTOS ESPINOZA<sup>†</sup> & G. M. RAMÍREZ ÁVILA<sup>‡</sup>

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física  
Universidad Mayor de San Andrés  
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639  
La Paz – Bolivia

(Recibido 10 de Septiembre de 2012; aceptado 15 de Octubre de 2012)

#### RESUMEN

Se estudia el problema de la sincronización de dos osciladores móviles escogiendo como prototipo de oscilador a un mapa logístico tanto por su simplicidad matemática como por su riqueza de comportamiento. Se proponen dos esquemas de acoplamiento: uno de tipo campo medio y el otro dependiente de la distancia. El movimiento de los osciladores cambia de acuerdo a una regla impuesta que está en relación con el grado de sincronización del sistema y con una distancia umbral que evite la colisión de los osciladores. Se encuentra una tendencia a facilitar la sincronización debida al movimiento de los osciladores. Se dan posibles aplicaciones de este tipo de sistemas.

*Descriptor:* Dinámica no lineal y caos — sincronización y osciladores acoplados

Código(s) PACS: 05.45.-a, 05.45.Xt

#### ABSTRACT

We study the problem of synchronization in motile oscillators. We choose as the prototypical oscillator of the system a logistic map due to both its mathematical simplicity and its rich dynamical behavior. We propose two coupling schemes: the first is a mean field type and the second is a distance dependent one. The motion of the oscillators is related to a specific rule in relationship with the synchronization degree of the system and a threshold distance which avoid the collision between the oscillators. Our results show a tendency for enhanced synchronization due to the motion of the oscillators. We point out some possible applications of this kind of systems.

*Subject headings:* Nonlinear dynamics and chaos — synchronization and coupled oscillators

#### 1. INTRODUCCIÓN

La sincronización es un fenómeno omnipresente en la naturaleza y cuyo estudio ha tomado gran importancia tanto desde el punto de vista teórico como experimental, tal como lo indican Pikovsky & Maistrenko (2003). Por otra parte, fruto de la investigación básica, se encontraron diferentes aplicaciones, siendo una de las más importantes el encriptado y desencriptado de señales descrito en Pérez & Cerdeira (1995); Yang & Chua (1996); Yang et al. (1997) y en general, aspectos relacionados a comunicación de señales expuestos por Lin & Tsai (2007); López-Gutiérrez et al. (2009). Además, la sincronización se manifiesta fuertemente en sistemas biológicos, como lo resalta Janson (2012), tales como en luciérnagas, cuya descripción se da en Buck (1935); Hanson et al. (1971); Buck & Buck (1976), en cigarras, como lo muestra Sueur (2002), en salta-

montes, cuyo estudio se da en Sismondo (1990); Greenfield & Roizen (1993), en ranas, como lo analiza Aihara (2009) y en sistemas neuronales tal como se menciona en Nowotny et al. (2008) bajo diferentes circunstancias y condiciones tales como cuando las neuronas forman una red tipo “mundo pequeño”, aspecto estudiado por Wei & Luo (2007) o una red “libre de escala”, lo que es analizado por Grinstein & Linsker (2005); Batista et al. (2009).

El estudio del movimiento de elementos de un sistema, ha merecido la atención en dinámica no lineal y varios trabajos acerca del carácter colectivo de este fenómeno fueron realizados tomando diferentes enfoques. Así, la consideración hecha por Shimoyama et al. (1996) de una interacción entre elementos móviles dependiente de una distancia mutua óptima permite describir situaciones tales como caminatas rectas, ondulantes y aleatorias; así como movimiento en enjambres. El modelo de partículas auto-propulsadas y su comportamiento colectivo frente a ruido es analizado por

<sup>†</sup><http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/rbustos/>

<sup>‡</sup><http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/>

Czirok & Vicsek (2000) tanto con un modelo discreto como con uno continuo. La utilización de mapas cuadráticos por Shibata & Kaneko (2003) para estudiar la dinámica interna de osciladores caóticos ha permitido describir el comportamiento dinámico de los denominados gases de mapas acoplados, en los cuales, la posición de los elementos móviles está determinada por una fuerza que depende de la dinámica interna de cada uno de los osciladores. La descripción y cuantificación de un comportamiento colectivo de osciladores móviles cuya dinámica interna está basada en un mapa logístico es formulada por García Cantú Ros et al. (2011) para lo cual utilizan un índice de agrupamiento que toma en cuenta simultáneamente el grado de agrupamiento espacial así como el alineamiento de las velocidades de los elementos móviles. El estudio de la sincronización de osciladores fotocontrolados móviles, similares en comportamiento a las luciérnagas, ha sido planteado y desarrollado por Ramírez Ávila (2004). La sincronización en osciladores de “integración y disparo” en la situación simple de interacciones de tipo maestro-esclavo es descrita en Sarkar (2010), encontrándose que la sincronización global del sistema es más fácilmente alcanzada cuando los osciladores tienen un movimiento aleatorio. El acoplamiento dependiente del tiempo en osciladores móviles en los cuales se tienen alternativamente interacciones atractivas y repulsivas es analizada por Zanette & Mikhailov (2004), encontrándose transiciones entre estados ordenados y desordenados mediados por un régimen de agrupamiento dinámico.

En este trabajo, se consideran osciladores móviles en interacción, entendiendo que un oscilador, es un agente que puede presentar comportamiento periódico, cuasiperiódico o caótico; es por ello que asociamos a la dinámica interna de cada oscilador, un mapa logístico. Presentamos una caracterización de la sincronización de dos osciladores móviles con las propiedades citadas en el anterior párrafo y que pueden moverse aleatoriamente en un plano pero con ciertas restricciones tanto en lo referente a la distancia entre los mismos como al grado de sincronización que estos exhiben. Se consideran dos tipos de acoplamiento, uno en el que la intensidad del mismo no varía con el tiempo ni con la posición y otro en el que la distancia entre los osciladores juega un rol primordial y que varía con el inverso del cuadrado de la distancia entre los osciladores.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en §2, se exponen las principales características de un mapa logístico y del acoplamiento entre dos de estos mapas. Se detallan los tipos de acoplamiento y se dan las condiciones para el movimiento de los osciladores; por otra parte, se define el factor que determina la sincronización del sistema. Los resultados del trabajo se dan en §3 tanto para el acoplamiento que permanece constante (tipo campo medio) §3.1 como para el que depende de la distancia entre los osciladores §3.2; así mismo, se procede a hacer una comparación para resaltar las

propiedades que introduce el movimiento de los osciladores en el sistema. Finalmente, en §4 se señalan las conclusiones y perspectivas de la presente investigación.

## 2. MODELO

El mapa logístico, se representa por una ecuación en diferencias formulada por May (1976) que se deriva de una ecuación, propuesta en el s. XIX por Verhulst (1838) que describe la dinámica de una población considerando aspectos tales como la tasa de nacimiento per capita y la capacidad de carga, aspectos explicados por Murray (2002). Este mapa ha sido utilizado ampliamente en diferentes disciplinas sobre todo por la simplicidad que ofrece y al mismo tiempo la gran variedad de comportamientos que presenta. Por esta razón, se escogió como modelo para cada uno de los osciladores un mapa logístico dado por:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad , \quad (1)$$

donde  $\mu$  es el parámetro de control que determina el comportamiento del mapa tal como se puede ver en el diagrama de bifurcación de la Fig. 1(a), en el cual se distinguen las regiones: de extinción ( $0 \leq \mu \leq 1$ ), estacionaria ( $\mu < 3$ ), período  $2^k$  con  $k \in \mathbb{Z}^+$  y  $3 \leq \mu < \mu_\infty$ , siendo  $\mu_\infty = 3.569945672$  el denominado punto de acumulación (Fig. 1(b)), cuasiperiódica y caótica; también se presenta intermitencia por ejemplo en el intervalo  $3.8264 < \mu < 3.8304$  tal como se indica en Landau et al. (2008) (Fig. 1(c)), donde después de que el sistema aparece como estable, posteriormente se torna inestable para luego volver a la estabilidad, repitiéndose este comportamiento de manera indefinida. Es de hacer notar que la transición hacia el caos ocurre de manera que para ciertos valores de los parámetros, el sistema no presenta ninguna regularidad y es fuertemente dependiente de las condiciones iniciales como se señala en Rasband (1990); además, una vez que el sistema alcanza el régimen caótico, se puede salir del mismo a través de ventanas de período impar tal como lo demuestran analíticamente Saha & Strogatz (1995) (Fig. 1(c)), para volver nuevamente a través de una cascada de bifurcaciones a regiones caóticas (Fig. 1(d)).

En la Fig. 1(e)–(g) se muestran las series de tiempo para valores del parámetro de control contenidos en los diagramas de la Fig. 1(b)–(d): (e)  $\mu = 3.5699$ , (f)  $\mu = 3.8264$  y (g)  $\mu = 3.8568$ .

Para nuestro estudio de la sincronización de dos osciladores móviles, consideramos el acoplamiento de dos mapas logísticos, cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(1)} &= \mu^{(1)} x_n^{(1)}(1 - x_n^{(1)}) + \beta(x_n^{(2)} - x_n^{(1)}) \\ x_{n+1}^{(2)} &= \mu^{(2)} x_n^{(2)}(1 - x_n^{(2)}) + \beta(x_n^{(1)} - x_n^{(2)}) \quad , \end{aligned} \quad (2)$$

donde los superíndices identifican a los osciladores y los subíndices representan la evolución temporal. La intensidad de acoplamiento, que asumimos simétrica, viene dada por  $\beta$ , para la cual consideramos dos casos:

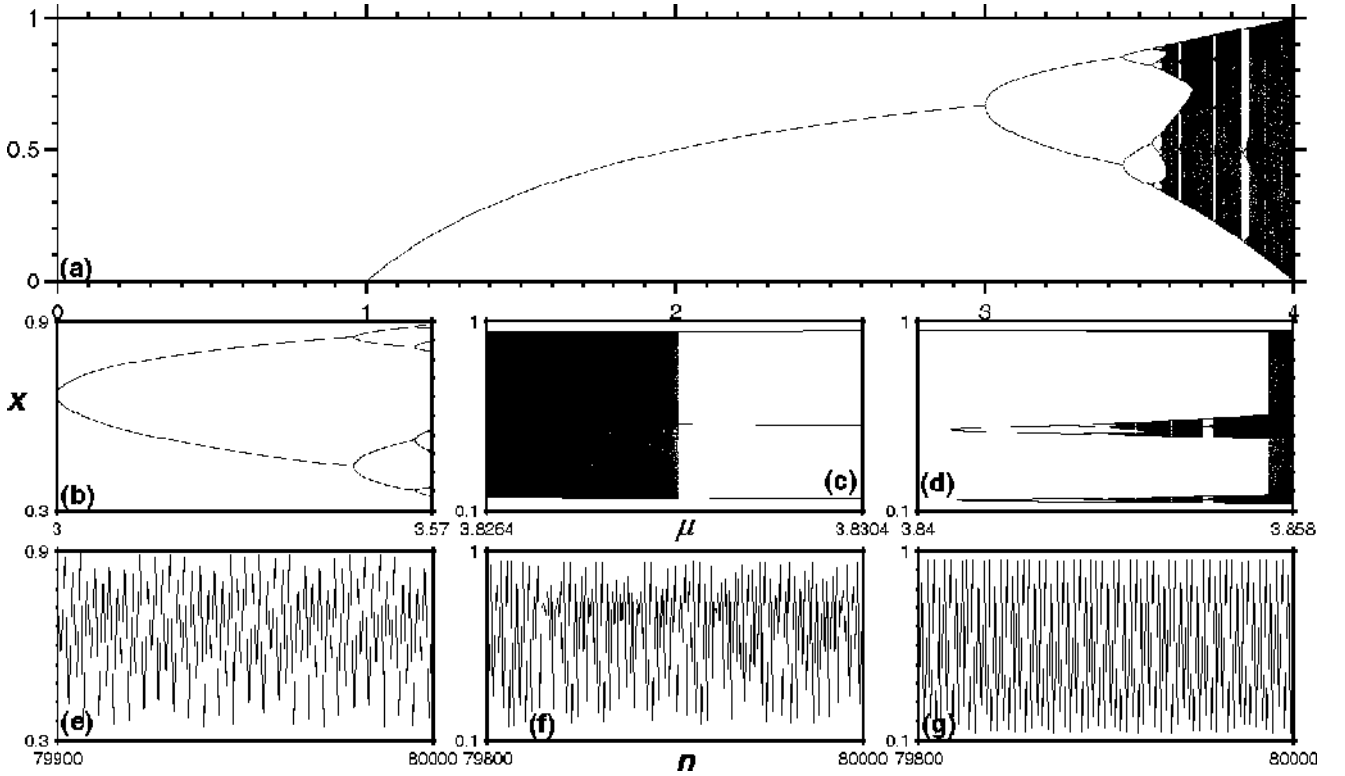


FIG. 1.— Diagramas de bifurcación para el mapa logístico regido por la Ec. (1): (a) en todo el espectro de valores posibles de  $\mu$ ; (b) en la región de desdoblamiento de período  $2^k$ ; (c) en el intervalo  $3.8264 < \mu < 3.8304$ , donde luego de una región caótica, se presenta una ventana de período 3; (d) cascada de desdoblamiento de período impar. Series temporales para valores de  $\mu$  contenidos en (b)–(d): (e) 3.5699, (f) 3.8264, (g) 3.8568.

**Acoplamiento constante.**: Introducido por razones de simplicidad puesto que, en este caso, la intensidad de acoplamiento no varía aunque las posiciones de los osciladores se modifiquen. Si se considera que los osciladores permanecen siempre acoplados a pesar de lo alejados que puedan estar; se tendrá  $\beta = \text{constante}$ , lo que es equivalente a una situación en la que los osciladores no se mueven. Resaltamos el hecho de que aunque se tenga una situación muy simple, la caracterización completa de la misma, requiere un cálculo numérico intenso.

#### Acoplamiento dependiente de la distancia:

La elección de este tipo de acoplamiento está basado en el hecho de que existen sistemas de osciladores cuyo acoplamiento depende de la distancia  $\beta = \beta(d_{12})$  (ver p. ej. Ramírez Ávila et al. (2003)). Esta dependencia, en su forma más simple, tiene la forma:

$$\beta \propto \frac{1}{d_{12}^2},$$

siendo  $d_{12}$ , la distancia entre los osciladores 1 y 2.

Por otra parte, se debe tener en cuenta que para un oscilador libre, el valor de  $x$  está comprendido en el intervalo  $[0, 1]$ ; sin embargo, dependiendo del valor del acoplamiento  $\beta$ , en principio, el valor de  $x$  podría salir del intervalo anteriormente mencionado por lo

que imponemos la condición:

$$\begin{aligned} \text{Si } x &\geq 1 &\Rightarrow x &= 1 \\ \text{Si } x &\leq 0 &\Rightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, para estudiar el movimiento de los osciladores, consideramos que cada oscilador es descrito por el vector  $\vec{r}$  que tiene en cuenta tanto la dinámica del oscilador en la variable  $x$  como la posición del mismo en el plano  $Y - Z$ . Así:

$$\vec{r}_n^{(i)} = (x_n^{(i)}, y_n^{(i)}, z_n^{(i)}) \quad , \quad i = 1, 2 \quad . \quad (3)$$

Para la cuantificación de la sincronización se define el factor de sincronización  $\sigma$  dado por:

$$\sigma_n = |x_n^{(2)} - x_n^{(1)}| \quad , \quad (4)$$

el cual permite identificar la sincronización ( $\sigma_n \rightarrow 0$ ) o la antisincronización ( $\sigma_n \rightarrow 1$ ) completas, es decir, en amplitud y fase. De acuerdo con el modelo que adoptamos, cada oscilador podrá moverse, cambiando así su posición en cada iteración siempre y cuando no alcance un valor del factor de sincronización  $\sigma_{\text{umbral}}$  que indica que el sistema tiende a la sincronización completa; para cuyo caso, los osciladores se detienen. Lo anterior puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \text{Si } \sigma_n &\geq \sigma_{\text{umbral}} &\Rightarrow (y_{n+1}^{(i)}, z_{n+1}^{(i)}) &= (y_n^{(i)} + \Delta y, z_n^{(i)} + \Delta z) \\ \text{Si } \sigma_n &< \sigma_{\text{umbral}} &\Rightarrow (y_{n+1}^{(i)}, z_{n+1}^{(i)}) &= (y_n^{(i)}, z_n^{(i)}) \quad , \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $\Delta y$  y  $\Delta z$  son pequeños desplazamientos aleatorios en las direcciones  $y$  y  $z$  respectivamente, mismos que siguen una distribución Gaussiana. Como se indicó anteriormente, en el caso de dos osciladores con acoplamiento constante; el movimiento y por consiguiente, el cambio de posiciones de los mismos es irrelevante, por lo que el problema podría ser considerado como si el sistema fuese estático. Sin embargo, cuando los osciladores cambian su valor de acoplamiento en función de la distancia entre los mismos, las posiciones juegan un rol preponderante y además se debe garantizar que los osciladores no sufran colisiones, por lo que para esta situación se considera una otra condición:

$$\begin{aligned} \text{Si } d_n \leq d_{\text{umbral}} \Rightarrow (y_{n+1}^{(i)}, z_{n+1}^{(i)}) &= (y_n^{(i)} + \Delta y, z_n^{(i)} + \Delta z) \\ &\wedge d_{n+1} > d_n, \end{aligned} \quad (6)$$

siendo  $d_{\text{umbral}}$ , una distancia umbral escogida de manera que garantice la no ocurrencia de colisiones entre los osciladores. Esta condición es importante puesto que de acuerdo con el esquema de acoplamiento dependiente de la distancia, una colisión entre osciladores implicaría un valor infinito del acoplamiento, situación que se debe evitar.

### 3. RESULTADOS

Utilizando el modelo y las condiciones descritas en §2, se caracterizó el comportamiento síncrono del sistema. Primeramente, se determina el espacio de parámetros  $(\mu^{(1)} - \mu^{(2)})$  caracterizándolo por medio del factor de sincronización  $\sigma_n$  (Fig. 2). Los valores para los cuales se hacen variar los parámetros de cada oscilador corresponden a comportamientos periódicos o caóticos tal como se mostró en la Fig. 1; es decir en el intervalo  $[3, 4]$ .

Sobre la base del espacio de parámetros de la Fig. 2, se escogen valores de los parámetros  $\mu^{(1)}$  y  $\mu^{(2)}$  para estudiar el comportamiento de osciladores acoplados según (2). Para ello, elegimos dos regiones para las cuales  $\sigma \approx 0$ ; concretamente para  $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 3.74$  y  $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 3.83$ , las cuales corresponden a comportamientos de período impar.

#### 3.1. Acoplamiento constante

Como se mencionó en §1, existen trabajos dedicados al estudio de la sincronización de mapas logísticos acoplados, tales como el de Morgul (1998), en el que se considera un acoplamiento de retroalimentación y de tipo maestro-esclavo, cuyo principal resultado es que el error de sincronización decae exponencialmente y que además se tiene robustez frente a ruido; o el de Taborov et al. (2000), en el cual se describe un sistema formado por tres mapas logísticos acoplados, en régimen caótico, encontrándose sincronización parcial para el sistema. Hacemos énfasis de que en el presente artículo, se estudian aspectos tales como la variación del acoplamiento con la distancia y el efecto del movimiento en la sincronización, considerando que se tiene, en todos los casos, acoplamiento mutuo y

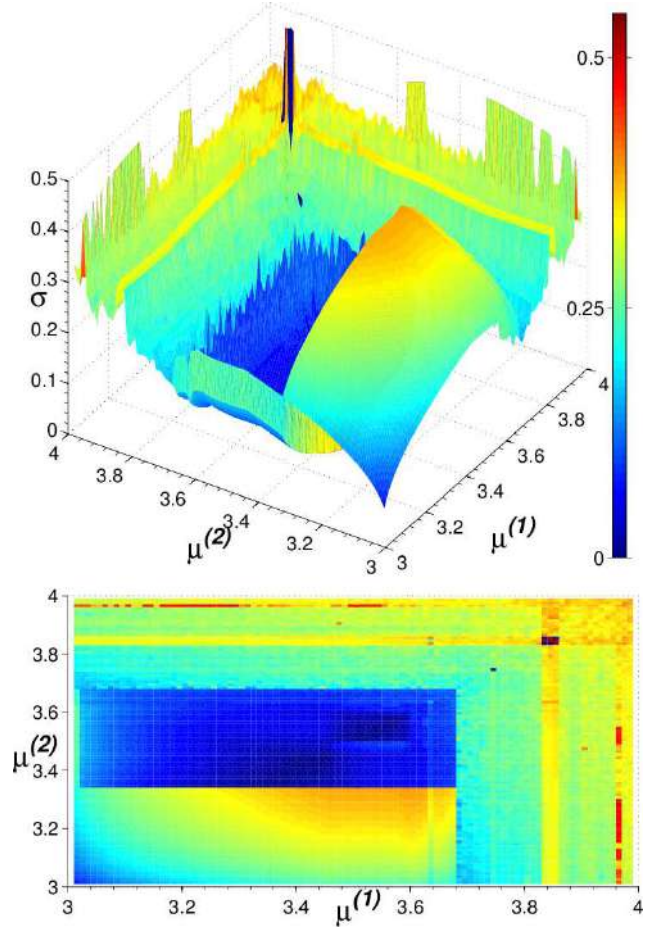


FIG. 2.— (Color online) Superficie mostrando los valores del factor de sincronización  $\sigma$ , después de  $n = 50000$ , para el espacio de parámetros  $(\mu^{(1)} - \mu^{(2)})$  del sistema de dos mapas logísticos acoplados cuando estos presentan oscilaciones  $3 \leq \mu^{(i)} \leq 4$ ; siendo el valor del acoplamiento  $\beta = 0.029$ . En la parte inferior, se muestra la proyección en el plano  $(\mu^{(1)} - \mu^{(2)})$ , donde se puede apreciar con mayor detalle las regiones de sincronización completa que mayoritariamente se presentan para valores de los parámetros que dan lugar a comportamientos periódicos.

simétrico. Para caracterizar la sincronización se procede a calcular el valor de  $\sigma$  cuando se consideran situaciones en la que los osciladores son idénticos o difieren por un factor  $\Delta\mu$  y haciendo variar el valor de la intensidad de acoplamiento  $\beta$  (Fig. 3(a) y (d)). Se observa que para valores pequeños de  $\beta$ , no se tiene sincronización, y posteriormente, a partir de un valor de  $\beta \approx 0.002$  el sistema es capaz de sincronizar incluso si los osciladores son diferentes en un rango  $\Delta\mu \approx 0.004$ . A medida que el acoplamiento aumenta, la región de sincronización se torna más estrecha, en contraposición a lo que normalmente ocurre con estas regiones denominadas también lenguas de Arnold, cuyo concepto está muy bien explicado en Argyris et al. (1994). La sincronización es posible hasta valores de  $\beta \approx 0.0035$  cuando los osciladores oscilan idénticamente. Resaltamos el hecho de que las lenguas de Arnold obtenidas, sólo consideran la situación de sincronización completa.

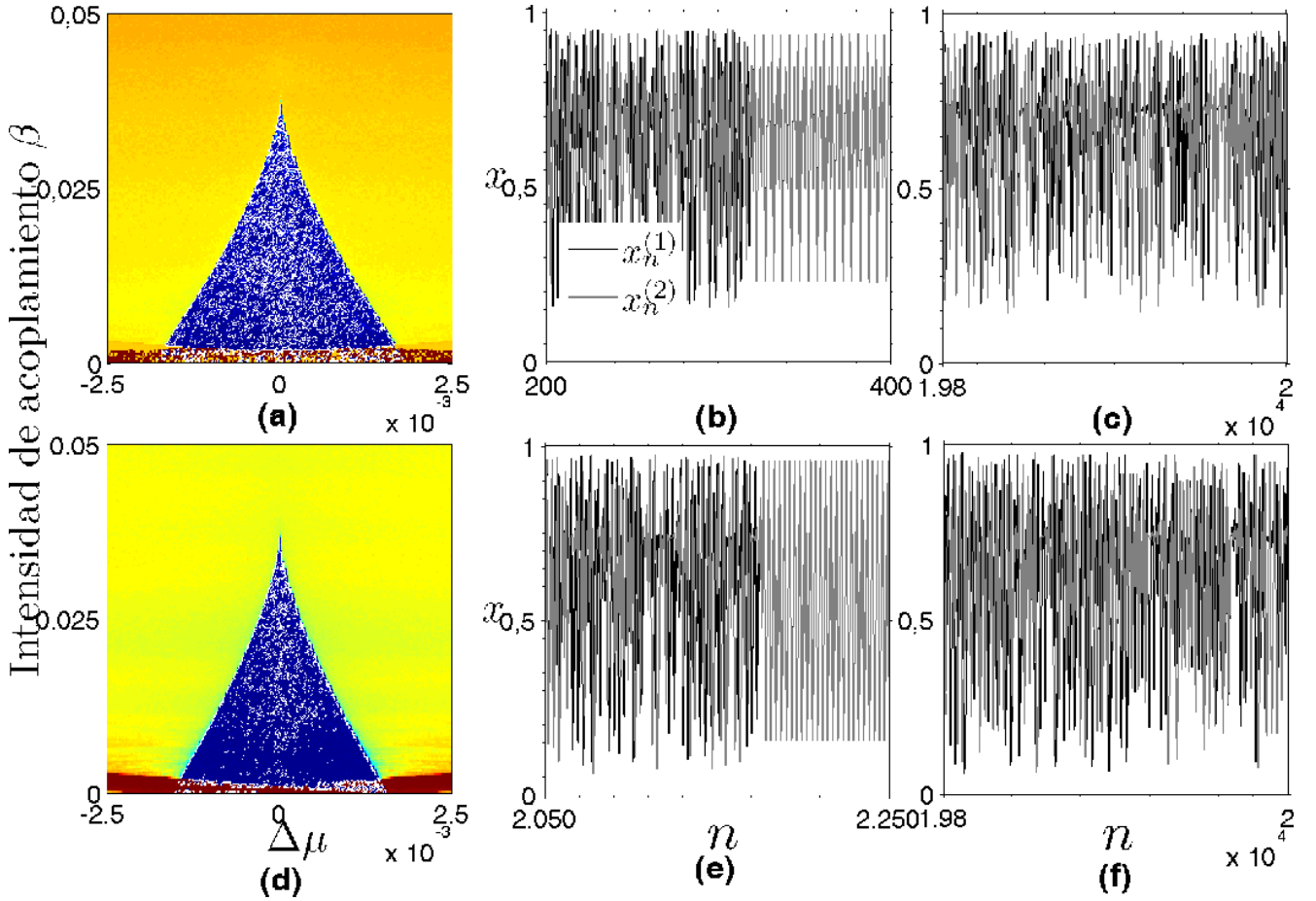


FIG. 3.— (Color online) En la parte superior, (a) Región de sincronización en el plano  $\beta$  vs.  $\Delta\mu$ , representando esto último las diferencias entre los valores de los parámetros de los osciladores considerados en las regiones de la Fig. 2, donde el valor de  $\sigma \rightarrow 0$  y  $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 3.74$ . El código de colores es similar al utilizado en la Fig. 2. Series de tiempo para (b) una situación en la que el valor  $\beta = 0.0335$  conduce a la sincronización y (c)  $\beta = 0.038$ , donde no se presenta sincronización. En la parte inferior, (d)  $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 3.83$ , (e)  $\beta = 0.0365$  (sincronización) y (f)  $\beta = 0.038$  (comportamiento asíncrono).

### 3.2. Acoplamiento dependiente de la distancia

Como se vió en §3.1, la sincronización depende del valor de la intensidad de acoplamiento  $\beta$ ; por lo que la consideración de un sistema, en el cual los osciladores pueden moverse de acuerdo a las condiciones (5)–(6), implica un cambio permanente de las posiciones de los mismos antes de que alcancen la sincronización, lo que se traduce en cambios permanentes de la intensidad de acoplamiento. Justamente, una pregunta natural es la concerniente a si ¿el movimiento favorece o perjudica a la sincronización del sistema?, pregunta que pretende ser respondida en base a los resultados obtenidos que se muestran en la Fig. 4.

