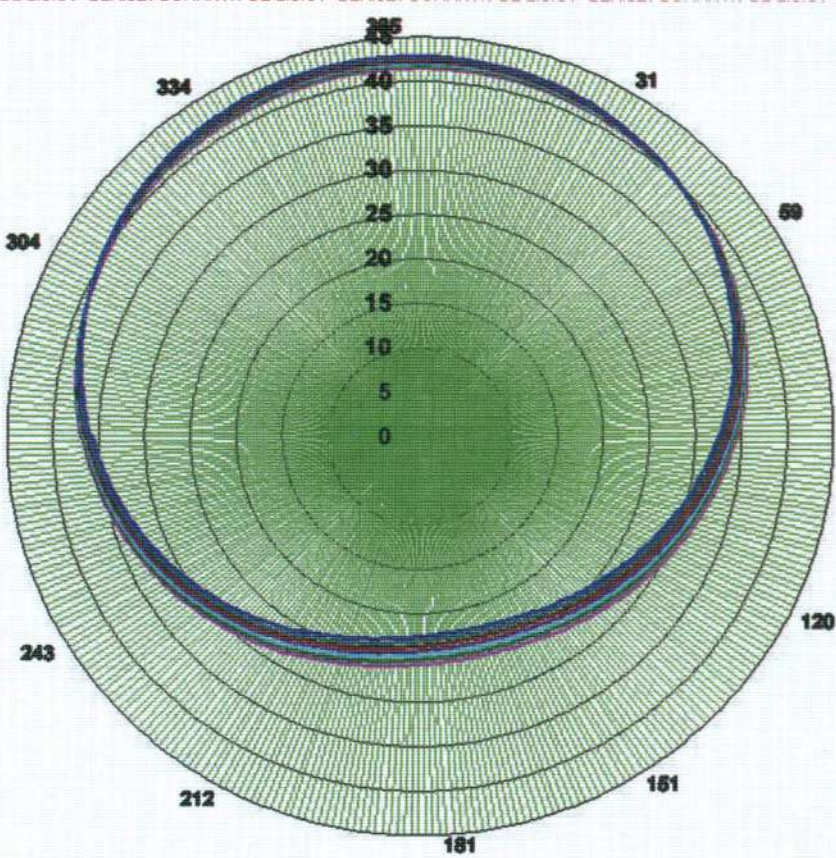


ISSN - 1562 -3823

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 23

SEP. 2013 • LA PAZ - BOLIVIA



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

Ésta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Dr. Diego Sanjinés Castedo
Email: sanjines@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez
Email: avelarde@fiumsa.edu.bo
Dr. Eduardo Palenque Vidaurre
Email: edyruy@yahoo.es

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos
Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

CONSEJO EDITORIAL

Dr. Oscar Antonio Rondón

Institute of Nuclear and Particle Physics
University of Virginia
McCormick Road, Charlottesville, VA 22901
804 924-6787, USA
Email: or@virginia.edu

Dr. Carlos Navia

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense
Av. Gen. Milton Tavares de Souza
24210-340, Niterói, RJ-Brasil
Email: gfcnoj@if.uff.br

Dr. Jason Gallas

Instituto de Física
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Brasil
Email: jgallas@if.ufrgs.br

Dr. Ramiro de La Reza

Observatorio Nacional CNPq
Rua General Bruce 586
20921-400 Rio de Janeiro-Brasil
Email: delareza@danp6.on.br

Dr. Enio B. Pereira

INPE - CCST
Av. dos Astronautas, 1758, Jardim da Granja
12227-010, São José dos Campos, SP-Brasil
Email: pereira@inpe.br

ISSN 1562-3823



Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
Y
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 23
SEPTIEMBRE DE 2013

Revista Boliviana de Física

ISSN 1562-3823

Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica

<http://www.scielo.org.bo>

<http://www.latindex.unam.mx>

<http://biblioweb.dgsca.unam.mx/latindex>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

Diseño: A. Ticona

Dirección: Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.

Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

Portada: Radiación solar extraterrestre anual en Bolivia.

Formato $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$. *Tipo de fuente utilizada:* newcentury

IMPRESO EN BOLIVIA — PRINTED IN BOLIVIA

CONTENIDO

A. ARTÍCULOS

MODELOS DE ESTIMACIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR PARA EL ALTIPLANO CENTRAL DE BOLIVIA <i>R. Torrez, A. Burgoa & E. Ricaldi</i>	1
ANÁLISIS ESTOCÁSTICO SOBRE REGISTROS DE TEMPERATURA <i>V. M. Peñafiel & M. Andrade</i>	8
FENÓMENOS NO LINEALES EN LA REACCIÓN DE BELOUSOV - ZHABOTINSKY. ESTABILIDAD. <i>S. A. Oporto Alamaraz & G. M. Ramírez Ávila</i>	16

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

ENFRIAMIENTO DE AGUA MEDIANTE EL USO DE AIRE LÍQUIDO <i>G. F. Meyer F., E. Berazain & A. Paredes</i>	29
---	----

D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

18 ^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA, 8 ^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA <i>Bustos R. et al.</i>	33
--	----

MODELOS DE ESTIMACIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR
PARA EL ALTIPLANO CENTRAL DE BOLIVIA

MODELS ESTIMATING THE SOLAR RADIATION
FOR BOLIVIA'S CENTRAL ALTIPLANO REGION

R. TORREZ, A. BURGOA, & E. RICALDI

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz – Bolivia

(Recibido 13 de Abril de 2013; aceptado 15 de Mayo de 2013)

En este trabajo se validan los modelos de estimación de radiación solar de Bristow Campbell (BC) y de Hargreaves-Samani (HS) con datos recientes obtenidos de una estación meteorológica automática instalada en la sub-sede de la Universidad Mayor de San Andrés en la localidad de Patacamaya ($17^{\circ}15'S$, $68^{\circ}48'W$ y 3890msnm) durante el periodo agosto 2010 hasta julio 2012. Dicha validación tiene como objetivo aplicar estos métodos a la evaluación de nuestro recurso solar en la extensa geografía del altiplano central boliviano. Se eligió los modelos BC y HS por la simplicidad requerida en los datos de entrada, i.e., temperatura máxima y mínima diarias, que son dos de los datos que generalmente registran todas las estaciones del Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología y otras instituciones públicas y privadas. Las constantes físicas que se emplean en estos métodos han sido evaluadas a partir de las expresiones generales de astronomía solar. Para fines de aplicación práctica se presenta un gráfico para estimaciones inmediatas de la radiación solar extraterrestre para cada mes del año y para latitudes que delimitan aproximadamente la región altiplánica aplicable. Los resultados alcanzados en cuanto a la precisión del modelo están comprendidos entre los que se aceptan generalmente tomando en cuenta la reducida cantidad de datos. La transmitancia atmosférica evaluada de 0.166 para nuestra región altiplánica concuerda plenamente con los valores referidos en la extensa literatura técnica de aplicación de estos modelos.

Descriptor: Radiación Solar — Modelamiento atmosférico — Altiplano boliviano

Código(s) PACS: 92.60.Vb, 92.60.Aa, 93.30.Jg

ABSTRACT

We validate the Bristow Campbell (BC) and Hargreaves-Samani (HS) estimation models for solar radiation with recent data obtained from the meteorological station located in the Universidad Mayor de San Andrés facilities at Patacamaya ($17^{\circ}15'S$, $68^{\circ}48'W$ and 3890a.s.l.) for the August 2010 to July 2012 period. The purpose of this validation was to apply these methods to evaluate the solar resources in the central Bolivian Plateau. We chose the BC and HS methods because of the easiness in the input required data, i.e., maximum and minimum daily temperatures, which are the commonly registered data in all the stations of the Meteorology and Hydrology National Service, as well as in other public and private institutions. The physical constants used in these methods were evaluated from the general expressions of the solar astronomy. For a practical purpose we present a plot of the immediate extraterrestrial solar radiation for each month and for the relevant latitudes in the Plateau region. The results (considering the precision of the model) are among those that are commonly accepted given the scarce data. The result of this work for the atmosphere transmittance is 0.166, which is consistent with the referred values in the technical literature for the Bolivian Plateau region.

Subject headings: Solar radiation — Atmosphere models — Bolivian Plateau

1. INTRODUCCIÓN

Ante los elevados costos que significaba la evaluación de la radiación solar incidente en determinado lugar por el costo de los equipos de registro,

y dada la urgencia de lograr la factibilidad del uso de otras fuentes de energía alternativa a los combustibles fósiles, en la década de los años setenta tras los episodios de crisis petrolera, diversos in-

investigadores en ciencia y tecnología han ensayado la aplicación de métodos alternativos de evaluación de la radiación solar con instrumentos y métodos más económicos y sencillos, para lograr ello se ha profundizado el conocimiento sobre la dinámica de la radiación solar, de manera que con la obtención de tablas y ábacos de cálculo de la radiación solar teórica, más el conocimiento de las características de los otros parámetros meteorológicos y atmosféricos, se han logrado desarrollar modelos de estimación de la radiación solar.

Uno de los primeros modelos fue el desarrollado por Angstrong y Prescott (Angstrom 1924; Prescott 1940), basado en datos de horas de sol diarias, denominado también heliofanía. Aunque los equipos de registro de horas de sol son menos costosos que los piranómetros, son igualmente onerosos para la generalidad de localidades de nuestro altiplano por su alto grado de depresión económica. Sin embargo este método también denominado AP, ha sido aplicado exitosamente en el Perú, habiendo contribuido a la elaboración de su mapa solar integral.

Para las condiciones de nuestro altiplano y la disponibilidad de datos de libre acceso en la WEB o en boletines periódicos de la principal institución meteorológica de nuestro país como es el SENAMHI, los modelos más apropiado resultan los planteados por Bristow y Campbell, conocidos también como correlación BC, y de Hargreaves y Samani, también conocido como correlación HS, estos modelos hacen uso de las temperaturas máxima y mínima diarias, o promedios mensuales de estas variables, mas valores teóricos de la radiación extraterrestre incidente que son fácilmente calculables. La oficina del SENAMHI publica en su sitio de Internet los valores de las temperaturas máximas y mínimas diarias para varias localidades altiplánicas a pocos meses de su registro.

El modelo de Bristow Campbell (Bristow & Campbell 1984), emplea las variables de entrada en una expresión exponencial típica de fenómenos físicos que limita sus valores, máximo y mínimo a los valores posibles en los límites de su variación. Esto es, que la máxima energía que se puede alcanzar, es la incidente extraterrestre, y cero en un día absolutamente cubierto

$$H = aH_o(1 - e^{-b(\Delta T)^c}). \quad (1)$$

Donde:

- a , es la denominada transmisividad de la atmósfera.
- b y c , son constantes específicas de la región.
- H_o , es la energía extraterrestre diaria dependiente de la latitud y día del año.
- $\Delta T = T_{max} - T_{min}$, es la diferencia de temperaturas entre la máxima y mínima diarias.

El otro modelo que consideramos en este artículo es el de Hargreaves Samani (Hargreaves & Samani 1982), en esta expresión la energía solar diaria

es proporcional a la raíz cuadrada de la amplitud térmica diaria modulada por la variación diaria de la energía solar extraterrestre sobre el sitio en evaluación, es decir:

$$H = aH_o\sqrt{(T_{max} - T_{min})}. \quad (2)$$

Donde:

- H_o , es la radiación extraterrestre ya definida.
- T_{max} , es la temperatura máxima del día, o la promedio mensual.
- T_{min} , es la temperatura mínima del día, o la promedio mensual
- a , es una constante de ajuste.

La radiación extraterrestre H_o puede ser obtenida con varias expresiones aproximadas, aquí empleamos las siguientes:

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\pi \left(\frac{N-1}{365} \right) \\ H_o &= \left(\frac{24}{\pi} \right) I_{sc} E_o \left[\cos\lambda \cos\delta \sin\omega + \left(\frac{\pi}{180} \right) \omega \sin\lambda \sin\delta \right] \\ E_o &= 1.00011 + 0.034221\cos\Gamma + 0.00128\sin\Gamma + \\ &\quad + 0.000719\cos 2\Gamma + 0.000077\sin 2\Gamma \\ \delta &= \left(\frac{180}{\pi} \right) (0.006918 - 0.399912\cos\Gamma + \\ &\quad + 0.070257\sin\Gamma - 0.006758\cos 2\Gamma + 0.000907\sin 2\Gamma - \\ &\quad - 0.002697\cos 3\Gamma + 0.00148\sin 3\Gamma) \\ \omega &= \cos^{-1}(-\tan\lambda \tan\delta). \end{aligned} \quad (3)$$

Donde:

- $I_{sc} = 1367W/m^2$, es la constante solar.
- E_o , la corrección por excentricidad de la órbita.
- δ , es la declinación solar que depende del día del año
- Γ , es el día de año expresado en radianes sobre un año normal.
- N , es el día del año.

2. LA ESTACIÓN METEOROLÓGICA

El equipo seleccionado corresponde al tipo de una estación meteorológica profesional de procedencia alemana, con el sistema de adquisición de datos COMBILOG 2010, y dotada de sensores Fischer Barometric de humedad, temperatura, presión, velocidad y dirección de viento, a ello se ha añadido sensores de radiación solar global Kipp & Zonen, y un pluviómetro Davis. Completan la instrumentación un sensor de evaporación NovaLynk 255-100, y un sensor de temperatura del suelo CS109 de Campbell Scientific, entre los más importantes.



FIG. 1.— (Color online) La estación meteorológica de Patacamaya, en primer plano los sensores de evaporación y precipitación. Al fondo la torre con los sensores principales, la caja de control y la caseta de monitoreo.

La estación meteorológica está instalada a 10 metros de altura, a este nivel están instalados un primer conjunto de sensores constituido por un termohigrómetro digital para tener las mediciones de temperatura en grados centígrados y la humedad relativa porcentual. Sobre ambos brazos de una barra de soporte orientado en dirección E-O están instalados los medidores de velocidad y dirección de viento, y en frente en dirección norte está instalado el medidor de radiación solar. Por encima de este arreglo de sensores en cruz, se halla dispuesto un sistema pararrayos. Inmediatamente más abajo se encuentra el panel solar para la alimentación de todo los sistemas de la estación, algunos metros más abajo se encuentra el segundo conjunto de sensores que están constituidos por medidores de temperatura y humedad, velocidad de viento y dirección, presión atmosférica, precipitación, evaporación y temperatura del suelo. Y finalmente a poco más de un metro del suelo está instalado el panel de control central de la estación. Finalmente, a nivel del suelo y adecuadamente protegidos se hallan otro conjunto de sensores, como los sensores de precipitación pluvial, temperatura del suelo y evaporación, además de otro termohigrómetro, anemómetro y veleta. La figura 1 muestra en primer plano el conjunto de sensores en tierra, y al fondo la torre con su caja de control y sensores. Se observa también la pequeña caseta de monitoreo y procesamiento.

Adicionalmente, la estación de Patacamaya cuenta con otras estaciones meteorológicas para fines de comparación, prueba de sensores y desarrollo de software, además de instrumentos y equipos para fines de laboratorio y ensayos.

3. LOS REGISTROS DE DATOS

Los datos analizados comprenden todos los adquiridos desde la fecha de instalación hasta julio del presente año, que por razones administrativas no es una serie continua en varios parámetros mete-

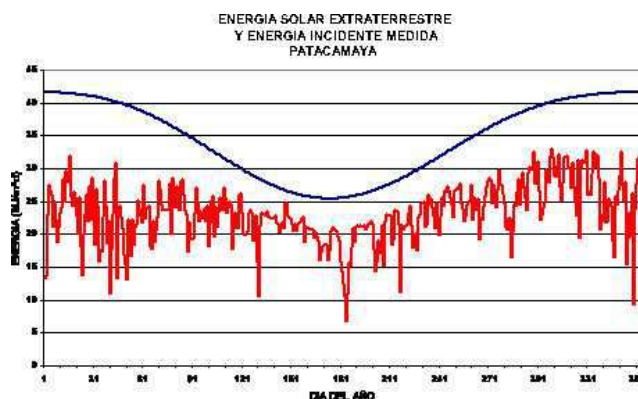


FIG. 2.— (Color online) El registro muestra la radiación extraterrestre incidente en el año 2011, comparada con la radiación registrada en el mismo año. Se puede observar una gran aproximación de las curvas durante el invierno, así como también los menores valores promedio en este periodo.

orológicos, fueron adquiridos a una tasa de registro de 1 por cada cinco minutos, y han sido procesados y presentados en varios informes de avance y estado de proyecto en su fase de instalación (Torrez 2007). A la fecha la estación se halla completamente operativa y con un 95% de operación en sus sensores. De la base de datos obtenida se han seleccionado los registros de temperatura y radiación solar, con el objeto específico de emplearlos en la validación de los modelos planteados. Esta base de datos consta de 168768 registros, equivalentes a 586 días. De este conjunto se han eliminado una determinada cantidad de datos erróneos que se han introducido probablemente en los procesos de descarga de datos y reinicialización de su sistema, quedando 580 registros diarios, sin embargo discontinuos. Finalmente, para lograr una serie temporal continua de datos, se han realizado promedios de los datos existentes en los tres años de registro para los mismos días. Finalmente con el objeto de suavizar las variaciones introducidas por eventos extremos principalmente en la temporada húmeda, se ha procedido a obtener un registro final suavizado por medias móviles de 5 días.

La figura 2 muestra el registro de la radiación como energía diaria acumulada para cada día del año 2011 en comparación con la energía de la radiación extraterrestre incidente en el mismo periodo.

En cuanto a los registros de temperatura en el mismo periodo, la figura 3 muestra el comportamiento anual en promedios diarios. Se puede observar en este gráfico que las temperaturas mínima extremas se alcanzan alrededor del medio año, en la gestión analizada estos valores se sitúan alrededor de $-10^{\circ}C$, y los máximos extremos en el verano con valores entre $20^{\circ}C$ y $25^{\circ}C$.

El gráfico permite apreciar también que la amplitud térmica diaria se incrementa durante el invierno, y se acorta durante el verano, como efectivamente establecen las condiciones teóricas por el efecto de la nubosidad.

Los registros meteorológicos de Patacamaya presentan los días más tranquilos durante el invierno que durante el verano. En estos se puede apreciar

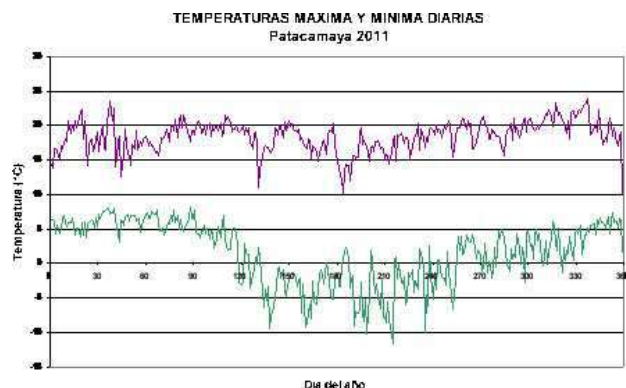


FIG. 3.— (Color online) Variación de las temperaturas máxima y mínima diarias durante el periodo de observación. Se puede observar una mayor amplitud térmica durante el invierno que durante el verano.

como la curva de la radiación solar (trazo negro) captada sigue a la típica forma de la radiación solar ideal, dado que la topografía de la localidad de Patacamaya por la característica plana y libre de obstáculos así lo permite. En la misma forma la evolución de la temperatura (trazo rojo) a lo largo del día es perfectamente suave hasta la hora del ocaso en el cual alcanza su valor máximo, de acuerdo con el artículo de Torrez (2007). Concomitantemente la velocidad del viento (trazo azul) también evoluciona suavemente alcanzando valores ligeramente altos hacia el extremo de la tarde, al mismo tiempo que la humedad (trazo verde) alcanza sus valores mínimo extremos del día para luego incrementarse paulatinamente hasta el amanecer.

Por otra parte durante el verano, la alta presencia de nubes perturba el medio provocando enfriamientos súbitos, por consiguiente gradientes de presión, luego precipitación y vientos, aumento de la humedad y mayor enfriamiento, o cualquier otra variación no relacionada producto de las masas de aire en movimiento.

Las figuras 4 y 5 muestran dos días característicos de la temporada seca y húmeda, es decir invierno y verano en el que se reflejan sus comportamientos característicos, -donde los valores de las variables meteorológicas están normalizados a los valores máximos registrados en el periodo-. Así por ejemplo observando la radiación solar en el día tranquilo se deduce que el día es claro, la temperatura evoluciona suavemente hasta alcanzar su valor máximo cerca del ocaso, al mismo tiempo que la humedad disminuye suavemente hasta ese momento, y el viento sopla suavemente, significando que todas las variables están relacionadas. Por el contrario en un día perturbado el perfil de las variables se conserva en alguna medida, sin embargo sus valores se observan significativamente reducidos.

4. VALIDACIÓN DE LOS MODELOS

4.1. Correlación de Bristow Campbell

La expresión de Bristow Campbell (Bristow & Campbell 1984) de tipo exponencial es desde el punto de vista teórico, de tipo asintótico hacia la energía

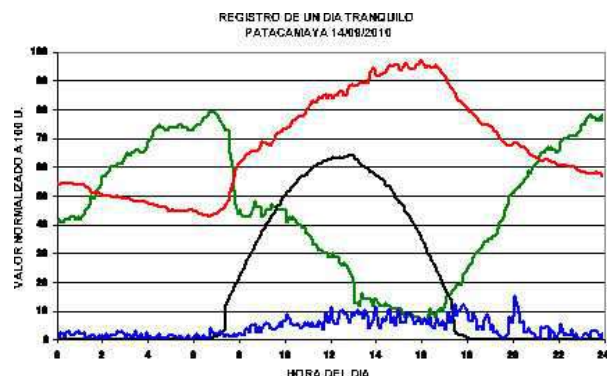


FIG. 4.— (Color online) Perfil de las variables meteorológicas en Patacamaya en un día muy tranquilo, se puede observar como la temperatura tiene un comportamiento inverso a la humedad relativa.

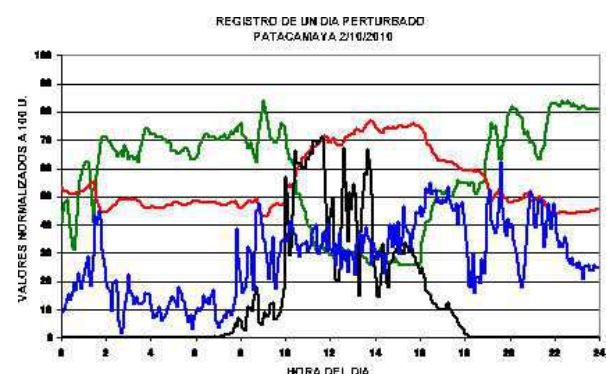


FIG. 5.— (Color online) Las variables meteorológicas en un día perturbado se muestran muy afectadas aunque conservan su perfil principal en alguna medida.

extraterrestre, y con una tasa de incremento muy reducida a temperaturas altas, mientras que a bajas temperaturas la tasa de variación es alta y su límite inferior en la energía captada nulo.

Para la determinación de las constantes del modelo BC, se ha procedido a linealizar la ecuación en términos de las constantes que afectan a ΔT , y por procedimientos combinados de mínimos cuadrados e iteración se llega a obtener las constantes a , b y c , los que respectivamente tienen los siguientes valores: 1.001, 0.077, y 0.964.

El gráfico de dispersión de valores medidos en función de los estimados se muestra en la figura 6, se puede observar en este una ligera mayor concentración de valores en la región de 20 a 25 MJ/m^2d . Se observa también unos cuantos valores dispersos en el extremo de bajas amplitudes térmicas, los que no han sido mayormente investigados.

4.2. Correlación de Hargreaves Samani

Como se ha expresado en los párrafos precedentes, la correlación HS es función de la raíz cuadrada de la amplitud térmica diaria, modulada por el valor de la energía solar extraterrestre en el sitio en evaluación, la constante de proporcionalidad de esta relación se conoce como la transmisividad de la atmósfera. El gráfico de dispersión de la radiación medida contra la radiación estimada nos permite calcular esta constante de manera directa, y así mismo determinar el

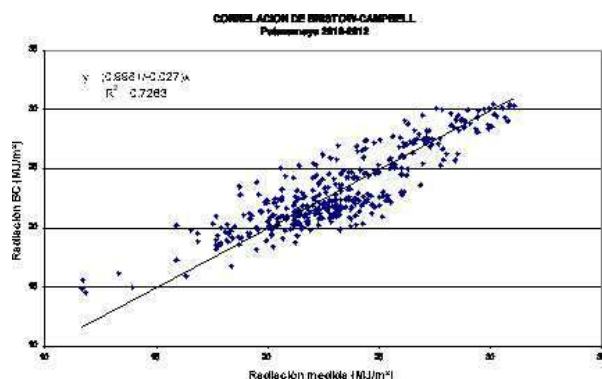


FIG. 6.— (Color online) Gráfica de dispersión de datos estimados contra datos medidos en el modelo de Bristow Campbell.

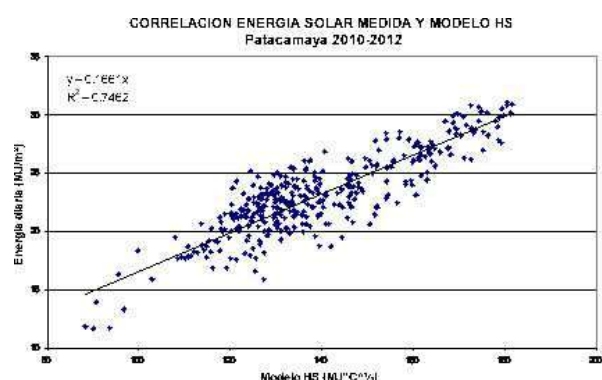


FIG. 7.— (Color online) Correlación entre la energía solar diaria medida y la raíz cuadrada de la amplitud térmica diaria modulada por la radiación extraterrestre.

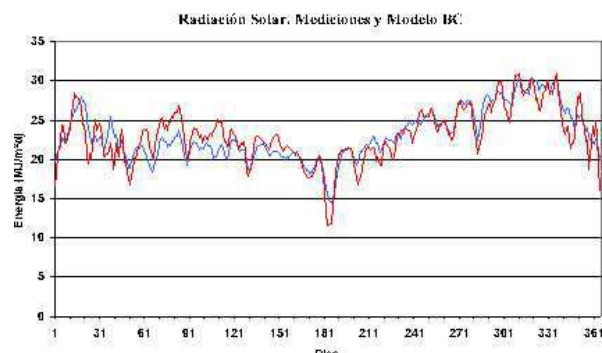


FIG. 8.— (Color online) Comparación de los registros de radiación solar medido (trazo en rojo) y modelado según BC (trazo en azul).

grado de correlación existente entre estas dos variables (Fig.6).

El coeficiente de correlación en este es caso es de 0.86 significando una aceptabilidad moderada teniendo en cuenta que la serie temporal es reducida comparada con otros casos de validación por ejemplo en Baigorria et al. (2004), de la Casa et al. (2003), Almorox (2011), Ugwu & Ugwuanyi (2011), Richardson & Reddy (2004), Gallegos et al. (2005), Coops et al. (2000), Bechini et al. (2000) y otros. Y el valor de la transmitancia obtenida ésta en plena concordancia con los valores ampliamente aceptados de 0.16 para sitios en el interior de continente y 0.19 para sitios sobre la costa.

TABLA 1
VALORES ESTADÍSTICOS

Estadísticos	Valor [MJ/m^2]	Valor [%]
Valor medio datos medidos	23.1	
Error cuadrático medio	3.425	
Valor medio en el modelo BC	23.137	
Valor medio en el modelo HS	23.082	
Coef. correlacin modelo BC		87.5
Coef. correlacin modelo HS		86.4
Error medio MBE, modelo BC	-0.037	-0.16
Error medio MBE, modelo HS	0.019	0.082
Error medio abs. MABE, BC	1.343	5.815
Error medio abs. MABE, HS	1.356	5.87
Error cuadr. medio, RMSE BC	1.697	7.347
Error cuadr. medio, RMSE HS	1.723	7.45

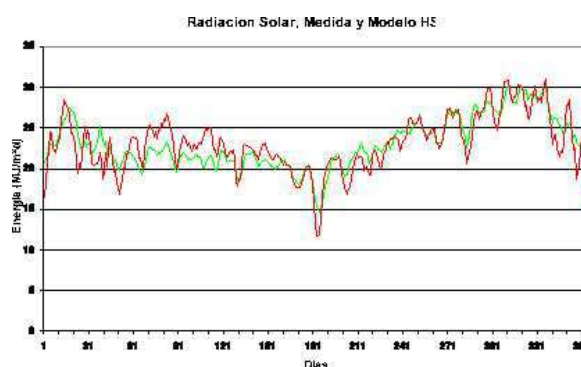


FIG. 9.— (Color online) Comparación de los registros de radiación solar medido (trazo en rojo) y modelado según HS (trazo en verde).

5. CONSIDERACIÓN DE ERRORES

Para completar la validación de los modelos se han evaluado adicionalmente los principales parámetros estadísticos de las series temporales medida y estimada para ambos, con el objeto de compararlos y analizarlos. Entre los estadísticos considerados tenemos a:

La desviación media MBE; que es el valor medio de las diferencias entre los valores medido y estimado, La desviación absoluta media MABE; que representa el valor medio de todas las desviaciones sin considerar su signo. Y la desviación cuadrática media RMSE, que significa el valor medio de la raíz cuadrada de las desviaciones cuadráticas de todos los datos. El cuadro 1 muestra el valor de estos indicadores estadísticos así como sus expresiones porcentuales.

Analizando los errores se observa una ligera mayor asimetría de la serie temporal del modelo BC, que la correspondiente al modelo HS, sin embargo ambas son en valor porcentual menor que 2 unidades en 1000, prácticamente despreciables. Por otro lado la desviación absoluta media de alrededor de $1.35 MJ/m^2 d$ en ambos modelos son relativamente significativos, sin embargo en valor porcentual resultan aproximadamente 6 en 100 unidades, que consideramos aceptables, lo mismo que el error cuadrático medio de alrededor de 7.4 unidades en 100 lo consideramos aún aceptable tomando en cuenta que la se-

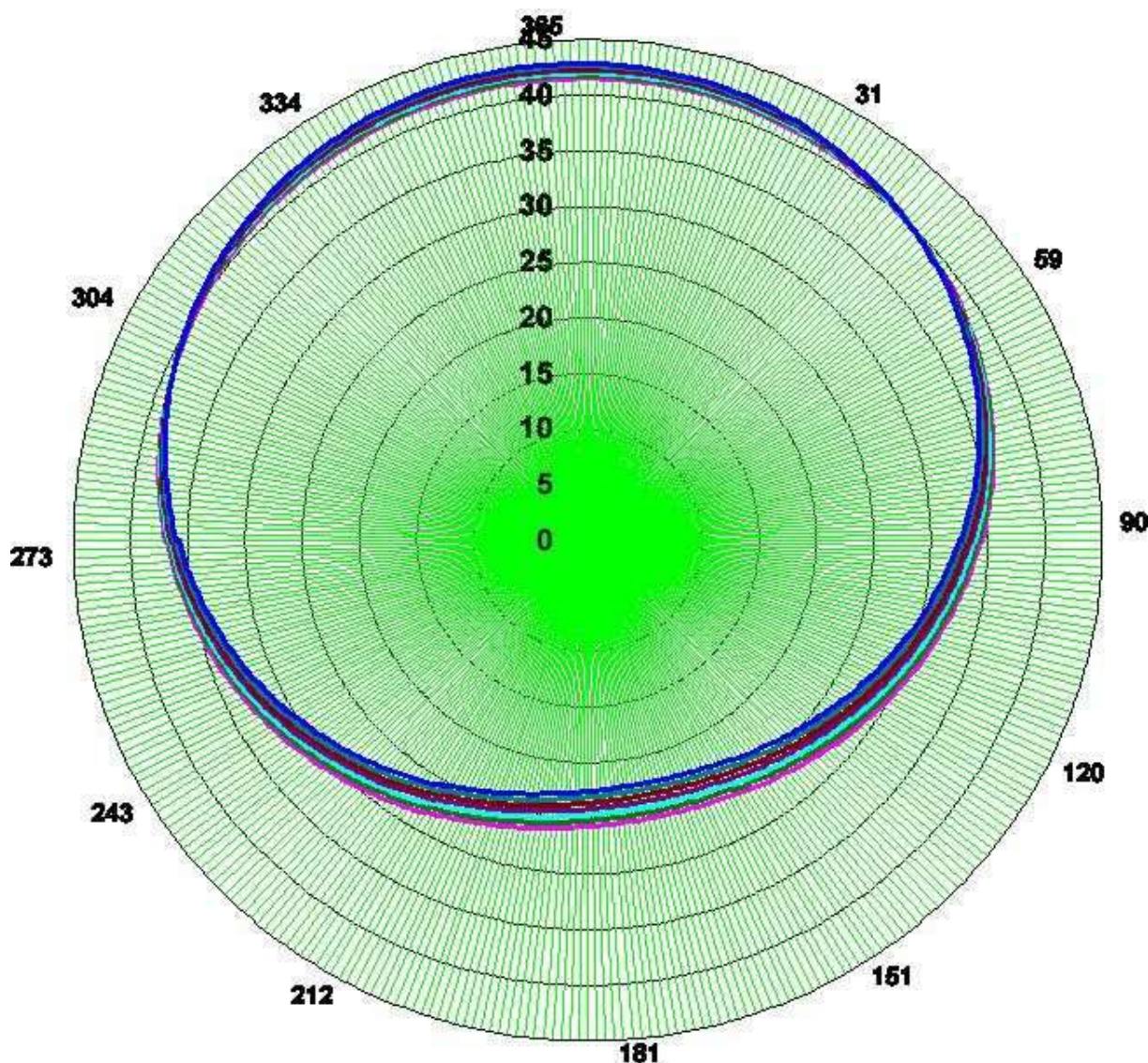


FIG. 10.— (Color online) Radiación solar extraterrestre anual en Bolivia, en MJ/m^2 entre las latitudes 17° S (azul) y 23° S (rosado).

rie temporal es reducida.

De cualquier manera, los parámetros anteriores serán mucho más óptimos cuanto más larga sean las series temporales.

Finalmente terminamos este artículo con una comparación de los registros observados y los modelados según Bristow Campbell y Hargreaves Samani. En las figuras 7 y 8 se muestran estas comparaciones para el periodo de tiempo considerado.

Como se puede observar las diferencias entre ellas son porcentualmente pequeñas, de manera que para todos los fines prácticos, en especial los de aprovechamiento de la energía solar, las diferencias quedan enmascarados en los márgenes de seguridad de los diseños de ingeniería, que en algunos casos alcanzan hasta el 100%, dependiendo de los niveles de confiabilidad establecidos.

Se puede observar en ambos gráficos la similitud que presentan los dos modelos, las diferencias entre ellos son casi imperceptibles, y se puede establecer que de manera general presentan un compor-

tamiento hacia el valor medio de la radiación solar en todo el periodo.

6. CONCLUSIONES

Este artículo fue planteado con la finalidad de posibilitar una alternativa factible de realizar una evaluación de la energía solar en cualquier punto de nuestra geografía altiplánica de manera de ser inmediata, real, y confiable.

Para este propósito se eligió de manera previa que las entradas de este modelo fueran únicamente temperaturas, en particular las máximas y mínimas diarias en vista de la facilidad de obtenerlas en los servicios meteorológicos locales o en otras instituciones técnicas, científicas, o servicios de salud en los lugares de interés.

Dos modelos han sido analizados, y por los resultados encontrados, se puede afirmar que ambos presentan las mismas características, sin embargo, por la simplicidad e inmediatez se puede trabajar perfectamente con el modelo de Hargreaves Samani, sin

sacrificar precisión. Por estas consideraciones se concluye que: a) la aplicación de los modelos considerados es perfectamente posible, b) los errores son mínimos y fácilmente superables, y: c) la transmitancia atmosférica evaluada en el modelo de Hargreaves Samani es ligeramente superior a la recomendada por los autores del método: es decir: 0.1661.

Como complemento, y para fines de aplicación práctica se presenta un gráfico de estimación inmediata de los valores de la radiación extraterrestre para cada día del año y para latitudes comprendidas entre los 17° y $23^\circ S$, de manera que con ellos, más los promedios de las temperaturas máxima y mínima obtenidas en los servicios meteorológicos, puedan es-

timar la energía solar diaria en el lugar de su interés (Figura 10).

AGRADECIMIENTOS

Con mucha frecuencia se olvida al personal que realiza el mantenimiento de las estaciones meteorológicas, y al personal administrativo que hace posible que los proyectos culminen. En esta oportunidad hacemos patente nuestro reconocimiento a los Sres. V. Mamani, H. Monasterios, y M. Zuazo, por el apoyo brindado en que nuestros proyectos de investigación alcancen sus metas en los tiempos establecidos. Gracias por su colaboración.

REFERENCIAS

- Almorox J. (2011), *Turk J. Physics* **35**, 53.
 Angstrom A. (1924), *QJR Met. Soc.* **50**, 121.
 Baigorria G. A. et al. (2004), *International Journal of Climatology* **24**, 9, 1121.
 Bechini L., Ducco G., Donatelli M. & Stein A. (2000), *Agriculture, Ecosystems and Environment* **81**, 29.
 Bristow K. L. & Campbell G. S. (1984), *Agric. For. Meteorol.* **31**, 159.
 Coops N. C., Waring R. H. & Moncrieff J. (2000), *International Journal of Biometeorology* **44**, 4, 204.
 de la Casa A., Ovando G. & Rodríguez A. (2003), *Revista de Investigación Agropecuaria INTA* **32**, 2, 45.
 Gallegos H. G., Righini R. & Raichijk C. (2005), *S. C. de Bariloche, Argentina*.
 Hargreaves G. H. & Samani Z. A. (1982), *J. Irrig. and Drain Engr.* **108**, 223.
 Prescott J. A. (1940), *Trans. R. Soc. Sci. Austr.* **64**, 114.
 Richardson A. G. & Reddy K. R. (2004), *Clim. Res.* **27**, 85.
 Torrez R. (2007), IIF-UMSA, Bolivia.
 Ugwu A. I. & Ugwuanyi J. U. (2011), *International Journal of the Physical Sciences* **6**, 31, 7285.

ANÁLISIS ESTOCÁSTICO SOBRE REGISTROS DE TEMPERATURA

STOCHASTIC ANALYSIS OF TEMPERATURE DATA

V. M. PEÑAFIEL[†] & M. ANDRADE[‡]

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz – Bolivia

(Recibido 16 de Octubre de 2012; aceptado 12 de Julio de 2013)

Se propone una simulación Monte Carlo simple (con modelo gaussiano) para registros de temperatura media diaria sobre territorio boliviano. Las series temporales empíricas, conteniendo temperaturas máxima y mínima, se reducen a series de temperatura promedio y se descomponen para extraer los parámetros de la simulación, mostrando los resultados para cinco estaciones colocadas aproximadamente sobre los ejes EO y NS de Bolivia. Se hizo énfasis asimismo en la determinación de la tendencia lineal de los datos empíricos ya que dicha tendencia es un indicador directo del cambio en la temperatura media local que, para las últimas dos décadas, sugiere un calentamiento equivalente a unos 2 grados por siglo sobre el territorio boliviano.

Descriptor: Análisis de series temporales — Métodos de Monte Carlo

Código(s) PACS: 05.45.Tp, 05.10.Ln

ABSTRACT

We propose a simple Monte Carlo simulation (with a Gaussian model) for the average daily temperature data in the Bolivian territory. The empirical time series with maximum and minimal temperatures are reduced to a series of average temperature and then they are decomposed to extract the simulation parameters; the results are shown for five stations located approximately along the east-west and north-south axes in Bolivia. We also determined the linear trend of the empirical data; this trend is a direct indicator of the average local temperature change which suggests a warming effect (for the two last decades) equivalent to 2 degrees per century in the Bolivian territory.