Se encontraron tres tipos de sincronización: completa, es decir, en amplitud y fase, lo que se muestra en la Fig. 4(a)–(c), en fase (Fig. 4(d)–(f)) y en antifase, llamada también antisincronización (Fig. 4(g)–(i)). Cada una de estas situaciones de sincronización tienen características bien determinadas. Así, en la sincronización completa, observamos que en el caso particular mostrado en la Fig. 4, a partir de  $n = 427$ ,  $\sigma \approx 0$  (Fig. 4(a)) y las señales de  $x_n^{(1)}$  y  $x_n^{(2)}$  se superponen completamente (Fig. 4(b)) con lo que se

tendrá enganche tanto de amplitud como de fase; además, se ve también que de acuerdo con las condiciones impuestas, los osciladores dejan de moverse una vez que alcanzan esta sincronización (Fig. 4(c)). Una descripción más detallada de los diferentes tipos de sincronización puede encontrarse en Pikovsky et al. (2001) y Ramírez Ávila (2007). El segundo tipo de sincronización encontrado, corresponde a un enganche de fases y en este caso,  $\sigma$  no nos permite hacer una caracterización clara de este fenómeno, pues cuando se llega al régimen síncrono cuando  $n = 638$ , el factor  $\sigma$  presenta un carácter oscilatorio con una periodicidad de 25 pasos de tiempo (Fig. 4(d)); en lo que concierne a las señales, a simple vista, las oscilaciones son más complicadas (Fig. 4(e)); sin embargo, procediendo al cálculo de las periodicidades (ver Freire & Gallas (2011) y Ramírez Ávila & Gallas (2011)) para ambas señales, se tiene igualmente una periodicidad de 25, coincidente con la de  $\sigma$ , por lo que podemos referirnos a un enganche tanto de fase como de período, mas no de amplitud (Fig. 4(e)); además, los osciladores también se detienen al alcanzar la sincronización cuando están a una distancia  $d = d_{\text{umbral}}$  (Fig. 4(f)). Finalmente, en otra situación, cuando los osciladores son ligeramente diferentes:

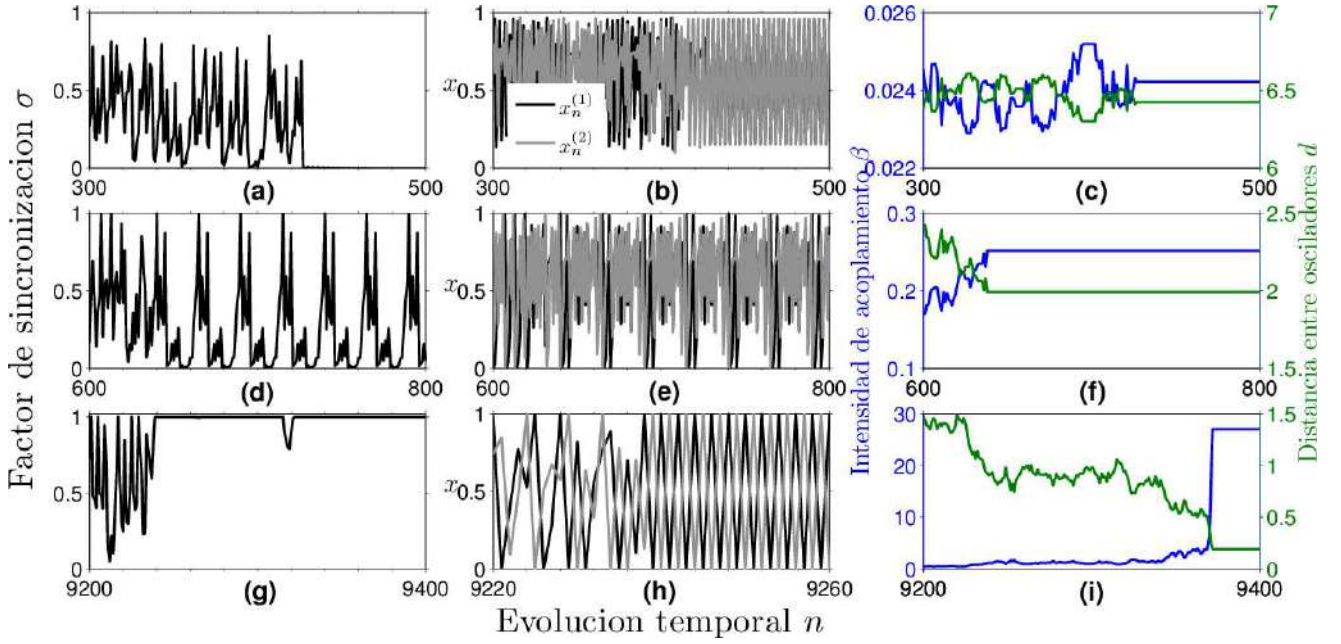


FIG. 4.— (Color online) Caracterización de la sincronización debida al movimiento de dos osciladores acoplados. En la parte superior se tiene sincronización completa cuando los parámetros son  $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 3.83$  y las condiciones iniciales:  $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, z_0^{(1)}) = (0.1, 5.0, 5.0)$ ,  $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)}, z_0^{(2)}) = (0.25, 8.3, 8.756)$ , lo que da para la distancia y la intensidad de acoplamiento iniciales:  $d = 5.0$  y  $\beta = 0.04$ , con la elección de una distancia umbral  $d_{\text{umbral}} = 2.0$ . Similarmente, para la fila central con los mismos valores de los parámetros de control que en la parte superior y las condiciones iniciales:  $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, z_0^{(1)}) = (0.1, 8.0, 5.0)$ ,  $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)}, z_0^{(2)}) = (0.25, 8.3, 8.756)$ , lo que da para la distancia y la intensidad de acoplamiento iniciales:  $d = 3.76829$  y  $\beta = 0.07042$ . Finalmente para la línea inferior con  $\mu^{(1)} = 3.83$  y  $\mu^{(2)} = 3.831$  y las mismas condiciones iniciales, distancia e intensidad de acoplamiento iniciales que en la parte central, eligiendo una distancia umbral  $d_{\text{umbral}} = 0.2$ . La primera columna (a), (d) y (g) es la evolución temporal del factor de sincronización. La columna central (b), (e) y (h) es la representación de las series temporales de los osciladores en la coordenada  $x$ . La última columna (c), (f) e (i) muestran la evolución del acoplamiento y la distancia entre los osciladores.

$\mu^{(1)} = 3.83$  y  $\mu^{(2)} = 3.831$  y la distancia umbral es  $d_{\text{umbral}} = 0.2$ , es decir, un décimo de la usada para los anteriores casos, la sincronización se presenta para  $\sigma = 1$  (Fig. 4(g)); esto significa que  $x_n^{(1)} + x_n^{(2)} = 1$ , lo que equivale a que cada uno de los osciladores tiene un período 2 y que la oscilación de ambos es entre 0 y 1 (Fig. 4(h)) por lo que estos antisincronizan teniendo la misma amplitud; es interesante ver que contrariamente a los casos anteriores, en los que una vez que los osciladores sincronizaban, estos se detenían, en este caso los osciladores continúan moviéndose estando sincronizados durante 133 pasos de tiempo hasta que para  $n = 9372$ , ellos se detienen (Fig. 4(i)).

Basados en estos resultados, podemos responder a la pregunta planteada al principio, indicando que el movimiento tiende a favorecer la sincronización del sistema puesto que estudiando situaciones iniciales para las cuales no es posible la sincronización, el movimiento de los osciladores, permite alcanzar la sincronía. Por supuesto, una respuesta más completa podría ser dada en base a estudios que contemplen espacios muestrales mayores.

#### 4. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

La caracterización de la sincronización completa de un sistema de dos mapas logísticos acoplados nos permitió seleccionar los parámetros de control que dan lugar a comportamiento síncrono. Utilizando estos valores de los parámetros de control, se encontró que el movimiento de los osciladores permite la sin-

cronización, incluso si las condiciones iniciales a nivel de acoplamiento (distancia) no permitiesen este comportamiento para un sistema estático; es decir, el movimiento con las condiciones impuestas para el mismo, permiten al sistema encontrar el atractor que da lugar a comportamiento síncrono. Por otra parte, se encontraron diferentes tipos de sincronización aparte de la completa, por lo que para posteriores estudios se prevé buscar otros caracterizadores de la sincronización que tengan en cuenta tanto la sincronización en amplitud como también la correspondiente en fase para así poder estudiar también sistemas caóticos. Otro aspecto importante para futuros trabajos es el concerniente al transiente caótico, estudiado en Buszko & Stefanski (2006), que se tiene antes de alcanzar la sincronización; el conocimiento y caracterización adecuada de este transiente es de gran importancia para conocer la dinámica del sistema. Posibles aplicaciones de este tipo de sistemas están en relación con sistemas tanto naturales como artificiales. Así, varios sistemas biológicos oscilatorios tales como las luciérnagas macho, que utilizan sus señales luminosas síncronas para obtener una respuesta de las hembras con fines relacionados a la reproducción, fenómeno que fue denominado principio de respuesta a la sincronización y estudiado por Ramírez Ávila et al. (2011), implican el movimiento de los insectos y la influencia del mismo tanto en la sincronización como en la respuesta es una aplicación potencial de este trabajo. La sincronización

de objetos móviles tales como robots, es también importante sobre todo cuando se pretende que los mismos ejecuten cierta tarea. La continuación natural de este trabajo es el estudio de sistemas compuestos por muchos osciladores y que eventualmente forman una red, en la cual, el movimiento de los nodos de la red podría optimizar la transmisión de cierta información. Finalmente, la forma de las lenguas de Arnold obtenidas, sugiere que se pueden buscar esquemas de acoplamiento más adecuados, uno de los cuales podría ser del tipo de potencial repulsivo como por ejemplo  $V(r) \sim (\kappa/r)^n$ , con  $n = 9 - 16$  y donde  $\kappa$  representa el alcance efectivo de la repulsión; o

con potenciales tipo Lennard-Jones para tener interacciones atractivas a largas distancias y repulsivas a cortas distancias, aspecto que estaría ligado también a la dinámica de movimiento espacial de los osciladores.

## AGRADECIMIENTOS

G.M.R.A. agradece a A. García Cantú por las motivantes discusiones respecto a elementos móviles y al Referee que con sus sugerencias ayudó a mejorar el presente trabajo.

## REFERENCIAS

- Aihara I. (2009), *Phys. Rev. E* **80**, 011918
- Argyris J., Faust G. & Haase M. (1994), *An exploration to chaos* (Amsterdam: Elsevier Science B.V.)
- Batista C. A. S., Batista A. M., de Pontes J. C. A., Lopes S. R. & Viana R. L. (2009), *Chaos Soliton. Fract.* **41**, 2220
- Buck J. & Buck E. (1976), *Sci. Am.* **234**, 74
- Buck J. B. (1935), *Science* **81**, 339
- Buszko K. & Stefanski K. (2006), *Chaos Soliton. Fract.* **27**, 630
- Czirok A. & Vicsek T. (2000), *Physica A* **281**, 17
- Freire J. G. & Gallas J. A. C. (2011), *Physical Chemistry Chemical Physics* **13**, 12191
- García Cantú Ros A., Antonopoulos C. G. & Basios V. (2011) *Chaos Soliton. Fract.* **44**, 574
- Greenfield M. & Roizen I. (1993), *Nature* **364**, 618
- Grinstein G. & Linsker R. (2005), *P. Natl. Acad. Sci. USA* **102**, 9948
- Hanson F. E., Case J. F., Buck E. & Buck J. (1971), *Science* **174**, 161
- Janson N. B. (2012), *Contemp. Phys.* **53**, 137
- Landau R., Páez M. & Bordeianu C. (2008), *A survey of computational physics: introductory computational science* (Princeton: Princeton University Press)
- Lin F.-Y. & Tsai M.-C. (2007), *Opt. Express* **15**, 302
- López-Gutiérrez R. M., Posadas-Castillo C., López-Mancilla D. & Cruz-Hernández C. (2009), *Chaos Soliton. Fract.* **42**, 277
- May R. M. (1976), *Nature* **261**, 459
- Morgul O. (1998), *Phys. Lett. A* **247**, 391
- Murray J. (2002), *Mathematical Biology I: An Introduction* (Berlin: Springer)
- Nowotny T., Huerta R. & Rabinovich M. I. (2008), *Chaos* **18**, 037119
- Pérez G. & Cerdeira H. A. (1995), *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1970
- Pikovsky A. & Maistrenko Y. (2003), *NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry, Vol. 109, Synchronization: Theory and Application* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers)
- Pikovsky A., Rosenblum M. & Kurths J. (2001), *Cambridge nonlinear science series, Vol. 12, Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences* (New York: Cambridge University Press)
- Ramírez Ávila G. M. (2004), *PhD thesis*
- (2007), *Revista Boliviana de Educación Superior en Ciencias* **7**, 25
- Ramírez Ávila G. M., Deneubourg J. L., Guisset J. L., Wessel N. & Kurths J. (2011), *Europhys. Lett.* **94**, 60007
- Ramírez Ávila G. M. & Gallas J. A. C. (2011), *Revista Boliviana de Física* **19**, 1
- Ramírez Ávila G. M., Guisset J. L. & Deneubourg J. L. (2003), *Physica D* **182**, 254
- Rasband S. (1990), *Chaotic dynamics of nonlinear systems* (Wiley)
- Saha P. & Strogatz S. H. (1995), *Math. Mag.* **68**, 42
- Sarkar S. (2010), *Chaos* **20**, 043108
- Shibata T. & Kaneko K. (2003), *Physica D* **181**, 197
- Shimoyama N., Sugawara K., Mizuguchi T., Hayakawa Y. & Sano M. (1996), *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3870
- Sismondo E. (1990), *Science* **249**, 55
- Sueur J. (2002), *Science et Avenir* **50**
- Taborov A. V., Maistrenko Y. L. & Mosekilde E. (2000), *Int. J. of Bifurcat. Chaos* **10**, 1051
- Verhulst P. (1838), *Corresp. Math. Phys.* **10**, 113
- Wei D. Q. & Luo X. S. (2007), *Europhys. Lett.* **78**, 68004
- Yang T. & Chua L. O. (1996), *IEEE T. Circuits-I* **43**, 817
- Yang T., Wu C. W. & Chua L. O. (1997), *IEEE T. Circuits-I* **44**, 469
- Zanette D. H. & Mikhailov A. S. (2004), *Physica D* **194**, 203

## PRUEBAS DE ALINEALIDAD POR DATOS SUBROGADOS SOBRE SERIES EXPERIMENTALES

### NONLINEAR TESTS BY SURROGATE DATA ON EXPERIMENTAL SERIES

V. M. PEÑAFIEL<sup>†</sup>

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física  
Universidad Mayor de San Andrés  
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639  
La Paz – Bolivia

(Recibido 13 de Junio de 2012; aceptado 23 de Octubre de 2012)

Se introduce el método de datos subrogados para el ensayo de alinealidad sobre series temporales experimentales, en principio, como una etapa previa a ensayos de comportamiento caótico. Se adaptó un conjunto de algoritmos computacionales orientados específicamente a ese propósito y se los aplicó a registros geomagnéticos (componentes D, H y Z; tres series de 2048 datos, tomados en lapsos de 1 minuto) para verificar su capacidad de discriminación en el proceso de aislar series con características interesantes desde el punto de vista de la dinámica no-lineal. Se aplica los métodos de Fourier y de temple simulado para la construcción de registros subrogados. En este último caso, restringidos por la condición de invariancia de la función de autocorrelación, el muestreo de los coeficientes de predicción alineal exhibe un poder de discriminación muy notable al ser comparado con los de las otras pruebas.

*Descriptores:* Análisis de series temporales — dinámica no-lineal y caos

Código(s) PACS: 05.45.Tp, 05.45.-a

#### ABSTRACT

The method of surrogate data is introduced to test the nonlinear character of experimental time series, in particular, as a previous stage to test chaotic behaviour. We used several algorithms specifically oriented towards this purpose and applied to geomagnetic records (components D, H, Z and 3 time series with 2048 points each and taken at intervals of 1 minute) in order to test their discrimination capacity while studying series that could be interesting (because of their nonlinear character). We apply Fourier and simulated annealing methods to construct surrogate data. For the latter, and restricted by the invariance of the autocorrelation function, the sampling of the coefficients of the nonlinear prediction shows a remarkable discrimination capacity as compared to other methods.

*Subject headings:* Time series analysis — nonlinear dynamics and chaos

#### 1. INTRODUCCIÓN

Los ensayos de alinealidad no son muy frecuentes en Física porque las oscilaciones erráticas, características de las series temporales que provienen de procesos de medición, son consideradas, simplemente, como ruido estocástico. Cuando existe sospecha de estructuras complejas, como determinismo caótico, el cálculo de coeficientes de Lyapunov y análisis relacionados sirve, de paso, como un ensayo de linealidad (o alinealidad).

Desde la perspectiva estricta del tratamiento de datos, las técnicas propias de dinámica no lineal tienden a mostrar resultados inciertos cuando las series de datos son “ruidosos”, esto es, cuando la amplitud de las oscilaciones aleatorias es comparable o sobrepasa a la de los efectos no lineales, por lo cual

parece importante respaldarlos con técnicas de ensayo alternativas.

Pero, además, a lo largo de este trabajo se muestra que el método por datos subrogados puede facilitar la selección de registros con propiedades interesantes para análisis posteriores.

En efecto, las figuras 1(a), 1(b) y 1(c) grafican el registro simultáneo de las componentes D, H y Z del campo geomagnético en superficie (Ricaldi 2012) (2048 lecturas en lapsos de 1 minuto). Se trata de cortes convenientes desde registros más largos, evitando efectos “de borde” en sus extremos y en un número que facilite la aplicación repetida de la transformada rápida de Fourier (TRF). Se aprecia las tendencias macroscópicas con pequeñas oscilaciones erráticas superpuestas. El objetivo del análisis subsiguiente es el de detectar -en tales series- efectos alineales, si los hubiera. La aplicación del análisis

<sup>†</sup>vmiguel@fiums.edu.bo

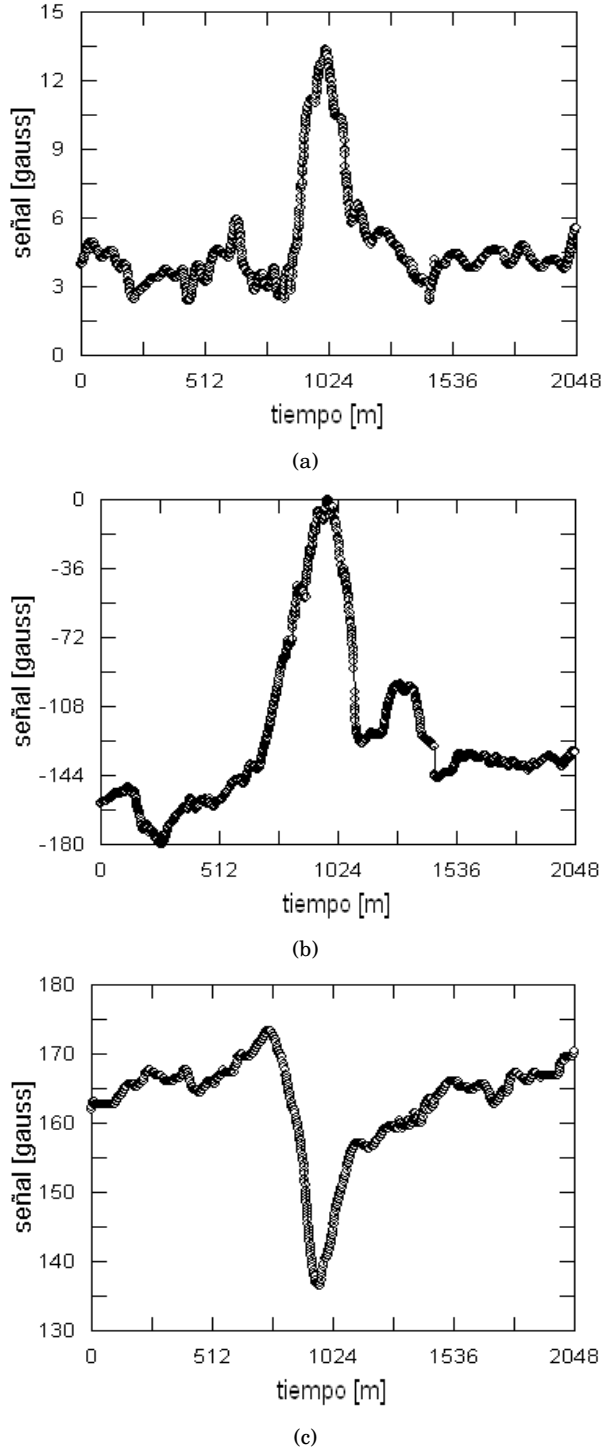


FIG. 1.— (a) Variación de la componente D del campo magnético terrestre. (b) Variación de la componente H del campo magnético terrestre. (c) Variación de la componente Z del campo magnético terrestre. **Datos:** Estación Geomagnética de Patacamaya IIF, CF, FCPN (UMSA). En las tres figuras los datos fueron tomados durante aproximadamente un día y medio de registro continuo.

por datos subrogados (Theiler et al. 1992), es, en este caso, bastante directo: en un ensayo con un nivel de confianza  $1 - \alpha = 0.95$  para la hipótesis cero, se requiere  $\frac{1}{\alpha} = 20$  muestras (los datos experimentales y 19 registros subrogados).

Para cada una de ellas se calcula un parámetro estadístico probador; si el valor resultante para los datos es muy diferente de los valores obtenidos para las series subrogadas, la hipótesis nula se rechaza al nivel de significación  $\alpha = 0.05$ .

Las secciones siguientes detallan el procedimiento seguido para los datos de las figs. 1. Se ha calculado también el coeficiente maximal de Lyapunov como criterio comparativo de alinealidad.

La determinación de coeficientes de Liapunov requiere la estimación heurística de zonas planas en las curvas del “factor de estiramiento” la cual -en este caso- afecta seriamente la confiabilidad de los valores obtenidos.

El ensayo posterior por hipótesis nula, usando datos subrogados “tipo Fourier”, permitiría -en principio- dilucidar mejor las particularidades seriales de esos datos. El resultado neto del ensayo, sin embargo, implica la alinealidad de los registros H y D y la alinealidad del registro Z. El valor del coeficiente de predicción alineal para la componente D es lo suficientemente bajo como para dar lugar a una “duda razonable” respecto de la conclusividad del ensayo.

Por ello, en las secciones posteriores, se repite el ensayo de confiabilidad al 0.95 empleando datos subrogados restringidos, que se construyen mediante un proceso de minimización controlada, conocido como Temple Simulado (Metropolis et al. 1953; Kirkpatrick et al. 1983).

## 2. COEFICIENTES DE LYAPUNOV

Por supuesto, la primera opción en un análisis de dinámica no lineal es el cálculo de los coeficientes de Lyapunov el cual, especialmente si hay comportamiento caótico, será -en principio- el final definitivo del ensayo. Como se sabe, sin embargo, el resultado depende grandemente de la calidad y naturaleza de los datos; por ejemplo, en presencia de ruido aleatorio de amplitud comparable a las perturbaciones caóticas, los algoritmos tienden a perder nitidez.

Para el caso presente, se ha empleado el método de Kantz (1994) que consiste en calcular el factor de estiramiento

$$S(e, m, t) = \left\langle \ln \left( \frac{1}{N_{U_n}} \sum_{x_k \in U_n} |x_{n+t} - x_{k+t}| \right) \right\rangle_n \quad (1)$$

para varias dimensiones de incrustación  $m$  y tamaños de vecindario  $e$  en el espacio

$$\mathbf{x}_n = (x_{n-(m-1)\tau}, x_{n-(m-2)\tau}, \dots, x_n), \quad (2)$$

con un “retardo” representado por  $\tau$ .

La rutina de cálculo procede con un algoritmo de búsqueda de vecindades  $U_n$ , en ese espacio, variando el tamaño de vecindario  $e_{min} \leq e \leq e_{max}$ , salvo un factor de reescalamiento, mediante

$$\varepsilon_i = \left( \frac{e_{max}}{e_{min}} \right)^{\frac{1}{(k-1)}}$$

$$e = e_{min} (\varepsilon_i)^i,$$

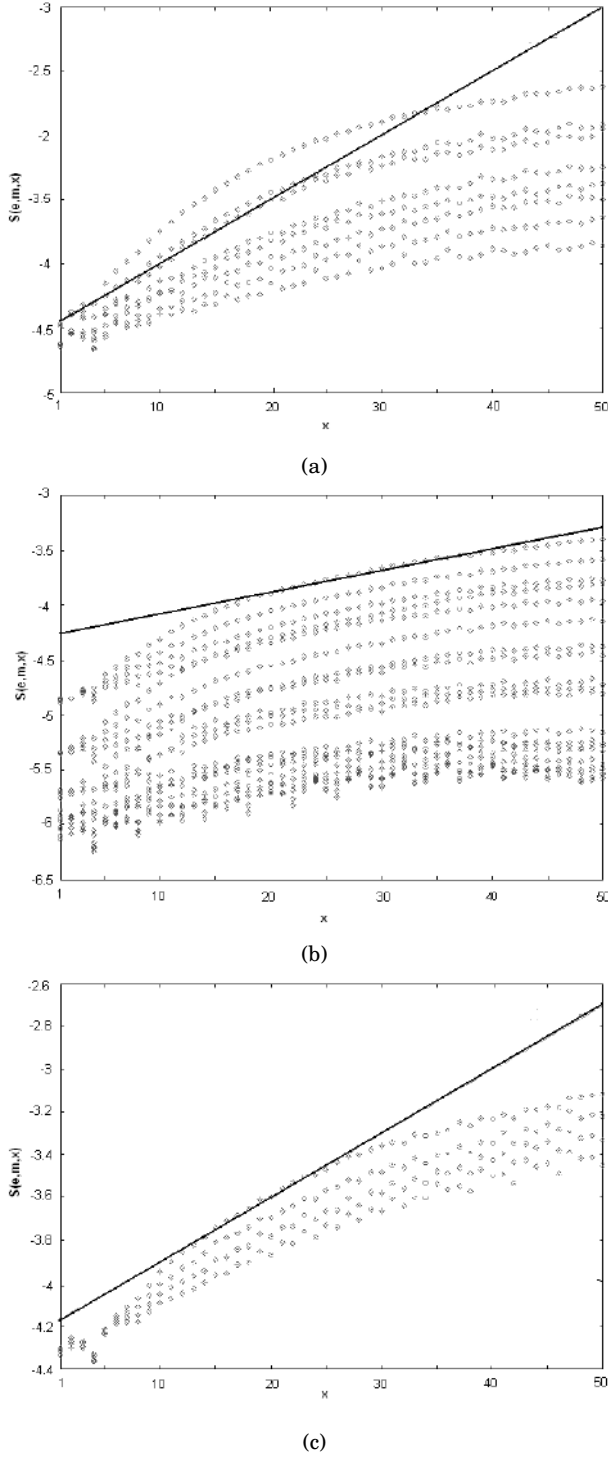


FIG. 2.— Coeficiente (máximo) aproximado de Lyapunov. (a) Registro geomagnético D, la pendiente de la recta es  $\lambda = 0.05$ . (b) Registro geomagnético H, la pendiente de la recta es  $\lambda = 0.02$ . (c) Registro geomagnético Z, la pendiente de la recta es  $\lambda = 0.03$ .

con  $0 \leq i < k$ .

Los resultados aparecen en las figuras 2(a) 2(b) y 2(c); en ellas, la pendiente de las rectas trazadas en los lugares donde  $S(e, m, t)$  muestra tramos -por lo menos aparentemente- lineales.

El rendimiento final del análisis es la presencia de perturbaciones caóticas débiles en las tres com-

ponentes del campo magnético terrestre con coeficientes de Lyapunov maximales  $\lambda \approx 0.05$ ,  $\lambda \approx 0.02$  y  $\lambda \approx 0.03$  respectivamente.

### 3. DATOS SUBROGADOS

Sin embargo, para seguir con el esquema planteado en la introducción, sea la hipótesis cero de que los registros geomagnéticos contienen ruido gaussiano filtrado linealmente.

Para el ensayo, a nivel de significación  $\alpha = 0.05$ , de esa hipótesis cero, se genera  $\frac{1}{\alpha} - 1 = 19$  series subrogadas tomando la transformada discreta de Fourier,

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right), \quad (3)$$

multiplicando las amplitudes resultantes por una fase aleatoria y tomando luego la antitransformada:

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k| e^{i\beta_k} \exp\left(-\frac{2\pi i k n}{N}\right) \quad 0 \leq \beta_k < 2\pi. \quad (4)$$

Equivalentemente, para fines prácticos, se puede también mezclar aleatoriamente las fases de la transformada y luego tomar la antitransformada.

En las rutinas para lenguaje ensamblado de 32 bites, se ha empleado la transformada rápida de Fourier (TRF) con el algoritmo de Danielson-Lanczos y una adaptación para ese lenguaje del generador de números aleatorios "Mersenne Twister" (Matsumoto & Nishimura 1998).

### 4. ERROR DE PREDICCIÓN ALINEAL

La propiedad más importante de los datos subrogados, resultantes de implementar las ecuaciones (3) y (4), es la de mantener las propiedades de correlación lineal (pues ésta se calcula mediante la transformada de Fourier) destruyendo, simultáneamente, toda estructura no lineal.

Por tanto, si se usa el error de predicción alineal

$$\gamma(e, m, \tau) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum [x_{n+1} - f(x_n)]^2} \quad (5)$$

como parámetro estadístico probador, se espera que el valor correspondiente a los datos experimentales sea menor al de todos los subrogados para rechazar la hipótesis cero; de otro modo, la hipótesis cero es aceptada y se considera que los datos originales sólo contienen ruido gaussiano lineal.

Las funciones  $f(x_n)$  en (5) representan, en realidad, un algoritmo de búsqueda de vecindarios a primer orden -descrito en la siguiente sección- del tipo

$$\hat{x}_{n+k} = \frac{1}{N_{U_n}} \sum_{x_j \in U_n} x_{j+k} \quad (6)$$

en el espacio de incrustamiento. Análogamente a (1), en (5) y (6)  $m$  es la dimensión de este espacio y  $e$  el tamaño de vecindario.

Las figuras 3(a), 3(b) y 3(c) muestran la distribución de valores de  $\gamma$  para el análisis de las tres componentes del campo geomagnético. En ellas, queda claro que la hipótesis cero es rechazable sólo para la componente Z, no obstante que los coeficientes de Lyapunov tienen valores muy comparables para las tres componentes. Obviamente, en este caso, la exigencia en el nivel de significación del ensayo estadístico lo hace más confiable.

#### 5. ALGORITMO DE BÚSQUEDA

Conviene describir brevemente el algoritmo empleado para calcular los valores de (5).

El espacio (2) queda también representado mediante

$$\{\mathbf{x}_i\}_N = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,m}\}_N.$$

Entonces, para un punto de referencia cualquiera  $\mathbf{x}_{i_0}$ , los  $k$  vecinos más cercanos son aquellos  $\{\mathbf{x}_{i_p}\}_k$  que tienen las distancias más pequeñas respecto de  $\mathbf{x}_{i_0}$  (el valor absoluto de la diferencia, aunque pudiera usarse también una distancia euclídea).

Se trata, ahora, de encontrar los índices  $\{i_p\}_k$  de los vecinos (evaluando y comparando iterativamente las distancias a todos los puntos del conjunto) y calcular

$$f(x_{i_0}) = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k x_{i_p,1},$$

que es la función que aparece en (5) una vez aplicada la predicción (6).

#### 6. SUBROGADOS RESTRINGIDOS

Para un registro experimental  $\{x\}$ , es posible generar subrogados  $\{y\}$  ejecutando permutaciones que tiendan a minimizar, iterativamente, la función de costo

$$E(\{y_i\}) = \left( \sum_i^K |w_i f(\{y_i\})|^n \right)^{\frac{1}{n}} \quad (7)$$

donde las  $w_i$  son factores de peso arbitrarios y  $f(\{y_i\})$  es un conjunto de  $K$  restricciones

$$f(\{y_j\}) = 0 \quad j = 0, \dots, K. \quad (8)$$

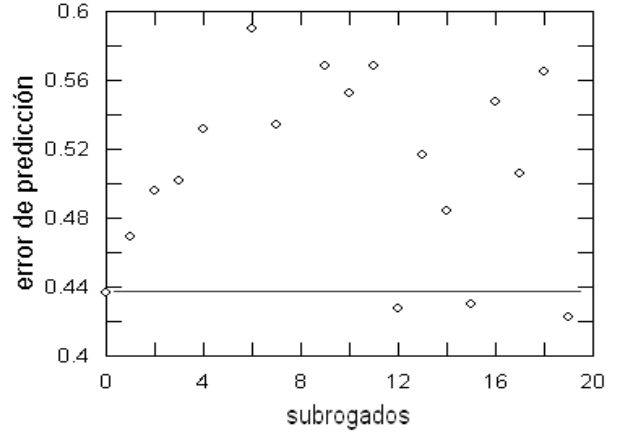
Este proceso de “aleatorización general restringida” rendirá subrogados con las propiedades que se desee, dependiendo de las restricciones elegidas.