Subject headings: Time series analysis — Monte Carlo methods

1. INTRODUCCIÓN

La temperatura es una de las variables más usadas para el estudio del “cambio climático”, pero también para el seguimiento y anticipación de todas las actividades relacionadas con el clima.

En primera instancia interesa el comportamiento de la temperatura media diaria antes que el estudio de los valores extremos. Por ello, se ha construido registros “limpios” (regularizados en los lugares con mediciones faltantes) para la temperatura media $T(t) = [T_{max}(t) - T_{min}(t)]/2$. Todo el trabajo posterior está realizado sobre tales registros.

El propósito es el de aplicar, para cada estación de registro, un modelo simple que permita anticipar y examinar el comportamiento de la temperatura a partir de los datos disponibles, y también, dentro de límites razonables, contestar la interrogante, siempre ilustrativa, de si los datos muestran tendencias

positivas (calentamiento) o negativas (enfriamiento).

De los registros disponibles para el presente trabajo, que provienen de 40 estaciones sobre territorio boliviano (SENAMHI 2010), se ha elegido una muestra de 5, más o menos a lo largo de los ejes transversal y longitudinal de este territorio (Tabla 1.), cubriendo también las tres zonas climáticas más representativas (altiplano, valles y llanos). Estas tres zonas tienen diferentes influencias térmicas aleatorias desde el punto de vista estadístico. Por esto, es interesante ver si el método de simulación muestra un comportamiento medio diferente para cada una de ellas.

Finalmente, aceptando que la inclinación de la recta de regresión sobre los registros completos proporciona una primera estimación de la variación térmica temporal, se ha empleado el conjunto de las 40 estaciones para determinar una razonable aproximación a ese parámetro sobre el territorio boliviano durante el lapso estudiado.

2. DESCOMPOSICIÓN DE LAS SERIES EMPÍRICAS

[†]vmiguel@fiumsa.edu.bo

[‡]mandrade@fiumsa.edu.bo

TABLA 1
POSICIÓN DE LAS ESTACIONES.

Estación	Lat.	Long.	a.s.n.m. [m]
E1 (Ayo Ayo)	-17.083	-68.000	3880
E2 (Cochabamba)	-17.417	-66.183	2548
E3 (Pto. Suarez)	-18.983	-57.817	134
E4 (Cobija)	-11.0330	-68.7830	272
E5 (Tarija)	-21.5500	-64.7000	1854

TABLA 2
COEFICIENTES DE LAS TENDENCIAS LINEALES.

Estación	$a[^\circ C/dia]$	$b[^\circ C]$
E1	0.000065	7.267643
E3	0.000086	17.859317
E4	0.000040	25.814430
E2	0.000067	25.305191
E5	0.000002	18.255102

Las series temporales constan de 7304 valores cada una, correspondientes a 20 años, desde el 1 de Enero de 1989 hasta el 31 de Diciembre de 2008.

Se supone que estas series son susceptibles de ser descompuestas en la forma aditiva

$$T(t) = L(t) + P(t) + R(t) \quad (1)$$

donde

$$L(t) = at + b \quad (2)$$

$$P(t) = \sum_{j=1}^3 a_j \text{sen}(b_j t - c_j) \quad (3)$$

(suma de 3 funciones armónicas sólo para fines del presente trabajo) y $R(t)$ una componente de ruido aleatorio.

La función $L(t)$ resulta, obviamente, de un ajuste por mínimos cuadrados sobre la serie temporal completa y sus coeficientes aparecen en la tabla 2. La componente periódica $P(t)$, para la descomposición, es la antitransformada de Fourier del espectro obtenido aislando los tres picos más distinguibles (Fig. 3) de la transformada de $\{T(t) - L(t)\}$ (Fig. 2.).

El ajuste por mínimos cuadrados de la ec. (2) sobre el registro de la antitransformada (que se muestra en la Fig. 4.) se usa posteriormente para la simulación con los valores que aparecen en la tabla 3. Un procedimiento enteramente similar para las otras estaciones lleva a los resultados mostrados en las tablas 4., 5., 6. y 7. La inspección de los valores indica que la suposición inicial de aditividad de las funciones (1), (2) y (3) es aproximada pero, como se verá, estadísticamente suficiente.

Finalmente, restando el registro de la antitransformada del de $\{T - L\}$, se obtiene la serie correspondiente al ruido aleatorio R (Fig. 5.), bastante complejo, como se aprecia. Las complejidades de este registro, sin embargo, parecen estar concentradas en los valores extremos de temperatura. Para ninguna de las

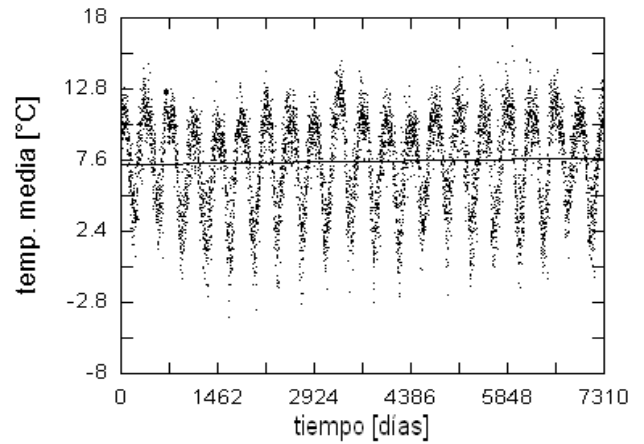


FIG. 1.— Datos de temperatura media provenientes de E1 (Ayo Ayo) desde el 1 de Enero de 1989 hasta el 31 de Diciembre de 2008. Aparte de la tendencia lineal (la recta $at + b$ ajustada por cuadrados mínimos), es notoria la periodicidad anual afectada por ruido estocástico.

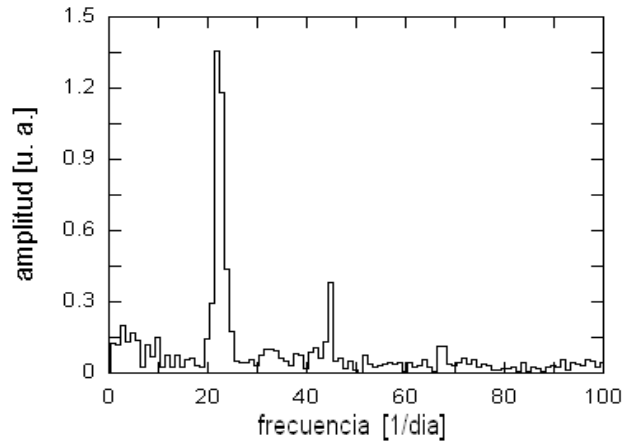


FIG. 2.— Transformada rápida de Fourier (TRF) sobre los datos de la Fig.1. menos los generados por la recta de regresión. el pico mayor corresponde al obvio período anual $8192/23 = 356 < T < 8192/22 = 372.36$. Los picos más pequeños son, probablemente, resonancias; aunque es posible interpretarlos también como comportamientos similares (pero con valores diferentes) entre estaciones (0.52 y 0.33 de año, respectivamente).

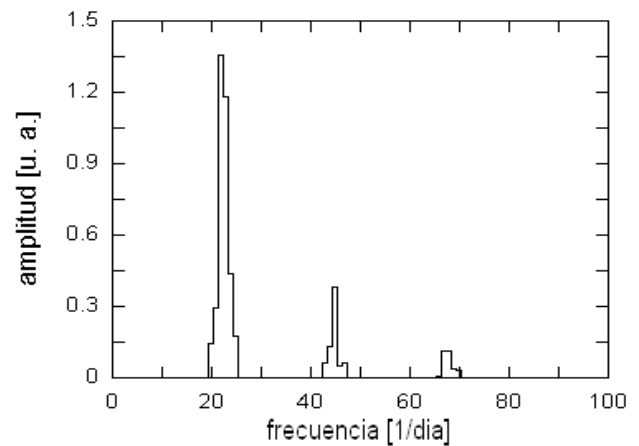


FIG. 3.— Filtro aplicado para aislar los tres picos más conspicuos de la TRF de la Fig. 2.

TABLA 3
E1: COEFICIENTES DE LA COMPONENTE PERIÓDICA.

j	$a_j [^{\circ}C]$	$b_j [1/dia]$	c_j
1	-3.983791	0.017219	1.749685
2	-0.128545	-0.039660	-192.104113
3	0.213720	-0.004117	-15.988060

TABLA 4
E2: COEFICIENTES DE LA COMPONENTE PERIÓDICA.

j	$a_j [^{\circ}C]$	$b_j [1/dia]$	c_j
1	2.921111	0.017219	1.749686
2	0.040622	0.064829	330.593637
3	-0.275202	0.051830	13.892470

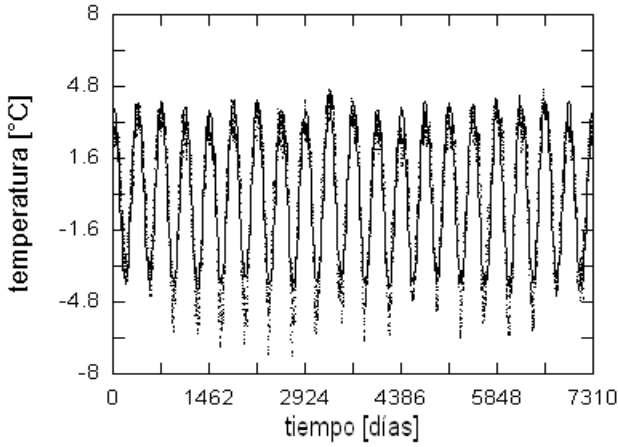


FIG. 4.— Antitransformada del espectro mostrado en la Fig. 2. La línea continua corresponde al ajuste por mínimos cuadrados de la ec. 2.

estaciones el ajuste (m.c.) gaussiano

$$g(\Delta T) = a \exp[b(\Delta T - c)^2], \quad (4)$$

a los histogramas de frecuencias (Fig. 5. para E1) pasa la prueba ji cuadrada a .95.

3. COMPONENTE ALEATORIA

La desviación de la distribución gaussiana es más evidente en figura 7. que corresponde al histograma de frecuencias de la componente aleatoria para la estación E5.

La actividad en los extremos ahora es muy evidente. Es posible integrar numéricamente el histograma empírico para obtener una curva de ajuste (Fig. 8.) y usarla mediante sorteo Monte Carlo para generar ruido aleatorio simulado, calcular nuevamente el histograma de frecuencias y compararlo con el original de la figura 7. El resultado aparece en la figura 9. con un coeficiente de correlación $r = 0.941$.

Por otra parte, la simulación puramente gaussiana de esta componente aleatoria, usando los parámetros b y c de la tabla 8. para E5, agrupada nuevamente en una serie de frecuencias y comparada con el original de la Fig. 7. se resume en la figura 10. El coeficiente de correlación es, ahora, $r = 0.994$.

Es claro que la influencia de valores extremos de

TABLA 5
E3: COEFICIENTES DE LA COMPONENTE PERIÓDICA.

j	$a_j [^{\circ}C]$	$b_j [1/dia]$	c_j
1	3.179568	0.017232	4.804543
2	-0.093487	0.470244	1798.146290
3	0.113583	0.051055	129.859450

TABLA 6
E4: COEFICIENTES DE LA COMPONENTE PERIÓDICA.

j	$a_j [^{\circ}C]$	$b_j [1/dia]$	c_j
1	1.103660	0.017285	4.758340
2	-0.030092	0.024387	-54.447176
3	-0.163017	0.051902	15.278918

TABLA 7
E5: COEFICIENTES DE LA COMPONENTE PERIÓDICA.

j	$a_j [^{\circ}C]$	$b_j [1/dia]$	c_j
1	3.244198	0.017223	4.836622
2	-0.142778	0.470318	1797.744457
3	-0.095687	0.036295	83.990000

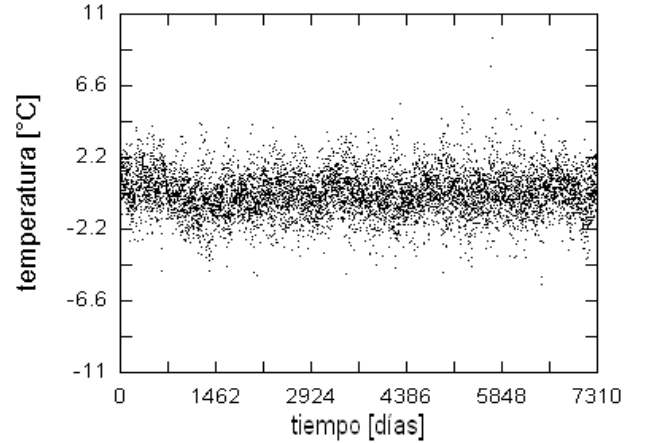


FIG. 5.— Ruido aleatorio aislado sustrayendo el registro correspondiente al la Fig. 3. de $\{T - L\}$ para la estación E1.

temperatura sobre el comportamiento estadístico de los registros empíricos requiere un estudio separado. Consecuentemente, gran parte de las propiedades de las series temporales de temperatura media son susceptibles de ser simuladas con el supuesto de que la componente aleatoria R es, aproximadamente, gaussiana.

4. SIMULACIÓN

Como se ha supuesto inicialmente la aditividad (1), el procedimiento de descomposición descrito permite extraer los parámetros necesarios para producir rápidamente registros estadísticamente equivalentes a los empíricos. Las series simuladas calculan la ec. (1) con los parámetros de la tabla 2., le suman los armónicos de la ec. (2) con los coeficientes de las tablas 3. a 7. y, finalmente, se añade ruido aleatorio producido por el método Monte Carlo y el

TABLA 8
PARÁMETROS DEL RUIDO GAUSSIANO.

Estación	a	$b[1/(^{\circ}C)^2]$	$c[^{\circ}C]$
E1	2323.718978	0.330968	-0.009181
E2	2634.418530	0.423596	0.040493
E3	1525.577608	0.160381	0.341250
E4	2551.069895	0.451834	0.322391
E5	1414.498578	0.132816	0.098277

TABLA 9
ESTADÍSTICOS EMPÍRICOS Y SIMULADOS.

Estación	Media	Desviación Típica
E1	7.473153	3.514949
E1S	7.544063	3.136337
E2	25.325309	2.902037
E2S	25.533201	1.293342
E3	18.091441	2.910423
E3S	18.171814	2.327837
E4	25.796223	4.292854
E4S	25.961504	2.455173
E5	18.170418	5.278751
E5S	18.277554	2.509683

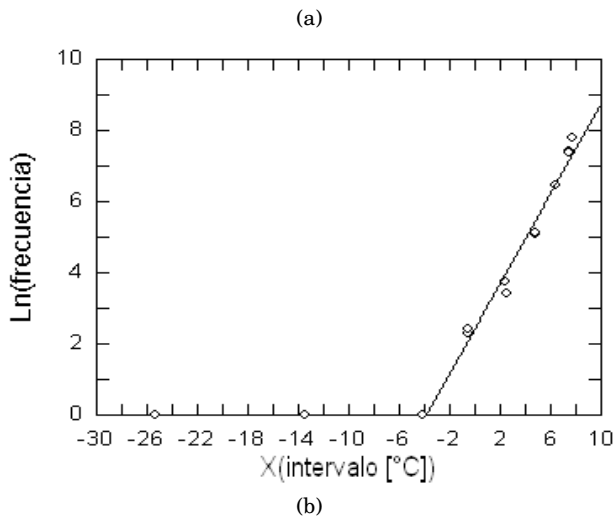
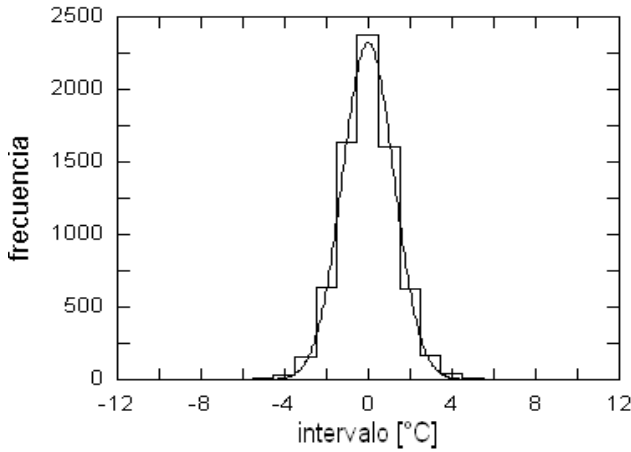


FIG. 6.— (a) Histograma de frecuencias de los datos usados para construir la Fig.4. La curva gaussiana corresponde a un ajuste m.c. de la ecuación (4). (b) Gráfico lineal $\ln(\text{frecuencias})$ vs. $X(\text{intervalos}) = -b(\Delta T - c)^2 + \ln(a)$, correspondiente a la fig. 6. La recta de ajuste permite apreciar que las diferencias con la gaussiana provienen principalmente de las “colas” (valores extremos de temperatura).

de Box-Muller (Box & Muller 1958), esto es, el sorteo de dos números aleatorios ξ_1 y ξ_2 y el empleo de la relación

$$\Delta T = \sqrt{-\frac{1}{b} \ln(\xi_1)} \sin(2\pi\xi_2) + c, \quad (5)$$

donde a y b son los parámetros de ajuste a curvas (4) como las de las figuras 6. y 7. y que se detallan en la tabla 8. para cada una de las estaciones.

El sorteo de los números ξ se hizo usando

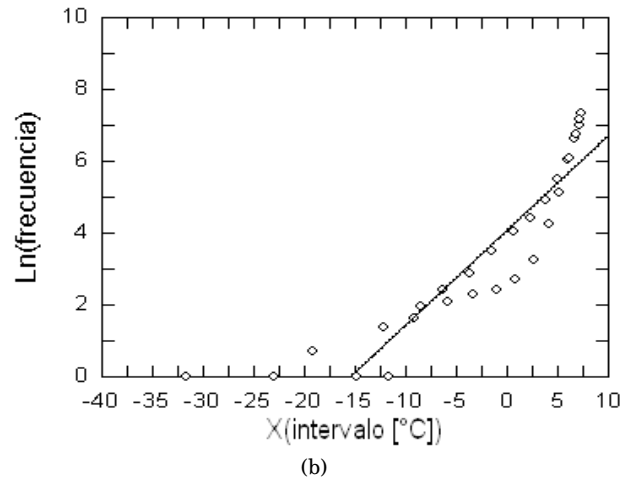
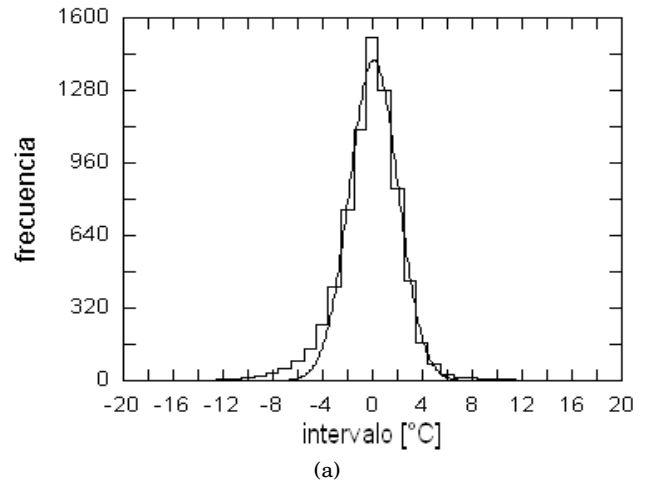


FIG. 7.— (a) Histograma de frecuencias correspondiente al ruido aleatorio separado del registro de temperatura media para la estación E5 usando el método descrito para E1. (b) Gráfico lineal $\ln(\text{frecuencias})$ vs. $X(\text{intervalos})$ para E5, como el de la fig. 6a. Las desviaciones respecto de la recta de ajuste son ahora más pronunciadas y la asimetría de la distribución empírica es realmente muy notoria.

una rutina adaptada del “Mersenne Twister” (Matsumoto & Nishimura 1998) para el ensamblador de 32 bites, lenguaje en el cual todos las operaciones y algoritmos fueron realizados.