Para generar subrogados con las mismas propiedades de linealidad que los datos experimentales, es conveniente introducir, como restricción, la invariancia de la autocorrelación (Schreiber & Schmitz 2000):

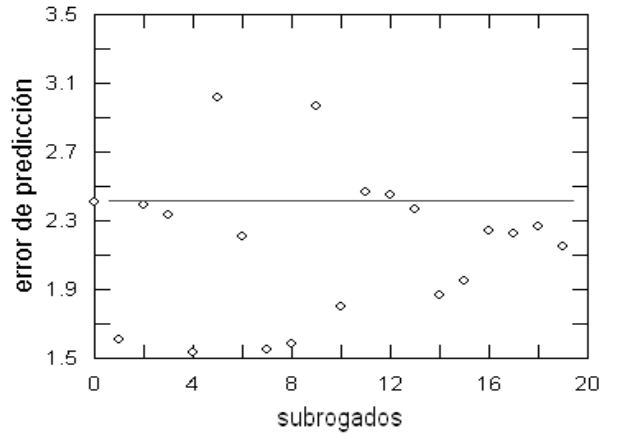
$$A(\{y\}_j) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i y_{i+j} = \text{Re}[TRFI(yy^*)] \quad (9)$$

de modo que (8) es ahora

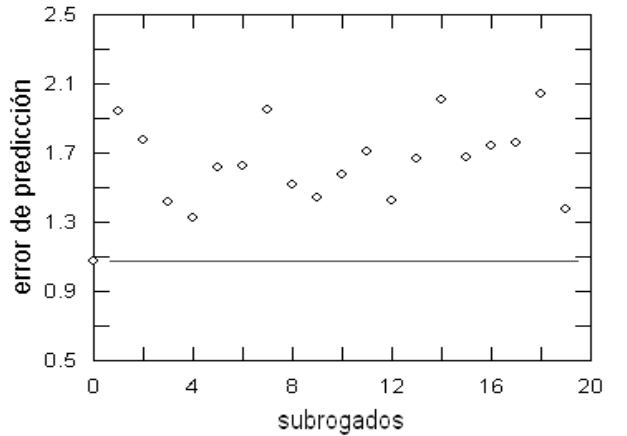
$$A(\{y\}_j) - A(\{x\}_j) = 0 \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (10)$$



(a)



(b)



(c)

FIG. 3.— Distribución de valores del error de predicción no lineal para las series subrogadas y para los datos experimentales marcado con una recta horizontal y colocado en el origen de abscisas. (a) Componente D. (b) Componente H. (c) Componente Z.

y, consecuentemente, la función de costo a minimizar es

$$E(\{y\}) = \sum_{j=1}^{N-1} |A(\{y\}_j) - A(\{x\}_j)| \quad (11)$$

donde los  $\{y\}$  son permutaciones del original  $\{x\}$ .

## 7. TEMPLE SIMULADO

Si se introduce un parámetro  $T$  tal que, a un cierto valor  $T_0$ , se asocia un desorden arbitrario en el conjunto de datos  $\{x\}$ , es posible considerar la función de costo (11) como si fuera la energía de un sistema termodinámico a la temperatura  $T_0$ . A partir de ese punto, se busca la configuración  $\{y\}$  para la cual la energía  $E$  es mínima a la temperatura final  $T_f < T_0$  en un proceso de enfriamiento lento (temple). Siguiendo la distribución de Boltzmann, cada configuración producida por una permutación de dos valores aleatorios debe ocurrir siguiendo el “paso de Metropolis”, esto es, con probabilidad  $p$  según:

$$p = 1 \quad \text{si } \Delta E < 0$$

$$p = e^{-\Delta E/T} \quad \text{si } \Delta E \geq 0$$

En la práctica, el paso de Metrópolis se aplica estableciendo, en el curso de cada ciclo, un valor maximal  $E_m = E - \Delta E$  con  $\Delta E = T \ln(p)$  luego de un sorteo aleatorio de  $p$ . Cada ciclo empieza con una permutación aleatoria y concluye con su aceptación (y enfriamiento  $T = eT, e < 1$  si  $E < E_m$ ) o rechazo (si  $E \geq E_m$ ), restituyendo, en este caso, los valores permutados.

## 8. PRUEBA DE ALINEALIDAD

Los datos para las componentes D, H y Z de las figuras (1), contienen tendencias macroscópicas con pequeñas oscilaciones erráticas superpuestas. Como en el caso anterior, la hipótesis cero supone que tales irregularidades consisten de ruido gaussiano filtrado linealmente.

El ensayo, a nivel de significación  $\alpha = 0.05$ , de esa hipótesis, entonces, requiere también la generación de 19 series subrogadas usando el método descrito en las secciones 6. y 7.

Como los subrogados han sido construidos manteniendo las propiedades de correlación lineal (por la relación entre la transformada de Fourier y la función de autocorrelación), aún es apropiado el uso del error de predicción alineal como parámetro estadístico del ensayo, estimando que el valor correspondiente a los datos experimentales sea menor al de todos los subrogados para rechazar la hipótesis cero.

El error de predicción alineal está dado, entonces, por (5) con las funciones  $f(x_n)$  representando también el algoritmo de búsqueda (6) de vecindarios a primer orden en el espacio de incrustamiento (tridimensional,  $m = 3$ , para todas las pruebas).

## 9. RESULTADOS

Las figuras 4(a), 4(b) y 4(c) muestran la distribución de valores  $\gamma$  para el análisis de las componentes D, H y Z, respectivamente, del campo geomagnético local. Por ellas, queda claro que la hipótesis cero es rechazable para las tres componentes, esto es, se trata, definitivamente, de tres registros no lineales.

Obviamente, en este caso, la exigencia en el nivel de significación y la notoria separación de los valores

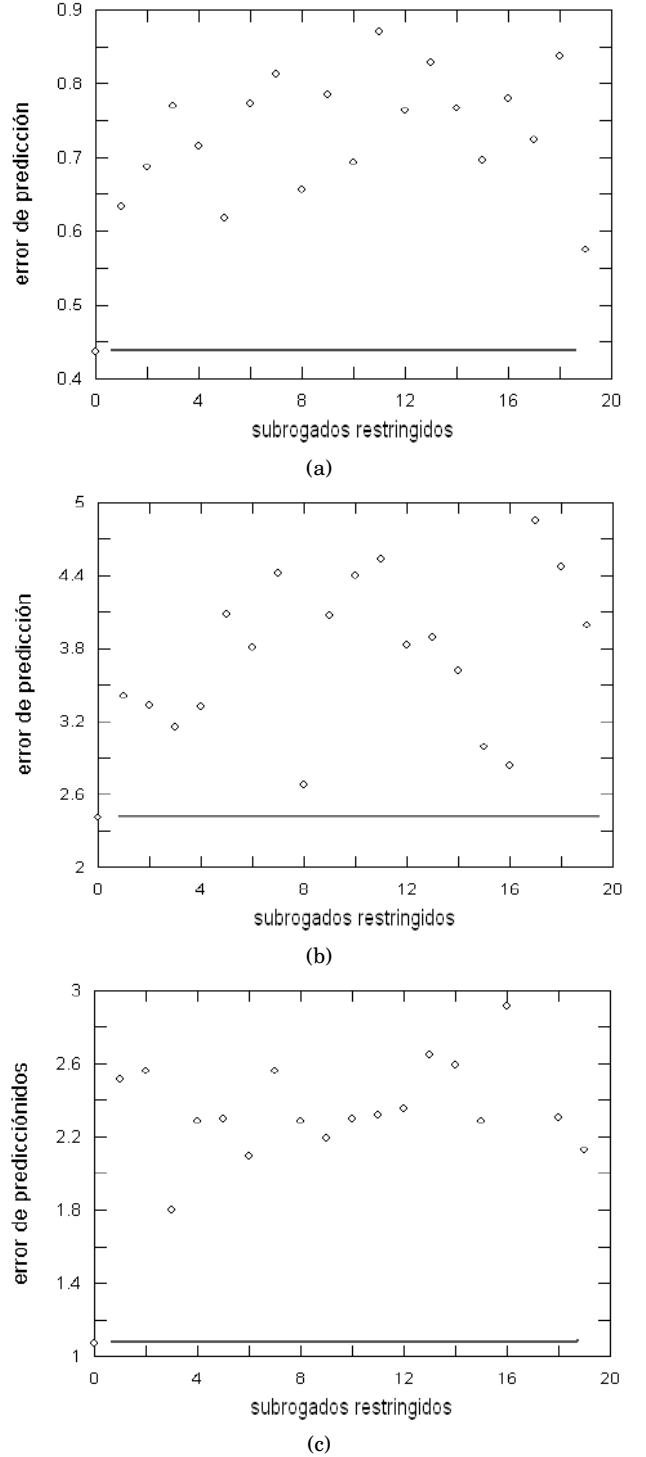


FIG. 4.— Distribución de valores del error de predicción no lineal para las series subrogadas y para los datos experimentales marcado con una recta horizontal y colocado en el origen de abscisas. (a) Componente D. (b) Componente H. (c) Componente Z.

$\gamma$  entre los datos experimentales y sus subrogados - en los tres casos- dan un ensayo estadístico más confiable y conclusivo.

## 10. CONCLUSIONES

Siendo los registros D, H y Z simultáneos, es expectable que sus propiedades seriales sean análogas;

por ello, tanto la estimación de los coeficientes máximos de Lyapunov cuanto el ensayo por datos subrogados “tipo Fourier” indican que, excepto para la componente Z, las fluctuaciones estadísticas tienden a ocultar elementos no lineales contenidos de manera menos conspicua en los registros D y H.

El ensayo por subrogados restringidos, por lo visto, es más sofisticado y exigente. Al final, consiste en encontrar las permutaciones que mantengan invariante la autocorrelación, esto es, indirectamente, las propiedades lineales de la serie temporal.

Consecuentemente, los resultados del ensayo, como una inspección de las figuras 4. lo manifiesta, son claramente consistentes y confiables por cuanto:

(i) La dispersión de los valores de  $\gamma$  indica que, ciertamente, el proceso es completamente aleatorio.

(ii) El valor  $\gamma$  es marcadamente inferior al de los subrogados respectivos, especialmente para las componentes D y Z. Y la separación es menor para la componente H, la más dudosa en los otros ensayos.

Por tanto, las tres componentes del campo estudiado resultan ser series temporales no lineales. Obviamente, la naturaleza específica de esa alinealidad debe ser objeto de otros análisis, si resultara ser muy importante.

Por lo demás, al igual que en otras disciplinas (Skinner et al. 1994), las series temporales en Física, cuando el problema de analizar propiedades de linealidad es pertinente, el método por datos subrogados permite: verificar resultados obtenidos por otros métodos (por ejemplo, como se ha visto, el cálculo del coeficiente máximo de Lyapunov) y seleccionar aquellos registros que pueden ser objeto de tratamientos más detallados de alinealidad, comportamiento caótico, etc. y, claro, desechar rápidamente las series experimentales poco interesantes para tales propósitos.

Las rutinas computacionales fueron elaboradas específicamente para los objetivos perseguidos. Aunque, en general, no son de gran sofisticación, el empleo del lenguaje ensamblado, el especial cuidado en la optimización del código y el generador de números aleatorios adecuado (Matsumoto & Nishimura 1998) para el sorteo Monte Carlo, dan excelentes resultados en lo que a velocidad y distribución de valores finales (figs. 3.) se refiere.

Obviamente, aunque no es necesario para este caso específico, tanto el número de iteraciones para la estimación del coeficiente máximo de Lyapunov cuanto el nivel de confianza  $1 - \alpha$  del ensayo de hipótesis podrían ser aumentados mejorando, así, la sensibilidad del análisis.

Conviene poner de manifiesto las siguientes tres observaciones:

Primera, la de que los tres métodos fueron ensayados exitosamente con series alineales conocidas (casos especiales de la serie logística y del mapa de Hénon), principalmente para asegurar la efectividad de los algoritmos diseñados para este trabajo.

Segunda, los registros geomagnéticos exhiben cierta periodicidad diaria. El número de datos -en potencias de 2- fue elegido para analizar, aproximadamente, ese lapso. Series más cortas o más largas no son útiles en el empleo práctico de los efectos investigados.

Finalmente, en referencia a los problemas que plantea la presencia de no estacionariedad en los datos (mencionados, por ejemplo, en Theiler et al. (1992)), se ha puesto especial cuidado en que los subrogados no alteren significativamente el comportamiento temporal de los datos, de manera que la hipótesis nula no sea invalidada; el tamaño de los registros es también circunstancialmente útil a este respecto.

#### REFERENCIAS

- Kantz H. (1994), *Phys. Lett. A* **185**, 77  
 Kirkpatrick S., Gelatt Jr. C. D. & Vecchi M. P. (1983), *Science* **220**, 671  
 Matsumoto M. & Nishimura T. (1998), *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* **8**, 3  
 Metropolis N., Rosenbluth A., Rosenbluth M., Teller A. & Teller E. (1953), *J. Chem. Phys.* **21**, 1097  
 Ricaldi E. (2012), *Datos del OBSERVATORIO GEOMAGNÉTICO PATACAMAYA, IIF-UMSA, La Paz, Bolivia* (Comunicación Privada)  
 Schreiber T. & Schmitz A. (2000), *Physica D* **142**, 346  
 Skinner J. E., Molnar M. & Tomberg C. (1994), *Integ. Physiol. Behavior. Sci.* **29**, 217  
 Theiler J., Eubank S., Longtin A., Galdrikian B. & Farmer J. D. (1992), *Physica D* **58**, 77

## UN CRITERIO PARA LOCALIZACIÓN DINÁMICA CON BASE EN EL ESQUEMA DEL PÉNDULO DE KAPITZA EN LA RED

### A CRITERION FOR DYNAMIC LOCALIZATION BASED ON THE KAPITZA PENDULUM SCHEME IN THE LATTICE

DIEGO SANJINÉS C.†

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física  
Universidad Mayor de San Andrés  
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639  
La Paz – Bolivia  
(Recibido 26 de Septiembre de 2012; aceptado 7 de Diciembre de 2012)

Se propone un esquema para elegir un potencial cuántico de la forma  $V(x, t) = V(x) - \int dx f(x, t)$  que producirá localización dinámica en una partícula que se mueve en un cristal unidimensional de acuerdo a un hamiltoniano de enlace fuerte. Se usa una fórmula para obtener el potencial efectivo independiente del tiempo  $V_{ef}(x)$  correspondiente a  $V(x, t)$  (Gallinar 2005); dicha fórmula se deduce de la teoría clásica del péndulo de Kapitza para valores grandes de la frecuencia de la fuerza  $f(x, t)$ . Si las soluciones  $x(t)$  de las ecuaciones semiclásicas de movimiento (correspondientes a  $V_{ef}(x)$ ) están confinadas según el teorema de Kroopnick (1972) entonces se propone la conjetura de que confinamiento implica localización cuántica. Se prueba dicha conjetura para algunos potenciales  $V(x, t)$  que obedecen el criterio de Kroopnick y se confirma la conjetura para estos casos. Se examina en particular el caso de los potenciales de la forma  $V(x, t) = xF(t)$  asociados a los fenómenos de localización dinámica.

*Descriptors:* Teorías semiclásicas y aplicaciones — transporte por *hopping* — teoría de transporte  
Código(s) PACS: 03.65.Sq, 72.20.Ee, 72.10.Bg

#### ABSTRACT

We propose a scheme to choose a quantum potential of the form  $V(x, t) = V(x) - \int dx f(x, t)$  that yields dynamic localization of a particle moving in a one dimensional crystal within the tight-binding model. A time-independent effective potential  $V_{ef}(x)$  corresponding to  $V(x, t)$  is obtained by means of a formula deduced from the classical theory of the Kapitza pendulum for large frequencies of the force  $f(x, t)$  (Gallinar 2005). If the solutions  $x(t)$  of the semiclassical equations of motion (corresponding to  $V_{ef}(x)$ ) are confined according to the Kroopnick (1972) theorem then we propose the conjecture that confinement implies quantum localization. This conjecture is confirmed for some potentials  $V(x, t)$  obeying the Kroopnick criterion. We analyze in particular the case of potentials of the form  $V(x, t) = xF(t)$  which are associated to dynamic localization.

*Subject headings:* Semiclassical theories and applications — hopping transport — transport theory

#### 1. INTRODUCCIÓN

Los efectos dinámicos en un sistema físico sujeto a una fuerza externa oscilatoria  $f(t)$  se pueden describir en términos de una energía potencial efectiva independiente del tiempo  $V_{ef}(x)$ . Esta energía potencial se puede calcular según el esquema propuesto originalmente por Pyotr Kapitza cuando la frecuencia de la energía potencial total  $V(x, t)$  es mucho mayor que las frecuencias características del sistema determinadas por la naturaleza de la energía potencial estática  $V(x)$  en ausencia de  $f(t)$ . El esquema de Kapitza fue referido así por primera vez y explicado pedagógicamente por Lev Landau en su conocido texto *Mecánica Clásica* (Lan-

dau & Lifshitz 1985). Este método se usa actualmente en investigaciones más elaboradas con aplicaciones en varios campos (ver por ejemplo: Bandyopadhyay & Dattagupta (2008); Rahav et al. (2003), y las referencias citadas en ambos trabajos).

Lo esencial del método de Kapitza se expone a continuación. Si la fuerza oscilatoria aplicada sobre el sistema físico es  $f(t)$ , entonces la ecuación de movimiento en una dimensión es:

$$m\ddot{x} = -\partial_x V(x) + f(t). \quad (1)$$

La solución de (1) se propone como una suma de  $X(t)$ , que es la solución correspondiente a una energía potencial estática  $V(x)$ , y  $\zeta(t)$ , que es la solución corres-

†sanjines@fiums.a.edu.bo

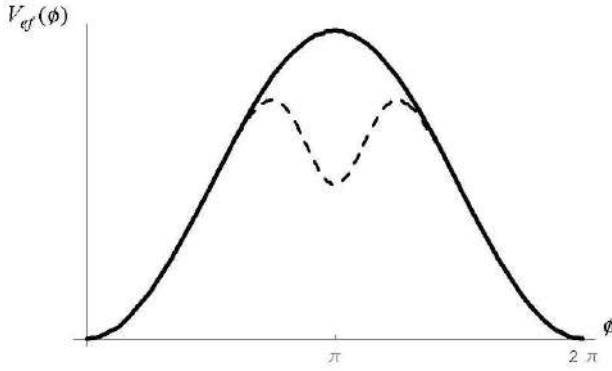


FIG. 1.— Función de energía potencial efectiva  $V_{ef}(\phi)$  para un péndulo de varilla rígida sin masa. Cuando el punto de suspensión del péndulo oscila verticalmente con una frecuencia mucho mayor que la frecuencia natural del péndulo,  $V_{ef}(\phi)$  -representada por la línea segmentada- muestra un valle local correspondiente a la posición de equilibrio estable ( $\phi = \pi$ ). Cuando el punto de suspensión no oscila (línea sólida), la posición  $\phi = \pi$  corresponde al equilibrio inestable.

pondiente a la fuerza oscilatoria  $f(t)$ :

$$x(t) = X(t) + \zeta(t). \quad (2)$$

El método de Kapitza conduce entonces a la energía potencial efectiva

$$V_{ef}(x) = V(x) + \frac{1}{2}m\langle \dot{\zeta}^2 \rangle, \quad (3)$$

donde  $\langle \dot{\zeta}^2 \rangle$  es el promedio temporal (sobre un periodo) de la variación temporal cuadrática de  $\zeta(t)$ .

Un ejemplo típico de los efectos debidos a la fuerza oscilatoria  $f(t)$  es el conocido “péndulo de Kapitza”, i.e., un péndulo de varilla rígida cuyo punto de suspensión oscila rápidamente. En la Fig.1 se ve el perfil de la energía potencial efectiva  $V_{ef}(\phi)$  (línea segmentada) comparado con el perfil de la energía potencial estática  $V(\phi)$  (línea sólida), donde el ángulo  $\phi = 0$  corresponde a la posición de equilibrio estable en ausencia de  $f(t)$ . Así, en presencia de  $f(t) \neq 0$ , la posición del péndulo invertido ( $\phi = \pi$ ) se encuentra en un valle de  $V_{ef}(\phi)$ , lo que indica una posición de equilibrio estable. De lo contrario, si  $f(t) = 0$ , entonces  $V_{ef}(\phi)$  se reduce a la energía potencial estática  $V(\phi)$  con un máximo en  $\phi = \pi$ , lo que corresponde a una posición de equilibrio inestable. Aunque hay muchas referencias sobre el “péndulo de Kapitza”, se destaca Tcherniak (1998) donde se puede elegir los parámetros que corresponden a  $V_{ef}(\phi)$  y ver la simulación del movimiento estable del péndulo en una aplicación *applet*.

## 2. POTENCIAL EFECTIVO PARA EL MODELO DE ENLACE FUERTE

En este trabajo consideraremos el modelo de dinámica de una partícula (o cuasipartícula) en una red cristalina dado por el hamiltoniano de enlace fuerte (Ascroft & Mermin 1976),

$$H = -2A \cos ap + V(x, t), \quad (4)$$

donde  $V(x, t)$  es un operador de energía potencial externa arbitrario aplicado al cristal unidimensional (de-

nominaremos en adelante a  $V(x, t)$  o a  $V(x)$  simplemente “potenciales”). Además, como es usual,  $A$  es el elemento de *hopping* entre los sitios adyacentes del cristal separados por una constante de red  $a$ , y  $p = -i\hbar\partial_x$ . De acuerdo a este modelo dinámico tienen lugar los comportamientos de localización de una partícula referidos como: oscilación de Bloch (Bloch 1928; Hartmann et al. 2004<sup>1</sup>), localización dinámica (Dunlap & Kenkre 1986; Zhao 1991) y localización asintótica (Sanjinés 2001; Dreisow et al. 2011)

La suposición básica comprendida en el modelo de enlace fuerte (4) es que la función de onda  $\Psi(x, t)$  de la partícula se localiza fuertemente en torno a los sitios atómicos del cristal que conforman una red de Bravais (en una dimensión), lo que permite la representación de  $\Psi(x, t)$  como una combinación lineal de funciones de Wannier  $\Phi(x)$  (Ascroft & Mermin 1976):

$$\Psi(x, t) = \sum_n C_n(t)\Phi(x - na). \quad (5)$$

Así, la dinámica de la partícula en la red cristalina está representada por un paquete de ondas cuyo centroide  $z(t)$  y cuyo desplazamiento cuadrático medio  $w(t)$  están dados por:

$$z(t) = \sum_n n|C_n(t)|^2, \quad (6)$$

$$w(t) = \sum_n n^2|C_n(t)|^2. \quad (7)$$

En el caso de que los límites de  $z(t)$  y  $w(t)$  existan cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces se dirá que la partícula está “localizada”. Los casos conocidos de localización referidos antes corresponden a los siguientes potenciales:

Oscilación de Bloch,

$$V(x, t) = \alpha x. \quad (8)$$

Localización dinámica,

$$V(x, t) = \alpha x \cos \omega t \quad (J_0(\alpha/\omega = 0)), \quad (9a)$$

$$V(x, t) = (\varepsilon + \alpha \cos \omega t)x \quad (\varepsilon/\omega \notin \mathbb{Z}). \quad (9b)$$

Localización asintótica,

$$V(x, t) = \alpha xt. \quad (10)$$

Los casos (9a) y (9b), que usualmente son referidos en la literatura científica como localización dinámica AC (Dunlap & Kenkre 1986) y localización dinámica DC + AC (Zhao 1991) respectivamente, se considerarán, entre otros, en este trabajo pues corresponden a la aplicación de una fuerza externa oscilatoria  $f(t)$  en (1) cuyos efectos físicos se pueden estudiar con el método de Kapitza (sección 5). Entre paréntesis en (9a) y (9b) aparecen las condiciones que deben cumplir las fuerzas externas a fin de producir localización.

<sup>1</sup> En esta referencia se da una introducción pedagógica a la dinámica de las oscilaciones de Bloch en 1D; su lista de referencias constituye además una excelente fuente de información actualizada que resume el trabajo de otros investigadores y provee una visión global de estos temas de investigación.

Consideremos a continuación el caso general de los potenciales dependientes del tiempo en (4) que se pueden separar como:

$$V(x, t) = V(x) - \int dx f(x, t), \quad (11)$$

donde  $V(x)$  es independiente del tiempo y  $f(x, t)$  es una fuerza externa que oscila rápidamente con frecuencia  $\omega$  (que se supone mucho mayor que las frecuencias del sistema correspondientes  $V(x)$ ). Así, la aplicación del esquema de Kapitza al hamiltoniano de enlace fuerte (4) permite obtener un potencial efectivo  $V_{ef}$  independiente del tiempo (Gallinar 2005):

$$\frac{1}{m} V_{ef}(x) = \frac{1}{2} a^2 V^2(x) - a^2 E V(x) + \frac{1}{\omega^2 m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(x)}{n^2}, \quad (12)$$

donde:

$$E = V(x_0) - 2A \cos k_0 a \left( 1 - a^2 \omega^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x_0) n^{-2} \right),$$

$f_n(x)$  es la  $n$ -ésima componente de Fourier de  $f(x, t)$  y  $m = (2Aa^2)^{-1}$  es la masa efectiva de la partícula<sup>2</sup>. En la deducción de (12) se supuso  $f_{-n} = f_n$  y  $f_0 = 0$ .

### 3. APLICACIÓN AL CASO DE LOCALIZACIÓN DINÁMICA DC+AC

Un caso relativamente sencillo de (12) corresponde un campo  $f(x, t)$  armónico con *una sola* componente de Fourier  $f_1$  que no depende de  $x$ . Así, en unidades adimensionales tales que  $ma^2 = 2$ , el potencial efectivo  $V_{ef}(x)$  toma la forma:

$$V_{ef}(x) \xrightarrow{ma^2=2} (V(x) - E)^2 - E^2 + E - V_0, \quad (13)$$

(con  $V_0 \equiv V(x_0)$ ) de donde se despeja

$$V(x) = E \pm \sqrt{V_{ef}(x) + E^2 - E + V_0}. \quad (14)$$

De manera interesante se puede observar que el esquema de Kapitza aplicado al hamiltoniano de enlace fuerte produce dos posibles potenciales estáticos  $V(x)$  correspondientes a un solo potencial efectivo. Esta es una consecuencia directa de la estructura periódica de la red, pues en el límite del continuo

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} Aa^2 = \frac{1}{2m} \quad (15)$$

se obtiene (Gallinar 2005) el resultado conocido para el péndulo de Kapitza (Landau & Lifshitz 1985):

$$V_{ef}(x) = V(x) + \frac{1}{m\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(x)}{n^2}. \quad (16)$$

<sup>2</sup> La demostración matemática de (12) junto al estudio de los casos semiclásicos para diversos potenciales de interés se incluye en un trabajo en curso que se publicará pronto (*Semiclassical time independent description of tight-binding motion in rapidly oscillating fields*, Martínez L. A., Gallinar J.-P. y Sanjinés D.)

Si aplicamos (13) al caso de localización dinámica DC + AC correspondiente al potencial dado en (9b):  $V(x, t) = \varepsilon x + \alpha x \cos \omega t$ , se obtiene

$$V_{ef} = \varepsilon^2 x^2 - 2E\varepsilon x + const., \quad (17)$$

que es un potencial efectivo cuadrático cuyas consecuencias dinámicas según el modelo semiclásico son conocidas (Chalbaud et al. 1986; Gallinar & Chalbaud 1991).

Examinemos con mayor detalle las consecuencias dinámicas semiclásicas del potencial efectivo en (17). El modelo semiclásico para el hamiltoniano de enlace fuerte (4) con un potencial igual al potencial efectivo  $V_{ef}(x)$  independiente del tiempo, está dado por el conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial k} = 2Aa \sin ak; \quad \dot{k} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -V'_{ef}(x), \quad (18)$$

con las condiciones iniciales  $x(t=0) = x_0$  y  $k(t=0) = 0$ . La ecuación de movimiento correspondiente es

$$\ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = a^2 (E - V_{ef}(x)) V'_{ef}(x). \quad (19)$$

La primera integral de (19) es

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\dot{x}_0^2 - a^2 [(V_{ef}(x) - E)^2 - (V_0 - E)^2]}, \quad (20)$$

y la segunda integral de (19) se puede escribir como

$$t(x) = \int dx (C^2 - V_{ef}(x)^2)^{-1/2}, \quad (21)$$

de donde se podría -en principio- despejar  $x(t)$  para conocer la evolución del sistema. No obstante, éste es un problema que en general resulta difícil de resolver.

A continuación reescribamos el potencial cuadrático (o "pozo parabólico")  $V_{ef}(x)$  en (17) como

$$V_{ef}(x) = -\alpha x + \beta x^2; \quad (22)$$

la ecuación de movimiento correspondiente es (con  $z \equiv x - \alpha/2\beta$ )

$$\ddot{z} = 32a^2 z (z_0^2 - z^2) - \omega^2 z, \quad (23)$$

cuya primera integral es

$$\dot{z} = \pm \sqrt{\frac{1}{4} \omega^2 (z_0^2 - z^2) - 8(z_0^2 - z^2)^2}; \quad (24)$$

de aquí resulta que  $z(t)$  es una integral elíptica, ciertamente más difícil de representar analíticamente. Sin embargo, de (24) ya se puede deducir numéricamente el movimiento de la partícula en el espacio fase  $(z, \dot{z})$  que se presenta en la Fig. 2. En esta figura se observa un comportamiento característico de algunos sistemas dinámicos y es el de estar confinado, es decir, que el límite del módulo de  $(z, \dot{z})$  existe cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esta observación constituye la base de la propuesta central de este trabajo que se describe en la sección 4.