El resultado es la generación de series temporales que “imitan” muy aproximadamente el com-

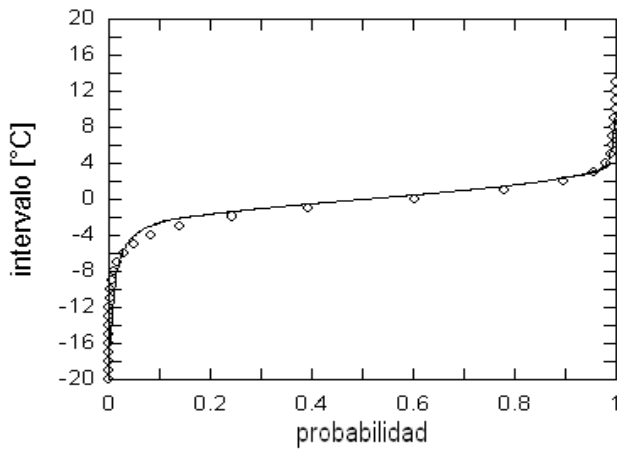


FIG. 8.— Distribución de probabilidad acumulativa, construida numéricamente a partir del histograma empírico (Fig. 7.).

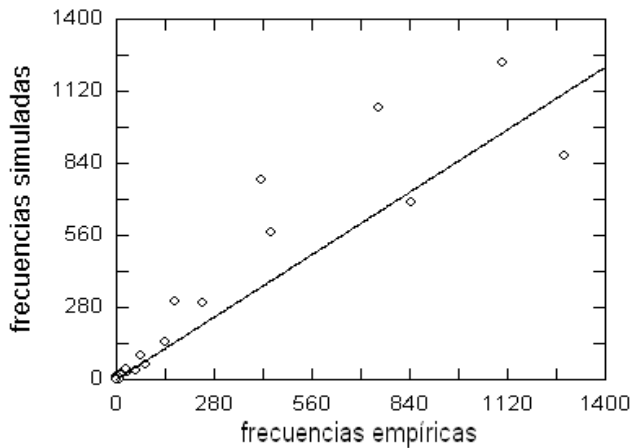


FIG. 9.— Correlación entre frecuencias simuladas con ruido producido por la curva de la figura 8. y las frecuencias empíricas de la figura 7. Mejor para valores bajos (saltos grandes de temperatura).

portamiento de sus correlativas experimentales. Así, la tabla 9. es la comparación de los valores medios y desviaciones típicas de los registros originales y sus simulaciones. Como ya se ha enfatizado, aunque los valores medios son muy próximos (como era de esperarse), la dispersión es siempre mayor en los empíricos por la presencia de ráfagas de temperaturas extremas que no están presentes en los subrogados.

Para estimar la capacidad de predicción del procedimiento, se lo aplicó a la mitad de los datos de cada registro -que cubre una década- y se ha comparado el resultado con la década empírica siguiente. Por ejemplo, para los datos de la primera mitad del registro E1 que se muestran en la figura 11., aislando los tres picos de la transformada de $\{T-L\}$ (Fig.12.), tomando la antitransformada, restándola de $\{T-L\}$ y calculando el histograma de frecuencias que corresponde a la componente aleatoria (Fig. 13.), se obtiene todos los parámetros para la simulación propuesta.

El único parámetro que debe ser ajustado, para simular la segunda década usando ajustes a la

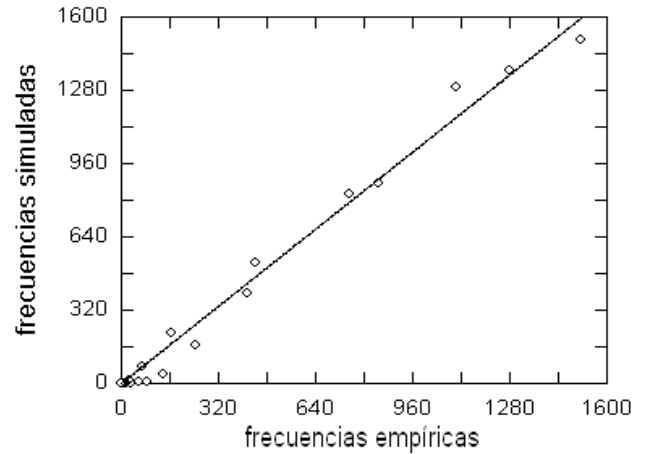


FIG. 10.— Correlación entre frecuencias simuladas con ruido puramente gaussiano y las frecuencias empíricas de la Fig. 7. Mejor para valores altos (saltos pequeños de temperatura).

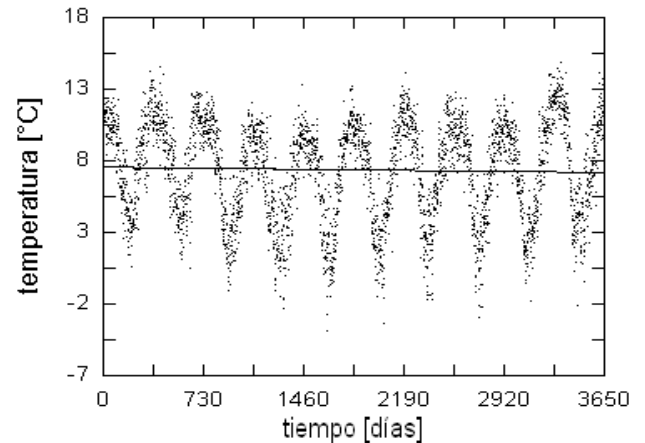


FIG. 11.— Datos de temperatura media correspondientes a la primera década del registro E1. Se muestra la tendencia lineal (negativa!).

primera, es la temperatura inicial, la cual es ahora $b + 3650a$. El resultado se compara con la segunda mitad del registro E1 rindiendo un coeficiente de correlación $r = 0.784$ y se muestra en la figura 15.

Como referencia para evaluar la utilidad de estas simulaciones anticipadas, es necesario tener en cuenta que, en general, las series temporales de temperatura son, no obstante su regularidad, fuertemente influidas por la componente aleatoria. Así, el coeficiente de correlación entre las dos mitades del registro empírico E1 es sólo $r = 0.722$ y su diagrama de correlación lo refleja gráficamente (Fig. 14.). La simulación se comporta, en este sentido, ligeramente mejor y se considera que, como instrumento de trabajo, puede emplearse como un registro subrogado de E1.

5. TENDENCIA LINEAL

La suposición inicial relativa a la descomposición simplemente aditiva de $\{L\}$, $\{P\}$ y $\{R\}$ es, por supuesto, sólo una conveniente aproximación. Esto se aprecia de inmediato, por ejemplo, en el ruido remanente de la figura 4. no obstante la estrechez del

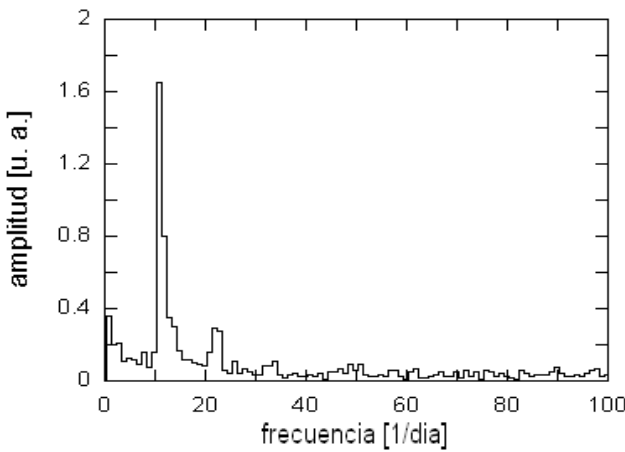


FIG. 12.— TRF a los datos de la Fig 11, menos la tendencia lineal. Se tiene básicamente las mismas características consideradas para la Fig. 7.

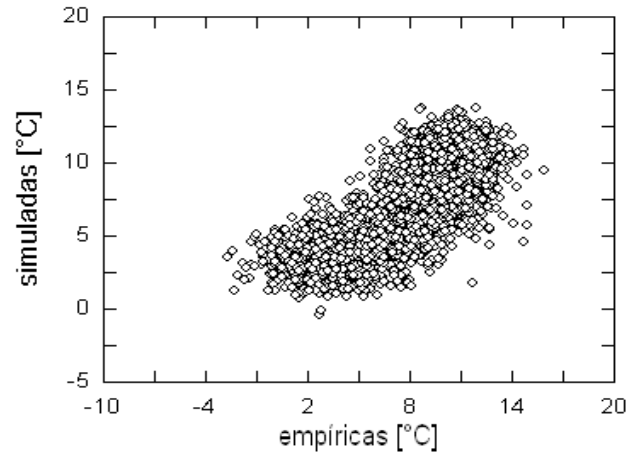


FIG. 15.— Diagrama de correlación entre datos simulados (con parámetros de la primera década) y datos empíricos de la segunda década para la estación E1. El ligero alargamiento, comparando con la Fig. 13, indica mejor correlación.

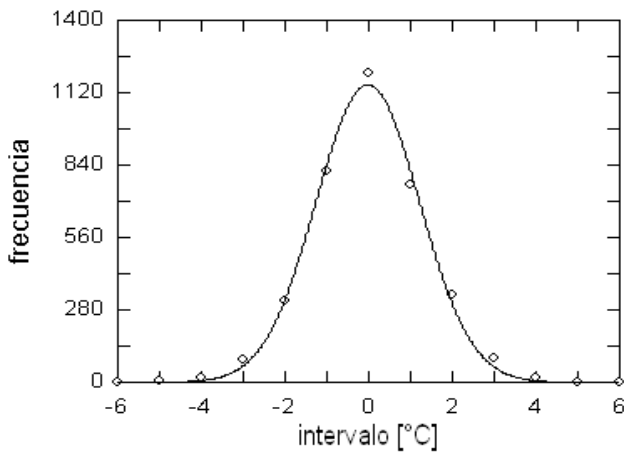


FIG. 13.— Histograma de la componente aleatoria de la serie correspondiente a la primera década del registro E1. La curva de ajuste proporciona los parámetros para generar la serie simulada de la segunda década.

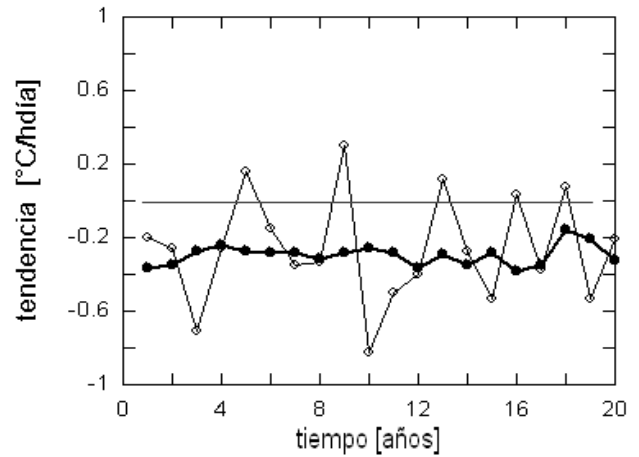


FIG. 16.— Evolución anual de la tendencia lineal (estación E1); los puntos llenos corresponden a los valores simulados y son, por supuesto, menos dispersos que los empíricos.

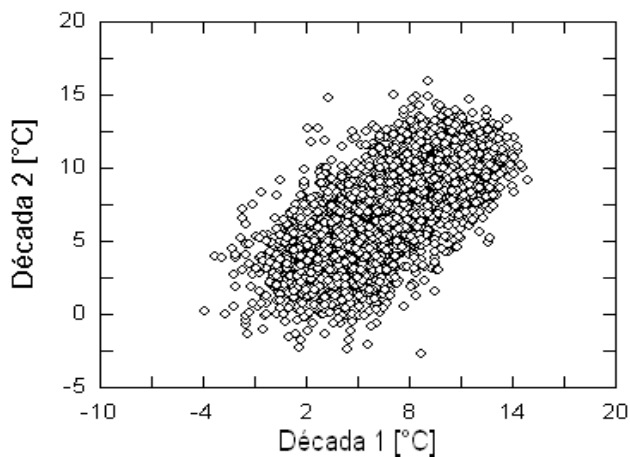


FIG. 14.— Diagrama de correlación entre datos empíricos de la primera y segunda décadas para la estación E1.

filtro aplicado.

Por otra parte, una inspección a los valores del parámetro a (inclinación de la tendencia) en la tabla

2. podría implicar un calentamiento local de 1.9 ± 0.5 $^{\circ}\text{C}/\text{siglo}$ aproximadamente. Se verifica que la muestra es significativa, pues, el valor calculado para las 40 estaciones disponibles es 2.04 ± 0.60 $^{\circ}\text{C}/\text{siglo}$.

Sin embargo, las fluctuaciones en tiempo y lugar se ponen de manifiesto mediante un análisis gráfico de los registros. Así, la figura 16. muestra las tendencias -parámetro a de la ec. (1)- calculadas anualmente para los registros empírico y simulado de la estación E1. Nuevamente la presencia de ráfagas de temperaturas extremas se manifiesta en las abruptas fluctuaciones de las tendencias experimentales; contrastando la homogeneidad de la evolución temporal de las tendencias simuladas. Como consecuencia, la evolución temporal de las temperaturas medias iniciales anuales exhibe también la misma característica (Fig. 17.).

Extendiendo el análisis a las 40 estaciones disponibles, se observa (figuras 18. y 19.) la ausencia de sistematicidad en los valores de la tendencia lineal tanto en latitud sur cuanto en longitud oeste, que caracterizan las localizaciones geográficas

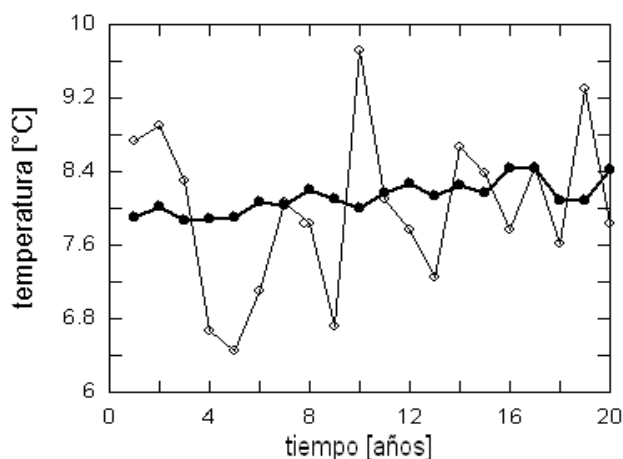


FIG. 17.— Evolución anual de la temperatura media inicial (estación E1); los puntos llenos corresponden a los datos simulados y muestran menor dispersión.

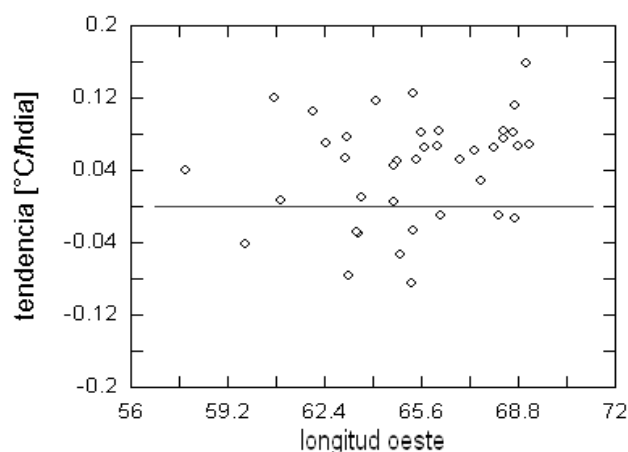


FIG. 19.— Tendencia por longitud (oeste). No se advierte correlación alguna en tendencias positivas ni negativas.

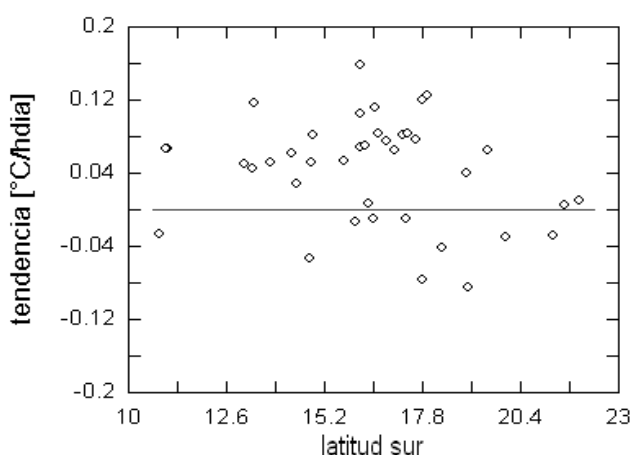


FIG. 18.— Tendencia por latitud (Sur). No parece haber correlación por zona de las estaciones.

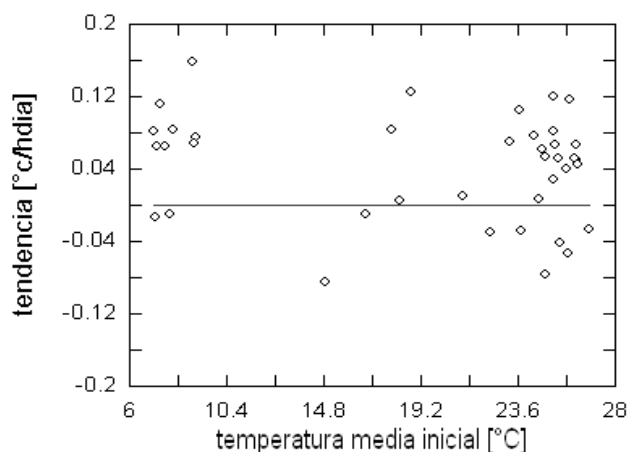


FIG. 20.— Tendencia lineal por temperatura media inicial. Hay, en general, preponderancia de tendencia positiva, pero es evidente que es mayor en la parte de bajas temperaturas (zona altiplánica).

de las estaciones dentro del territorio boliviano. La distribución aleatoria, aunque con preponderancia de valores positivos (75%) es una clara indicación de influencias climáticas locales, esporádicas pero intensas (eventos extremos).

Finalmente, la figura 20. indica que las zonas climáticas (caracterizadas por el valor de las temperaturas medias iniciales) tampoco tienen especial nivel de calentamiento local aunque, estadísticamente al menos, se observan estaciones que muestran un incremento de la temperatura media en todas las regiones.

6. CONCLUSIONES

Hay bastante evidencia que asocia la “anormalidad” de la componente aleatoria en series temporales de temperatura con el comportamiento de las máximas o mínimas (v. g. Harmel et al. (2002)). Se ha intentado aquí mostrar que, dejando de lado el estudio de esos extremos de temperatura, la región de fluctuaciones pequeñas puede aproximarse a ruido gaussiano, obteniendo así registros simulados estadísticamente comparables con los empíricos. El análisis de valores extremos requiere, sin duda, un

tratamiento independiente en términos de lo expuesto en el presente trabajo.

Tampoco se ha considerado el asociar la evolución temporal con aplicaciones comunes, por ejemplo a la agricultura, mediante el tratamiento de derivadas climáticas (Bari et al. 2005). La intención es, más bien, la de construir un modelo sencillo, fácil de ser utilizado como un procedimiento “de trabajo” para comparar los cambios a mediana escala respecto de ciertas propiedades esperadas, caracterizadas por parámetros extraídos de los mismos registros empíricos; el modelo es, por tanto, sólo localmente aplicable (para cada punto de medición).