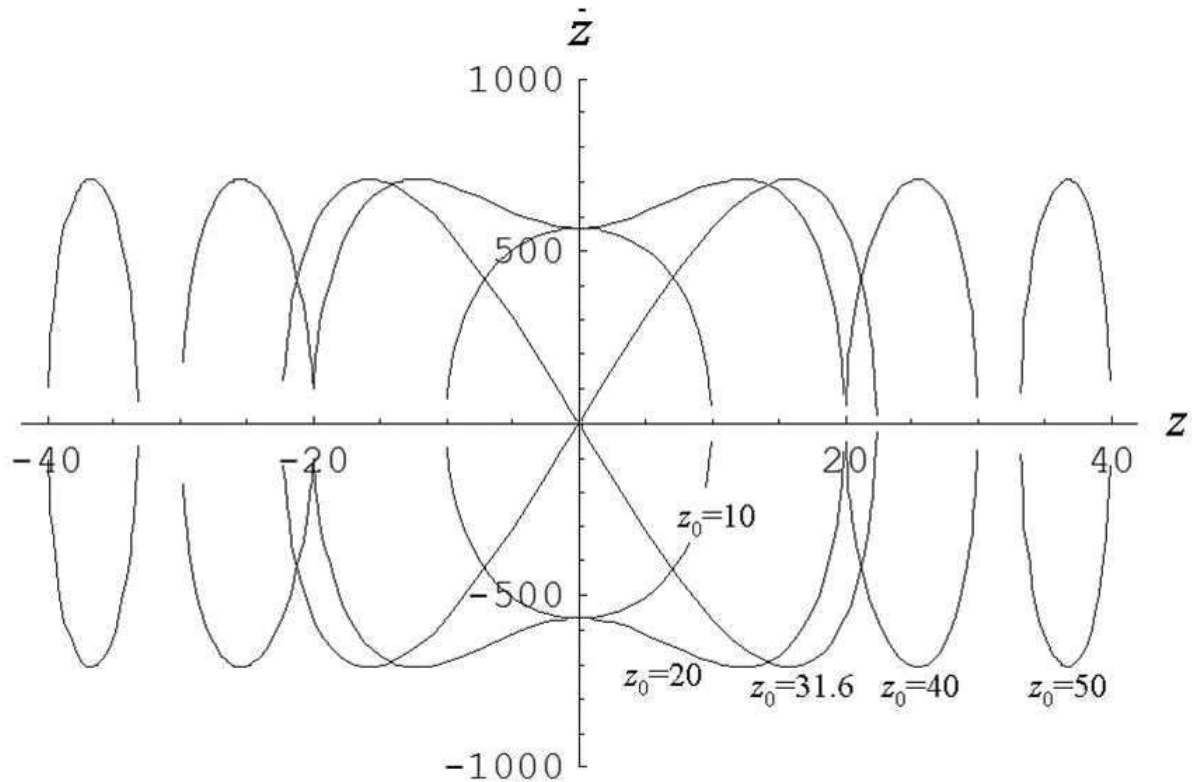


FIG. 2.— Diagrama en el espacio fase  $(z, \dot{z})$  correspondiente a un potencial efectivo cuadrático. El módulo del vector  $(z, \dot{z})$  que describe las órbitas periódicas es finito, lo que se relaciona con el régimen de localización dinámica (9b).

#### 4. CONFINAMIENTO SEMICLÁSICO Y LOCALIZACIÓN DINÁMICA

Definamos un problema matemático general planteado en los siguientes términos: para la ecuación ordinaria autónoma y no-lineal

$$\dot{x} = f(x), \quad (25)$$

¿cuál es la condición de confinamiento para  $x(t)$  dada una  $f(x)$  conocida? Notemos que (25) es equivalente a

$$\ddot{x} = f(x)f'(x), \quad (26)$$

que tiene la forma de una ecuación física de movimiento. La respuesta a la pregunta anterior es el teorema de Kroopnick (Kroopnick 1972): sea

$$\ddot{x} + a(t)b(x) = 0, \quad (27)$$

con  $a(t) > 0$  y  $b(x)$  funciones continuas en  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$  y en  $\mathbb{R}$  respectivamente. Si  $\dot{a}(t) \leq 0$  (con  $t \geq T$ ) y  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int^x b(u)du = \infty$ , entonces todas las soluciones de (27) están confinadas cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Así, la propuesta (o conjetura) que constituye el objetivo de este trabajo se puede formular como sigue: el fenómeno de localización cuántica se puede relacionar con el correspondiente confinamiento semiclásico, al menos, de tal forma que confinamiento sea una condición suficiente para localización. Dicho de otro modo: a través de la fórmula de Gallinar (12) se puede conocer el potencial cuántico  $V(x)$  en función a un potencial efectivo  $V_{ef}(x)$  que -de acuerdo al modelo semiclásico (18) y al teorema de Kroopnick- producen un movimiento confinado en el espacio fase. No

está dentro del alcance de este trabajo elaborar la demostración esta conjetura, pero se puede argumentar sobre su plausibilidad con ayuda de la Fig.3.

Si bien existe una correspondencia intuitiva entre el centroide  $z(t)$  de un paquete de ondas según (6) y la variable de posición en el modelo semiclásico (18), no existe la equivalencia semiclásica del desplazamiento cuadrático medio  $w(t)$  dado por (7). Sin embargo, en la Fig.3 se ve a un paquete de ondas que se dispersa a medida que se propaga, lo que indica deslocalización cuántica cuando este comportamiento persiste a medida que  $t \rightarrow \infty$ . La imagen semiclásica que podría co-rresponder a esta situación es la siguiente: las posiciones iniciales  $a$  y  $b$  están muy próximas entre sí, como se esperaría estadísticamente si el paquete fuera muy angosto, pero a medida que el sistema evoluciona temporalmente, la dispersión desconfina (ensanchamiento) del paquete indica que las posiciones  $a'$  y  $b'$  estarán muy separadas entre sí, lo que semiclásicamente debería corresponder al caso de un movimiento desconfinado. Si el paquete oscila en un régimen de localización, las posiciones iniciales  $a$  y  $b$  nunca estarán muy separadas entre sí, lo que debería corresponder a un régimen semiclásico de confinamiento.

La adaptación del teorema de Kroopnick al problema semiclásico sigue de manera directa a partir de (27) sustituyendo las variables correspondientes:

$$\ddot{x} + (V_{ef}(x) - E)V'_{ef}(x) = 0. \quad (28)$$

Entonces, si  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}^2(x) = \infty$ , todas las solu-

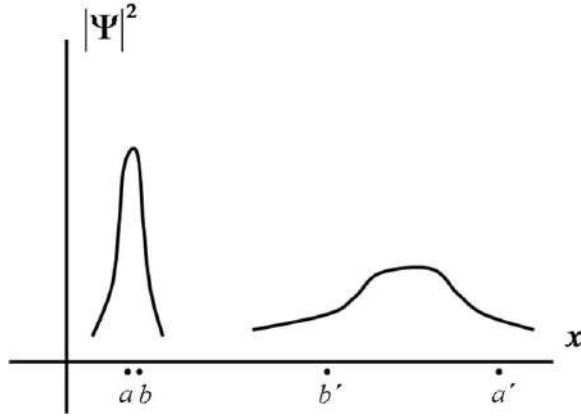


FIG. 3.— Las posiciones iniciales  $a$  y  $b$  de dos partículas clásicas que están próximas entre sí pueden asociarse a una distribución estadística espacial muy angosta (diagrama de la izquierda), pero a medida que el sistema evoluciona temporalmente (diagrama de la derecha), la dispersión desconfiada (ensanchamiento) de la distribución indica que las posiciones  $a'$  y  $b'$  estarán muy separadas entre sí, lo que correspondería al caso de un movimiento desconfinado. Si la distribución oscila en un régimen de localización, las posiciones iniciales  $a$  y  $b$  nunca estarán muy separadas entre sí, lo que correspondería a un régimen de confinamiento.

ciones de (28) están confinadas cuando  $t \rightarrow \infty$ . Así, la consecuencia inmediata del teorema de Kroopnick de acuerdo a (14) y a (28) se traduce en la condición  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |V(x)| = \infty$  para localización. Para ilustrar esto elijamos algunos casos representativos de  $V(x)$  correspondientes al potencial cuántico

$$V(x, t) = V(x) + x \cos 100t. \quad (29)$$

Los casos elegidos de  $V(x)$  son:

$$x^2 \quad (30a)$$

$$50\sqrt{|x|^3}, \quad (30b)$$

$$100\sqrt{|x|}, \quad (30c)$$

$$x^3, \quad (30d)$$

$$50|x|, \quad (30e)$$

$$e^{|x|}, \quad (30f)$$

$$e^x, \quad (30g)$$

$$(x^2 + 1)^{-1}, \quad (30h)$$

Los gráficos correspondientes a estos potenciales para el desplazamiento cuadrático medio  $w(t) = \langle x^2 \rangle$ , calculado de acuerdo a (7) resolviendo numéricamente la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo por el método pseudo-espectral (Sanjinés 2001), se muestran en la Fig.4.

Las curvas que indican claramente deslocalización corresponden a los potenciales (30 g, h). En efecto, para estos potenciales se verifica que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |V(x)| \neq \infty$ , mientras que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |V(x)| = \infty$  para los demás potenciales, cuyos gráficos de  $\langle x^2 \rangle$  indican localización. Esto sólo se puede afirmar para los intervalos temporales tomados en las simulaciones numéricas.

Nótese la consistencia de los resultados de la Fig.4 con los que corresponden al hamiltoniano de una partícula en el límite del continuo dado en (15), con un potencial igual al potencial efectivo calculado según (12), i.e.,  $H = -(\hbar^2/2m)\partial_x^2 + V_{ef}(x)$ . En este caso, la condición de localización de la partícula para un valor determinado (finito) de la energía es  $E < \lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}(x)$  (Sakurai & Napolitano 2011). En efecto, de acuerdo a (13) se ve que en todos los casos de localización en la Fig. 4 se cumple  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}(x) = \infty$ .

## 5. CASO GENERAL DEL POTENCIAL LINEAL

En vista del interés que comprende este trabajo acerca de los potenciales (9a) y (9b) correspondientes al régimen de localización dinámica, consideremos a continuación el caso general del potencial (11) con la forma de una función lineal de la posición:

$$V(x, t) = V(x) - \int dx f(x, t) = xF(t), \quad (31)$$

donde el promedio temporal de  $F(t + T) = F(t)$  sobre un periodo  $T$  es cero, i.e.,  $\langle F \rangle_T = 0$ , de manera consistente con la suposición  $f_0 = 0$  en la deducción de la fórmula de Gallinar (12). La segunda derivada de (31) con respecto a la posición es

$$\partial_x^2 V(x) = e^{i\omega t} \partial_x f_1(x) + e^{2i\omega t} \partial_x f_2(x) + \dots \quad (32)$$

donde se ve que el lado derecho de (32) no puede depender de  $t$ , así que necesariamente  $\partial_x f_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), entonces  $f(x, t) = f(t)$  en (31) y por lo tanto  $V(x) = bx$ , con  $b$  una constante de proporcionalidad. En este caso, (12) lleva a la misma forma simplificada de (13):  $V_{ef}(x) = (bx - E)^2 - E^2 + E - V_0$ . El valor de la constante  $b$  se determinará según los casos conocidos de localización dinámica dados por (9a) y (9b) cuyos potenciales son lineales en  $x$ . Veamos: el criterio de Kroopnick para localización es  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}^2(x) = \infty$ ; en el caso de (9a),  $V(x, t) = ax \cos \omega t$ , la condición de localización  $J_0(a/\omega) = 0$  no se cumple cuando  $\omega$  es grande, así que el criterio de Kroopnick tampoco se cumplirá, lo que es cierto si  $b = 0$ , i.e.,  $V_{ef}(x) = 0$ ; en el caso de (9b),  $V(x, t) = (e + a \cos \omega t)x$ , la condición de localización  $\varepsilon/\omega \notin \mathbb{Z}$  se cumple cuando  $\omega$  es grande, entonces  $V(x, t)$  se debe escribir como  $V(x, t) = \varepsilon x + F(t)x$  con  $\langle F \rangle_T = 0$ , de tal forma que  $V_{ef}(x) = (\varepsilon x - E)^2 - E^2 + E - V_0$  y que en consecuencia se cumpla el criterio de Kroopnick  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}^2(x) = \infty$ . Resumiendo: si  $V(x, t) = xF(t)$  con  $\langle F \rangle_T = 0$ , entonces  $V_{ef}(x) = 0$ . Esta conclusión podría haberse intuido de manera simple estableciendo que el potencial efectivo correspondiente a un potencial  $V(x, t)$  que oscila rápidamente es el promedio temporal de  $V(x, t)$ , i.e.,  $V_{ef}(x) = \langle V(x, t) \rangle_T = x \langle F \rangle_T = 0$ .

Un caso interesante en el que se confirma lo anterior corresponde a la simulación numérica de los efectos dinámicos derivados de un campo eléctrico homogéneo con dependencia temporal del tipo "diente

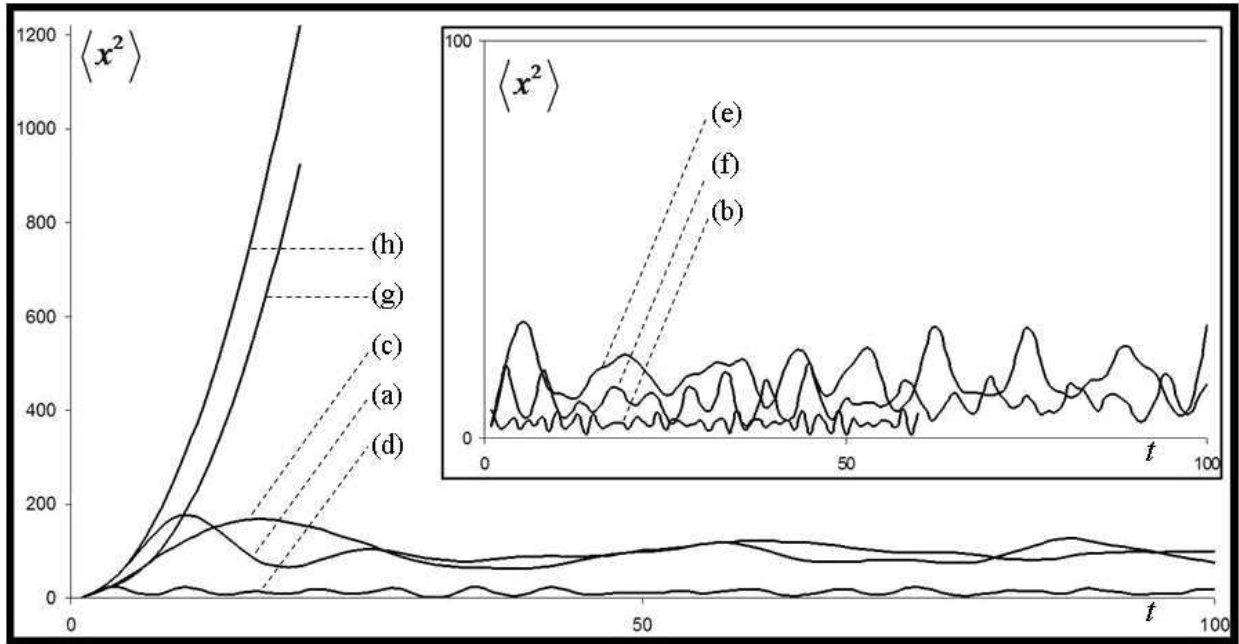


FIG. 4.— Evolución de valores de  $\langle x^2 \rangle$  como indicador de localización dinámica. Los casos (a)-(f) corresponden a localización pues  $\langle x^2 \rangle$  permanece acotado. Los casos (g) y (h) muestran la tendencia de  $\langle x^2 \rangle$  a crecer monótonamente de manera desacotada, lo que se interpreta, dentro de los valores extremos alcanzados en esta gráfica, como deslocalización.

de sierra" de la forma (31) con  $\langle F \rangle_T \neq 0$ , i.e.,  $E(t) \propto t - nt$  con  $t \in [nT, (n+1)T]$  y  $n$  entero (Sanjinés 2003). Aunque a corto plazo (tiempos pequeños) parecería haber un régimen de deslocalización asociado al transporte neto de una corriente eléctrica, finalmente la localización predicha por el criterio de Kroopnick se impone para tiempos mayores.

## 6. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se utilizó la fórmula de Gallinar (2005) aplicable al movimiento de una partícula en una red unidimensional con un hamiltoniano de enlace fuerte. Dicha fórmula permite obtener el potencial efectivo independiente del tiempo  $V_{ef}(x)$  correspondiente a un potencial de la forma  $V(x, t) = V(x) - \int dx f(x, t)$ , donde la fuerza externa  $f(x, t)$  oscila rápidamente con respecto a las oscilaciones que puedan resultar del potencial estático  $V(x)$ , lo que permite aplicar el esquema de Kapitza para oscilaciones rápidas en la deducción de  $V_{ef}(x)$ . En este trabajo se propuso la conjetura "confinamiento implica localización" (sólo como condición suficiente), es decir, que si la solución  $x(t)$  de las ecuaciones semiclásicas de movimiento para un hamiltoniano de enlace fuerte con potencial  $V_{ef}(x)$  permanecen acotadas en el límite  $t \rightarrow \infty$ , entonces también se satisfarán las condiciones de localización cuántica, i. e., el centroide  $z(t)$  y el valor cuadrático medio  $w(t)$  de un paquete cuántico permanecerán acotados cuando  $t \rightarrow \infty$ . Así, aplicando el teorema de Kroopnick (1972), la condición de localización sugerida por dicha conjetura es  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}^2(x) = \infty$ . Se aplicó este criterio a varios potenciales estáticos  $V(x)$  no-lineales (Fig. 4), así como al caso del potencial lineal general del tipo  $V(x, t) = xF(t)$  asociado a los fenómenos de localización dinámica especificados por

las ecs. (9a) y (9b). En todos los casos se logró verificar la conjetura "confinamiento implica localización". Como ejemplo interesante, se invocó el resultado de los efectos dinámicos debidos a un campo eléctrico homogéneo con dependencia temporal del tipo "diente de sierra", los que indican un efecto aparente de deslocalización para tiempos pequeños (asociado al transporte neto de una corriente eléctrica), pero que a través del criterio  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{ef}^2(x) = \infty$  dicho efecto corresponde en realidad a un régimen de localización, lo que se verifica para tiempos mayores. Estos ejemplos ilustrativos muestran la necesidad de contar con un criterio general, como el que se obtuvo en este trabajo, que permita saber si un régimen dinámico es de localización o deslocalización independientemente de los resultados de las simulaciones numéricas que necesariamente estarán limitados por los valores máximos de los tiempos de simulación.

Finalmente, mencionemos algo respecto a la relevancia de este trabajo en el contexto de investigaciones actuales que son de interés a la comunidad científica. A partir de la "ecuación óptica de Schrödinger" (Marte & Stenholm 1997) se estableció la posibilidad de reproducir los fenómenos de transporte electrónico en redes (heteroestructuras de semiconductores en 1D) en arreglos bidimensionales de fibras ópticas con perfiles de curvatura específicos. Tal posibilidad surge como consecuencia de la analogía formal entre la variable temporal en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (para la partícula en una red) y la variable espacial en la "ecuación óptica de Schrödinger" a lo largo del eje longitudinal del arreglo óptico (para el paquete de ondas fotónico). Así, los fenómenos dinámicos cuánticos de la partícula en una red son "mapeados" a lo largo del arreglo óptico en los que se observa una dis-

tribución *estática* de intensidad luminosa. Como consecuencia, el fenómeno bien conocido de la oscilación de Bloch corresponde a la distribución periódica de intensidad luminosa en un arreglo óptico con perfil de curvatura parabólica (Lenz 1999). El fenómeno de localización dinámica de un electrón en presencia de un campo armónico externo (Dunlap & Kenkre 1986) fue verificado experimentalmente en un arreglo óptico con perfil de curvatura periódico (Longhi et al. 2006) y el fenómeno de localización asintótica predicho teóricamente (Sanjinés-Gallinar 2001) fue confirmado experimentalmente en un arreglo óptico con perfil de curvatura cúbica (Dreisow et al. 2011).

Así, en el caso de la dinámica de la partícula en una red bajo el efecto de un campo eléctrico externo con dependencia temporal armónica en el límite de altas fre-

cuencias (ec. 12), corresponde entonces la distribución de intensidad luminosa en un arreglo óptico con curvatura periódica de periodo muy pequeño. Los resultados de este trabajo permiten pues dos predicciones en arreglos ópticos (investigación en curso): (i) en el límite del periodo igual a cero ocurriría deslocalización del paquete fotónico; (ii) en el límite del periodo igual a cero *y curvatura global cuadrática* (no-periódica) del arreglo óptico habrá localización del paquete fotónico. La predicción (i) no es factible en vista de que la deslocalización óptica no es compatible con aproximación paraxial que se supuso en la deducción de la "ecuación de Schrödinger óptica" (Marte & Stenholm 1997). Sin embargo, la predicción (ii) es factible y puede ser verificada experimentalmente con las mismas técnicas que permitieron la observación de localización dinámica y localización asintótica.

#### REFERENCIAS

- Ascroft N. & Mermin N. (1976), *Solid State Physics* (Saunders College)
- Bandyopadhyay M. & Dattagupta S. (2008), *Pramana - journal of physics* **70**, 3, 381
- Bloch F. (1928), *Physik* **52**, 555
- Chalbaud E. et al. (1986), *J. Phys. A* **19**, L385
- Dreisow F. et al. (2011), *Optics Letters* **36**, 11, 2065
- Dunlap D. H. & Kenkre V. M. (1986), *Phys. Rev. B* **34**, 3625
- Gallinar J. P. & Chalbaud E. (1991), *Phys. Rev. B* **43**, 2322
- Gallinar J. P. (2005), (comunicación personal)
- Hartmann T. et al. (2004), *New Journal of Physics* **6**, 2
- Kroopnick A. (1972), *Proc. Amer. Math. Soc.* **34**, 319
- Landau L. & Lifshitz E. (1985), *Mecánica Clásica* (Reverté)
- Lenz G. (1999), *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5, 963
- Longhi S. et al. (2006), arXiv:quant-ph/0511132v2 29 Jun 2006
- Marte M. & Stenholm S. (1997), *Phys. Rev. A* **56**, 4, 2940
- Rahav S., Gilary I. & Fishman S. (2003), arXiv:nlin/0302023v2 14 Sep 2003
- Sakurai J. & Napolitano J. (2011), *Modern Quantum Mechanics* - cap. 2 (Addison-Wesley)
- Sanjinés D. (2001), *Tesis Doctoral* (Universidad Simón Bolívar, Venezuela)
- . (2003), *Revista Boliviana de Física* **9**, 18
- Tcherniak D. (1998), <http://www.fam.web.mek.dtu.dk/fvp/dima/VibPotential.html>
- Zhao X. G. (1991), *Phys. Lett.* **155A**, 299

## SIMULACIÓN MONTE CARLO PARA REGISTROS DE PRECIPITACIÓN PLUVIAL

### MONTE CARLO SIMULATION FOR RAINFALL RECORDS

V. M. PEÑAFIEL<sup>†</sup> & M. ANDRADE<sup>‡</sup>

Laboratorio de Física de la Atmósfera  
Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física  
Universidad Mayor de San Andrés  
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639  
La Paz – Bolivia

Se propone un modelo Monte Carlo simple orientado a simular los patrones anuales de precipitación pluvial diaria. El modelo reproduce el comportamiento cualitativo de los veinte registros (anuales) empíricos disponibles para tres estaciones colocadas a diferentes alturas sobre el nivel del mar y, aproximadamente, a lo largo del eje transversal del territorio boliviano. Se hizo énfasis, sobre todo, en las variaciones de la precipitación acumulada anual, la frecuencia anual de días secos, la correlación lineal entre registros anuales y las propiedades de la transformada de Fourier tomada sobre el conjunto total de datos.

*Descriptor:* Aplicaciones del método Monte Carlo— precipitación pluvial

Código(s) PACS: 87.55.kh, 92.40.eg

#### ABSTRACT

We propose a simple Monte Carlo model for the purpose of simulating annual profiles of daily rainfall. This model reproduces the qualitative behaviour of 20 annual records for 3 stations located at different heights above the sea level and along the transversal axis of the Bolivian territory. We have concentrated mainly on the accumulated annual rainfall, the annual frequency of dry days, the linear correlation of annual records and the properties of the Fourier transform taken over the totality of the data.

*Subject headings:* Monte Carlo method and applications — rainfall

#### 1. INTRODUCCIÓN

La principal característica de los registros anuales de precipitación diaria es la estocasticidad. No es posible, sin embargo, atribuirles alguna distribución probabilística, conocida o no (al menos en la región aquí estudiada). La razón de ello es la ocurrencia, también marcadamente aleatoria, de días “secos” (precipitación igual a cero), aislados o en serie, cuyo principal efecto es de anular cualquier tendencia consecutiva en los valores para los días “húmedos”. El recurrir, más bien, a un *algoritmo* de simulación parece inevitable y, efectivamente, es la opción adoptada en una ya muy abundante literatura al respecto.

Un modelo, ampliamente aceptado, recurre a procesos de Markov de primer o segundo orden para simular la transición de días secos a húmedos y viceversa (por ejemplo, Katz (1974), Katz (1977a), Katz (1977b), Hayhoe (2000) y Deni & Jemain (2009)); los valores de los días húmedos se extraen de alguna distribución probabilística ajustada a la

precipitación acumulada desde un registro empírico dado.

Para los registros sobre territorio boliviano, disponibles para el presente trabajo SENAMHI (2010), ese modelo tiende a una innecesaria complicación, al parecer, debido a ciertas estructuras con series persistentes de días secos aún en las regiones más húmedas de las series temporales.

En las siguientes secciones se describe en detalle tanto las características de tales registros empíricos cuanto el método alternativo -más simple- empleado para la simulación. Y, claro, se comparan resultados mostrando algunas de las implicaciones.

#### 2. REGISTROS EMPÍRICOS

Se han elegido datos de precipitación adquiridos en tres estaciones colocadas, aproximadamente, sobre el eje transversal del territorio boliviano, como se puede apreciar de los valores de latitud, longitud y altura sobre el nivel del mar que se muestran en la tabla 1. Se trata de series temporales con 7304 valores cada una correspondientes a 20 años, desde el 1 de Enero de 1989 hasta el 31 de Diciembre de 2008.

La inspección de los datos para E1, mostrados en las figuras 1, 2(a), y 2(b), revela: (i) que la única pe-

<sup>†</sup>vmiguel@fumsa.edu.bo

<sup>‡</sup>mandrade@fumsa.edu.bo

TABLA 1  
POSICIÓN DE LAS ESTACIONES.

Estación	Lat.	Long.	a.s.n.m. [m]
E1 (Ayo Ayo)	-17.083	-68.000	3880
E2 (Cochabamba)	-17.417	-66.183	2548
E3 (Pto. Suarez)	-18.983	-57.817	134

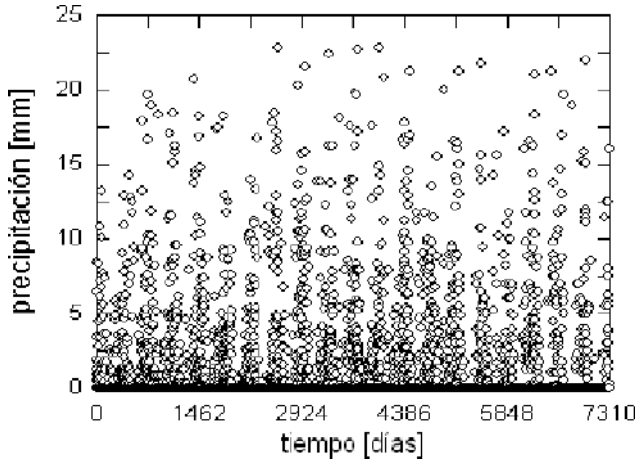


FIG. 1.— Datos de precipitación en E1 (Ayo Ayo) desde el 1 de Enero de 1989 hasta el 31 de Diciembre de 2008. Es notoria la periodicidad anual afectada por dispersión en valores pluviales altos.

riodicidad significativa es la anual; (ii) que existe dispersión adicional de los datos entre los valores medios y los superiores y (iii) que el número y la distribución de días secos son eventualidades independientes de las de los días húmedos.

La propiedad (iii) sigue de que, no obstante ser -en buena parte- responsables de la periodicidad anual (zonas secas centrales), los valores nulos de precipitación se distribuyen también en las zonas húmedas de tal ciclo (puntos aparentemente continuos sobre las abscisas de la Fig. 1.).

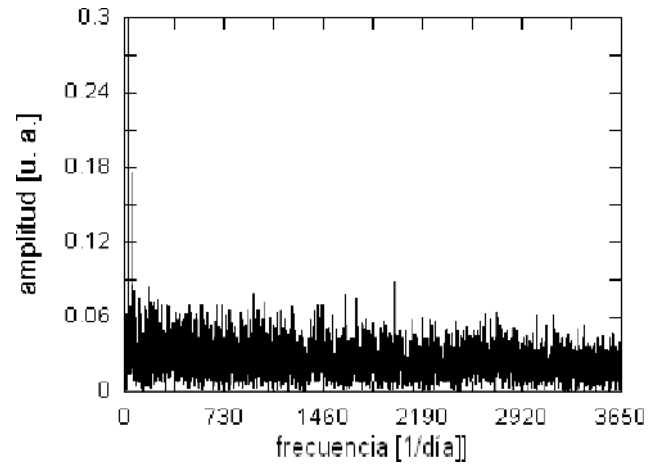
Análogamente, las figuras 9, 10(a), 10(b), 16, 17(a) y 17(b) permiten reconocer las características (i), (ii) y (iii) también en los registros de las estaciones E2 y E3. En general, como se verá más adelante, el comportamiento de la precipitación pluvial es estadísticamente similar para las tres estaciones y, consecuentemente, al menos en toda la región media del territorio boliviano.

Antes de discutir la naturaleza de ese comportamiento y, más bien, para permitir la discusión, conviene primero explicar las motivaciones y detalles del proceso de simulación empleado para imitar numéricamente a las series temporales empíricas.

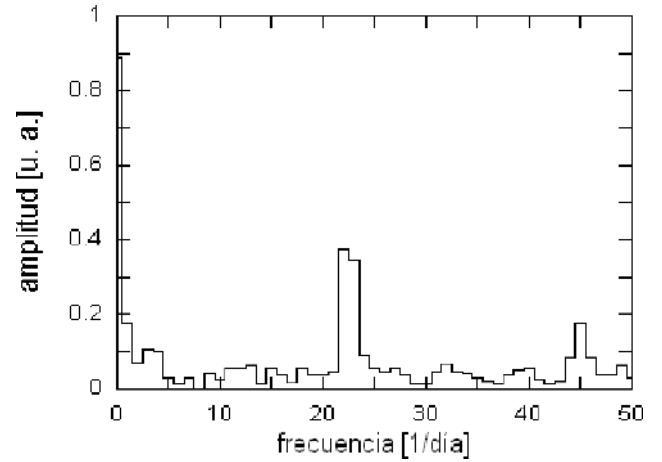
### 3. MODELO MONTE CARLO

La figura 3 es un ejemplo (entre 365 posibles) de frecuencia (normalizada) de precipitación para un mismo día durante 20 años. El ajuste de la distribución alfa

$$E(t) = ae^{-\alpha t}. \quad (1)$$



(a)



(b)

FIG. 2.— (a) Transformada rápida de Fourier (TRF) sobre los datos de la Fig. 1. Excepto la región de períodos grandes, el patrón es notoriamente característico al de ruido aleatorio. (b) Primeros 50 puntos de la TRF de la Fig. 2a.; el pico corresponde al obvio período anual  $8192/23 = 356 < T < 8192/22 = 372.36$ . El segundo pico, más pequeño, es sólo una resonancia en  $8192/45 = 182.04$  (medio año) y no es significativo.

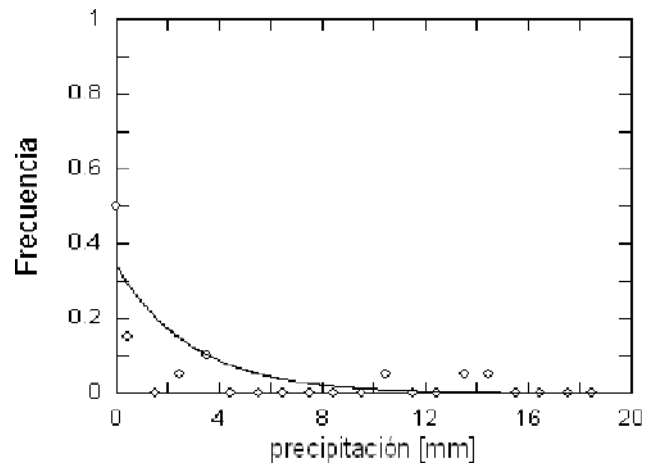


FIG. 3.— Ajuste de la distribución alfa, por mínimos cuadrados, a las frecuencias relativas de precipitación correspondientes a un mismo día del año durante los 20 años del registro total.

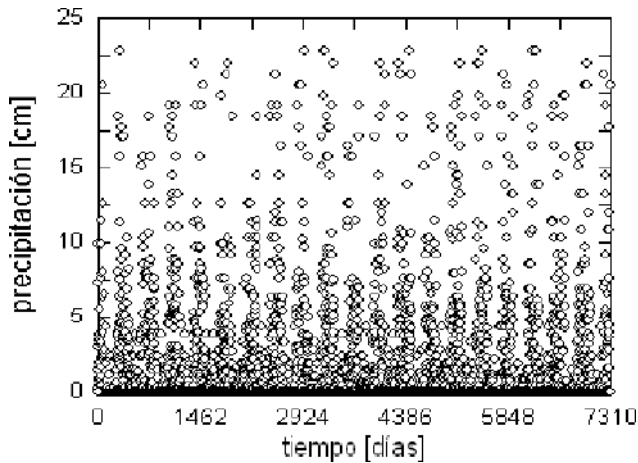


FIG. 4.— Datos simulados para la estación E1 donde se aprecia la aproximación, en valores máximos y dispersión relativa, al patrón formado por los datos empíricos de la Fig. 1.

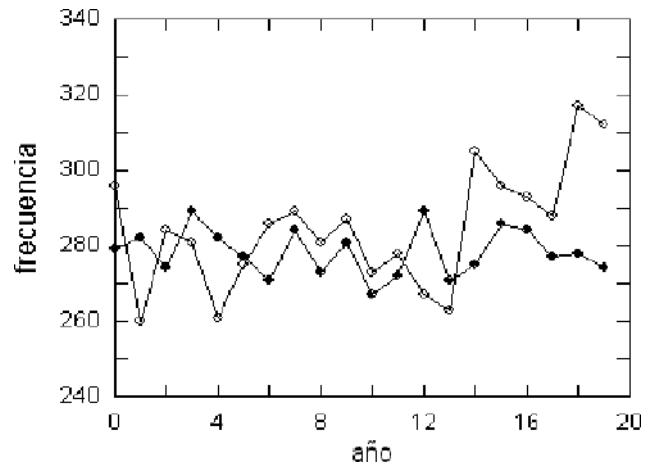
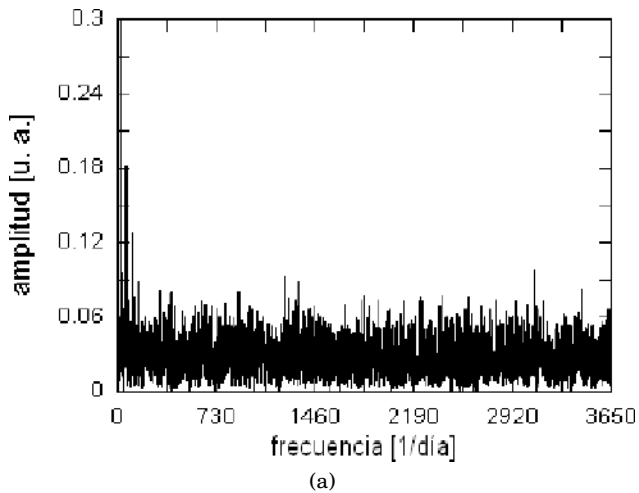
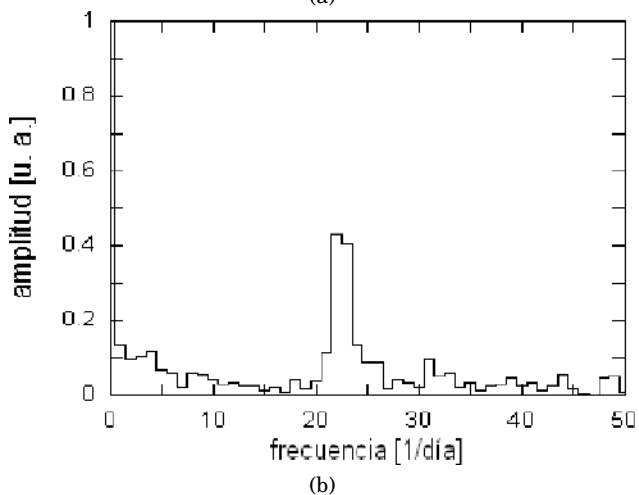


FIG. 6.— Comparación entre frecuencias anuales de días secos empíricas y simuladas (puntos llenos). La aproximación es aceptable.



(a)



(b)

FIG. 5.— (a) TRF a los datos de la Fig 3. La características cualitativas son completamente análogas a las observadas en la Fig. 2a. (b) Histograma de los primeros 50 puntos de TRF de la Fig. 2a. El único pico es el esperado para un período anual  $356.17 < T < 372.36$ .

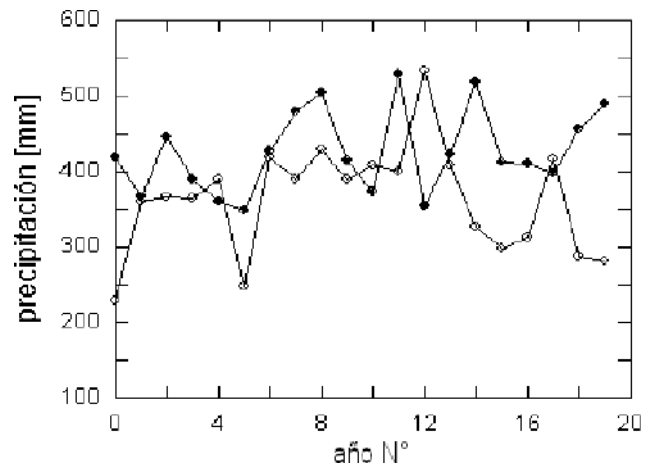


FIG. 7.— Comparación de las precipitaciones anuales empírica y simulada (puntos llenos). El comportamiento de las secuencias son muy similares aunque los valores numéricos, claro, no coinciden.

es pertinente sólo por las tendencias de probabilidad (alta para precipitación baja y viceversa). Sin embargo, en varios otros casos se tiene días con 20 valores cero de precipitación y aún grupos de días secos para los cuales, por supuesto, ninguna distribución es apropiada.

Para producir numéricamente este efecto y también la dispersión mencionada en la sección anterior, en vez de considerar la matriz de probabilidades de transición  $p_{ij}$  para un proceso de Markov, se ha preferido asignar una probabilidad fija  $\beta_s$  a la porción seca ( $90 < i < 270$ ) y otra  $\beta_h$  a la zona húmeda ( $270 < i < 90$ ) como umbrales encima de los cuales el día se considera seco; y un parámetro  $\alpha_0$  (que determina los valores máximos de precipitación) para la distribución exponencial (1). El proceso de simulación Monte Carlo, entonces, procede como sigue:

Para cada valor del índice  $0 \leq i \leq 364$  se sortean dos números aleatorios,  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , el primero con 100 valores equidistantes en el intervalo  $[0, 1]$  y el segundo con  $k$  valores enteros  $1 \leq \xi_2 \leq k$ . Ahora, si  $x$  representa a la precipitación se tiene, para la zona

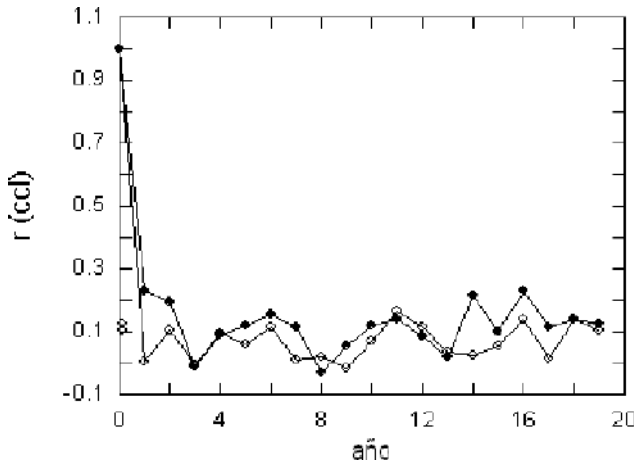


FIG. 8.— Correlaciones lineales entre los primeros registros anuales y los 19 siguientes para los datos empíricos y los simulados (puntos llenos). La similitud de los esquemas es probabilísticamente notable.

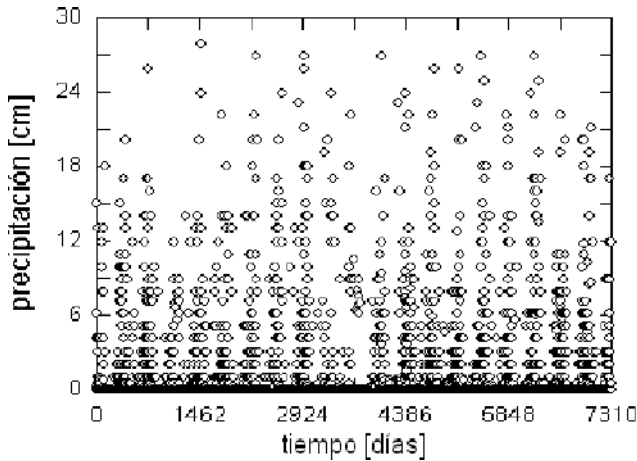


FIG. 9.— Datos de precipitación en E2 (Cochabamba) desde el 1 de Enero de 1989 hasta el 31 de Diciembre de 2008. La estructura básica de periodicidad anual y "ruido" dispersivo están presentes (como es el caso para E1).

seca,

$$x = y \text{ si } \xi_1 < \beta_s$$

$$x = 0 \text{ si } \xi_1 \geq \beta_s$$

donde

$$y = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \xi_1)$$

$$\alpha = \xi_2 \alpha_0 .$$

Análogamente, para la región húmeda,

$$x = y \text{ si } \xi_1 < \beta_h$$

$$x = 0 \text{ si } \xi_1 \geq \beta_h$$

con las mismas expresiones para  $y$  y  $\alpha$ .

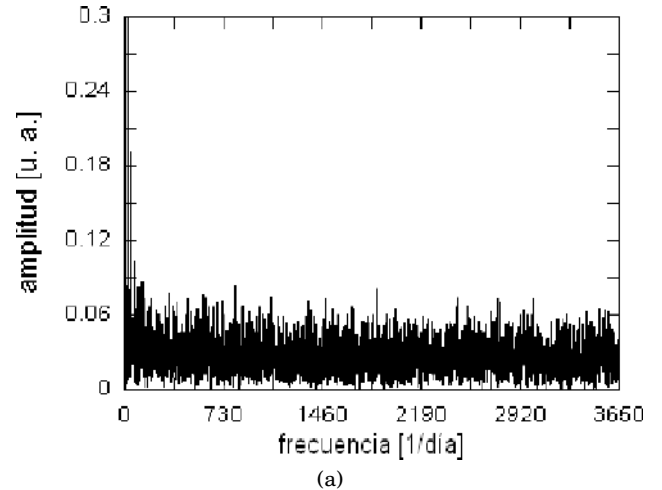


FIG. 10.— (a) TRF a los datos de la Fig 9. La características cualitativas son muy semejantes a las observadas en la Fig. 2a. (b) Histograma de los primeros 50 puntos de TRF de la Fig. 10a. con el único pico esperado para un período anual  $356.17 < T < 372.36$ .

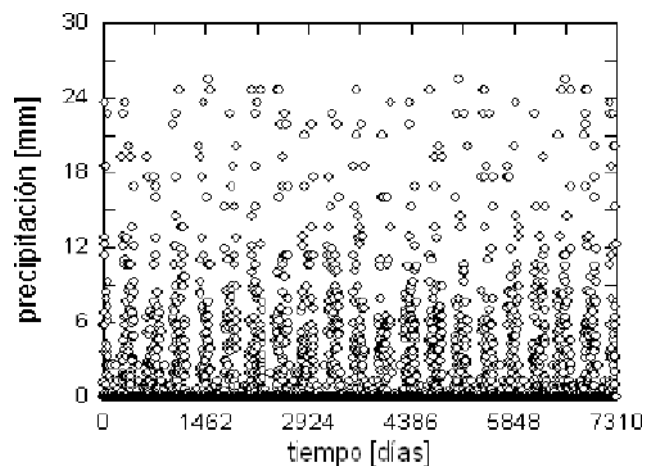


FIG. 11.— Datos simulados para la estación E2 con un patrón, en valores máximos y dispersión relativa, análogo al de los datos empíricos de la Fig. 9.

El sorteo de los números  $\xi$  para las variables  $\beta$  y  $k$  se hizo usando una rutina adaptada del "Mersenne Twister" Matsumoto & Nishimura (1998) para el ensamblador de 32 bites.

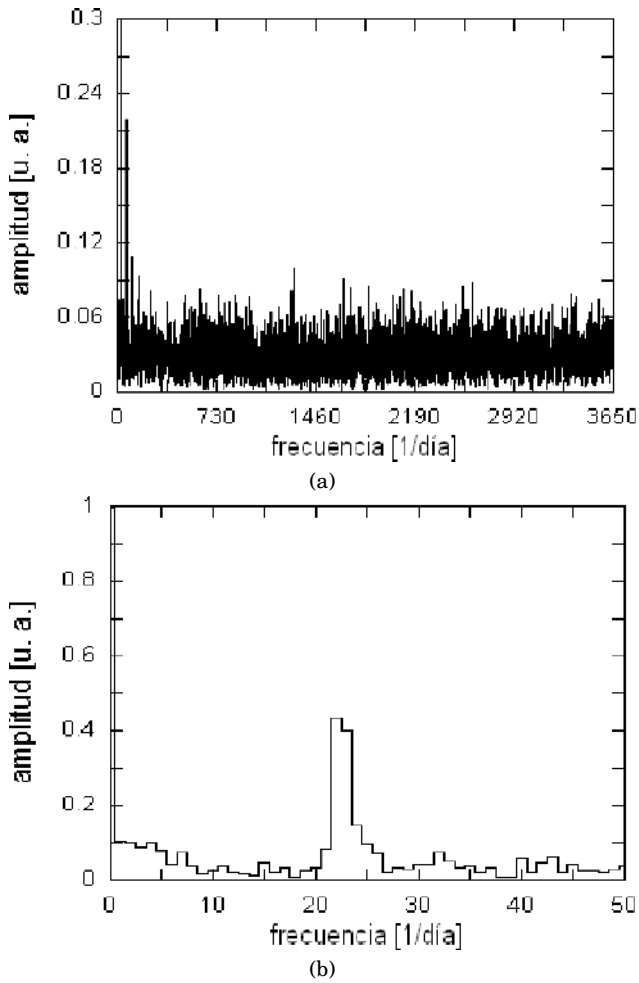


FIG. 12.— (a) TRF de la serie en la Fig 11. El comportamiento del espectro es parecido al de la Fig. 10a. (b) Primeros 50 puntos de TRF de la Fig. 12a. El pico es también el esperado para un periodo anual  $356.17 < T < 372.36$ .

Los parámetros  $\alpha_0$ ,  $\beta_s$ ,  $\beta_h$ , y  $k$  deben ser ajustados “manualmente” hasta que la altura de las ordenadas y la dispersión de los puntos se correspondan, tan aproximadamente como sea posible, con los registros empíricos. Por ejemplo, las figuras 4, 5(a) y 5(b) ilustran el resultado de la simulación, con los valores que figuran en la tabla 2, para la estación E1. La semejanza entre los registros empírico y simulado, así como entre sus respectivas transformadas de Fourier, son muy aceptables, más aún considerando las comparaciones cualitativas de otras propiedades que se discute en la sección siguiente.

#### 4. REGISTROS SIMULADOS

Como se ha supuesto que el comportamiento probabilístico de la ocurrencia de días secos es independiente de la distribución para los niveles de precipitación, se esperaría que la evolución del número total anual de días secos y la de precipitación total anual se comportaran de manera independiente; por otra parte, es obvio que un mayor número de días secos debe tender a disminuir la cantidad total de precipitación. Estos efectos contrarios se manifiestan realmente en el respectivo coeficiente de correlación.

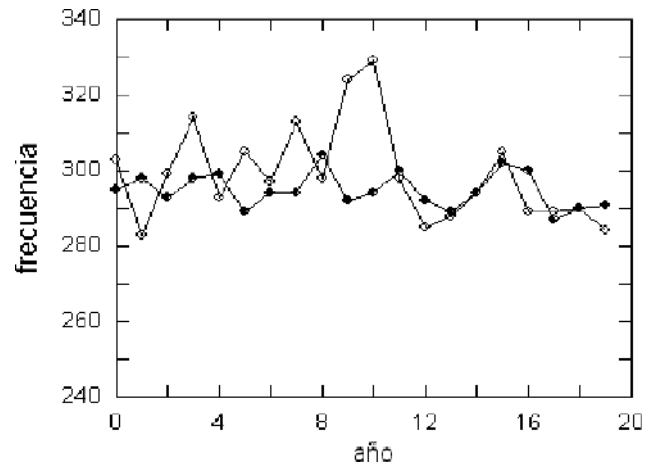


FIG. 13.— Frecuencias anuales empíricas y simuladas (puntos llenos) de días secos correspondientes a la estación E2.

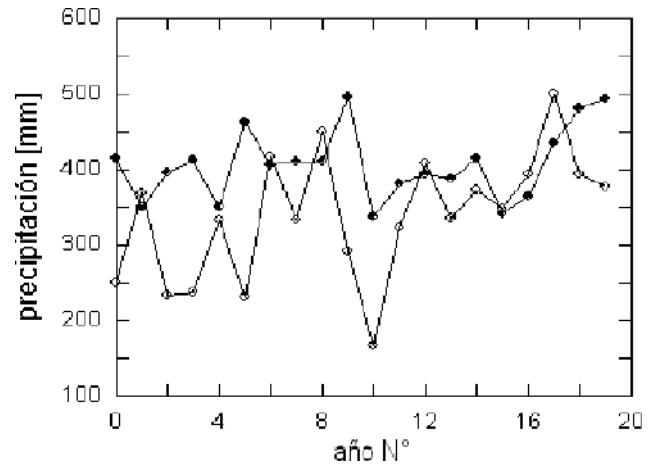


FIG. 14.— Precipitaciones anuales empíricas y simuladas (puntos llenos) de la estación E2.

Por ejemplo, para la estación E1,  $r_e = -0.555$  y  $r_s = -0.387$ , esto es, el registro empírico presenta algo más anticorrelación que el registro simulado. Por lo demás, como se aprecia en las figuras 6 y 7, el comportamiento estadístico es bastante similar para ambos registros.

Es también interesante la comparación entre las secuencias de coeficientes de correlación de los datos del primer año con los 19 restantes para los dos registros (Fig. 8). Estas correlaciones que oscilan alrededor de cero permiten explicar el hecho de que todas las comparaciones sólo tienen significado estadístico: las series empíricas, al igual que las simuladas, no muestran regularidades consistentes (excepto la anual) y admiten la interpretación de que cada patrón anual es sólo una instancia (un ensayo o muestra individual) aleatoria sobre un número - en principio- infinito de posibilidades (mientras las condiciones físicas causantes del fenómeno cíclico de precipitación pluvial se mantengan).

Estos mismos resultados pueden ser observados en el caso de las estaciones E2 y E3. Las figuras 9, 10(a), 10(b), 16, 17(a) y 17(b) muestran que las características estructurales son completamente simi-

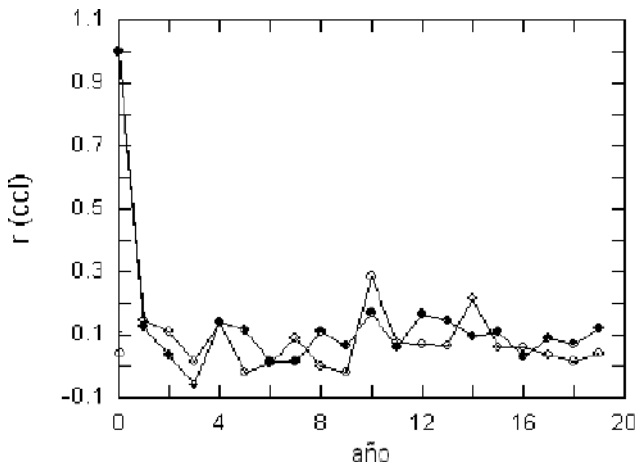


FIG. 15.— Coeficientes de correlación lineal entre los primeros registros anuales y los 19 siguientes para los datos empíricos y los simulados (puntos llenos) de la estación E2.

TABLA 2  
PARÁMETROS DE LAS SIMULACIONES.

Estación	$\beta_s$	$\beta_h$	$\alpha_0$	$k$
E1	0.10	0.40	0.22	4
E2	0.05	0.35	0.0165	4
E3	0.05	0.30	0.005	6

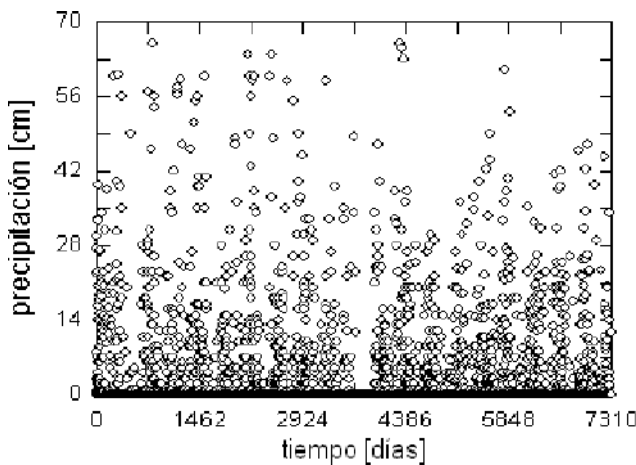


FIG. 16.— Datos de precipitación en E3 (Puerto Suarez) desde el 1 de Enero de 1989 hasta el 31 de Diciembre de 2008. Hay periodicidad anual y dispersión, como en E1.

lares, independientemente de la posición y altura sobre el nivel del mar. La misma configuración aparece en las figuras 11, 12(a), 12(b), 18, 19(a) y 19(b) que corresponden, respectivamente, a los registros simulados para E2 y E3.

En todos los casos el pico de periodicidad se encuentra entre los índices 22 y 23 los cuales, para un registro de 8192 (7304 datos originales más un relleno de 888 ceros), indica que T se encuentra en el intervalo [356.17; 372.36]. Veinte años de datos son todavía poco para observar periodicidades mayores a un año y las menores carecen de significado físico; la comparación entre espectros de potencias indica que el resto de los periodogramas contiene solamente

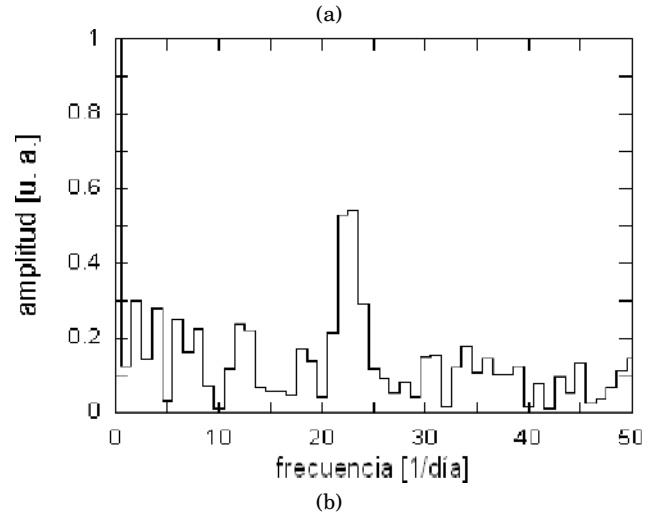
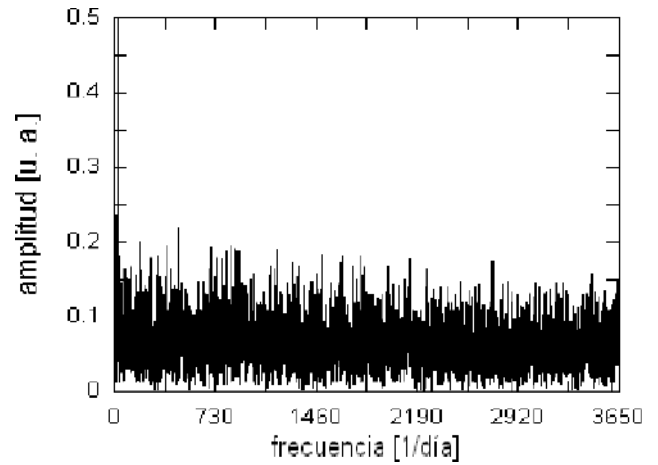


FIG. 17.— (a) TRF sobre los datos de la Fig. 16. El espectro contiene, también, ruido aleatorio excepto en la región de períodos grandes. (b) Detalle de la TRF de la Fig. 17a. El único período significativo es el anual.

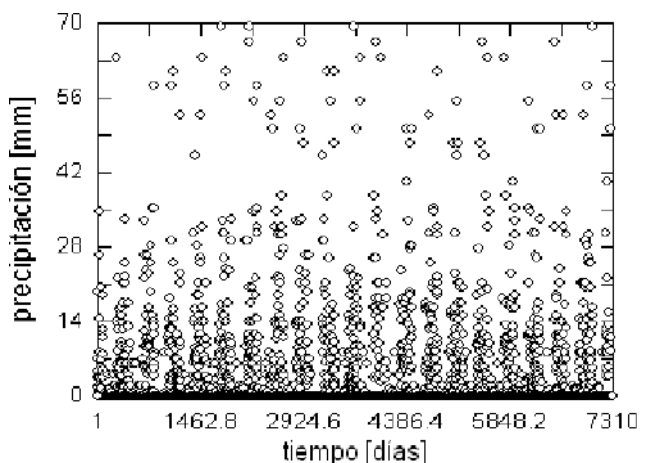


FIG. 18.— Serie simulada para la estación E3; el patrón es similar al de la Fig. 16.

ruido aleatorio.

El efecto que es menos obvio y más difícil de explicar es el de la dispersión de puntos, especialmente para valores medios y superiores de precipitación. Al abandonar el modelo de probabilidades de tran-

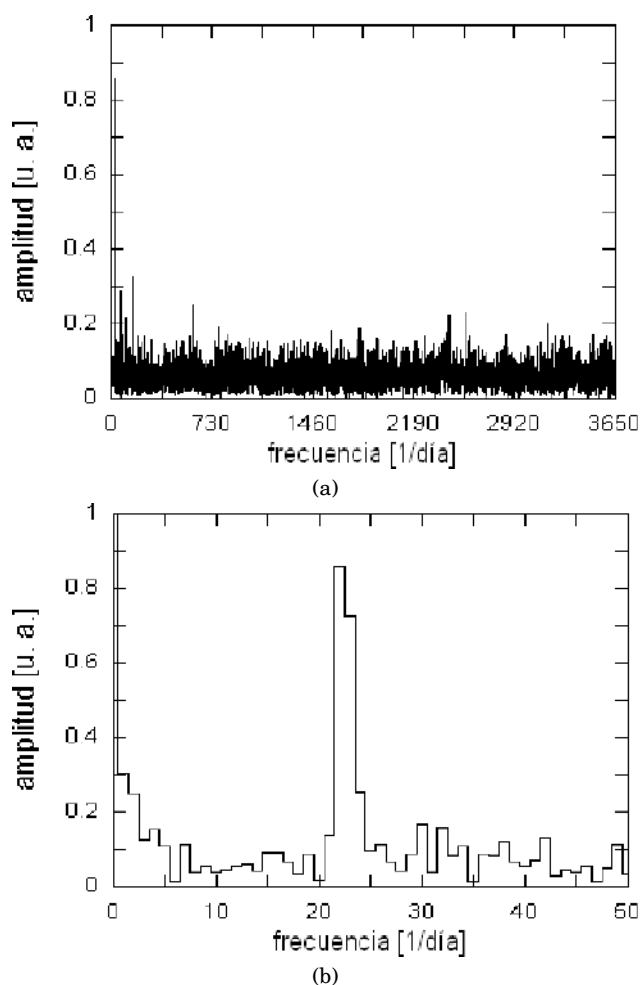


FIG. 19.— (a) Espectro de potencias del registro simulado para E3. Las características no difieren de lo obtenido para E1 y E2. (b) Primeros 50 puntos de la TRF de la Fig. 19a. Igualmente,  $356.17 < T < 372.36$ .

sición, como ya se vio, se adopta la idea que hay una probabilidad umbral que determina si el día puede ser considerado como seco o húmedo y un valor diario *aleatorio* para el parámetro de la distribución exponencial, con la cual se sorteaba la magnitud de la precipitación (hay una distribución exponencial *aleatoria* diaria).

La tabla 2. resume la elección de parámetros de simulación para las tres estaciones. Éstos valores fueron elegidos estrictamente para imitar el comportamiento de los registros experimentales;  $\alpha_0$  para fijar los valores máximos de precipitación y  $\beta_s$ ;  $\beta_h$ ;  $k$  para controlar la dispersión.

### 5. RESULTADOS

Una buena estimación de los efectos locales está dada por los coeficientes de correlación entre las series empíricas de cantidad de días secos entre las tres estaciones, éstos son  $r_{s12} = -0.031$ ,  $r_{s13} = -0.4354$ ,  $r_{s23} = 0.327$ . Análogamente, los coeficientes de correlación entre las series de precipitación acumulada anual,  $r_{h12} = 0.300$ ,  $r_{h13} = -0.326$ ,  $r_{h23} = -0.114$ , indican que las tres estaciones tienen comportamiento pluvial diario independiente (estocásticamente); sin

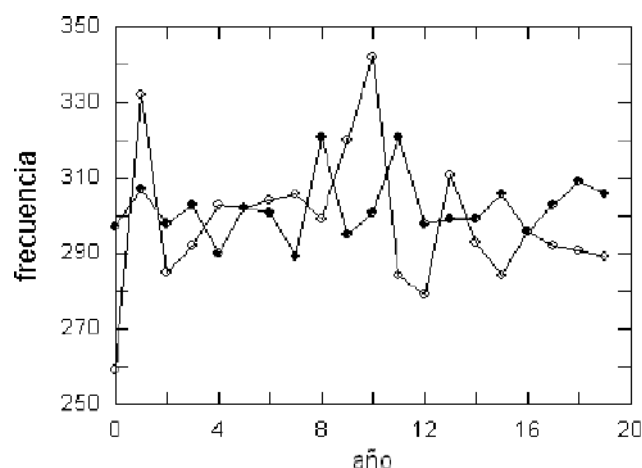


FIG. 20.— Frecuencias anuales de días secos, empíricas y simuladas (puntos llenos) para la estación E3.