Con tales restricciones, una primera aproximación es el concepto de composición aditiva dada por la ec. (1), con $R(t)$ directamente considerado como ruido gaussiano.

Admitido esto, se encuentra que la presencia de fluctuaciones extremas se reflejará, finalmente, en inestabilidad de la tendencia lineal, objeto ya de exhaustivos exámenes (Hurrell 1995). Las oscilaciones irregulares de este parámetro en el dominio temporal terminan en una dispersión espacial, aunque con una notoria preponderancia de valores positivos.

El resultado final, $\langle a \rangle = 2.04 \pm 0.60 [^{\circ}C/\text{siglo}]$ indica que, en los últimos 20 años, existe una tendencia al incremento de la temperatura media (calen-

tamiento local no sistemático) en el territorio boliviano.

REFERENCIAS

- Bari, Driss, Mraoua & Mohammed (2005), *Scandinavian Journal of Statistics* **4**, 746.
- Box G. E. P. & Muller M. E. (1958), *Ann. Math. Statist.* **29**, 610.
- Harmel R. D., Richardson C. W., Hanson C. L. & Johnson G. L. (2002), *J. Appl. Meteor.* **41**, 544.
- Hurrell J. W. (1995), *Science* **264**, 676.
- Matsumoto M. & Nishimura T. (1998), *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* **8**, 3.
- SENAMHI (2010), *Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología* (Comunicación Privada)

FENÓMENOS NO LINEALES EN LA REACCIÓN
DE BELOUSOV - ZHABOTINSKY. ESTABILIDAD.

NON-LINEAR PHENOMENA OF THE
BELOUSOV - ZHABOTINSKY REACTION. STABILITY.

S. A. OPORTO ALMARAZ[†] & G. M. RAMÍREZ ÁVILA[‡]

[†]Carrera de Ciencias Químicas

[‡]Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física

Universidad Mayor de San Andrés

c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635

La Paz – Bolivia

(Recibido 30 de Junio de 2013; aceptado 22 de Agosto de 2013)

Empleando las ecuaciones diferenciales no-lineales del Oregonator como modelo de la dinámica de la reacción de Belousov-Zhabotinsky, se clasificaron los puntos fijos con carácter reactivo en el espacio de parámetros, obteniéndose una región de estabilidad respecto a un estado estacionario y otra de inestabilidad respecto a un ciclo límite; además, se obtuvo la curva de bifurcación de Hopf entre ambos regímenes, la cual depende de un parámetro de control asociado a la acidez de la solución. Adicionalmente al análisis teórico, realizamos experimentos en los que se obtuvo una distribución de puntos en el espacio de concentraciones semejante a la predicha por el Oregonator en el espacio de parámetros además de un margen que tiene el mismo significado que la curva de bifurcación. También se verificó la variación de dicho margen respecto a la acidez de la solución. Otro tipo de puntos fijos tienen carácter no-reactivo en tanto las especies químicas que dan lugar a la reacción no se pongan en contacto. El grado de concordancia entre el modelo y el experimento permite considerar la importancia del Oregonator de dos variables, aproximación que en general da resultados satisfactorios.

Código(s) PACS: 05.45.-a, 82.40.Bj, 82.40.Qt

Descriptores: Dinámica no lineal — Reacciones químicas — Oscilaciones y bifurcaciones en fisicoquímica — Sistemas químicos complejos.

ABSTRACT

Using the nonlinear differential equations of the Oregonator model to explain the Belousov-Zhabotinsky reaction, we classify the reactive fixed points into the parameter space. We obtain a stability region and an unstability one referred to a steady state and a limit cycle respectively; a Hopf bifurcation curve is established between both regions. This curve depends on a control parameter related to the acidity of the solution. Additionally to the theoretical analysis, we carried out experiments showing that the parameter space related to the concentrations is similar to that predicted by the Oregonator; and also an edge that has the same meaning as the bifurcation curve. We verify the dependence of this edge with the solution acidity. Other fixed points have a nonreactive feature while the reagents are not mixed. The agreement between the results from the model and the experiment gives rise to consider the importance of the Oregonator with two variables, approximation that gives, in general, satisfactory results.

Subject headings: Nonlinear dynamics — Chemical reactions — Oscillations, chaos, and bifurcations — Complex chemical systems

1. INTRODUCCIÓN

Entre los fenómenos químicos complejos más representativos desde el punto de vista teórico y experimental se encuentra la reacción de Belousov-Zhabotinsky (BZ) que en su forma más difundida

consiste en la oxidación de ácido malónico por iones bromato catalizada por iones de cerio en medio ácido, tal como se presenta por ejemplo en Field et al. (1972), en Zhabotinsky (2007) y en Gray & Scott (1994). Se considera que esta reacción se lleva a cabo a través de dos conjuntos de procesos inorgánicos monótonos alternados gracias a un tercer conjunto de reacciones orgánicas, lo que a escala macroscópica

[†]sorgeoport@gmail.com

[‡]http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/

significa la variación en la concentración de determinadas especies químicas en forma de oscilaciones en medio homogéneo o formando patrones en medio heterogéneo (ver por ejemplo Oporto Almaraz & Ramírez Ávila (2004)).

La importancia de la reacción BZ radica en que esta constituye el modelo de algunos fenómenos biológicos como el proceso de emisión de señales celulares durante la autoorganización de *Dictyostelium Discoideum* descrito en Goldbeter (1994), la actividad tridimensional del ventrículo del corazón mencionada en Murray (2002) y el crecimiento periódico de liquen según Volkenshtein (1985).

Field, Körös y Noyes llevaron a cabo el análisis cinético que condujo al mecanismo FKN, expuesto en Field et al. (1972), y a partir de este, Field & Noyes (1974) propusieron un modelo simplificado irreversible de cinco etapas y tres variables conocido como Oregonator, que conserva la no linealidad de la reacción BZ en grado tal que es capaz de reproducir oscilaciones periódicas y estados estacionarios. Trabajos posteriores reportan una mayor riqueza dinámica ya sea en reactor cerrado (ver Field et al. (1972); Ruoff (1992); Johnson et al. (1997)) o con flujo de sustancia (en Argoul et al. (1987); Hudson & Mankin (1981); Janz et al. (1980); Kepper & Boissonade (1981); Schneider & Mnster (1991)) y mecanismos de hasta 80 etapas elementales, según lo expuesto por Györgyi et al. (1990), que incluyen al Oregonator y con base en los cuales puede reproducirse satisfactoriamente la dinámica compleja de la reacción BZ (por ejemplo, su configuración permanente sobre un atractor extraño) tal como se describe en la secuencia de artículos: Györgyi et al. (1991); Györgyi & Field (1991); Györgyi et al. (1992); Györgyi & Field (1992). Con base en esta última referencia, un trabajo más elaborado desde el punto de vista numérico es el de Freire & Gallas (2011) en el que se investiga un modelo no polinomial de BZ de tres variables con 14 parámetros, incluido el flujo de sustancia, obteniéndose la distribución de modos de oscilación mixtos. Sin embargo, en estos casos la demanda analítica y numérica puede ser mayor y no suele traducirse en la clasificación de la dinámica en el espacio de parámetros. Así, para un sistema de flujo continuo, dependiendo del valor de la velocidad de flujo de sustancia, estos modelos predicen ventanas caóticas alternadas con regiones periódicas aunque no se tiene conocimiento si el Oregonator describe la región de periodo simple. La validez de un modelo no es un problema teórico sino práctico de modo que el objetivo del trabajo reportado en este artículo es llevar a cabo la reacción BZ en reactor cerrado para verificar de forma cualitativa el alcance de las predicciones hechas por el Oregonator, aspecto importante considerando la relativa simplicidad de este modelo. También, el estudio analítico y numérico de fenómenos de mayor complejidad conduce a plantear la significancia del Oregonator de dos y tres variables.

El presente artículo está organizado de la siguiente

forma: en §2 se explica el modelo en sus dos versiones y se efectúa el tratamiento analítico y numérico que conduce a la obtención de la curva de bifurcación y, respecto a esta, la clasificación de los puntos fijos en el espacio de parámetros. En §3 se exponen los aspectos experimentales y se muestra la concordancia de los resultados obtenidos con los predichos por el Oregonator; entre estos, la naturaleza homóloga entre un margen de bifurcación experimental con la curva de bifurcación teórica. En §4 se discuten tanto los resultados analíticos, numéricos y experimentales; haciendo énfasis en la pertinencia de cada uno de ellos y la relación entre estos. Finalmente, en §5 se dan las conclusiones y perspectivas de este trabajo.

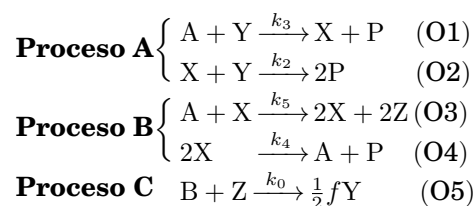
2. MODELO Y SU ANÁLISIS

2.1. Oregonator

Gray & Scott (1994) reportan el Oregonator con variables:

$$X = [\text{HBrO}_2], \quad Y = [\text{Br}^-], \quad Z = [\text{Ce(IV)}],$$

que intervienen en cinco etapas irreversibles:



donde $A = [\text{BrO}_3^-]$, $B = [\text{CH}_2(\text{COOH})_2]$, k_i es la constante cinética asociada a la etapa i y k_0 corresponde a una etapa global; nótese además que (O3) constituye una etapa autocatalítica en X. Las ecuaciones cinéticas rescaladas resultantes constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales autónomo:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{F}(\mathbf{r}; q, \epsilon, \delta, f) = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1}[qy - xy + x(1-x)] \\ \delta^{-1}(-qy - xy + fz) \\ x - z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

donde $\mathbf{r}(\tau) = (x(\tau), y(\tau), z(\tau))^T$ es un punto del espacio de fase Γ equivalente al espacio físico subtendido por X, Y y Z; además del coeficiente estequiométrico f , los parámetros de control son q , ϵ y δ definidos respecto a constantes cinéticas y/o concentraciones químicas:

$$q = \frac{2k_3k_4}{k_2k_5} > 0, \quad \epsilon = \frac{k_0B}{k_5A} > 0, \quad \delta = \frac{2k_4\epsilon}{k_2} > 0. \quad (2)$$

Si la reacción BZ se lleva a cabo a $\text{pH} = 0.097$ ($[\text{H}^+] = 0.8\text{M}$), el valor de las constantes de velocidad de las etapas de los procesos inorgánicos del mecanismo FKN (k_2, k_3, k_4 y k_5) toman los siguientes valores según Gray & Scott (1994)

$$\begin{aligned} k_2 &= 8 \times 10^5 \text{M}^{-1}\text{s}^{-1}, & k_3 &= 1.28\text{M}^{-1}\text{s}^{-1}, \\ k_4 &= 2 \times 10^3 \text{M}^{-1}\text{s}^{-1}, & k_5 &= 8.0\text{M}^{-1}\text{s}^{-1}; \end{aligned}$$

de modo que $q = 0.0008$ y

$$\epsilon = \frac{k_0 B}{8 A} \quad (3)$$

$$\delta = \frac{\epsilon}{200}; \quad (4)$$

k_0 tiene carácter numérico y, del mismo modo que en Gray & Scott (1994) y Mazzotti et al. (1995), se asigna por conveniencia el valor de $1 \text{ M}^{-1}\text{s}^{-1}$, por lo que el número de parámetros en las ecuaciones diferenciales (1) se reduce a dos: ϵ y f .

De la condición de velocidad de fase nula, $0 = \mathbf{F}(\mathbf{r}_S; \epsilon, f)$, se obtienen dos tipos de puntos fijos \mathbf{r}_S :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= (0, 0, 0)^T \\ \mathbf{r}_s &= (x_s, y_s, z_s)^T \end{aligned}$$

con

$$x_s = z_s = \frac{1}{2} \left[1 - f - q + \sqrt{(1 - f - q)^2 + 4q(f + 1)} \right] \quad (5)$$

$$y_s = \frac{fx_s}{q + x_s}. \quad (6)$$

La estabilidad de un punto fijo es relativa a la dinámica de su perturbación, $\delta \mathbf{r}$, que una vez linealizada se escribe

$$\frac{d(\delta \mathbf{r})}{d\tau} = \mathcal{L}(\epsilon, f) \cdot \delta \mathbf{r}, \quad (7)$$

siendo \mathcal{L} la matriz jacobiana de $\mathbf{F}(\mathbf{r}; \epsilon, f)$ evaluada en \mathbf{r}_S , con soluciones $\delta \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 c_i e^{\omega_i t} \mathbf{u}_i$. Para el análisis cualitativo de estas trayectorias basta determinar el conjunto de valores propios $\{\omega_i\}$ que resulta de la ecuación característica

$$\det[\mathcal{L}(\epsilon, f) - \omega \mathcal{I}] = \omega^3 + a_2 \omega^2 + a_1 \omega + a_0 = 0, \quad (8)$$

asociado al problema de valores propios $[\mathcal{L}(\epsilon, f) - \omega \mathcal{I}] \mathbf{u} = 0$, donde \mathcal{I} es la matriz identidad.

Para determinar la naturaleza de los valores propios respecto a la estructura del polinomio característico en (8) serán útiles dos criterios expuestos en Murray (2002):

Routh-Hurwitz. La condición necesaria y suficiente para que las tres raíces de (8) tengan parte real negativa es

$$a_2 > 0, \quad a_0 > 0, \quad a_2 a_1 - a_0 > 0 \quad (9)$$

Descartes. Si N es el número de cambios de signo en la secuencia de los coeficientes de (8) entonces habrá N o $N - 2$ raíces reales y positivas.

2.1.1. Punto fijo $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)^T$

El jacobiano de \mathbf{F} evaluado en \mathbf{r}_0 es

$$\mathcal{L}(f, \epsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon} & \frac{q}{\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-200q}{\epsilon} & \frac{200f}{\epsilon} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

los coeficientes de su ecuación característica (8) están dados por:

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 + \frac{200q - 1}{\epsilon} \\ a_1 &= \frac{200q - 1}{\epsilon} - \frac{200q}{\epsilon^2} < 0 \\ a_0 &= -\frac{200q(1 + f)}{\epsilon^2} < 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la regla de Descartes, cualquiera sea el signo de a_2 sólo habrá un cambio en la secuencia de los signos de los coeficientes del polinomio característico y, por tanto, el número de valores propios con parte real positiva será igual a uno, en consecuencia este punto fijo es siempre inestable.

2.1.2. Punto fijo $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)^T$

La matriz del sistema linealizado correspondiente es

$$\mathcal{L}(f, \epsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1-2x_s-y_s}{\epsilon} & \frac{q-x_s}{\epsilon} & 0 \\ \frac{-200y_s}{\epsilon} & \frac{-200(q+x_s)}{\epsilon} & \frac{200f}{\epsilon} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

en este caso se encuentra que los coeficientes de la ecuación característica (8) son:

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 + \frac{1}{\epsilon} [200(q + x_s) + E] > 0 \\ a_1 &= \frac{1}{\epsilon} [200(q + x_s) + E] + \frac{200}{\epsilon^2} [E(q + x_s) + y_s(q - x_s)] \\ a_0 &= \frac{200}{\epsilon^2} [x_s^2 + q(1 + f)] > 0 \end{aligned}$$

con

$$E = -1 + 2x_s + y_s = \frac{x_s^2 + q(f + x_s)}{q + x_s} > 0.$$

El signo de a_1 no está definido de modo que este determina la estabilidad de \mathbf{r}_s . Si $a_2 a_1 - a_0 > 0$ entonces, de acuerdo al criterio de Routh-Hurwitz, la parte real de los valores propios será negativa y el punto fijo correspondiente será estable. Lo anterior implica que $a_2 a_1 > a_0 > 0$ sí y solo sí $a_1 > 0$ y en consecuencia no hay cambio en los signos de los coeficientes del polinomio característico, por lo que, de acuerdo a la regla de Descartes, el número de valores propios con parte real positiva es nulo. La regla de Descartes permite también afirmar que los puntos fijos serán inestables si y solo si $a_1 < 0$, pues en tal caso hay dos cambios en el signo de los coeficientes del polinomio característico y, por tanto, el número de valores propios con parte real positiva será también dos. En este caso se verifica estrictamente que $a_2 a_1 - a_0 < 0$.

Los casos anteriores están separados por una bifurcación de Hopf donde la parte real de sus valores propios imaginarios son nulos, es decir, $\omega_{2,3} = \pm i \Omega_c$, siendo $\Omega_c = \text{Im}(\omega_i) \neq 0$. Una vez reemplazadas las soluciones imaginarias en (8) se demuestra que la condición de bifurcación de Hopf para un sistema de tres variables es:

$$a_2 a_1 - a_0 = 0. \quad (10)$$

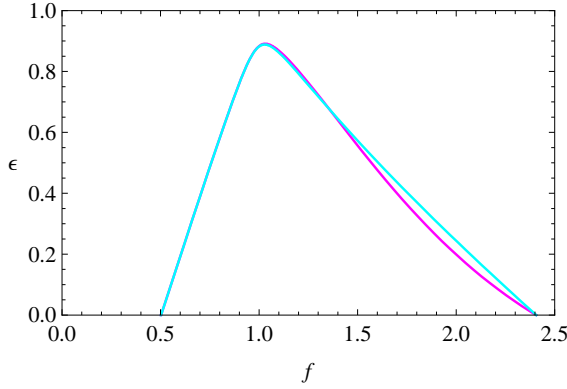


FIG. 1.— (Color online) Curva de bifurcación del Oregonator (magenta) y del Oregonator de dos variables (cian), descritos por (1) y (15) respectivamente.

De acuerdo a lo anterior, los puntos fijos r_s se pueden clasificar según:

$$a_{s2}a_{s1} - a_{s0} \begin{cases} > 0 & \text{estable} \\ = 0 & \text{bifurcación de Hopf} \\ < 0 & \text{inestable} \end{cases}$$

Dado que $\omega_i = \omega_i(q, f, \epsilon)$, la estabilidad de un punto fijo puede representarse en el espacio de parámetros $\epsilon-f$, para lo que basta analizar la condición de bifurcación de Hopf. Así, sustituyendo a_2 , a_1 y a_0 en (10) se obtiene

$$a_{s2}a_{s1} - a_{s0} = \epsilon_c^2 P + \epsilon_c Q + R = 0, \quad (11)$$

donde ϵ_c indica el valor crítico de ese parámetro y

$$P = 200(q + x_s) + E > 0$$

$$Q = P^2 + 200f(q - x_s)$$

$$R = 200P[x_s^2 + q(f + 1) + f(q - x_s)]$$

y dado que $\epsilon_c > 0$, sólo es permitida la raíz positiva de la ecuación (11):

$$\epsilon_c = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}; \quad (12)$$

P , Q y R dependen de f y, estando q bien definido, sólo resta determinar el intervalo de variación de f para la función ϵ_c ; para esto, considerando el caso límite $\epsilon_c = 0$ en (12) se obtiene $\frac{R}{P} = 0$ y por tanto $R = 0$, cuyas raíces constituyen las cotas inferior y superior del dominio de ϵ_c :

$$0.50241 < f < 2.40624. \quad (13)$$

Dado que el número de intersecciones de la curva de bifurcación con el eje f es dos, cualquier valor fuera del intervalo (13) da un ϵ negativo, no permitido físicamente. En la Figura 1 se grafica la función $\epsilon_c = \epsilon_c(q, f)$ en el espacio de parámetros $\epsilon-f$ con $q = 0.0008$, cuyo análisis de puntos críticos da el máximo en $(f^*, \epsilon_c^*) = (1.0317, 0.89084)$ de acuerdo al criterio de la segunda derivada $(\frac{d^2 \epsilon_c}{df^2})|_{(f^*=1.0317)} = -13.4$.