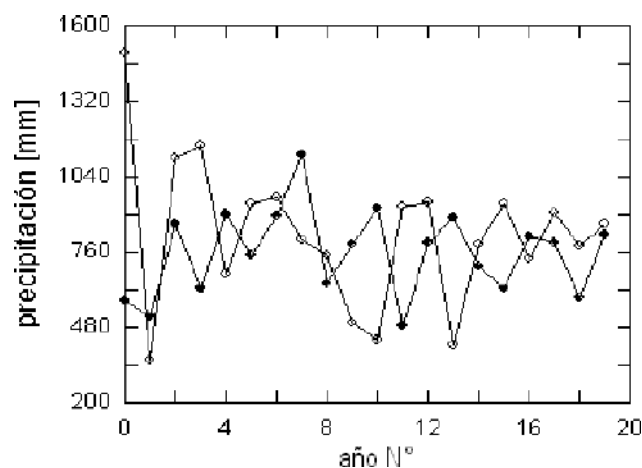


FIG. 21.— Precipitaciones anuales empírica y simulada (puntos llenos) de la estación E3.

embargo, las figuras 13, 14, 20 y 21, como las 6 y 7, permiten -por la comparación con los resultados simulados- apreciar la analogía de los tres procesos aunque, naturalmente, los valores numéricos pueden no coincidir. También es notorio el mayor grado de aleatoriedad en los registros empíricos, los cuales presentan fluctuaciones más acentuadas que sus simulaciones respectivas.

Finalmente, las figuras 15 y 22, como la 8, ilustran las correlaciones entre la serie para el primer año consigo mismo (punto en el origen) y con los 19 restantes; como se ve, los coeficientes de correlación oscilan alrededor de cero en todos los casos, apenas con pequeñas fluctuaciones, en ciertos intervalos, para los valores relativos a los datos empíricos.

### 6. CONCLUSIONES.

Para otros lugares y registros más largos, ciertos análisis se orientan a detectar oscilaciones significativas en los datos de precipitación (v. g. Rodríguez-Puebla et al. (1998)). Los registros disponibles para este trabajo, ya descritos, definitivamente no manifiestan otro ciclo que el anual.

Las propiedades estadísticas son simulables según lo descrito en la sección 3 y las comparaciones con

TABLA 3  
VALORES EXTREMOS

<i>Est.</i>	$P_{max}$	$C_{max}$	$C_{min}$	$A_{max}$	$A_{min}$
<i>E1(e)</i>	22.80	317	260	533.40	228.44
<i>E1(s)</i>	22.76	289	271	529.48	348.52
<i>E2(e)</i>	27.90	329	283	500.44	165.95
<i>E2(s)</i>	25.50	304	287	496.54	337.14
<i>E3(e)</i>	66.00	342	259	1502.46	356.50
<i>E3(s)</i>	69.32	321	289	1123.67	483.27

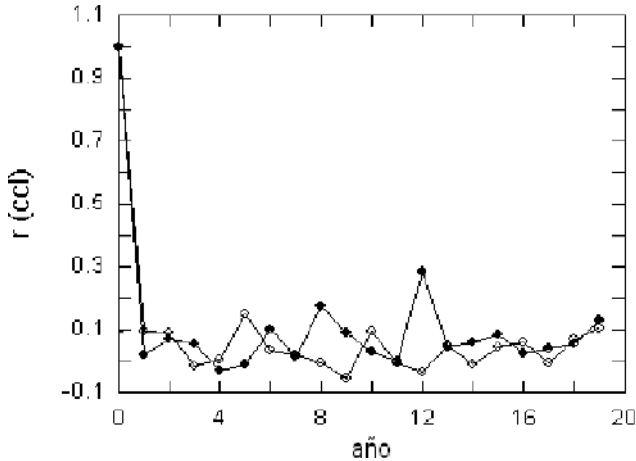


FIG. 22.— Estación E3: correlaciones lineales entre los primeros registros anuales y los 19 siguientes para los datos empíricos y los simulados (puntos llenos).

las propiedades de las series de datos, expuestas en la sección 4, por una parte, indican que el modelo adoptado es muy aceptable para producir versiones subrogadas de los datos y, por otra, que los registros empíricos contienen grados de aleatoriedad mayores que sus versiones simuladas (la simulación no incluye fluctuaciones climáticas esporádicas).

Como consecuencia, es posible considerar a los registros anuales de precipitación diaria como instancias independientes de un patrón probabilístico determinado por la superposición de condiciones físicas, un esquema similar a los *estados* aleatorios de la física estadística.

Admitido esto, para registros mayores, se podría emplear las simulaciones para detectar cambios notables en tales condiciones físicas que darían paso a cambios perceptibles en las probabilidades que determinan las distribuciones.

Se concluye que, para los registros de 20 años empleados aquí, el comportamiento estadístico es “estable” en las tres estaciones consideradas, aunque las fluctuaciones estadísticas de los registros simulados son más conservadoras. En la tabla 3, para valores de precipitación máxima  $P_{max}$  muy próximos, se advierte que el número de días secos máximo  $C_{max}$  y mínimo  $C_{min}$  están siempre dentro del intervalo definido por los extremos empíricos y lo mismo acontece para la precipitación acumulada anual máxima  $A_{max}$  y mínima  $A_{min}$ . Esto hace conjeturar la posibilidad de producir datos subrogados por otras vías y, también, elimina la de “predecir” las configuraciones anuales de precipitación.

#### REFERENCIAS

- Deni S. M. & Jemain A. A. (2009), *Met. and Atmosph. Physics* **104**, 13  
 Hayhoe H. N. (2000), *Clim. Res.* **14**, 75  
 Katz R. W. (1974), *J. Appl. Meteor.* **13**, 953  
 —. (1977)a, *J. Appl. Meteor.* **16**, 671  
 —. (1977)b, *J. Appl. Probability* **14**, 598  
 Matsumoto M. & Nishimura T. (1998), *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* **8**, 3  
 Rodríguez-Puebla C., Encinas A. H., Nieto S. & Germendia J. (1998), *Int. J. Climatol.* **18**, 299  
 Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología “SENAMHI” (2010), (Comunicación Privada)

## UN EXPERIMENTO DEMOSTRATIVO DE ESTÁTICA

### A DEMONSTRATIVE EXPERIMENT IN STATICS

RUDY VILCA SALINAS

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física  
 Universidad Mayor de San Andrés  
 c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8639  
 La Paz – Bolivia

#### RESUMEN

Se resuelve un problema de un sistema sencillo en equilibrio y luego se realiza la verificación experimental del resultado. Se destaca la fácil realización de este experimento siempre que se siga el procedimiento indicado.

*Descriptor:* procedimientos de laboratorio — aparatos y experimentos de laboratorio

Código(s) PACS: 06.60.-c, 01.50.Pa

#### ABSTRACT

We solve a problem about a simple system in equilibrium and its experimental verification. If the indicated procedure is followed, this experiment is straightforward to carry out.

*Subject headings:* laboratory procedures — laboratory experiments and apparatus

#### 1. EL PROBLEMA

El problema a tratar, tiene que ver con la siguiente figura:

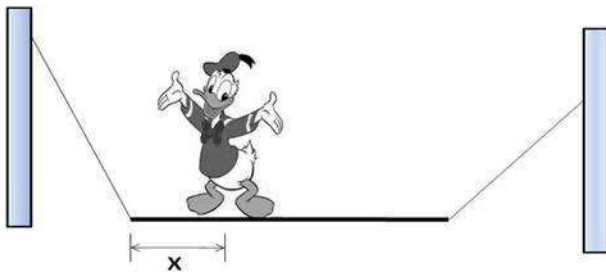


FIG. 1.— Vista principal del problema.

Lo que se ve no es más que un famoso pato que no necesita presentación, que se halla parado sobre una tabla, de cuyos extremos salen dos cables que se sujetan a dos soportes.

Esta figura tiene algo de particular, y es el hecho de que si el pato se mueve a uno u otro lado (izquierda o derecha), la tabla sobre la que se encuentra, ya no estará más de forma horizontal. Sólo asume la tabla esta posición cuando el palmípedo se halla a cierta distancia  $x$ , que habrá que calcular.

#### 2. DETERMINACIÓN DE $x$

Para la determinación de  $x$ , seguiremos dos pasos. En el primero hallaremos la tensión de la cuerda derecha, y con este dato, en el segundo paso hallaremos  $x$ .

#### 2.1. Paso 1

Identificamos las fuerzas que actúan sobre la tabla, y también señalamos algunos datos importantes que configuran al sistema.  $W_T$  denota el peso de la tabla que se considera que actúa en su punto medio.

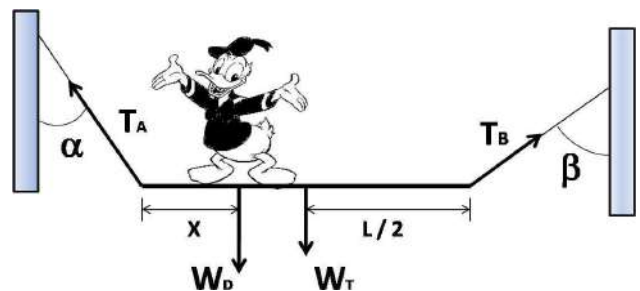


FIG. 2.— Fuerzas que actúan sobre la tabla.

Se suponen conocidos los pesos del pato ( $W_D$ ) y de la tabla ( $W_T$ ), la longitud  $L$  de esta última, así como los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .

Como las cuatro fuerzas están en equilibrio, entonces la suma vectorial es como se muestra en la figura 3. Recordamos que si las fuerzas están en equilibrio,  $\sum \vec{F} = 0$ , y por tanto, la cadena de flechas tiene que cerrarse. Aplicando el teorema de los senos a este triángulo:

$$\frac{T_B}{\text{sen}\alpha} = \frac{W_D + W_T}{\text{sen}[180 - (\alpha + \beta)]}$$

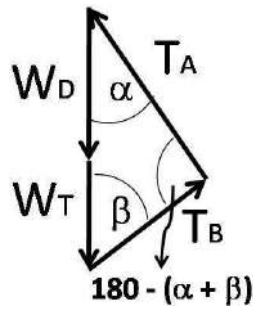


FIG. 3.— Suma vectorial de las fuerzas.

de donde resulta:

$$T_B = \frac{(W_D + W_T) \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \quad (1)$$

De manera análoga podemos hallar, si quisiéramos, la otra tensión, pero para nuestros propósitos no interesa.

### 2.2. Paso 2

Ahora procedemos a hallar  $x$ , y para ello, guiándonos con la figura 4, tomamos momentos respecto al punto  $O$ . Para hacer la tarea más fácil, la tensión  $T_B$  la hemos descompuesto en dos: en  $T_{By}$  y  $T_{Bx}$  (iguales a  $T_B \cos \beta$  y  $T_B \operatorname{sen} \beta$ , respectivamente). Como la tabla está en equilibrio, se deberá tener:

$$\sum M_o = 0,$$

luego:

$$(T_B \cos \beta)L - W_T(L/2) - W_D X = 0$$

Reemplazando en esta ecuación, la expresión encontrada para  $T_B$  (Ec. 1), y despejando  $X$ , obtenemos:

$$X = L \left[ \left( 1 + \frac{W_T}{W_D} \right) \frac{(\operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} - \frac{W_T}{2W_D} \right] \quad (2)$$

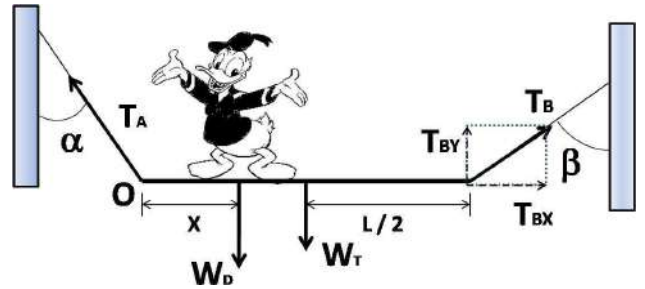
Que es lo que buscábamos.

### 3. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL

Para llevar a cabo la verificación del resultado obtenido para  $x$ , armaremos el sistema de la manera más sencilla, y para ello, **haremos una variante**: en lugar de una tabla, usaremos un palo (cuyo peso seguiremos representando como con la tabla,  $W_T$ , para no tener problemas con la notación de las ecuaciones anteriores); y no le exigiremos al pato que se mantenga sobre el palo haciendo equilibrio, sino que le haremos simplemente colgar de manos del palo (con ayuda de una cuerda), lo cual (salvo alguna fatiga para el pato), viene a ser lo mismo para fines del equilibrio. Lo que necesitaremos será:

#### Instrumentos

1. Un transportador (ver sección 3.1.2)
2. Un flexómetro.

FIG. 4.— Los momentos de las fuerzas se toman respecto al punto  $O$ .

#### Materiales

1. Un palo de unos  $2m$ .
2. Un lápiz o bolígrafo cilíndrico.
3.  $4m$  de cordel no elástico.
4. 2 tornillos pequeños con ojal.
5. Un muñeco (pato) de unos  $25cm$ .
6. Una botella de plástico de  $500cm^3$  llena con agua.
7. Una plomada de unos  $60cm$ .

#### 3.1. Montaje Previo

Antes de realizar el montaje final, es necesario hacer un montaje previo a fin de conocer los pesos del "pato mas su botella", y la del palo. Si hubiera una balanza, no estaría mal, pero la idea es prescindir de ella, siguiendo un camino alternativo que simplemente resulta genial.

##### 3.1.1. Determinación de los pesos

Si se observa la ecuación 2,-y en especial, en esta observación consiste mi contribución-, se advertirá que en realidad no necesitamos conocer los pesos absolutos, sino que basta con su relación, concretamente,  $W_T/W_D$ , lo cual como a continuación veremos, es fácil obtener.

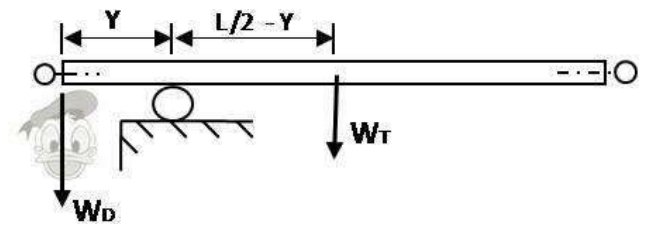


FIG. 5.— Montaje para hallar la relación de los pesos.

Comenzamos por armar el montaje que se muestra en la figura 5. Los pasos a seguir son los siguientes:

- i. Primeramente, en cada extremo del palo ajustamos los tornillos.
- ii. Amarrar la botella con agua, a las espaldas del Pato.

- iii. Amarrar la cuerda de 50cm, a las manos del pato, a manera de esposas.
- iv. Sobre una mesa, cerca y paralelamente a un borde, se coloca el lápiz o bolígrafo cilíndrico.
- v. Sobre el lápiz, cruzándolo, se coloca el palo de tal manera que sobresalga un poco de aquel borde de la mesa cercano al lápiz.
- vi. Del extremo del palo que sobresale a la mesa, del tornillo, se cuelga al pato.
- vii. Se hace rodar lentamente el palo sobre el lápiz hasta que el pato quede equilibrado con el propio peso del palo.

Cuando el palo está equilibrado, se mide  $Y$ . Medir también la longitud  $L$  del palo. La condición de momentos para el equilibrio del palo respecto al punto de apoyo dá:

$$W_D Y - W_T (L/2 - Y) = 0$$

de donde obtenemos la relación clave:

$$\frac{W_T}{W_D} = \frac{Y}{\frac{L}{2} - Y} \quad (3)$$

3.1.2. Preparación del transportador:

- i. Imprimir uno grande de internet (en hoja tamaño carta). La hoja impresa se pega sobre un cartón consistente.
- ii. Hacer un orificio en el centro del transportador (no grande, sino justo del diámetro de la cuerda de la plomada).
- iii. Desde el lado de la cara del transportador, atravesar la cuerda de la plomada, por el orificio.
- iv. Hacer un nudo del otro lado, para que la cuerda ya no salga.

3.2. Montaje Final

- i. Cortar la cuerda de 4m en dos partes: una de 1.5m, y la otra de 2.5m. Amarrar uno de los extremos de cada cuerda a los tornillos del palo.
- ii. Los extremos libres de las cuerdas, sujetarlos a dos soportes, que estén a la misma altura. Si en los soportes sobran las cuerdas, que sobren la misma longitud (esto garantizará que el palo, quede colgando con apreciable inclinación respecto a la horizontal).

3.3. Procedimiento

3.3.1. Para hallar  $x$ : Método 1

Estando ya preparado el terreno, en lo que sigue, se puede proceder de diferentes maneras. La mas sencilla por ejemplo, es hacer participar a dos grupos de estudiantes (de 3 por ejemplo). Un grupo agarra al pato y lo cuelga del palo (lo que equivale a que esté parado encima). Para colgar al pato, es cómodo que la cuerda que lleva en sus brazos como esposas tenga un nudo corredizo en un extremo, de tal forma que sea fácil asegurar y desaflojar. A continuacion moverán al pato, procurando que el palo se ponga horizontal. Cuando esto suceda (lo cual ha de verificarse con el transportador), entonces, en un cuaderno

toman nota “en secreto” de la distancia  $x$  que hay entre la posición del pato y aquél extremo del palo que se halla junto al ángulo  $\alpha$ . El cuaderno con el dato de  $x$ , se cierra en espera del resultado del otro grupo.

Estando el palo horizontal, el otro grupo procede a medir los ángulos haciendo uso del transportador.

Con estos datos y el de la relación de los pesos, determinan  $x$  haciendo uso de la ecuación 2. Este resultado lo dan a conocer a todos los presentes. Es entonces cuando se abre el cuaderno y, se verifica: deberían coincidir los resultados.

3.3.2. Hallando  $x$ : Método 2

En este método, se sustituye la medición de los ángulos por ciertas medidas de longitud. Lo que se gasta en un mayor desarrollo teórico, se gana en alcanzar es un mayor impacto.

En la ecuación 2 en la parte de los ángulos, si se desarrolla el seno de la suma de los ángulos, y se simplifica con el numerador, resulta que:

$$\frac{(\text{sen}\alpha)(\text{sen}\beta)}{\text{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{1}{1 + (\text{tg}\beta)(\text{ctg}\alpha)} \quad (4)$$

Por otra parte, cuando el palo esté horizontal, se tendrá la siguiente configuración:

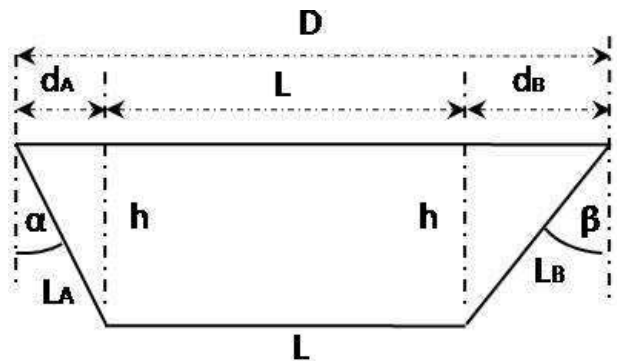


FIG. 6.— Configuración con el palo horizontal.

En la figura 6, puede comprobarse que:

$$\text{tg}\beta = d_B/h,$$

y

$$\text{ctg}\alpha = h/d_A,$$

de modo que:

$$(\text{tg}\beta)(\text{ctg}\alpha) = d_B/d_A$$

y con lo cual, la expresión 4 queda:

$$\frac{(\text{sen}\alpha)(\text{cos}\beta)}{\text{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{1}{1 + \frac{d_B}{d_A}} = \frac{d_A}{d_A + d_B}.$$

Dado que (ver fig. 6):

$$D - L = d_A + d_B \quad (5)$$

la expresión anterior resulta igual a:

$$\frac{(\text{sen}\alpha)(\text{sen}\beta)}{\text{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{d_A}{D - L} \quad (6)$$



FIG. 7.— Situación inicial del sistema.



FIG. 9.— Manera de usar el transportador para medir el ángulo.



FIG. 8.— Un muñeco en la posición calculada, logrando poner horizontal al palo.



FIG. 10.— Vista del muñeco, cargado de su botella.

Será conveniente deshacernos de  $d_A$ . Veámos cómo lo hacemos.

Por el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} h &= L_A^2 - d_A^2 = L_B^2 - d_B^2 \\ \Rightarrow L_A^2 - L_B^2 &= d_A^2 - d_B^2 \\ \Rightarrow L_A^2 - L_B^2 &= (d_A - d_B)(d_A + d_B) \end{aligned} \quad (7)$$

Dividiendo (7)/(5) miembro a miembro:

$$\frac{(L_A^2 - L_B^2)}{(D - L)} = d_A - d_B \quad (8)$$

De 5 y 8, resulta:

$$d_A = \frac{[(D - L)^2 + (L_A^2 - L_B^2)]}{2(D - L)}$$

Y entonces, la relación  $d_A/(D - L)$  que figura en la ecuación 6 será igual a:

$$\frac{d_A}{D - L} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{L_A^2 - L_B^2}{(D - L)^2} \right)$$

Y por consiguiente, la ecuación 2 queda ahora así:

$$X = \frac{L}{2} \left[ \left( 1 + \frac{W_T}{W_D} \right) \left( 1 + \frac{L_A^2 - L_B^2}{(D - L)^2} \right) - \frac{W_T}{W_D} \right] \quad (9)$$

La ecuación recién encontrada, es con la que opera el método 2. Observando esta ecuación, queda claro que para hallar  $x$ , además de conocer la relación de los pesos y la longitud del palo  $L$ , se necesita conocer tres nuevas longitudes:

- i. Las longitudes  $L_A$  y  $L_B$  de las cuerdas (desde el punto de sujeción en el soporte, hasta su unión con el extremo correspondiente del palo).
- ii. La longitud  $D$ , que es la distancia (horizontal) entre los puntos de sujeción en los soportes.

Recordamos que en la sección 3.1.1, se consideró la obtención de la relación de pesos, para lo cual, en el montaje correspondiente, se mide  $Y$  y  $L$  (Fig. 5), y la ecuación 3 nos da la relación deseada.

Finalmente, habiéndose encontrado el valor de  $x$ , se cuelga al pato a esta distancia, y el sistema debería quedar con el palo horizontal.

En varias realizaciones del experimento (Fig. 8), los resultados obtenidos, fueron satisfactorios.

16<sup>va</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA  
6<sup>ta</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA  
TRINIDAD, BENI, DEL 17 AL 21 DE SEPTIEMBRE DE 2011  
SOLUCIONES DE LA FINAL NACIONAL  
3<sup>ro</sup> Y 4<sup>to</sup> DE SECUNDARIA

BUSTOS R.<sup>1</sup>, HUANCA C.<sup>1</sup>, CONDORI H.<sup>2</sup>, BRAÑEZ A.<sup>3</sup>, MAMANI E.<sup>3</sup>, SANCHEZ M. F.<sup>3</sup>, PEÑAFIEL M.<sup>3</sup>, GUTIERREZ V. H.<sup>4</sup>, GUAYGUA T.<sup>5</sup>, CASTELO J. J.<sup>5</sup>, MALLCU A.<sup>5</sup>, VELAZCO J.<sup>5</sup>, ANDRADE M.<sup>6</sup>, GUZMÁN R.<sup>6</sup>, MAMANI R.<sup>7</sup>, FUENTES W.<sup>7</sup>, MARTINEZ L.<sup>8</sup>, JUSTINIANO I.<sup>9</sup>, JAILLITA J.<sup>9</sup>, PAYLLO J. P.<sup>10</sup>, CABRERA J.<sup>11</sup>, VARGAS C.<sup>12</sup>, CORAITE O.<sup>13</sup>, QUIROZ Z.<sup>14</sup>, VALDEZ Z.<sup>15</sup>, ORTEGA L.<sup>16</sup>, CORDERO M.<sup>17</sup>, DE LA TORRE M.<sup>17</sup>

<sup>1</sup>Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)

<sup>2</sup>Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), *Instituto de Electrónica Aplicada (IEA)*, La Paz

<sup>3</sup>Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), *“Magia de la Física”, Carrera de Física*, La Paz

<sup>4</sup>Universidad Mayor, Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCH), *Facultad de Tecnología - Carrera de Ingeniería de Sistemas*, Sucre

<sup>5</sup>Universidad Técnica de Oruro (UTO), *Facultad Nacional de Ingeniería (FNI)*, Oruro

<sup>6</sup>Universidad Mayor de San Simón (UMSS), *Facultad de Ciencia y Tecnología*, Cochabamba

<sup>7</sup>Universidad Autónoma Tomás Frías (UATF), *Carrera de Física*, Potosí

<sup>8</sup>Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA), Santa Cruz de la Sierra

<sup>9</sup>Colegio María Auxiliadora, Cobija Pando

<sup>10</sup>Colegio 12 de Agosto, Yacuiba Tarija

<sup>11</sup>Colegio Amor de Dios, La Paz

<sup>12</sup>Colegio Buenas Nuevas, Sucre

<sup>13</sup>Colegio La Salle, Oruro

<sup>14</sup>Colegio Instituto Americano, La Paz

<sup>15</sup>Colegio Cardenal Cushing, Santa Cruz

<sup>16</sup>Colegio Felipe Palazø'n, Tarija &

<sup>17</sup>Asociación Boliviana para el Avance de la Ciencia (ABAC)

## RESUMEN

La 16<sup>va</sup> Olimpiada Boliviana de Física (16<sup>va</sup> OBF) y la 6<sup>ta</sup> Olimpiada Boliviana de Astronomía y Astrofísica (6<sup>ta</sup> OBAA) se llevaron a cabo simultáneamente y con éxito del 17 al 21 de Septiembre de 2011 en la capital del Beni, Trinidad.

Los proyectos se acoplaron al proyecto titulado 1<sup>ra</sup> *Olimpiada Científica Estudiantil Plurinacional Boliviana* (1<sup>ra</sup> OCEPB) impulsado por el Estado Plurinacional de Bolivia a través del Ministerio de Educación y de su Vice-ministerio de Ciencia y Tecnología (VCyT), donde se invitó a que participen 6 áreas de las ciencias puras y naturales: Astronomía y Astrofísica, Biología, Física, Informática, Matemática y Química.

La organización del evento contó también con la participación de los siguientes organismos e instituciones: Carrera de Física – Facultad de Ciencias Puras y Naturales (FCPN) – Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), Comité Olímpico Boliviano de Astronomía y Astrofísica, Comité Olímpico Boliviano de Física, Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI), la Asociación Boliviana para el Avance de la Ciencia (ABAC), la Dirección distrital de Trinidad; SEDUCA – BENI y la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del BENI (UAB).

Participaron los 9 departamentos del Estado Plurinacional de Bolivia.

En la 16<sup>va</sup> OBF y la 6<sup>ta</sup> OBAA – Final Nacional, se evaluaron las categorías de 5<sup>o</sup> y 6<sup>o</sup> de Secundaria.

Los ganadores de la categoría de 6<sup>o</sup> de Secundaria tienen como principal premio el ingreso libre y directo a cualquiera de las carreras de Ciencias y/o Ingeniería de las universidades comprometidas con la OBF y la OBAA.

El evento se realizó con la presencia de estudiantes universitarios, con la actividad titulada la *Magia de la Física* (proyecto desarrollado por estudiantes de la Carrera de Física – FCPN – UMSA, La Paz)

Las dos categorías, tanto en Astronomía y Astrofísica como en Física, de 5<sup>o</sup> y 6<sup>o</sup> de Secundaria, tuvieron dos modalidades de evaluación: Teórica y Experimental.

Los ganadores de las etapas previas al evento nacional, de las categorías: 4<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup>, 1<sup>o</sup> de Secundaria y 6<sup>o</sup> de Primaria forman los equipos Bolivianos preseleccionados postulantes a futuros eventos olímpicos: Latinoamericanos, Iberoamericanos e Internacionales a llevarse a cabo las gestiones 2013, 2014, 2015, 2016 y 2017 respectivamente.

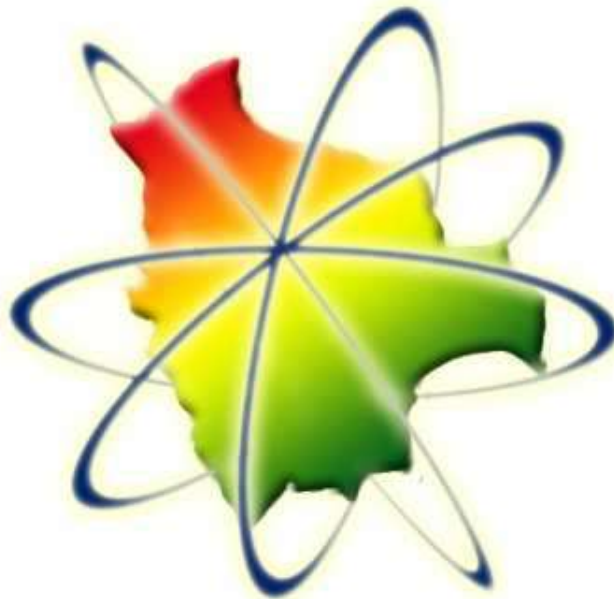
Los organizadores académicos del evento incentivan a la juventud Boliviana, mediante la preselección de delegaciones, no solo para la siguiente inmediata gestión, sino con 3, 4, 5, 6, 7 o más años de anticipación! dicha receta es sin duda la mejor manera de ser cada vez más competitivos a nivel internacional.

Página WEB: <http://200.105.152.242/olimpiada/>

Felicidades a tod@s l@s jóvenes participantes y ganadores de las distintas etapas y categorías, a sus profesores, directores así como también a todos los establecimientos fiscales, particulares y de convenio de todo el país que participaron en las olimpiadas, por el ejemplo y la motivación que dan, no solo a otros colegas y otras unidades educativas, sino a otros estudiantes contemporáneos y a las generaciones venideras.

A continuación se presentan los exámenes nacionales de las dos áreas: Astronomía y Astrofísica – Física.