El cálculo de los valores propios de la ecuación característica (8) equivalen a las raíces del polinomio

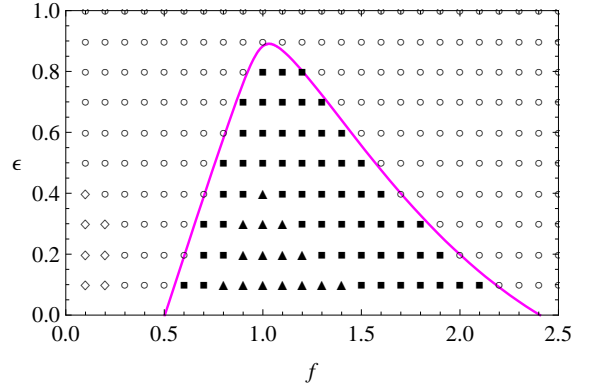


FIG. 2.— (Color online.) Clasificación de los puntos (f, ϵ) de acuerdo al criterio de Routh-Hurwitz y por la naturaleza de sus valores propios asociados de acuerdo a la Tabla 1. Los puntos en negro pertenecen a la región de inestabilidad ($a_2 a_1 - a_0 < 0$) y en blanco aquellos que son estables ($a_2 a_1 - a_0 > 0$). El límite de bifurcación de Hopf corresponde a $a_2 a_1 - a_0 = 0$.

TABLA 1
CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS FIJOS DEL OREGONATOR.

	Valores propios	Estabilidad
○	$\omega_1 < 0, \omega_2 = \omega_3^*, \text{Re}(\omega_{2,3}) < 0$	Nodo-foco estable
◇	$\omega_1 \ll \omega_2 < \omega_3 < 0$	Nodo estable
□	$\omega_1 < 0, \omega_2 = \omega_3^*, \text{Re}(\omega_{2,3}) > 0$	Silla-foco
△	$\omega_1 < 0, \omega_3 > \omega_2 > 0$	Silla

de tercer grado:

$$\omega_1 = -\frac{1}{3}(a_{s2} + S + T)$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{3}\left(a_{s2} - \frac{S+T}{2} - \frac{S-T}{2}\sqrt{-3}\right)$$

$$\omega_3 = -\frac{1}{3}\left(a_{s2} - \frac{S+T}{2} + \frac{S-T}{2}\sqrt{-3}\right)$$

con

$$m = 2a_2^3 - 9a_2 a_1 + 27a_0$$

$$k = a_2^2 - 3a_1$$

$$n = m^2 - 4k^3$$

$$S = \sqrt[3]{\frac{m + \sqrt{n}}{2}}$$

$$T = \sqrt[3]{\frac{m - \sqrt{n}}{2}}.$$

El cálculo de ω_1 , ω_2 y ω_3 y la determinación del signo de $a_2 a_1 - a_0$ permite clasificar los puntos (f, ϵ) de acuerdo a su estabilidad tal como se muestra en la Figura 2 y en la Tabla 1 en la que se hace referencia a las etiquetas de cada región de acuerdo a la naturaleza de la parte real de los valores propios asociados.

Se verificó la clasificación de los puntos fijos predicho por el análisis de estabilidad lineal llevando a cabo la integración numérica del Oregonator a través del método Runge-Kutta de cuarto orden asignándose una tolerancia relativa de 10^{-12} y una

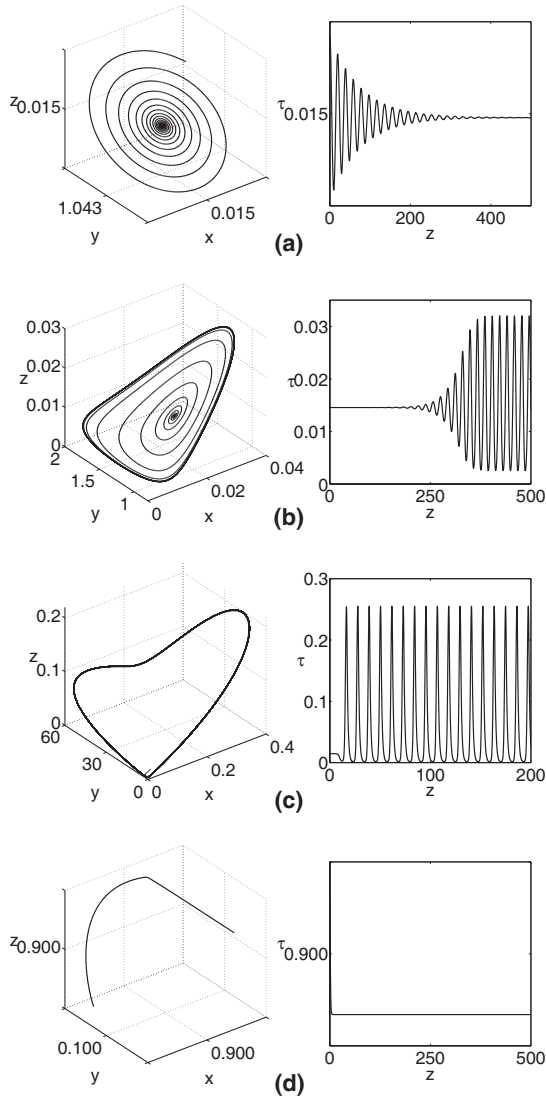


FIG. 3.— Espacio de fase (izquierda) y series temporales (derecha) para el Oregonator con $q = 0.0008$. $f = 1.1$ en los casos (a). nodo-foco estable, $\epsilon = 0.9$ ($\omega_1 = -4.4673$, $\omega_{2,3} = -0.0132 \pm 0.3231i$), (b), silla-foco, $\epsilon = 0.8$ ($\omega_1 = -4.9961$, $\omega_{2,3} = 0.0328 \pm 0.3424i$) y (c), silla, $\epsilon = 0.3$ ($\omega_1 = -12.9681$, $\omega_2 = 0.2655$, $\omega_3 = 1.2213$). $f = 0.1$ para (d). nodo estable, $\epsilon = 0.3$ ($\omega_1 = -600.9862$, $\omega_2 = -2.4341$, $\omega_3 = -1.2323$).

tolerancia absoluta de 10^{-12} en cada variable, el paso de integración fue 0.1 y las condiciones iniciales se definieron a partir de los puntos fijos truncados en la sexta cifra decimal con el fin de tener a estos, prácticamente, como referencia de la dinámica generada por su variación. De este modo, se obtuvieron las trayectorias en el espacio de fases y las series temporales correspondientes a puntos en el espacio de parámetros próximos a la región entre regímenes dinámicos distintos. En la Figura 3 se muestran los casos con $f = 1.1$ y $f = 0.1$ para diferentes valores de ϵ . Además, cada uno de estos se acompaña con los valores propios obtenidos del análisis de estabilidad lineal.

2.2. Oregonator de dos variables

Para fines de comparación se obtiene el límite de bifurcación en la versión de dos variables del Oregonator, a la que en adelante se denominará Oregonator 2D. La suposición fundamental es que, dado que el parámetro $\delta = \epsilon/200$ es particularmente pequeño, la velocidad de variación dy/dt se ajusta rápidamente a la composición instantánea de la mezcla pudiendo efectuarse la aproximación del estado estacionario $dy/dt = 0$ (véase Gray & Scott (1994); Crowley & Field (1984)), con lo que se obtiene

$$y = \frac{fz}{q+x}, \quad (14)$$

de este modo, el número de variables se reduce a dos, $\mathbf{r} = (x, z)^T$, y el sistema de ecuaciones diferenciales queda en la forma:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{F}(\mathbf{r}; \epsilon, f) = \begin{pmatrix} \epsilon^{-1} \left[x(1-x) + (q-x) \frac{fz}{q+x} \right] \\ x - z \end{pmatrix}. \quad (15)$$

En este caso los puntos fijos son:

$$\mathbf{r}_0 = (0, 0)^T \\ \mathbf{r}_s = (x_s, x_s)^T,$$

con x_s dado por (5).

La ecuación característica asociada al problema de valores propios tiene la forma:

$$\omega_m^2 - T\omega_m + \Delta = 0, \quad m = 1, 2, \quad (16)$$

donde $T = \sum_i \mathcal{L}_{ii}$ y $\Delta = \det \mathcal{L}$, cuya solución es

$$\omega_{1,2} = \frac{T \pm (T^2 - 4\Delta)^{1/2}}{2} = \frac{T \pm D^{1/2}}{2}, \quad (17)$$

de modo que el discriminante D condiciona la naturaleza real o compleja de los valores propios mientras que T determina la estabilidad del punto fijo. Se debe mencionar que en esta caso, no es posible que se generen oscilaciones caóticas.

2.2.1. Punto fijo $\mathbf{r}_0 = (0, 0)^T$

En este caso la matriz \mathcal{L} del problema linealizado es

$$\mathcal{L}(f, \epsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon} & \frac{f}{\epsilon} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y la ecuación característica (16) tiene traza y determinante:

$$T = \frac{1}{\epsilon} - 1, \quad \Delta = -\frac{1+f}{\epsilon} < 0. \quad (18)$$

Por tanto, cualquiera sea el signo de T se tendrá siempre un cambio en el signo de los términos del polinomio característico; por lo que de acuerdo a la regla de Descartes, el número de raíces con parte real positiva será también uno. En consecuencia el punto fijo es inestable.

En estas circunstancias, $D > 0$ y el único caso límite posible es entre puntos silla cuando $T = 0$, igualdad que implica la función constante $\epsilon = 1$ cuyo intervalo de variación se obtiene de $\Delta < 0$, de donde $f > -1$, desigualdad válida siempre que $f > 0$. Por tanto, el punto fijo \mathbf{r}_0 es inestable e inaccesible.

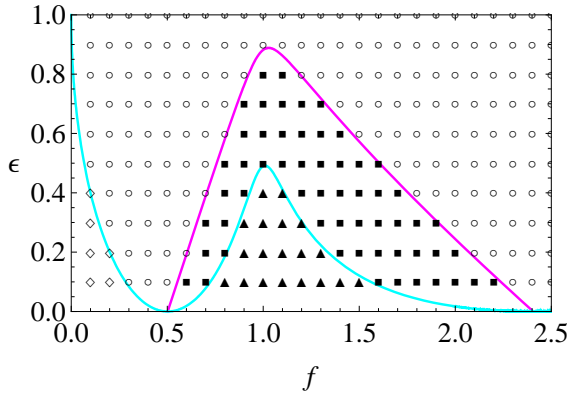


FIG. 4.— (Color online) Clasificación de los puntos (f, ϵ) para el Oregonator 2D de acuerdo al signo de la traza y por la naturaleza de sus valores propios asociados según la Tabla 2. Los puntos en negro pertenecen a la región de inestabilidad ($T > 0$) y en blanco aquellos que son estables ($T < 0$); además, en magenta, el límite de bifurcación de Hopf ($T = 0$), en cian, el límite entre nodos y focos de igual estabilidad ($D = 0$).

2.2.2. Punto fijo $\mathbf{r}_s = (x_s, x_s)$

La matriz \mathcal{L} del sistema linealizado es

$$\mathcal{L}(f, \epsilon) = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

donde

$$a = \frac{1}{\epsilon} \left[1 - 2x_s - \frac{2fqx_s}{(q+x_s)^2} \right] \quad (20)$$

$$b = \frac{f(q-x_s)}{\epsilon(q+x_s)}. \quad (21)$$

Las soluciones (17) de la ecuación característica (16) asociada están dadas en términos de la traza, T , y el determinante, Δ , de \mathcal{L} :

$$T = a - 1 \quad (22)$$

$$\Delta = -(a+b) = \frac{x_s^2 + 2qy_s + qx_s}{\epsilon(q+x_s)} > 0. \quad (23)$$

Dado que $\Delta > 0$, la condición de bifurcación de Hopf es $T = 0$, a partir del cual se halla que

$$\epsilon_c = 1 - 2x_s \left[1 + \frac{fq}{(q+x_s)^2} \right], \quad (24)$$

ecuación que define la región de bifurcación entre focos estables e inestables para el Oregonator 2D y que se muestra en la Figura 1 para $q = 0.0008$. El dominio de la función $\epsilon_c = \epsilon_c(f)$ es el mismo que el obtenido para el Oregonator, desigualdad (13), mientras que los valores máximos son $(f^*, \epsilon_c^*) = (1.0282, 0.8884)$; en este caso, el análisis de puntos críticos da $\frac{d^2\epsilon_c}{df^2} \Big|_{(f^*=1.0282)} = -14.6$.

Se verificaron las regiones predichas por el límite de bifurcación del Oregonator 2D mediante la obtención de los valores propios (17) para diferentes intervalos de f y ϵ , clasificándose así los puntos fijos en el espacio de parámetros ϵ - f de la Figura 4 de acuerdo al discriminante y la traza tal como se indica en la Tabla 2.

TABLA 2

CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS FIJOS DEL OREGONATOR DE DOS VARIABLES.

	D	T	Valores propios	Estabilidad
○	< 0	< 0	$\omega_1 = \omega_2^*$, $\text{Re}\omega_{1,2} < 0$	Foco estable
◇	> 0	< 0	$\omega_{1,2} < 0$	Nodo estable
□	< 0	> 0	$\omega_1 = \omega_2^*$, $\text{Re}\omega_{1,2} > 0$	Foco inestable
△	> 0	> 0	$\omega_{1,2} > 0$	Nodo inestable

Para el Oregonator y el Oregonator 2D, tanto en la región de estabilidad y como en la de inestabilidad del espacio de parámetros se diferencian subregiones caracterizadas, en uno u otro caso, por valores propios reales o imaginarios. Para el Oregonator 2D el límite entre estos regímenes se obtiene de la condición $D = 0$ cuya curva en el espacio de parámetros se muestra en la Figura 4.

Por otro lado, mediante integración numérica de (15) se verifica la dinámica de los puntos que delimitan las diferentes regiones en la Figura 4, asignando las mismas condiciones de integración que se emplearon para el Oregonator. En la Figura 5 se compara la proyección de las trayectorias del Oregonator en el plano de fase z - x con las obtenidas a partir de su versión en dos variables, estos son casos que corresponden a puntos fijos cuyas etiquetas coinciden una vez sobrepuestos los espacios paramétricos de ambos modelos. En la Figura 6 se tienen ejemplos de casos en los que dichas etiquetas no coinciden, presentándose comportamientos menos concordantes: en 6-(a) se comparan un silla-foco (□) del Oregonator con un nodo inestable (△) del Oregonator 2D, respectivamente; pero las situaciones realmente dispares son aquellas en las que las dinámicas son cualitativamente distintas, así por ejemplo, el caso 6-(b) corresponde a un nodo-foco estable (○) del Oregonator y un foco inestable (□) del Oregonator, respectivamente.

Las etiquetas para puntos fijos estables en el Oregonator pero inestables en el Oregonator 2D corresponden a la franja definida entre sus curvas de bifurcación mostrada en la Figura 1, la cual refleja la discrepancia entre ambos modelos. Dado que el perfil de bifurcación depende de los parámetros q y f (ver (12) y (24)) lo mismo ocurre con la región de discrepancia tal como se observa en la Figura 7.

3. ASPECTOS EXPERIMENTALES

3.1. Modelo FKN ampliado

Los valores de los parámetros f y k_0 que aparecen en el Oregonator tienen un carácter numérico debido a la falta de información cinética de las etapas orgánicas de la reacción BZ en la época que dicho modelo fue propuesto. Hoy se entiende mejor estos procesos y se reconoce el rol dinámico de especies como el ácido bromomalónico (BrAM), derivado del ácido malónico (AM).

Considérese la versión ampliada del mecanismo FKN en el que el ión Ce^{+4} oxida tanto a AM como

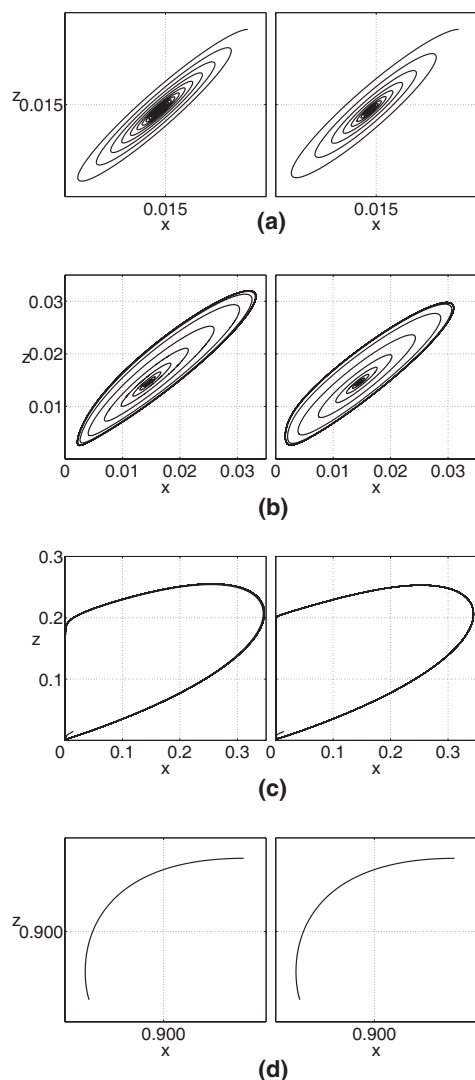


FIG. 5.— Plano de fase z - x (derecha) para la versión reducida del Oregonator, $q = 0.0008$. $f = 1.1$ en los casos: **(a)**. foco inestable, $\epsilon = 0.9$ ($D = -0.5456$, $T = -0.0419$, $\omega_{1,2} = -0.0209 \pm 0.3693i$), **(b)**. foco estable, $\epsilon = 0.8$ ($D = -0.6097$, $T = 0.0778$, $\omega_{1,2} = 0.0389 \pm 0.3904i$) y **(c)** punto silla, $\epsilon = 0.3$ ($D = 1.8707$, $T = 1.8742$, $\omega_1 = 1.6210$, $\omega_2 = 0.2532$). Para $f = 0.1$: **(d)**. nodo estable, $\epsilon = 0.3$ ($D = 1.4527$, $T = -3.6684$, $\omega_1 = -1.2316$, $\omega_2 = -2.4369$). A la izquierda, los planos de fase z - x correspondientes al Oregonator de tres variables.

a BrAM, según se expone en Gray & Scott (1994):



cuyas ecuaciones cinéticas son, respectivamente,

$$v_a = k_a[\text{AM}][\text{Ce}^{+4}], \quad (25)$$

$$v_b = k_b[\text{BrAM}][\text{Ce}^{+4}], \quad (26)$$

y Q y R son productos inertes. La combinación de ambas etapas da la reacción neta:

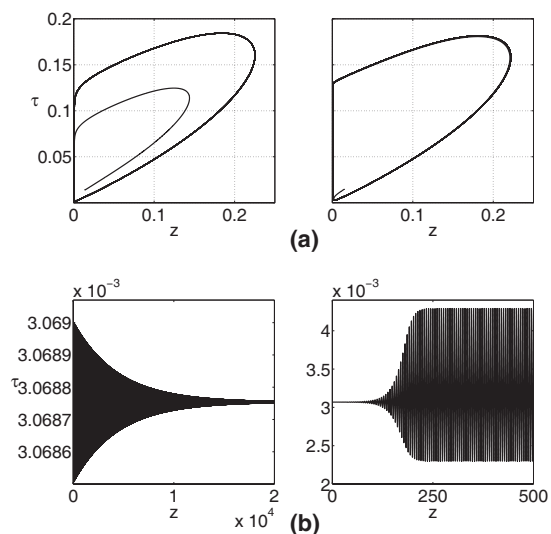
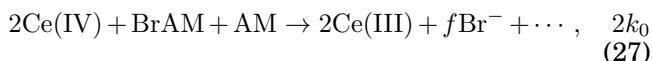


FIG. 6.— Comparación la dinámica de un punto fijo con diferentes etiquetas en el espacio de parámetros del Oregonator (izquierda) con el correspondiente al del Oregonator 2D (derecha). $q = 0.0008$, $\epsilon = 0.4$. **(a)** $f = 1.1$, Oregonator: $\omega_1 = -9.7755$, $\omega_{23} = 0.4572 \pm 0.1813i$; Oregonator 2D: $\omega_1 = 0.7391$, $\omega_2 = 0.4166$. **(b)** $f = 1.7$, Oregonator: $\omega_1 = -3.8204$, $\omega_{23} = -0.0002 \pm 0.8425i$; Oregonator 2D: $\omega_{12} = 0.0452 \pm 1.1831i$, en este último caso se vio conveniente emplear las series temporales de la variable z en vez del plano de fase z - x .

cuya ley de velocidad empírica es

$$v_C = -\frac{d[\text{Ce}^{+4}]}{dt} = k_0[\text{Org}][\text{Ce}^{+4}]. \quad (28)$$

A partir de (25), (26) y (28) se demuestra que:

$$f = \frac{2k_b[\text{BrAM}]}{k_0[\text{Org}]}, \quad (29)$$

con

$$k_0[\text{Org}] = k_a[\text{AM}] + k_b[\text{BrAM}]. \quad (30)$$

Para un $\text{pH} = 0.097$, las ecuaciones (3) y (29) indican que los valores de ϵ y f pueden modificarse variando las concentraciones de reactivos respecto a los cuales están definidos, lo que, en principio, plantea la obtención experimental del espacio ϵ - f una vez que se asocia a cada punto (f , ϵ) la variación temporal, esto es, la serie cinética de alguna de las concentraciones relacionadas a las variables dinámicas del Oregonator.