## **OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA**



## **OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFISICA**

*Descriptor:* Olimpiadas de Física, Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica

*Subject headings:* Physics Olympiads, Astronomy and Astrophysics Olympiads

16<sup>va</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA  
FINAL NACIONAL  
3<sup>ro</sup> DE SECUNDARIA

PARTE CONCEPTUAL (40%)

1. Una manzana desciende desde un edificio en caída libre. **Explique** si se cumple la tercera ley de Newton durante su caída.

Sol. La manzana cae debido a la fuerza gravitacional que ejerce la tierra sobre esta (acción). La Manzana ejerce una fuerza similar de la misma magnitud sobre la tierra pero de sentido contrario (reacción). Es decir la manzana atrae a la tierra con la misma fuerza que la tierra atrae a la manzana. Pero supuesto la fuerza ejercida por la manzana sobre la tierra es insignificante comparando las masas de la tierra y la manzana.

2. ¿En un movimiento parabólico, se puede decir que existe aceleración centrípeta? **Explique**.

Sol. Si, la aceleración centrípeta está definida como el módulo de la velocidad al cuadrado sobre el radio de la curvatura es constante en cada punto de la trayectoria, en una trayectoria parabólica se tiene un distinto radio de curvatura en cada punto de la trayectoria parabólica existe una aceleración centrípeta que es variable en cada punto.

3. En ausencia de la fricción del aire, una piedra es lanzada hacia arriba.

a) Determine el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria desde el momento en que lanzas la piedra hasta que regresa hasta tus manos.

b) ¿Cómo cambia tu respuesta anterior si se toma en cuenta la fricción del aire?

Sol.

a) Fuerza Gravitatoria  $F = mg$  El trabajo que realiza una fuerza está definido como el producto escalar de la fuerza y el vector de desplazamiento. Se tiene entonces:

$$W = F \cdot d$$

Como la piedra regresa al punto origen. El desplazamiento de la piedra es cero, por tanto:

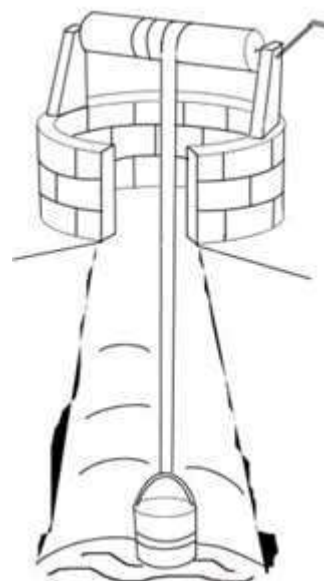
$$W = 0$$

b) Si bien la fuerza de fricción afectará a la trayectoria de la piedra (llegará a una menor altura respecto al inciso anterior) no afecta al vector desplazamiento. La piedra regresa otra vez al punto origen. El desplazamiento de la piedra es por tanto cero.

$$W = 0$$

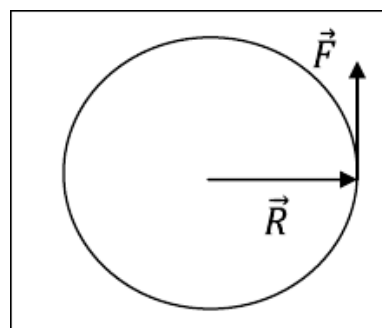
No cambia la respuesta.

4. El mecanismo para extraer agua de un viejo pozo en Alto Beni, consiste en una polea alrededor de la cual se enrolla una cuerda, en cuyo extremo se encuentra atado el balde que sube el agua. La polea se hace girar manualmente. Para aumentar la eficiencia del mecanismo, esto es, para subir más agua en una hora, usted recomendaría:



- a) Aumentar el radio de la polea.  
b) Aumentar el brazo de la manivela.  
c) Algún otro método.  
d) Ninguno.

Sol. b) Aumentar el brazo de la manivela. Si se incrementa el radio de la manivela se producirá un mayor torque al aplicar la fuerza.



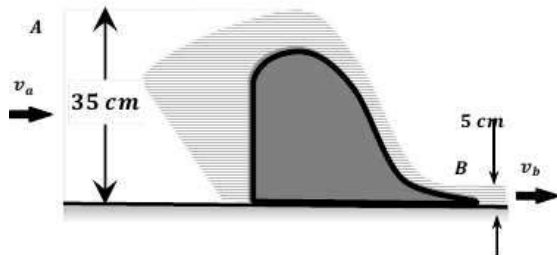
Recuérdese que la relación:

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$$

Si alguna de las variables  $\vec{R} \times \vec{F}$ , aumenta en módulo, se incrementa el torque y produce una mayor eficiencia en el mecanismo.

PARTE PRÁCTICA (60%)

- En la figura se muestra un tramo del río Bermejo que nace en el cordón montañoso conocido como Sierra de Santa Victoria en el departamento de Tarija. La presencia de mucho sedimento (hasta  $8 \text{ Kg/m}^3$ ) hace que este río deposite grandes cantidades de tierra en las orillas formando "albardones" y ocasionalmente diques naturales que hacen que este río eventualmente cambie de curso. En la figura se muestra un "albardón" de una altura de  $35 \text{ cm}$ . Por el mes de noviembre el caudal del río crece lo que permite que el agua sobrepase este "albardón" como se muestra en la figura. Si suponemos el fluido uniforme en los puntos A y B además de despreciables las pérdidas debido a la fricción. Determine la velocidad del fluido en el punto B.



Sol. Se tiene la situación mostrada en la figura. Si suponemos el fluido uniforme en los puntos A y B además de despreciables las pérdidas debido a la fricción.

Determine la velocidad en el punto B.

Debido a la ecuación de la continuidad o de la conservación de la masa, se tiene:

$$v_b = v_a \frac{h_a}{h_b} \Rightarrow v_b = v_a \frac{35}{5}$$

$$v_b = 7v_a$$

Ahora aplicado Bernoulli entre A y B

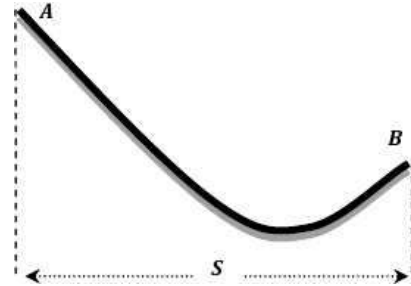
$$\frac{P_a}{\gamma} + \frac{v_a^2}{2g} + h_a = \frac{P_B}{\gamma} + \frac{v_b^2}{2g} + h_b$$

$$0 + \frac{v_a^2}{2g} + 0.35 = 0 + \frac{v_b^2}{2g} + 0.05$$

Resolviendo de los resultados anteriores y para  $v_a$ :

$$v_a = 12.26 \left[ \frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]; v_b = 85.83 \left[ \frac{\text{cm}}{\text{s}} \right]$$

- En la montaña de **Chacaltaya** está ubicada la estación de esquí más alta del mundo, aunque a juzgar por la escases de nieve de los últimos años a causa del calentamiento global, la práctica del deporte resulta un tanto dificultosa. Supóngase que un esquiador se encuentra en reposo en el punto A y se desliza en la colina como se muestra en la figura, deteniéndose en el punto B. El coeficiente de fricción es " $\mu$ ". Cuando él se detiene en el punto B, el desplazamiento horizontal es " $S$ " (ver figura).



¿Cuál es la diferencia  $\Delta h$  entre los puntos A y B?

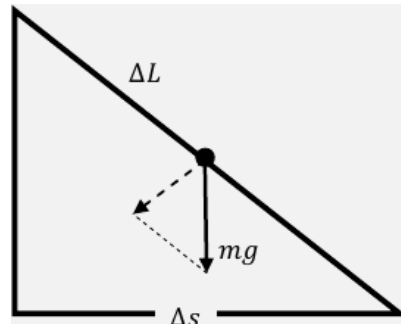
Se asume despreciable la fricción del aire y de la dependencia del coeficiente de fricción con la velocidad del esquiador.

Sol. Para un desplazamiento horizontal muy pequeño  $\delta s$ , la trayectoria puede ser considerada recta. De acuerdo al gráfico la longitud de la trayectoria es  $\delta L$ , la fuerza de fricción está dada entonces por:

$$f_r = \mu N = \mu mg \cos \theta = \mu mg \frac{\Delta s}{\Delta L}$$

El trabajo hecho por la fuerza de fricción en este tramo es:

$$W_{fr} = f_r(\Delta L) = \left( \mu mg \frac{\Delta s}{\Delta L} \right) \cdot (\Delta L) = \mu mg \Delta s$$



Sumando todos los desplazamientos pequeños a lo largo de toda la trayectoria se tiene:

$$W_{fr} = \mu mgs$$

Aplicando el teorema de la conservación de la energía se tiene:

$$\Delta E_m = W_{ext}$$

$$E_B - E_A = -W_{fr}$$

La energía cinética en los puntos A y B es cero, dado que el esquiador parte del reposo y su movimiento termina cuando la velocidad final es nula:

$$mgh_b - mgh_a = -\mu mgs$$

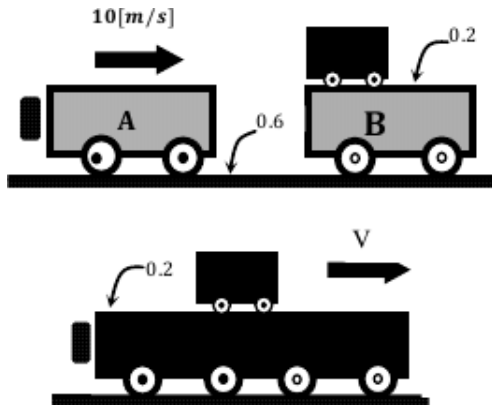
$$mg(h_A - h_B) = \mu mgs$$

$$\Delta h = \mu s$$

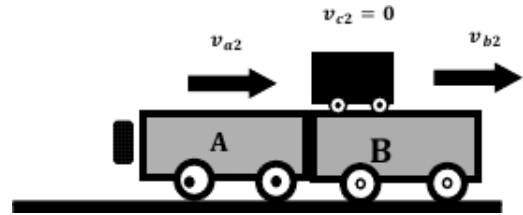
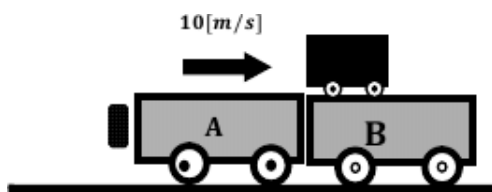
3. Los bloques B y C están en reposo cuando el bloque B golpea el bloque A, el cual se mueve con velocidad de 10 m/s. Luego del impacto que se supone perfectamente inelástico, la velocidad de los bloques A y B disminuye debido a la fricción, mientras que al bloque C adquiere rapidez, hasta que los tres bloques se mueven con la misma rapidez V. si se sabe que el coeficiente de fricción entre la superficie y los bloques es 0.6 y entre los bloques es 0.2 determine:

- El tiempo requerido para que los tres bloques se muevan a la misma velocidad.
- La distancia total recorrida por los tres bloques durante ese tiempo.

Sugerencia: Aplique el teorema del impulso y la cantidad de movimiento. Los bloques tiene masas de  $M_a = M_b = 1Kg$  y  $M_c = 0.5Kg$



Sol. Impacto entre A y B. Conservación del momento:



$$mv_a + mv_b + mv_c = mv_{a2} + mv_{b2} + mv_{c2}$$

$$v_a = v_{a2} + v_{b2} \quad (1)$$

$$(v_a - v_b)e = v_{b2} + v_{a2}$$

Como:  $e = 0$

$$v_{a2} = v_{b2}$$

Reemplazando en (1)

$$v_{b2} = \frac{v_a}{2} = 5 \frac{m}{s}$$

Para el bloque "C" por el teorema del impulso y la cantidad de movimiento desde el momento en el que el bloque B adquiere hasta que el sistema tiene una velocidad final  $v_f$

$$\Delta P = I$$

$$P_{c1} - P_{c0} = f_r \cdot \Delta t$$

$$mv_f = \mu mg \cdot \Delta t$$

$$v_f = \mu_2 g \Delta t \quad (1)$$

Ahora aplicando el teorema del impulso y la cantidad de movimiento a los bloques A y B se tiene:

$$\Delta P = I$$

$$P_{ab1} - P_{ab0} = f_r \cdot \Delta t$$

$$mv_f + mv_f - (mv_{a2} + mv_{b2}) = -(\mu_1 mg + \mu_2 mg) \Delta t$$

$$2v_f - (5 + 5) = -(\mu_1 mg + \mu_2 mg) \Delta t \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2)

$$2\mu_2 g \Delta t - 10 = -0.08g \Delta t$$

$$\Delta t = 0.85[s]$$

16<sup>va</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA  
FINAL NACIONAL  
4<sup>to</sup> DE SECUNDARIA

PARTE CONCEPTUAL (40%)

1. Un automóvil en la parte delantera generalmente lleva dos faros. Explique si la conexión de estos dos faros se encuentra en serie o en paralelo.

Sol. En una conexión en paralelo. Cuando uno de los faros ha sido quemado el otro sigue funcionando, debido a que través de éste sigue circulando corriente. Obviamente la corriente que circula a través del mismo es mayor lo que puede resultar a que el faro se torne más brillante. En una conexión en serie si uno de los faros es quemado, la corriente deja de circular a través de todo el circuito (El circuito se abre). Por lo tanto en cuanto un faro deje de funcionar el otro también dejara de funcionar.

2. Enuncie la segunda Ley de la Termodinámica. Explique qué es lo que sucede cuando la variación de entropía del universo es negativa.

Sol. La segunda ley de la termodinámica o segundo principio de la termodinámica expresa, en una forma concisa, que: La cantidad de entropía de cualquier sistema aislado termodinámicamente tiende a incrementarse con el tiempo. Para un proceso donde la variación de entropía del universo es negativa, simplemente no existe tal proceso. Violaría la 2<sup>o</sup> Ley de la termodinámica.

3. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto?

- Existen imanes de un solo polo magnético
- El polo magnético Norte de la Tierra esta en el Hemisferio Norte.
- El Campo magnético terrestre se debe a corrientes circulares que existen en el centro de la Tierra.
- Cuando una carga eléctrica con Movimiento Rectilíneo Uniforme ingresa de forma perpendicular dentro de un Campo Magnético constante en magnitud y dirección, solo cambia de dirección.
- Las corrientes eléctricas producen campos magnéticos cuyo valor no es proporcional a la intensidad de corriente.

Justifique sus repuestas.

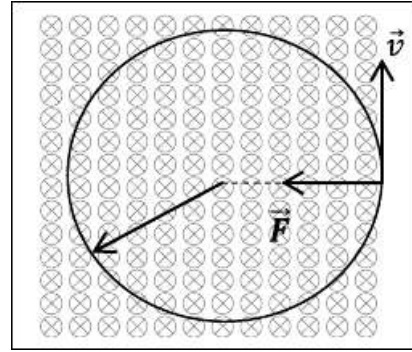
Sol. d) Cuando una carga eléctrica con Movimiento Rectilíneo Uniforme ingresa de forma perpendicular dentro de un Campo Magnético constante en magnitud y dirección, solo cambia de dirección.

Si el Campo Magnético se halla hacia dentro de la página y se representa por  $\vec{B} \otimes$ ; Cuando

una partícula cargada “q” ingresa perpendicularmente  $\vec{B}$ , con una velocidad  $\vec{v}$ , esta siente una fuerza magnética dada por:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Que en todo momento será perpendicular a  $\vec{B}$  y  $\vec{v}$ , formándose:



De este modo el movimiento de “q”, es circular uniforme, donde el módulo de la velocidad es constante, pero la dirección cambia al transcurrir el tiempo.

4. En ausencia de la fricción del aire una piedra es lanzada hacia arriba.
- Determine el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria desde el momento en que lanzas la piedra hasta que regresa hasta tus manos.
  - ¿Cómo cambia tu respuesta anterior si se toma en cuenta la fricción del aire?

Sol.

a) Fuerza Gravitatoria  $F = mg$  El trabajo que realiza una fuerza está definido como el producto escalar de la fuerza y el vector de desplazamiento. Se tiene entonces:

$$W = F \circ d$$

Como la piedra regresa al punto origen. El desplazamiento de la piedra es cero, por tanto:

$$W = 0$$

b) Si bien la fuerza de fricción afectará a la trayectoria de la piedra (llegará a una menor altura respecto al inciso anterior) no afecta al vector desplazamiento. La piedra regresa otra vez al punto origen. El desplazamiento de la piedra es por tanto cero.

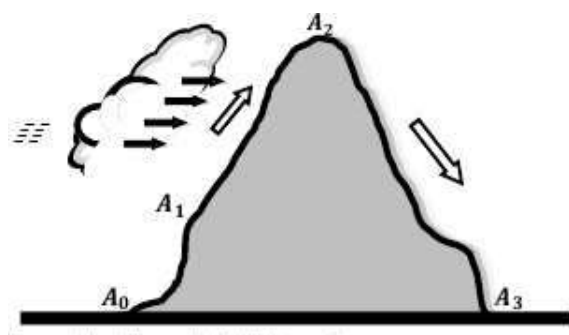
$$W = 0$$

No cambia la respuesta.

PARTE PRÁCTICA (60%)

1. Cierta cantidad de aire húmedo es llevado a través de una montaña como se indica en la figura. La presión atmosférica medida en las estaciones  $A_0$  y  $A_3$  fue de 100 kPa y de 70

kPa en la estación 2. La temperatura del aire en la estación  $A_0$  es de  $20^\circ\text{C}$ . A medida que el aire asciende, se van formando nubes a una presión de  $84.5\text{ kPa}$ . Considere una porción de aire húmedo ascendiendo la montaña a razón de  $2000\text{ kg/m}^2$ . Esta porción de aire húmedo alcanza la estación 3 después de  $1500\text{ seg}$ . Durante el ascenso una cantidad de  $2.45\text{ g}$  de agua por kilogramo de aire es precipitada.



- Determine la temperatura  $T_1$  en  $A_1$  donde se empiezan a formar las nubes.
- ¿Cuál es la altura  $h_1$  en  $A_1$  encima de la estación  $A_0$  asumiendo que la densidad atmosférica decrece en forma lineal?
- ¿Cuál es la temperatura  $T_2$  medida en la cima de la montaña?
- ¿Cuál es la temperatura  $T_3$  medida en la estación 3?

Asumir que todos los procesos se llevan de forma adiabática.

La atmosfera puede ser considerada como un gas ideal y es posible despreciar los efectos del vapor de agua en el calor específico y la densidad de la atmosfera. El calor específico de la atmosfera a esa temperatura es  $c_p = 1005\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ . La densidad de la atmosfera para la estación  $A_0$  en las condiciones  $P_0$  y  $T_0$  es  $\rho_0 = 1.189\text{ kg/m}^3$ . El calor latente de vaporización del agua dentro del volumen de la nube es  $L_v = 2500\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ;  $\gamma = 3/2$ .

Sol. La temperatura en el punto 1 es:

$$T_1 = T_0 \cdot \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{1-1/\gamma} = 277\text{K}$$

La temperatura  $T_2$  en la cima de la montaña.

La diferencia de la temperatura cuando el aire está ascendiendo desde que se ha formado hasta la cima de la montaña es causada por dos procesos:

- Un enfriamiento adiabático hasta una temperatura  $T_x$ .
- Una variación de temperatura debido a la condensación  $\Delta T$ .

$$T_2 = T_x + \Delta T$$

$$T_x = T_1 \cdot \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-1/\gamma} = 265\text{K}$$

Ahora por cada kilogramo de aire calentado producido por condensación se tiene:

$$L_v \cdot 2.45\text{g} = 6.125\text{kJ}$$

$$\Delta T = \frac{6.125\text{ kJ}}{c_p \text{ kg}}$$

$$\Delta T = 6.1\text{K}$$

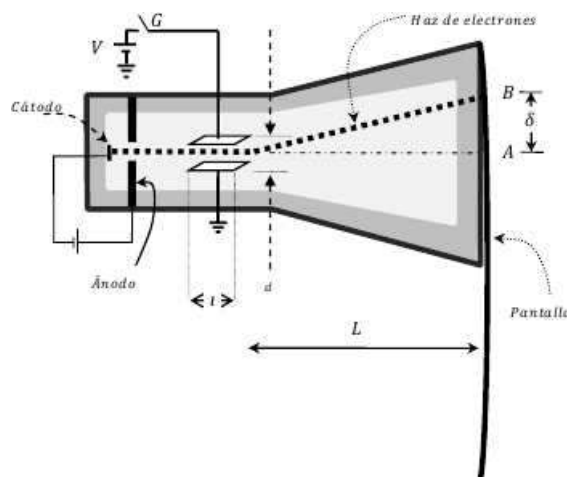
$$T_2 = 271\text{K}$$

La temperatura  $T_3$  detrás de la montaña es:

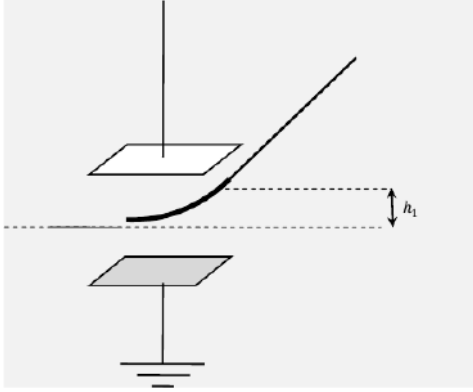
$$T_3 = T_2 \cdot \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{1-1/\gamma} = 300\text{K}$$

El aire se ha convertido entonces más caliente y húmedo. La temperatura ganada es debido a la condensación del agua.

- En el tubo de rayos catódicos que se muestra en la figura, los electrones emitidos por el cátodo y atraídos por el ánodo pasan a través de un pequeño agujero en el ánodo y luego viajan con velocidad  $v_0$  hasta que inciden sobre una pantalla en A. Sin embargo una vez que se cierra la llave G se establece una diferencia de potencial  $V$  entre las dos placas paralelas, los electrones entonces estarán sujetos a una fuerza  $F$  perpendicular a las placas mientras viajan sobre éstas e incidirán en la pantalla en el punto B que se encuentra a una distancia  $\delta$  de A. La magnitud de la fuerza es  $F = eV/d$  donde "e" es la carga del electrón y "d" es la distancia entre las placas. Ignorando los efectos de la gravedad, deduzca una expresión para la desviación  $\delta$  en función de  $V$ ,  $v_0$ , la carga del electrón "e" y la masa "m" de un electrón así como de las dimensiones d, l y L.



Sol. El electrón al pasar a través de la región con campo eléctrico experimentará una fuerza dirigida hacia arriba cuya trayectoria será parabólica.



Si la longitud de las placas es  $l$  entonces se tendrá, en la dirección horizontal:

$$t = \frac{l}{v_0} \quad (1)$$

y en la dirección vertical

$$h_1 = v_{oy}t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2)$$

Donde  $a$  es la aceleración provocada por el campo eléctrico entre las placas

$$E = V/d; \quad F = eE$$

$$\Rightarrow F = \frac{eV}{d} = ma$$

$$a = \frac{eV}{dm} \quad (3)$$

Reemplazando (1) y (3) en (2) se tiene:

$$h_1 = v_{oy} \cdot \frac{l}{v_0} + \frac{1}{2} \frac{eV}{dm} \left( \frac{l}{v_0} \right)^2$$

Como  $v_{ox} = v_0$  y  $v_{oy} = 0$ , se tiene:

$$h_1 = \frac{eVl^2}{2dmv_0^2}$$

La velocidad vertical con la que sale el electrón de las placas es:

$$\vec{v}_1 = v_{x1}\hat{i} + v_{y1}\hat{j} \quad (4)$$

$$v_{y1} = v_{oy} + at$$

$$\Rightarrow v_{y1} = \frac{edl}{dmv_0} \quad (5)$$

Reemplazando (5) en (4):

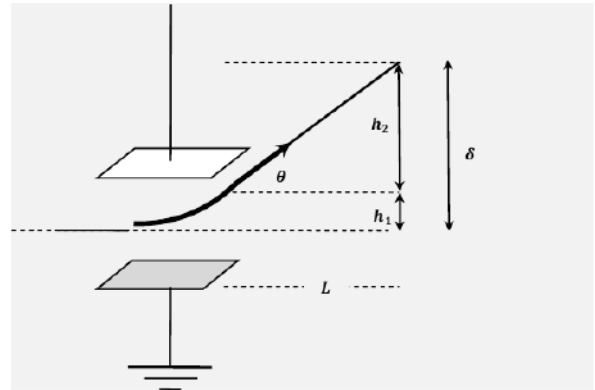
$$\vec{v}_1 = v_0\hat{i} + \frac{edl}{dmv_0}\hat{j}$$

El ángulo con el que sale disparado es:

$$\tan\theta = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{evl}{dmv_0^2}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{evl}{dmv_0^2}$$

Ahora del gráfico se tiene:



$$\tan\theta = \frac{h_2}{L} \Rightarrow h_2 = L \cdot \tan\theta$$

Además  $\delta = h_1 + h_2$

Reemplazando se tiene:

$$\delta = \frac{eVl^2}{2dmv_0^2} + \frac{eVlL}{dmv_0^2}$$

$$\delta = \frac{eVl}{2dmv_0^2}(l + 2L)$$

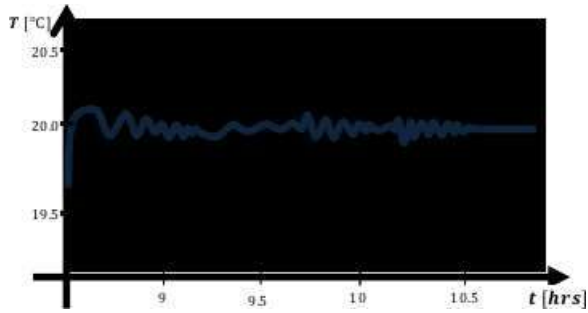
Como  $L \gg l \Rightarrow l + 2L \approx 2L$

$$\delta = \frac{L \cdot e \cdot V \cdot l}{2 \cdot d \cdot m \cdot v_0^2}$$

3. El Parque Nacional Noel Kempff Mercado, se encuentra en el norte del Departamento de Santa Cruz. Es una de las áreas protegidas más bellas de toda Bolivia. Dentro de este parque se encuentra la cascada "Cola de Caballo". Durante unas mediciones del caudal de agua hecho sobre este río se obtuvo la grafica adjunta que muestra la temperatura del agua que cae de esta cascada en función del tiempo. ¿Cuál es el incremento de la entropía por segundo debido a la caída del agua?

Asumir que cada segundo esta cascada cae aproximadamente  $500 \text{ m}^3$  de agua a una distancia de  $50 \text{ m}$ . Suponga despreciable la cantidad de agua evaporada.

Sol. La conversión de energía potencial gravitatoria a energía cinética es un proceso reversible, pero la subsecuente conversión a energía interna, no lo es.



Es posible suponer que llegara al mismo estado final añadiendo energía calorífica, en una cantidad similar a  $mgh$ , hacia el agua desde una fuente energética.

$$\Delta S = \sum \frac{\Delta Q}{T}$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

$$\Delta S = \frac{mgh}{T}$$

Del gráfico  $T = 20^\circ C \Rightarrow T = 293K$

$$\Delta S = 5000m^3 \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 50m \cdot \left( \frac{1}{293K} \right)$$

$$\Delta S = 8.39 \times 10^6 \frac{J}{K}$$

16<sup>va</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA  
**FINAL NACIONAL**  
 3<sup>ro</sup> DE SECUNDARIA  
**PRUEBA EXPERIMENTAL**

## ONDAS ESTACIONARIAS EN UNA CUERDA

### 1. OBJETIVO

- Encontrar la relación entre la longitud de onda y de una onda estacionaria y la tensión de la cuerda.
- Determinar la frecuencia de oscilación de la onda estacionaria.

### 2. INTRODUCCIÓN

Las ondas estacionarias se forman como resultado de la interferencia de dos ondas de igual amplitud, longitud de onda y velocidad, que avanzan en sentidos opuestos a través de un medio (en nuestro caso el medio de una cuerda). En otras palabras es la interferencia de dos movimientos armónicos de la misma amplitud y longitud de onda que se propagan en sentidos contrarios.

La ecuación de la onda incidente que viaja hacia la derecha está dada por:

$$\Psi_i = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (1)$$

Y la ecuación de la onda reflejada que viaja hacia la izquierda es:

$$\Psi_r = A \operatorname{sen}(kx + \omega t) \quad (2)$$

La superposición de ambas ondas, se expresa como la suma de ecuaciones (1) y (2), es decir:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_i + \Psi_r = \\ &= A[\operatorname{sen}(kx - \omega t) + \operatorname{sen}(kx + \omega t)] \\ &= 2A \operatorname{sen}(kx) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

La ecuación (3) representa una onda estacionaria y no así una onda de propagación, en la cual cada punto de la cuerda vibra con una frecuencia  $\omega$  y tiene amplitud  $2A \operatorname{sen}(kx)$ .

En la onda estacionaria se llaman nodos a los puntos en los cuales se tiene una amplitud mínima, es decir:

$$2A \operatorname{sen}(kx) = 0 \quad (4)$$

esto es para  $x = n \frac{\lambda}{2}$ .

Por otro lado, cualquier movimiento ondulatorio, satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5)$$

Donde  $v$  es la velocidad de propagación de la onda.

En el caso de ondas estacionarias en una cuerda, la ecuación de movimiento ondulatorio está dada por:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (6)$$

Donde:

$\mu$  es la densidad lineal de masa de la cuerda.

$T$  es la tensión ejercida sobre la cuerda.

Se puede deducir mediante un cálculo sencillo que la velocidad de propagación de una onda transversal en una cuerda está dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (7)$$

Además, si  $v = \lambda f$ , la ecuación (7) se puede expresar como:

$$\lambda = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (8)$$

Donde  $f$  es la frecuencia de oscilación.

### 3. LISTA DE MATERIALES

- Equipo de ondas estacionarias en una cuerda.
- Un trozo de cuerda ligera.
- Regla graduada con pestañas.
- Dinamómetro.

### 4. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

- Enchufe el equipo de ondas estacionarias al toma corriente de 200 V.
- Encienda el equipo de ondas estacionarias.
- Varíe la tensión en la cuerda con la ayuda de la varilla deslizante, moviéndola lentamente de manera que se forme la onda fundamental, es decir que se pueda observar un solo antinodo.
- Una vez formada la onda fundamental ajuste al tornillo de sujeción de la varilla deslizante.
- Lea en el dinamómetro la tensión aplicada a la cuerda y mida la distancia entre nodo y nodo, evitando producir un contacto entre las pestañas de la regla graduada y la cuerda en la oscilación, para no causar la ruptura de la cuerda.
- Registre tres lecturas de la longitud medida.
- Repita el paso (d) (e) (f) de manera que se puedan observar (b) (c) (d) y (e) antinodos.

**Cuidados:**

- Por las características del dinamómetro, no aplicar tensiones mayores a 1N
- Tener cuidado en no tocar el alambre que conecta el motor y la cuerda, ya que se descalibraría el equipo.

**Sugerencias:**

Para la cuerda utilizada en el experimento se realizaron las siguientes mediciones:

$$Longitud = (3.510 \pm 0.001)m$$

$$Masa = (0.05593 \pm 0.0001)g$$

A partir de las medidas de tensión y longitud que estime oportunas, le pedimos que:

- Llene la tabla de datos siguientes: **[20%]**

**TABLA 1**

Datos de la Tensión en la cuerda y la Distancia entre Nodo y Nodo

Nº	Nº de nodos	T[N]	L <sub>1</sub> [cm]	L <sub>2</sub> [cm]	L <sub>3</sub> [cm]
1	2				
2	3				
3	4				
4	5				
5	6				

- Con los datos de masa y longitud calcule la densidad lineal de masa de la cuerda  $\mu$  con su respectivo error. **[10%]**
- Con los datos de la tabla 1, complete la Tabla 2, donde: **[10%]**

$$\lambda = 2\bar{L}$$

Donde  $\bar{L}$  es la distancia promedio entre nodos.

**TABLA 2**

Datos de la Tensión Longitud de la Onda

Nº	Nº de nodos	L[cm]	T[N]	$\lambda$ [cm]
1	2			
2	3			
3	4			
4	5			
5	6			

- Elabore la gráfica Longitud de onda  $\lambda$  versus Tensión  $T$  **[10%]**
- Linealice la curva por el método de logaritmos. **[10%]**
- Grafique los datos linealizados. **[10%]**
- Determine los parámetros del modelo lineal y su correspondientes errores. **[10%]**
- Escriba la relación funcional potencial. **[10%]**
- Determine la frecuencia de oscilación con su respectivo error. **[10%]**

**SOLUCIONES**

A partir de las medidas de Tensión y Longitud que estime oportunas le pedimos que:

- Llene la tabla de los datos siguientes:

**TABLA 1**

Datos de la Tensión en la cuerda y la Distancia entre Nodo y Nodo

Nº	Nº de nodos	T[N]	L <sub>1</sub> [cm]	L <sub>2</sub> [cm]	L <sub>3</sub> [cm]
1	2	0.6	73.8	73.4	74
2	3	0.2	38.4	34.7	35.5
3	4	0.1	23.4	26.1	25.5
4	5	0.05	18.3	19.3	18.6
5	6	0.02	15.2	14.2	14.5

- Con los datos de masa y longitud calcule la densidad lineal de masa de la cuerda  $\mu$  con su respectivo error.

$$\mu = \frac{m}{l} = 0.1593447293 \left[ \frac{g}{m} \right]$$

Cálculo del error de  $\mu$ :

El símbolo  $\partial$  representa una derivada parcial

$$\Delta\mu = \sqrt{\left[ \frac{\partial\mu}{\partial m} \right]^2 \Delta m^2 + \left[ \frac{\partial\mu}{\partial l} \right]^2 \Delta l^2}$$

$$\Delta\mu = \sqrt{\left[ \frac{1}{l} \right]^2 \Delta m^2 + \left[ \frac{-1 \cdot m}{l^2} \right]^2 \Delta l^2}$$

$$\Delta\mu = \sqrt{\left[ \frac{1}{3.510} \right]^2 0.0001^2 + \left[ \frac{-1 \cdot 0.05593}{3.510^2} \right]^2 0.001^2}$$

$$\Delta\mu = 5.35966 * 10^{-5} [g/m]$$

$$\mu = (0.15934 \pm 0.00005) * 10^{-3} [kg/m]$$

- Con los datos de la tabla 1, complete la Tabla 2, donde:

**TABLA 2**

Datos de la Tensión Longitud de la Onda

Nº	Nº de nodos	$\bar{L}$ [cm]	T[N]	$\lambda$ [cm]
1	2	73.3	0.6	146.66
2	3	36.2	0.2	72.4
3	4	25	0.1	50
4	5	18.73	0.05	37.46
5	6	14.63	0.02	29.26

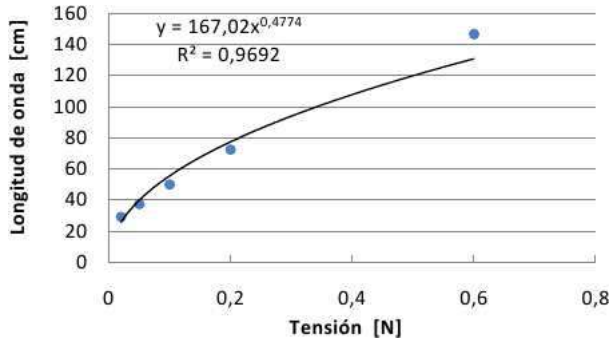
- Elabore la gráfica longitud de onda  $\lambda$  versus Tensión  $T$

Se muestra en la figura 1.

- Linealice la curva por el método de logaritmos.

$$\lambda = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

**Figura 1**



Como  $f$  y  $\mu$  son constantes, podemos escribir la anterior ecuación como sigue:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu}f} \sqrt{T} \quad (9)$$

Logaritmizando obtenemos:

$$\ln \lambda = \ln \left( \frac{1}{\sqrt{\mu}f} \right) + \frac{1}{2} \ln T \quad (10)$$

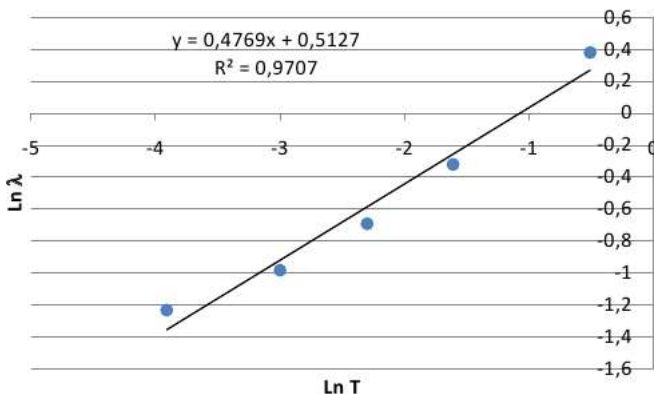
Donde:  $x = \ln T$ ;  $y = \ln \lambda$ ;  $A = \ln \left( \frac{1}{f\sqrt{\mu}} \right)$ ;  $B = \frac{1}{2}$  en:

$$y = A + Bx$$

T[N]	Longitud L[m]	LnT(X)	LnL(Y)
0.6	1.4666	-0.51	0.38
0.2	0.724	-1.61	-0.32
0.1	0.5	-2.30	0.69
0.05	0.3746	-3.00	-0.98
0.02	0.2926	-3.91	-1.23

- Grafique los datos linealizados.

**Figura 2**



- Determine los parámetros del modelo lineal y su correspondientes errores.

Utilizando la ecuación (10) como modelo lineal, obtenemos:

$$A = (0.5 \pm 0.1)m$$

$$B = (0.48 \pm 0.05)m/N$$

- Escriba la relación funcional potencial. La ecuación (9) expresa el funcional potencial y es equivalente a  $\lambda = AT^B$

Sustituyendo valores:

$$\lambda = 0.5T^{0.48}$$

- Determine la frecuencia de oscilación con su respectivo error. Como:

$$A = \ln \left( \frac{1}{f\sqrt{\mu}} \right)$$

$$\rightarrow f = \frac{1}{\sqrt{\mu}e^A} = \frac{1}{\sqrt{0.15934^{-3}Kg e^{0.5}}}$$

$$f = 48.04966373Hz$$

Cálculo del error de  $f$ :

$$\Delta f = \sqrt{\left[ \frac{\partial f}{\partial \mu} \right]^2 \Delta \mu^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial A} \right]^2 \Delta A^2}$$

$$\Delta f = \sqrt{\left[ \frac{-1}{2e^A \mu^{3/2}} \right]^2 \Delta \mu^2 + \left[ \frac{-1}{e^A \mu^{1/2}} \right]^2 \Delta A^2}$$

Sustituyendo valores, todas en unidades del sistema internacional:

$$\Delta f = \sqrt{\left[ \frac{-1}{2e^{0.5}(0.15934 * 10^{-3})^{3/2}} \right]^2 (0.00005 * 10^{-3})^2 + \left[ \frac{-1}{e^{0.5}(0.15934 * 10^{-3})^{1/2}} \right]^2 0.1^2}$$

$$\Delta f = 0.4805557749Hz$$

$$f = 48.0 \pm 0.5Hz$$

16<sup>va</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA  
**FINAL NACIONAL**  
 4<sup>to</sup> DE SECUNDARIA  
**PRUEBA EXPERIMENTAL**

**FUENTE DE TENSIÓN CONTINUA**

**1. OBJETIVO**

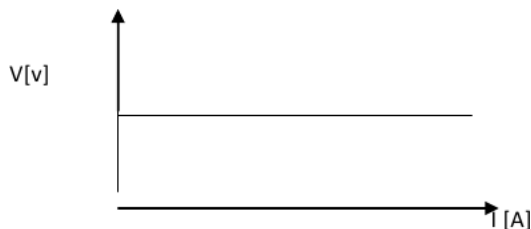
Determinar la resistencia interna ( $r_i$ ) y la corriente de corto circuito, de una fuente de tensión continua.

**2. INTRODUCCIÓN**

**Ley de Ohm:** La ley de Ohm establece la relación que existe entre la corriente  $I$  que circula por un circuito y la diferencia de potencial (voltaje) aplicado a un circuito (resistencia de carga).

$$U = I \cdot R \quad (1)$$

**Fuente de tensión ideal:** Es aquella que entre los bornes proporciona una diferencia de potencial constante para cualquier valor de corriente que circula por el circuito.



**Fuente de tensión real:** Es aquella que entre sus bornes proporciona una diferencia de potencial que depende del valor de la corriente que circula por el circuito.

Todo el conjunto de piezas que componen una fuente de tensión (conductores, soluciones ácidas, metales, etc) ofrecen una cierta resistencia al paso de corriente denominada **resistencia interna** de la fuente ( $r_i$ ). Una fuente de tensión real se representa esquemáticamente como una fuente ideal más una resistencia interna.

$$V_o = \text{f.e.m.}$$

$$R = \text{Resistencia externa}$$

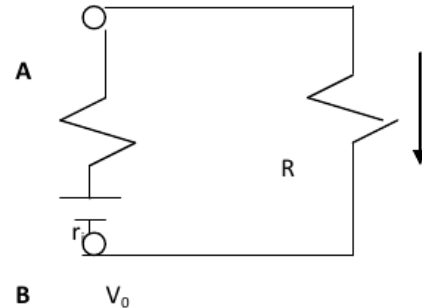
$$r_i = \text{Resistencia interna}$$

$$V_{AB} = \text{Tension real entre los bornes}$$

La diferencia de potencial entre A y B depende de la corriente que se deja pasar por el circuito exterior de resistencia  $R$  como se muestra en el Circuito N° 1.

Cuando los bornes A Y B de la fuente no están conectados a un circuito, la diferencia de potencial entre ellos se denomina fuerza electromotriz (FEM).

**Circuito equivalente de una fuente de tensión continua conectado a una resistencia externa:**



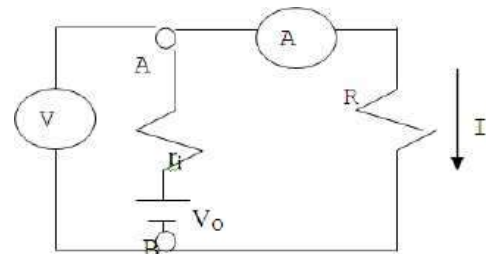
Circuito No 1

**3. LISTA DE MATERIALES**

- Pila seca.
- Reóstato.
- Voltímetro.
- Amperímetro.

**4. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL**

Armar el siguiente circuito:



Circuito No 2

$R =$  Resistencia externa (Décadas).

Para medir la diferencia de potencial entre A y B ( $V_{AB}$ ) y la corriente  $I$ , utilizamos un voltímetro y un amperímetro.

El voltímetro (V) mide la diferencia de potencial entre los bornes A y B. El amperímetro (A) mide la corriente que circula por la carga  $R$  pero no la total que circula por la fuente ya que el voltímetro tiene una resistencia que no es infinita y por él circula una cierta cantidad de corriente. Para medir la corriente  $I$  que circula por la fuente es necesario corregir el valor medido por el amperímetro  $I_A$  tomando en cuenta que por el voltímetro circula también una cierta cantidad de corriente  $I_V$ .

**Sugerencia**

A partir de las medidas de voltaje y corriente que estime, le pedimos que:

- Llene las tablas de datos siguientes: [20%]

$V_{AB}[V]$	$I[mA]$

- Elabore la grafica Voltaje versus Corriente [20%]
- Determine los parámetros del modelo lineal y sus correspondientes errores [20%]
- Escriba la relación funcional [20%]
- Determine la corriente de corto circuito [20%]

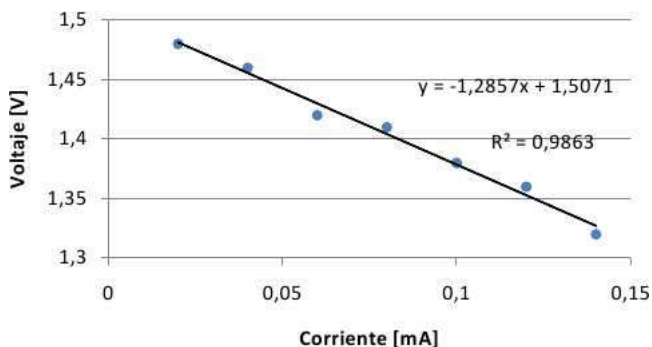
**SOLUCIONES**

A partir de las medidas de voltaje y corriente que estime, le pedimos que:

- Llene las tablas de datos siguientes:

$V_{AB}[V]$	$I[mA]$
1.48	0.02
1.46	0.04
1.42	0.06
1.41	0.08
1.38	0.1
1.36	0.12
1.32	0.14

- Elabore la grafica Voltaje versus Corriente.



- Determine los parámetros del modelo lineal y sus correspondientes errores.

$$A = (1.507 \pm 0.006)[V]$$

$$B = (-1.28 \pm 0.07)\left[\frac{V}{mA}\right] = (-1.28 \pm 0.07)[K\Omega]$$

- Escriba la relación funcional (20%)  
Comparando la ecuación de la recta  $y = A + Bx$  con la ecuación (1), se tiene:

$$V = A + BI$$

Sustituyendo los valores:

$$V = 1.507 - 1.28 \cdot I$$

6<sup>ta</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y  
ASTROFÍSICA  
FINAL NACIONAL  
3<sup>ro</sup> DE SECUNDARIA

EXAMEN ESCRITO

- La estrella *Betelgeuse* tiene una magnitud aparente  $m = 0.45$  y una magnitud absoluta  $M = -5.14$ . Teniendo en cuenta esta información, es posible calcular (escoja una sola opción):
  - La distancia a la que se encuentra de la Tierra.
  - Su velocidad angular.
  - Su momento de inercia.
  - El periodo de rotación.
  - Su tipo espectral.

- Indique si la sentencia es falsa o verdadera:

En la secuencia de Harvard (O-B-A-F-G-K-M) las estrellas tipo K tienen mayor temperatura que las de tipo F.

Sol. Falso

- La tercera ley de Kepler se refiere a los periodos de traslación de los planetas alrededor del sol. Esta ley asegura que:
  - Los cubos de los periodos son proporcionales a los cuadrados de las distancias medidas al Sol.
  - Los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de las distancias medidas al Sol.
  - Los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cuadrados de las distancias medidas al Sol.

- A qué distancia debe estar un foco de 100W para que su flujo iguale a la constante Solar?

Sol.

$$F_{sol} = F = \frac{L_{sol}}{4\pi R_{sol}^2}$$

$$F_{sol} = 1365 [Wm^{-2}]$$

$$100W = 1365Wm^{-2} \cdot 4\pi R^2$$

$$R = \sqrt{\frac{100}{1365m^{-2} \cdot 4\pi}} = 76.35 [mm]$$

EXAMEN PRÁCTICO

Se le dio a cada participante un puntero laser verde.

Se tienen armados dos telescopios: un reflector y un refractor.

- Indique por donde salen los astros y por donde se ocultan debajo del horizonte.

Sol. La salida y puesta de los astros es la manera en que percibimos la rotación de la Tierra todos aquellos que nos encontramos sobre la superficie. Vemos que todos los objetos celestes aparecen sobre el horizonte por la dirección Este y se ocultan por la dirección Oeste, mientras que nuestro planeta rota alrededor de un eje que pasa por sus polos con un periodo de 24 horas en dirección Oeste-Este.

Además de saber en qué instante sale y/o se pone el Sol, es necesario conocer la dirección en el horizonte en la que sucede el evento, representada por el azimut de salida y/o puesta, ángulo medido sobre el horizonte, desde el Sur hacia el Este, hasta la vertical al astro, y varía de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .

- Identifique a la eclíptica.

Sol. La eclíptica es la línea curva por donde transcurre el Sol alrededor de la Tierra, en su movimiento aparente, causado por el movimiento de traslación de la Tierra en torno al Sol. Está formada por la intersección del plano de la órbita terrestre con la esfera celeste, es decir, la línea recorrida por el Sol a lo largo de un año respecto del fondo inmóvil de las estrellas. Su nombre proviene del latín eclíptica (línea), y éste del griego *εκλειπτική*, relativo a los eclipses. El plano de la eclíptica se denomina al plano medio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol. Contiene a la órbita de la Tierra alrededor del Sol y en consecuencia también al recorrido anual aparente del Sol observado desde la Tierra, como el eje del giro de la Tierra tiene una inclinación promedio de  $23^\circ 27'$ , entonces el Ecuador terrestre y la eclíptica forman entre sí, ese ángulo.

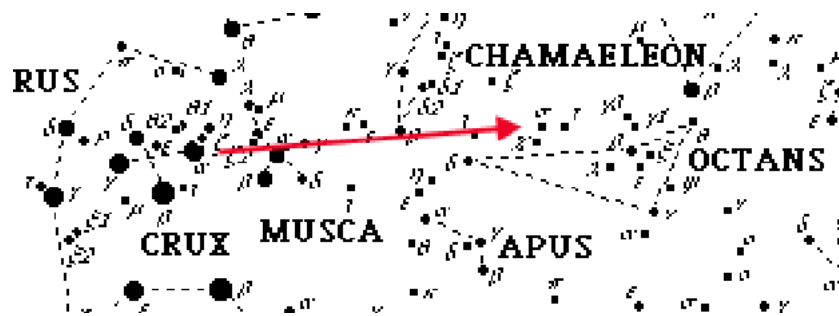
- Identifique al polo sur celeste.

Sol. Para un observador en el hemisferio sur no resulta nada fácil localizar el polo sur celeste ya que no existen estrellas brillantes en la región, pero hay diversos caminos interesantes para localizarla.

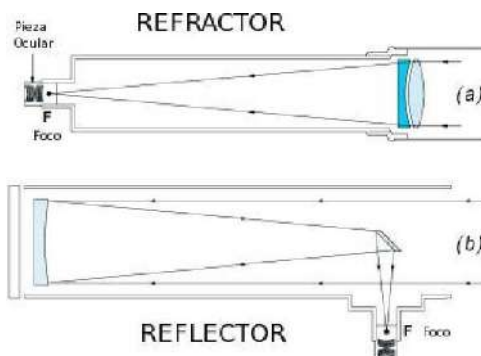
El más fácil es alargar el largo brazo de la *Cruz del Sur* ó **Crux** cuatro veces y media para acercarse al polo. Éste está muy cerca, señalado por la estrella **Octantis** u *Octante*, pero resulta demasiado débil para ser útil.

- Identifique una o dos constelaciones.

Sol. La clave consiste en identificar la más brillante y luego saltar de estrella a estrella según las direcciones que tienen y diagramar mentalmente la constelación. Por ejemplo en la fecha de realización del evento (20-09-2011) se podía apreciar en el SUR a CRUX, MOSCA, OCTANIS, etc. Mientras que en el norte a: CYGNUS, PEGASUS, HERCULES, etc.



5. De los telescopios armados, identifique cual es el *reflector* y cual es el *refractor*.



Sol. La diferencia está en el esquema de construcción.

*Refractor*: La figura a) refracta la luz proveniente de la fuente en un lente primario concentrando dichos rayos de luz en el foco donde se encuentra una pieza ocular, mientras el *Reflector* figura b) refleja luz que viene de la fuente en un espejo primario, cuyos rayos reflejados se reflejan nuevamente en un espejo secundario para luego concentrar a los mismos en el foco donde está la pieza ocular. El telescopio Refractor fue diseñado por Galileo Galilei en 1654 mientras que el telescopio Reflector fue diseñado por Isaac Newton en 1687. La ventaja del telescopio Reflector es que no tiene aberración cromática, como lo tiene un Telescopio Refractor, fenómeno que puede deformar la imagen de la fuente.

6<sup>ta</sup> OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y  
ASTROFÍSICA  
FINAL NACIONAL  
4<sup>to</sup> DE SECUNDARIA

EXAMEN ESCRITO

1. La galaxia (Vía Láctea) pertenece a un conjunto de galaxias denominado (escoge solo una):

Sol.

a) Grupo local.

b) Grupo intergaláctico.

c) Grupo galáctico.

d) Cúmulo de sur.

e) Ninguna de las anteriores.

2. Explique por que la luna tiene muchos más cráteres que la Tierra.

Sol. En principio ambos cuerpos han sido bombardeados con igual intensidad, en una época remota, sin embargo la Tierra tiene atmósfera y una gran cantidad de agua en su superficie, lo que implica la existencia de la erosión, fenómeno que ha sido borrando las huellas de los crateres que han llegado a la superficie terrestre.

3. (a) Calcula el flujo saliente total de una estrella de radio igual al del Sol pero cuya luminosidad es mucho menor, igual a  $L = 12 \times 10^9 [W]$ . Ayuda: El radio del Sol es:  $R = 696000 [Km]$

Sol.

Usando la ecuación:

$$\phi(R) = \frac{L}{4\pi R^2} = \frac{12 \times 10^{23}}{4(3.14159)(6.96 \times 10^9 [m])^2} = 197.3 \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

- (b) Calcula el flujo detectado de la misma estrella, si está a una distancia de nosotros igual a  $5 [pc]$ .

Sol.

Recordando que  $1 [pc] = 3.086 \times 10^{16} [m]$  y usando la relación:

$$\phi_{estrella} = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{12 \times 10^{23} [W]}{4(3.14159)(5 [pc])^2} \times \frac{(1 [pc])^2}{(3.086 \times 10^{16} [m])^2} \cong 4 \times 10^{-12} \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

- (c) Calcula la *magnitud estelar* de dicha estrella, sabiendo que la magnitud del Sol es igual a  $-26.8^m$  y su flujo en la tierra es igual a:  $\phi = 1.37 \times 10^9 [W/m^2]$ .

Sol.

$$m_{Estrella} = m_{Sol} - 2.5 \log \left( \frac{\phi_{Estrella}}{\phi_{Sol}} \right) = -26.8 - (-51.3) = +24.5^m$$

Es decir la estrella es muy débil.

4. Para una radiación con longitud de onda máxima dada por:  $\lambda_{max} = 3 \times 10^{-8} [m]$ .

(a) Calcula la temperatura del cuerpo que emita esa radiación.

Sol.

De  $\lambda_{max} T = b$

$$\Rightarrow T = \frac{b}{\lambda_{max}} = \frac{2.897 \times 10^{-3} [mK]}{3 \times 10^{-8} [m]} = 96566.7 [K]$$

(b) Calcula la emitividad de radiación.

Sol.

De la ley de Stefan-Boltzman, se tendrá que:

$$\phi = \sigma T^4 = (5.67 \times 10^{-8} [Wm^{-2}K^{-4}])(96566.7 [K])^4 \cong 4.93 \times 10^{13} [Wm^{-2}]$$

(c) Calcula la emitividad de radiación para una estrella clase M de  $3000 [K]$ .

Sol.

$$\phi = \sigma T^4 = (5.67 \times 10^{-8} [Wm^{-2}K^{-4}])(3000 [K])^4 \cong 4.59 \times 10^6 [Wm^{-2}]$$

EXAMEN PRÁCTICO

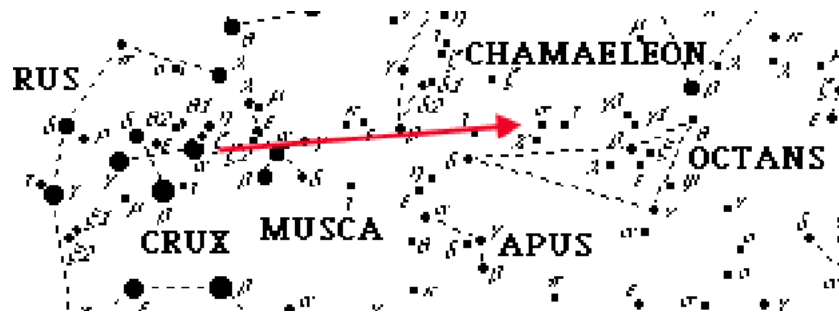
Se le dio a cada participante un puntero laser verde.

Se tienen armados dos telescopios: un reflector y un refractor.

1. Indique por donde salen los astros y por donde se ocultan debajo del horizonte.

Sol. La salida y puesta de los astros es la manera en que percibimos la rotación de la Tierra todos aquellos que nos encontramos sobre la superficie. Vemos que todos los objetos celestes aparecen sobre el horizonte por la dirección Este y se ocultan por la dirección Oeste, mientras que nuestro planeta rota alrededor de un eje que pasa por sus polos con un periodo de 24 horas en dirección Oeste-Este.

Además de saber en qué instante sale y/o se pone el Sol, es necesario conocer la dirección en el horizonte en la que sucede el evento, representada por el azimut de salida y/o puesta, ángulo medido sobre el horizonte, desde el Sur hacia el Este, hasta la vertical al astro, y varía de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .



2. Identifique a la eclíptica.

Sol. La eclíptica es la línea curva por donde transcurre el Sol alrededor de la Tierra, en su movimiento aparente, causado por el movimiento de traslación de la Tierra en torno al Sol. Está formada por la intersección del plano de la órbita terrestre con la esfera celeste, es decir, la línea recorrida por el Sol a lo largo de un año respecto del fondo inmóvil de las estrellas. Su nombre proviene del latín eclíptica (línea), y éste del griego *εκλειπτική*, relativo a los eclipses. El plano de la eclíptica se denomina al plano medio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol y en consecuencia también al recorrido anual aparente del Sol observado desde la Tierra, como el eje del giro de la Tierra tiene una inclinación promedio de  $23^{\circ}27'$ , entonces el Ecuador terrestre y la eclíptica forman entre sí, ese ángulo.

3. Identifique al polo sur celeste.

Sol. Para un observador en el hemisferio sur no resulta nada fácil localizar el polo sur celeste ya que no existen estrellas brillantes en la región, pero hay diversos caminos interesantes para localizarla.

El más fácil es alargar el largo brazo de la *Cruz del Sur* ó **Crux** cuatro veces y media para acercarse al polo. Éste está muy cerca, señalado por la estrella **Octantis** u *Octante*, pero resulta demasiado débil para ser útil.

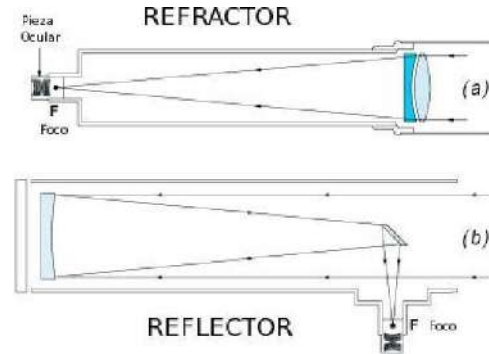
4. Identifique una o dos constelaciones.

Sol. La clave consiste en identificar la más brillante y luego saltar de estrella a estrella según las direcciones que tienen y diagramar mentalmente la constelación. Por ejemplo en la fecha de realización del evento (20-09-2011) se podía apreciar en el SUR a CRUX, MOSCA, OCTANIS, etc. Mientras que en el norte a: CYGNUS, PEGASUS, HERCULES, etc.

5. De los telescopios armados, identifique cual es el *reflector* y cual es el *refractor*.

Sol. La diferencia está en el esquema de construcción.

*Refractor*: La figura a) refracta la luz proveniente de la fuente en un lente primario concentrando dichos rayos de luz en el foco



donde se encuentra una pieza ocular, mientras el *Reflector* figura b) refleja luz que viene de la fuente en un espejo primario, cuyos rayos reflejados se reflejan nuevamente en un espejo secundario para luego concentrar a los mismos en el foco donde está la pieza ocular. El telescopio Refractor fue diseñado por Galileo Galilei en 1654 mientras que el telescopio Reflector fue diseñado por Isaac Newton en 1687. La ventaja del telescopio Reflector es que no tiene aberración cromática, como lo tiene un Telescopio Refractor, fenómeno que puede deformar la imagen de la fuente.

6. Identifique a simple vista a la estrella Rigel e indique en que constelación se encuentra.

Sol. Rigel es la estrella más brillante de la constelación de ORION y es una de las seis más brillantes de la bóveda celeste con una magnitud visual igual a 0.12.

---

## REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

### COMITÉ EDITORIAL

**Sociedad Boliviana de Física**

**Dr. Diego Sanjinés Castedo**

Email: sanjines@fiumsa.edu.bo

**Instituto de Investigaciones Físicas**

**Lic. Alfonso Velarde Chávez**

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

**Dr. Eduardo Palenque Vidaurre**

Email: edyruy@yahoo.es

**Carrera de Física**

**Dr. Armando R. Ticona Bustillos**

Email: aticon@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

---

#### Misión

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica semestralmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

#### Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

#### Instrucciones para los autores

Los trabajos enviados para su publicación deberán estar escritos preferentemente en castellano. Trabajos escritos en inglés podrán ser aceptados por el Comité Editorial y, pasado el proceso de aceptación, serán traducidos al castellano para su publicación en la RBF.

Los autores deberán enviar sus trabajos preferentemente en los formatos  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ , *MS Word*, o *sólo texto* (con extensiones *.tex*, *.doc* y *.txt*, respectivamente), ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. Las figuras deberán tener una resolución razonable a fin de que puedan ser vistas con suficiente claridad por el lector.

Los artículos científicos serán revisados por el Comité Editorial y posteriormente por un par de árbitros anónimos quienes dan el veredicto sobre si el artículo es aceptado o no.

La comunicación de los autores con los árbitros se realiza únicamente a través del editor encargado del área.

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

**Conflicto de interés:** Los autores que envíen artículos para su publicación en la RBF admiten que no tienen conflicto de interés en relación a los trabajos realizados y presentados.