3.2. Reacción de Belousov-Zhabotinsky en reactor cerrado y espacio de concentraciones.

El Oregonator modela un régimen estacionario de la concentración de reactivos e intermedios en un reactor agitado de flujo continuo de sustancia. Experimentalmente se tuvo la posibilidad de llevar a cabo la reacción BZ en reactor cerrado, observándose oscilaciones durante horas y su tendencia al equilibrio (ver Oporto Almaraz & Ramírez Ávila (2004)). Por tanto, puede suponerse que la dinámica en un sistema de flujo continuo significa un *instante* del proceso que se lleva a cabo en reactor cerrado; experi-

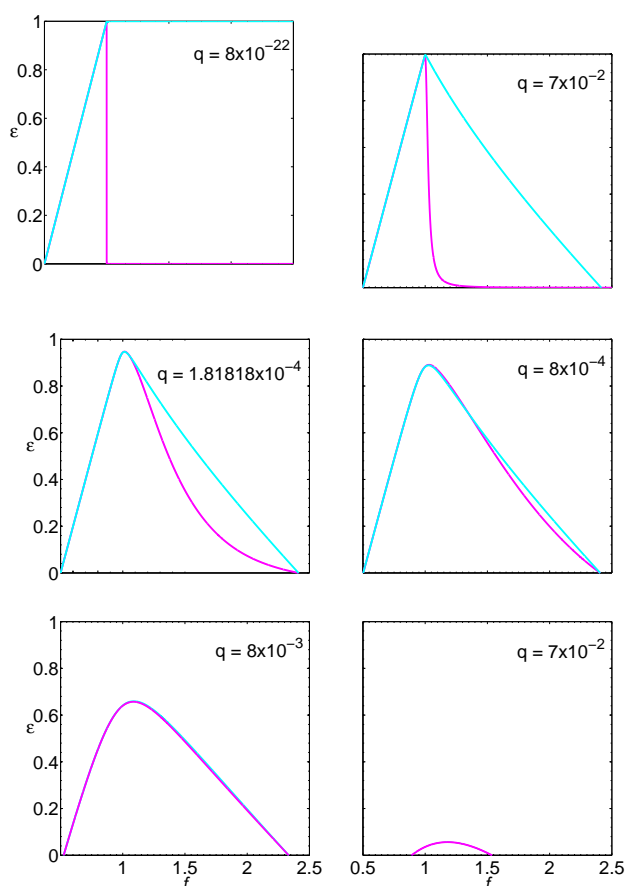


FIG. 7. — (Color online) Variación del perfil de bifurcación y de la franja de discrepancia entre el Oregonator (magenta) y el Oregonator 2D (cian) a diferentes valores de q . Se observa que mientras menor es el valor de q mayor es la discrepancia entre los perfiles de bifurcación.

mentalmente dicho instante puede aproximarse a un



una vez que se lleva a cabo esta reacción se definen las concentraciones molares de referencia:

$$[\text{BrO}_3^-] = \frac{1}{4} \left([\text{BrO}_3^-]_0 - \frac{1}{2} [\text{Br}^-]_0 \right) \quad (35)$$

$$[\text{Br}^-] = 0 \quad (36)$$

$$[\text{AM}] = \frac{1}{4} \left([\text{AM}]_0 - \frac{3}{2} [\text{Br}^-]_0 \right) \quad (37)$$

$$[\text{BrAM}] = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} [\text{Br}^-]_0 \right) \quad (38)$$

$$[\text{H}^+] = C_T - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} [\text{Br}^-]_0 \right) + x, \quad (39)$$

intervalo de tiempo finito, mayor o menor, siempre que mantenga determinado grado de correspondencia con el sistema de flujo continuo, de modo que el valor de las concentraciones iniciales de AM, BrAM y BrO_3^- permitirían obtener experimentalmente los puntos del espacio de parámetros $\epsilon-f$.

En la práctica, el planteamiento expuesto requiere consideraciones adicionales. Los puntos (f, ϵ) no están completamente definidos a partir de las ecuaciones (3) y (29) debido a que no se conoce los valores de las constantes k_a y k_b ; rescribamos dichas ecuaciones del siguiente modo:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{8} \frac{[\text{Org}]}{[\text{BrO}_3^-]} \quad (31)$$

$$f_0 = \frac{2k_b[\text{BrAM}]}{[\text{Org}]}, \quad (32)$$

donde $f_0 = fk_0$ y $\epsilon_0 = \epsilon/k_0$ con unidades $\text{M}^{-1}\text{s}^{-1}$ y Ms, respectivamente, y de acuerdo a (27)

$$[\text{Org}] = \frac{1}{2} ([\text{AM}] + [\text{BrAM}]), \quad (33)$$

un instante antes de que comience la reacción. El espacio ϵ_0-f_0 se denominará *espacio de concentraciones*, equivalente a $\epsilon-f$. La constante k_b juega un rol de factor de escala en la ecuación de f_0 al que se le asigna un valor de $k_b = 0.5\text{M}^{-1}\text{s}^{-1}$, mientras que ϵ_0 queda completamente definido respecto a las concentraciones de las especies orgánicas y del ión bromato.

3.3. Concentraciones de referencia y procedimiento.

El número de variables en (31), (32) y (33) puede disminuirse a $[\text{AM}]$ y $[\text{BrO}_3^-]$ manteniendo el valor de $[\text{BrAM}]$ constante, lo que es posible llevando a cabo la reacción de bromación con una pequeña cantidad de bromuro como reactivo limitante:

donde la concentración formal total de H_2SO_4 , C_T , está dada por

$$C_T = \frac{1}{4}(C_{10} + C_{20}), \quad (40)$$

y, empleando la teoría de los equilibrios ácido-base para la disociación de H_2SO_4 , se demuestra que

$$x = \frac{1}{2} \left[- \left(C_T - \frac{3}{2} \frac{1}{4} [\text{Br}^-]_0 + K_2 \right) + \sqrt{\left(C_T - \frac{3}{2} \frac{1}{4} [\text{Br}^-]_0 + K_2 \right)^2 + 4K_2 C_T} \right], \quad (41)$$

siendo $K_2 = 10^{-1.92}$ la constante ácido-base para la segunda disociación del H_2SO_4 . El significado de C_{10} y C_{20} se expone a continuación.

En las ecuaciones (35) a (41), $1/4$ es un factor de corrección por dilución respecto a las concentraciones iniciales formales $[P]_0$, donde P representa la fórmula molecular de los reactivos, debido a que la reacción de bromación se lleva a cabo mezclando tres soluciones, cada una de volumen $V_T/4$, con concentraciones $[AM]_0/[Br^-]_0$, $[BrO_3^-]_0$ y $C_{20} = [H_2SO_4]_{20}$, mezcla que se agita y a la que a continuación se añade un volumen $V_T/4$ de una solución $[Ce(III)]_0/C_{10}$ dando así inicio a la reacción BZ. El volumen total de la mezcla es $V_T = 0.9$ ml. el cual se agita y se traspasa a una cubeta de cuarzo que introducida en un equipo UV-visible (Lambda-25) permite obtener la serie temporal de la absorbancia de la reacción a una longitud de onda de 400 nm.

A partir de (35), (37) y (38) se determinan los puntos (f_0, ϵ_0) mientras que la concentración de ión hidronio en (39) permite calcular el pH de la solución.

Las concentraciones formales (F) iniciales de las soluciones de reactivos fueron:

$$[AM]_0/[Br^-]_0 = [AM]_0 F / 0.0100 F, \text{ para diferentes } [AM]_0.$$

$[BrO_3^-]_0$, en diferentes concentraciones.

$$C_{20} = [H_2SO_4]_{20} = 1.3447 F \text{ para pH} = 0.097.$$

$$C_{20} = [H_2SO_4]_{20} = 0.1506 F \text{ para pH} = 0.3.$$

$$[Ce(III)]_0/C_{10} = 0.0080 F / 1.8231 F.$$

La preparación de las soluciones mencionadas se hizo por pesada de sustancias sólidas: $CH_2(COOH)_2$ al 98%, $Ce_2(SO_4)_3$ al 97% y $KBrO_3$ y $NaBr$, ambos, químicamente puros. La única sustancia líquida empleada fue el H_2SO_4 18.2310 F, concentración obtenida por titulación con una solución de $NaOH$ 0.1375 F a la vez valorada con una solución de HCl 0.1141 F, concentración que se determinó por pesada directa de Na_2CO_3 químicamente puro.

3.4. Resultados.

Los puntos en el espacio de concentraciones ϵ_0-f_0 se clasifican en dos regiones: una de estados estacionarios y otra de oscilaciones; en ambos casos, con presencia de un transiente corto. Algunos de dichos puntos se muestran en la Figura 8. Mediante un examen visual se identificaron oscilaciones periódicas como el punto (0.037, 1.58), biperiódicas como (0.037, 0.56), irregulares como (0.037, 0.42) e histéresis entre regímenes oscilantes, (0.015, 1.40), o entre un estado estacionario y uno oscilatorio, (0.012, 1.58); casos de este último tipo pueden corresponder a oscilaciones precedidas por periodo de inducción. Dado que el fenómeno de histéresis refleja las variaciones temporales de los parámetros de control así como de la concentración de ión hidronio, una serie cinética que presenta periodo de inducción no puede realmente asociarse a un punto (f_0, ϵ_0) ; razón por la cual estos casos se excluyen de la región de oscilación.

Se define como el *margen de bifurcación* a la región comprendida entre los puntos máximos de oscilación

TABLA 3

COMPARACIÓN DE LA VARIACIÓN DE LA AMPLITUD (A) Y LA FRECUENCIA (ν) RESPECTO A LOS PARÁMETROS DE CONTROL ENTRE LAS OSCILACIONES OBTENIDAS TEÓRICAMENTE Y EL COMPORTAMIENTO EXPERIMENTAL, ASUMIÉNDOSE QUE $\epsilon \equiv \epsilon_0$ Y $f \equiv f_0$.

Parámetros	Teórico	Experimental
$f = \text{cte},$	$\nu_1 > \nu_2$	$\nu_1 > \nu_2$
$\epsilon_1 < \epsilon_2$	$A_1 > A_2$	$A_1 > A_2$
$\epsilon = \text{cte},$	$\nu_1 < \nu_2$	$\nu_1 > \nu_2$
$f_1 < f_2$	$A_1 > A_2$	$A_1 \approx A_2$

y los puntos mínimos de los estados estacionarios en el espacio ϵ_0-f_0 , que unidos por una línea dan una idea del límite de bifurcación experimental. Con base en los datos experimentales, en la Figura 9 se compara el margen de bifurcación a pH 0.097 y 0.3.

En la Tabla 3 se resume el comportamiento de los ritmos de oscilación experimentales (véase Figura 8) y se los compara con los diferentes casos predichos por el Oregonator tanto a f como para ϵ constantes, observándose una discrepancia en este último caso.

4. DISCUSIÓN

El espacio de parámetros constituye el ámbito de existencia del sistema en el sentido de que representa las posibilidades dinámicas a las que este puede acceder. Por esta razón, el resultado más importante del tratamiento analítico y numérico de las ecuaciones diferenciales del Oregonator es la clasificación de sus puntos fijos en el espacio de parámetros $\epsilon-f$ de acuerdo a su estabilidad y la obtención de la curva de bifurcación. De forma análoga para los resultados experimentales, la obtención de los puntos del espacio de concentraciones ϵ_0-f_0 y el margen de bifurcación.

Análiticamente se obtuvieron dos tipos de puntos fijos: r_0 y r_s . Debido a la nulidad en las variables dinámicas, el primer caso constituye un punto fijo que no da lugar a la reacción y que es inestable respecto a las variedades invariantes asociadas a r_s . El análisis llevado a cabo con algún detalle para el Oregonator 2D demostró que $r_0 = (0, 0)$ es un punto silla que, en consecuencia, es inaccesible cualquiera sea el valor de ϵ y f ; o desde el punto de vista químico, cualesquiera sean las concentraciones que definen estos parámetros. Lo último se debe a que dichas concentraciones no llegan a mezclarse de modo que den lugar a la reacción BZ.

Experimentalmente se comprobó que la ocurrencia de la reacción BZ constituye una perturbación de un sistema no reactivo, que puede asociarse al punto fijo r_0 , una vez que se mezclan dos soluciones cuyas concentraciones (dadas en un caso por las Ecuaciones (35) a (38) y en el otro por $[Ce(III)]$) constituyen magnitudes instantáneas que varían desde el comienzo de la reacción y a partir de las cuales se calculan los puntos (f_0, ϵ_0) . De hecho, gran parte de las series cinéticas, oscilantes o no, presentan un transiente que da una idea del carácter perturbativo de la ocurrencia de la reacción.

La clasificación de los puntos fijos r_s en el espacio

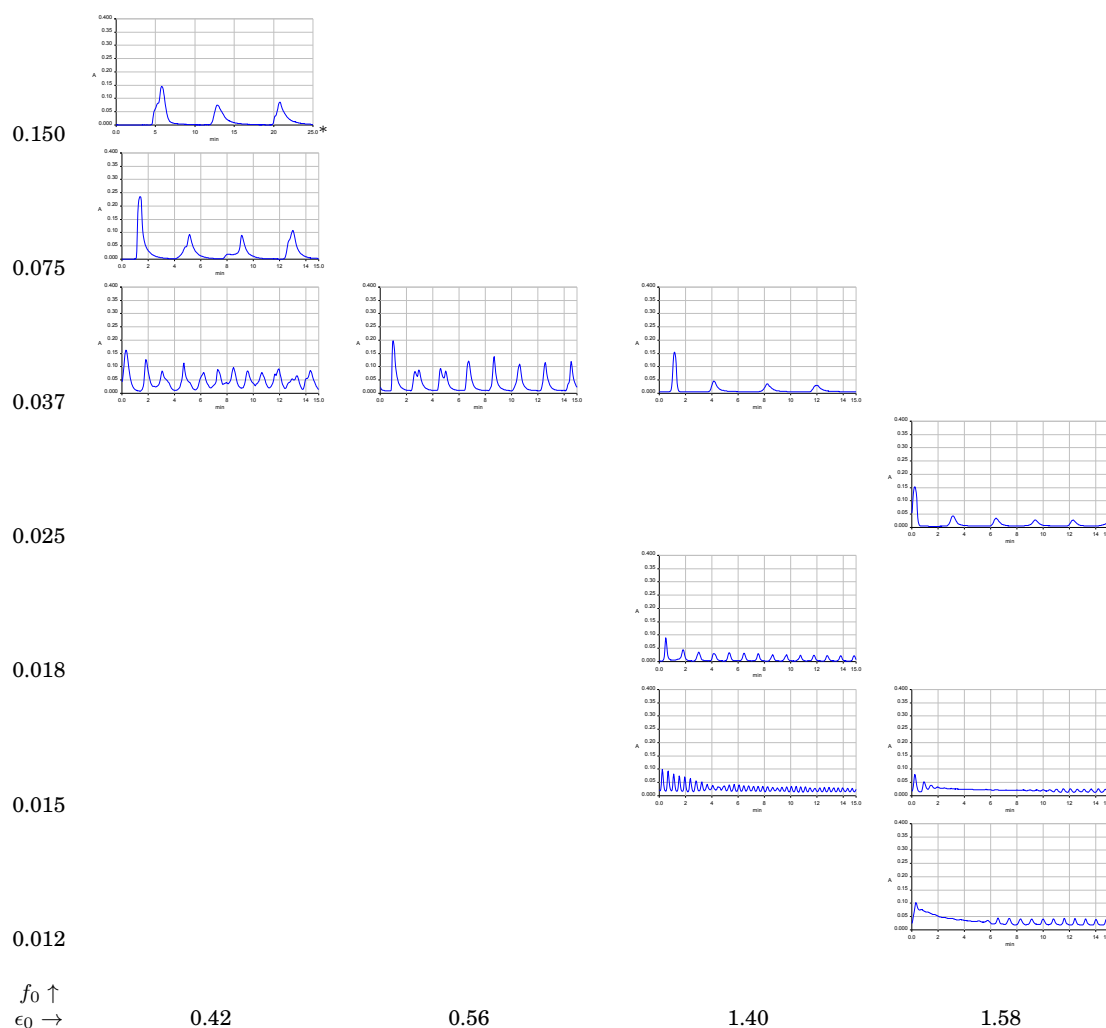


FIG. 8.— Ritmos de oscilación a diferentes valores de ϵ_0 medidos a un tiempo de 15 minutos, el caso indicado con asterisco corresponde a 25 minutos.

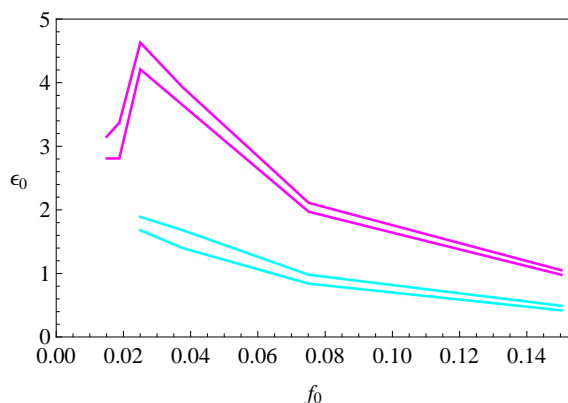


FIG. 9.— (Color online) Margen de bifurcación en el espacio de concentraciones ϵ_0-f_0 a pH = 0.097 (magenta) y pH = 0.300 (cian); nótese la similitud en forma entre estas curvas experimentales y las teóricas (ver Figura 1).

de parámetros $\epsilon-f$ para el Oregonator y el Oregonator 2D es cualitativamente la misma: una región de estabilidad, otra de inestabilidad y, como límite entre estas, la curva de bifurcación de Hopf, $\epsilon_c = \epsilon_c(f, q)$. Aunque el dominio en ambos casos es prácticamente el mismo su discrepancia está dada por la franja en-

tre sus curvas de bifurcación (ver Figura 1).

La curva de bifurcación mostrada en la Figura 1 para el Oregonator tiene la misma forma que la reportada por Mazzotti et al. (1995) bajo las mismas restricciones ($[H^+] = 0.8$ M, $q = 0.0008$ y $k_5 = 1M^{-1}s^{-1}$, este último equivalente al empleado k_0) pero con un rescalamiento tal que los parámetros de bifurcación son f y el cociente b/a (equivalente a ϵ), siendo $a = A/A_0$ y $b = B/B_0$ las concentraciones adimensionales de los reactivos con $A_0 = B_0 = 1$ M. Si bien el dominio de las curvas de bifurcación es el mismo en ambos casos, estas difieren; por ejemplo a partir del cociente entre sus valores máximos, $\frac{(b/a)_c^*}{\epsilon_c^*}$, se tiene que: $\epsilon_c^* \approx \frac{1}{8.3} \left(\frac{b}{a}\right)_c^*$.

Pero, principalmente, los resultados teóricos se corroboraron experimentalmente pues el espacio de concentraciones ϵ_0-f_0 obtenido a pH 0.097 presenta la misma tendencia de distribución que la predicha por el Oregonator, esto es, una región de oscilación y otra de estados estacionarios separadas ambas por un margen de bifurcación (Figura 9), este último, similar a la curva de bifurcación en el espacio $\epsilon-f$ (Figura 1). Dejando de lado los factores de escala in-

troducidos a través de los parámetros del Oregonator y del mecanismo FKN ampliado, el espacio de concentraciones es relativo al cociente $[\text{Org}]/[\text{BrO}_3]$ (en las ordenadas) y a la cantidad $[\text{Org}]/[\text{BrAM}]$ (en las abscisas) de modo que la semejanza entre la curva de bifurcación teórica y el margen de bifurcación es en realidad una semejanza del modelo y los resultados experimentales; aspecto este de importancia pues basta determinar los cocientes indicados para el estudio cualitativo del espacio de concentraciones.

Otro aspecto importante del tratamiento analítico y numérico del Oregonator es la dependencia paramétrica del perfil de bifurcación y de la franja de discrepancia respecto a q , tal como se aprecia en la Figura 7. La curva de bifurcación varía de modo tal que la franja de discrepancia disminuye conforme el valor de q aumenta tendiendo a hacerse prácticamente nula a medida que la reacción BZ se inhibe. Por otro lado, esta franja aumenta a medida que q disminuye llegando a hacerse infinita; mientras que en el caso del Oregonator las cotas del intervalo de f tienden a valores límite, $f_a \rightarrow 0.5$, $f_b \rightarrow 1$ y $\epsilon_c^* \rightarrow 1$, de modo que su perfil de bifurcación se asemeja a un triángulo pues $f_b \rightarrow f(\epsilon_c^*)$. A pesar de que el Oregonator 2D presenta anomalías para valores muy pequeños de q , resulta aceptable para las regiones definidas entre la cota inferior del intervalo de f y el valor correspondiente al máximo de la curva de bifurcación, $f^*(\epsilon^*)$.

Desde el punto de vista químico, una vez fijado el pH, el valor de q también se fija, de modo que el perfil de bifurcación está condicionado por la acidez de la solución. Por ejemplo, en la Figura 7 los perfiles con $q = 1.81818 \times 10^{-4}$ y $q = 8 \times 10^{-4}$ corresponden a los valores de las constantes cinéticas, respectivamente, a $[\text{H}^+] = 0.26$ (según los datos reportados en Györgyi et al. (1991)) y $[\text{H}^+] = 0.8$ (empleado en el presente trabajo). De acuerdo a lo anterior, el valor de q aumenta con $[\text{H}^+]$, de modo que el margen de bifurcación a pH = 0.3 presenta un corrimiento respecto al margen de bifurcación a pH = 0.097. Por otro lado, la disminución del margen de bifurcación al aumentar el pH podría deberse a la tendencia de la reacción a inhibirse conforme el medio disminuye su acidez, en este caso la variación de q sería de forma inversa a $[\text{H}^+]$.

Un aspecto de concordancia entre los resultados experimentales y el modelo está en que la tendencia de los ritmos de oscilación de diferentes casos obtenidos a f_0 fijo es la misma que los que se observan en las series temporales a f fijo, tal como se muestra en la Tabla 3; sin embargo, los ritmos de oscilación de los casos obtenidos a ϵ_0 fijo presentan una tendencia opuesta en la variación de la frecuencia respecto a los casos a ϵ fijo.

Por otro lado, las regiones predichas por la curva de bifurcación del Oregonator y del Oregonator 2D fueron corroboradas obteniéndose los valores propios que resultan de la correspondiente ecuación característica del sistema linealizado tal como se muestra en las Figuras 2 y 4. En la Tabla 4 se comparan

TABLA 4

ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS FIJOS PARA EL OREGONATOR Y SU VERSIÓN REDUCIDA DE DOS VARIABLES.

Región	Oregonator	Oregonator 2D
○	Nodo-foco estable	Foco estable
◇	Nodo estable	Nodo estable
□	Silla-foco	Foco inestable
△	Silla	Nodo inestable

ambos casos donde se evidencia que, a excepción de los puntos fijos tipo nodo estable, el modelo con tres variables contiene información adicional aunque el Oregonator 2D rescata los aspectos esenciales. Así por ejemplo, una vecindad local de un punto silla no se diferencia de un nodo inestable perturbado y por tanto los puntos \triangle de ambos modelos son equivalentes; lo mismo ocurre con los puntos \circ y \square .

Los valores propios dan información sobre la naturaleza del punto fijo y la manera en que este responde a una perturbación; por tanto, en el caso de los puntos fijos estables se conoce además la variedad invariante a la que tiende el sistema perturbado aunque esto no ocurre con los puntos fijos inestables. Por ejemplo, el análisis de estabilidad de puntos fijos indica que \triangle es un punto silla pero no la variedad invariante respecto a la cual es inestable. Por esta razón la integración numérica del sistema de ecuaciones diferenciales complementa la información dada por el análisis de estabilidad lineal. La Figura 3 ilustra los resultados obtenidos para el Oregonator, de los cuales se apuntan las siguientes observaciones:

- Una perturbación de un punto fijo silla-foco, 3-(b), se amplifica de forma progresiva a través de una dinámica oscilante conforme los términos imaginarios de las soluciones toman relevancia respecto a los términos asintóticos.
- Los puntos tipo silla, 3-(c), se diferencian de los anteriores debido a que los términos asintóticos de sus soluciones se desvanecen rápidamente para dar lugar a la dinámica oscilante.
- Los nodo-foco estables, 3-(a), son el caso inverso de los silla-foco inestables, estos amortiguan gradualmente la perturbación a través de oscilaciones debido a la combinación de términos imaginarios y asintóticos en las soluciones.
- Un nodo-estable perturbado, 3-(d), se restituye solo mediante términos asintóticos.

Se concluye que todo punto fijo inestable r_s lo es respecto a un ciclo límite de periodo definido y todo punto fijo estable r_s lo es respecto a un estado estacionario, ya sea para el Oregonator o su versión 2D.

En los casos mencionados, las Figuras 5 y 6 comparan el subespacio de fase $z-x$ para el Oregonator y el espacio $z-x$ de su versión reducida, constatándose que las trayectorias del Oregonator 2D constituyen de forma aceptable una proyección del ciclo límite tridimensional en el espacio de fases bidimensional

siempre que los puntos (f, ϵ) no se encuentren en la franja de discrepancia entre las curvas de bifurcación de Hopf, es decir, en aquellos casos en los que las etiquetas de los puntos fijos no coinciden una vez sobrepuestos el espacio de parámetros de ambos modelos.

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En reactor cerrado y a $\text{pH} = 0.097$ se obtuvieron las regiones de oscilación y estados estacionarios en el espacio de concentraciones ϵ_0-f_0 respecto al margen de bifurcación con una distribución homóloga al de las regiones de inestabilidad y estabilidad de los puntos fijos r_s respecto a la curva de bifurcación en el espacio de parámetros $\epsilon-f$ a $q = 0.0008$ predichas por el Oregonator. También se evidenció experimentalmente que el margen de bifurcación disminuye a medida que el pH aumenta, comportamiento que presenta la curva de bifurcación cuando el valor del parámetro q aumenta. Un otro tipo de punto fijo corresponde al estado estacionario r_0 de naturaleza no reactiva en el sentido de que las especies químicas a partir de las cuales se lleva a cabo la reacción BZ no llegan a ponerse en contacto.

Por tanto, se considera al Oregonator como una aproximación cualitativa satisfactoria de la reacción BZ en reactor cerrado, o lo que es lo mismo, con flujo de sustancia nulo, dada la forma homóloga de la región de bifurcación en el espacio de parámetros con la que presenta el espacio de concentraciones. Estos resultados sugieren la comprobación de la existencia de regiones de estados estacionarios seguida de otra de periodo simple en los diagramas de bifurcación a velocidades de flujo nulo o muy bajo reportados, por ejemplo, en Györgyi et al. (1991).

Por otro lado, el Oregonator 2D resulta suficiente para el análisis del Oregonator siempre que el valor de sus parámetros de control no signifiquen un punto (f, ϵ) en la región de discrepancia comprendida entre las curvas de bifurcación de ambos modelos, discrepancia que disminuye a medida que el valor de q aumenta a la vez que la reacción BZ se inhibe a pH elevado. Finalmente, el Oregonator 2D será siempre satisfactorio en la región comprendida entre el límite inferior del dominio de f y el valor de f^* correspondiente al punto máximo (f^*, ϵ_c^*) .

Los aspectos mencionados son relevantes con-

siderando que un modelo como el Oregonator de cinco etapas irreversibles puede reproducir las características más relevantes de la compleja reacción BZ y emplearse, dada su relativa simplicidad, para el análisis de fenómenos más complejos.

Desde el punto de vista experimental, se sugiere verificar los resultados obtenidos además de llevar a cabo pruebas a diferentes pH e investigar la acidez a la que la reacción BZ se inhibe. Estas pruebas requieren optimizar el procedimiento experimental, por ejemplo, variando la cantidad de Br^- que interviene en la reacción de bromación para así comprender su efecto sobre las series temporales, lo que requiere además cuantificar los ritmos de oscilación. Para dotar al Oregonator de un carácter cuantitativo se sugiere determinar las constantes de velocidad o los factores de escala a partir de los cuales se planteó el procedimiento experimental, de modo que el margen de bifurcación se ajuste lo mejor posible a la curva de bifurcación predicha por el Oregonator. También, debe orientarse la explicación de la riqueza dinámica observada en la reacción BZ con base en el Oregonator.

Desde el punto de vista analítico, el presente trabajo plantea obtener el diagrama de bifurcación de Hopf para el Oregonator, lo que en principio explicaría la transición de escenarios dinámicos de un régimen estacionario a uno oscilatorio. Mediante un análisis similar pero con base en modelos más completos de la reacción BZ, determinar si el Oregonator está presente en la región del diagrama de bifurcación respecto al flujo de sustancia correspondiente a oscilaciones simples. Se considera necesario un estudio más detallado del punto fijo r_0 y en el caso de r_s obtener una forma analítica del límite entre puntos fijos con valores propios reales de aquellos de naturaleza imaginaria. También se sugiere establecer alguna relación cuantitativa entre el pH de la solución y el perfil de bifurcación y la franja de discrepancia.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos la invaluable y desinteresada colaboración en la parte experimental, prestada por el personal del Laboratorio de Química de Alimentos de la Carrera de Ciencias Químicas de la UMSA, en especial al Dr. Mauricio Peñarrieta. También apreciamos las sugerencias hechas por el Referee que sirvieron para mejorar el presente trabajo.

REFERENCIAS

- Field R. J., Körös E. & Noyes R. M. (1972), *J. Am. Chem. Soc.* **94**, 25, 8649.
- Zhabotinsky A. M. (2007), *Scholarpedia* **2**, 9, 1435.
- Gray P. & Scott K. (1994), *Chemical oscillations and instabilities* (Oxford: Oxford University Press).
- Oporto Almaraz S. A. & Ramírez Ávila G. M. (2004), *Revista Boliviana de Física* **7**, 45.
- Goldbeter A. (1994), *Biochemical oscillations and cellular rhythms* (Cambridge: Cambridge University Press).
- Murray J. D. (2002), *Mathematical biology* (Berlin: Springer).
- Volkenshtein M. V. (1985), *Biofísica* (Moscú: Mir).
- Field R. J. & Noyes R. M. (1974), *J. Chem. Phys.* **60**, 5, 1877.
- Ruoff P. (1992), *J. Phys. Chem-US*. **96**, 23, 9104.
- Johnson B. R., Scott S. K. & Thompson B. W. (1997), *Chaos* **7**, 2, 350.
- Argoul F., Arneodo A., Richetti P. & Roux J.-C. (1987), *J. Chem. Phys.* **86**, 6, 3325.
- Hudson J. L. & Mankin J. C. (1981), *J. Chem. Phys.* **74**, 11, 6171.
- Janz R. D., Vanecek D. J. & Field R. J. (1980), *J. Chem. Phys.* **73**, 7, 3132.
- de Kepper P. & Boissonade J. (1981), *J. Chem. Phys.* **75**, 1, 189.
- Schneider F. W. & Münster A. F. (1991), *J. Phys. Chem-US*. **95**, 6, 2130.
- Györgyi L., Turányi T. & Field R. J. (1990), *J. Phys. Chem-US*. **94**, 18, 7162.
- Györgyi L., Rempe S. L. & Field R. J. (1991), *J. Phys. Chem-US*. **95**, 8, 3159.

- Györgyi L. & Field R. J. (1991), *J. Phys. Chem-US*. **95**, 17, 6594.
Györgyi L., Field R. J., Noszticzus Z., McCormick W. D. & Swinney H. L. (1992), *J. Phys. Chem-US*. **96**, 3, 1228.
Györgyi L. & Field R. J. (1992), *Nature* **355**, 808.
Freire J. C. & Gallas J. A. C. (2011), *Phys. Chem. Chem. Phys.* **13**, 26, 12191.
Mazzotti M., Morbidelli M. & Serravalle G. (1995), *J. Phys. Chem-US*. **99**, 13, 4501.
Crowley M. F. & Field R. J. (1984), *J. Phys. Chem-US*. **88**, 4, 762.

ENFRIAMIENTO DE AGUA MEDIANTE EL USO DE AIRE LÍQUIDO

WATER COOLING USING LIQUID AIR

GERARDO FRANCISCO MEYER FORGUES, ERICK BERAZAIN, & ALAN PAREDES

Instituto de Investigaciones Físicas, Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz – Bolivia

Se determinó el calor latente de fusión del agua por un método de enfriamiento. El experimento consistió en enfriar un vaso de agua utilizando aire líquido y observar el comportamiento de la temperatura durante el tiempo de enfriamiento. La finalidad del experimento es determinar la precisión de este método para obtener el calor latente.

Descriptores: Procedimientos de laboratorio — Propiedades termodinámicas — Calor latente
Código(s) PACS: 06.60.-c, 05.70.Ce

ABSTRACT

The latent heat for the fusion of water was determined using a cooling method. In the experiment the water was cooled in a glass using liquid air and observing the cooling temperature against time. The result of this experiment was the determination of the precision of the cooling method for obtaining the latent heat value.

Subject headings: Laboratory procedures — Thermodynamic properties — Latent heat

1. INTRODUCCIÓN

La materia es la sustancia de la que todos los objetos están hechos, ésta puede existir en tres estados de agregación o fases diferentes: sólido, líquido y gaseoso. El estado sólido se caracteriza por mantener una estructura definida, el estado líquido no mantiene estructura definida pero tiene cohesión y viscosidad, el estado gaseoso no tiene estructura definida ni cohesión y no opone resistencia a los cambios de forma.

La materia puede pasar de un estado de agregación a otro mediante la extracción o cesión de energía, para el caso de líquido a sólido es necesario extraerla para que sea posible. Durante este cambio la temperatura se mantiene constante por lo tanto la energía extraíble depende solamente de la cantidad de materia que hay y del calor latente de fusión del material.

En el experimento nos centraremos en obtener el calor latente de fusión mediante el enfriamiento con aire líquido sobre un volumen determinado de agua y concluiremos si es un método efectivo y preciso para obtener dicho valor.

2. FUNDAMENTO TEÓRICO

2.1. Aire Líquido

El aire líquido está compuesto de aire que ha sido licuado mediante aplicación de alta compresión en pistones y posteriormente enfriado a muy bajas temperaturas. Debe ser conservado en un vaso Dewar a temperatura ambiente. El aire líquido absorbe

rápido el calor y es la razón por la que se convierte rápidamente a su estado gaseoso. Se emplea generalmente en la refrigeración de otras sustancias, así como fuente de nitrógeno, oxígeno, argón, y otros gases inertes. El aire líquido tiene una densidad de aproximadamente 870 kg/m^3 , aunque esta densidad nominal puede ser diferente en muchos casos dependiendo de la composición elemental del aire. Ya que como el aire gaseoso tiene un 78% de volumen de nitrógeno y un 21% de oxígeno, la densidad del aire líquido en composición estándar es calculada teniendo en cuenta la composición decimal de las densidades en estado líquido de los respectivos componentes del aire líquido. Su punto de fusión es -216.2 C y su punto de ebullición es -194.35°C . (Wikipedia 2013)

2.2. Calor

El calor es energía que fluye entre un sistema y su entorno en virtud de una diferencia de temperatura entre ellos. (Resnick et al. 1999)

2.3. Capacidad calorífica

Se define la capacidad calorífica de un cuerpo como la razón entre la cantidad de calor Q suministrada al cuerpo durante cualquier proceso y su cambio de temperatura ΔT correspondiente, esto es: (Resnick et al. 1999)

$$C = \frac{Q}{\Delta T}. \quad (1)$$

2.4. Calor específico

Se define como la capacidad calorífica por unidad de masa de un cuerpo.

$$c = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m\Delta T}. \quad (2)$$

La capacidad calorífica es característica de un objeto en particular, pero el calor específico caracteriza a una sustancia.

De la ecuación (2) podemos despejar el calor obteniendo:

$$Q = mc\Delta T.$$

Para cambios de temperatura infinitamente pequeños tomamos el diferencial de temperatura y obtenemos:

$$dQ = mcdT. \quad (3)$$

2.5. Calor latente

La cantidad de calor por unidad de masa transferido durante un cambio de fase se llama calor de transformación o calor latente “ L ” del proceso. El calor transferido durante la fusión o congelación se llama calor latente de fusión.

$$Q = mL. \quad (4)$$

2.6. Ecuación experimental del calor latente de fusión

Derivando la ecuación (4) obtenemos:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dm}{dt}L. \quad (5)$$

Como la masa permanece invariante durante todo el experimento la relación $\frac{m}{t} = \frac{dm}{dt}$ nos permite analizar solamente el transcurso del tiempo durante el cambio de fase, reemplazamos esta relación en la ecuación (5) y la pasamos a dividir al otro término obteniendo así la ecuación del calor latente:

$$\frac{dQ}{m} = L. \quad (6)$$

De esta última expresión es posible conocer numéricamente el denominador utilizando los datos registrados durante el experimento, pero para obtener el numerador es necesario derivar la ecuación (3) respecto al tiempo:

$$\frac{dQ}{dt} = mc \frac{dT}{dt}. \quad (7)$$

Observamos que la relación $\frac{dT}{dt}$ es la pendiente de la regresión entonces, la pendiente más cercana al calor cedido por el agua se encuentra en los primeros datos de la curva y son los que mejor se adaptan a la línea de tendencia lineal. Experimentalmente se toma desde los 5 primeros datos, hasta la cantidad en el que el coeficiente de correlación disminuya, entonces con 26 datos se encuentra el mejor ajuste.

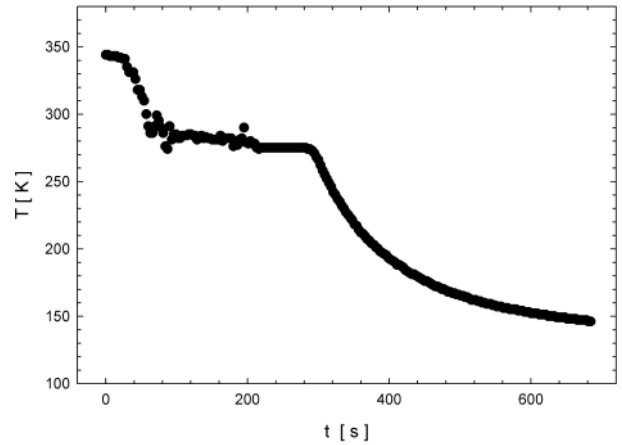


FIG. 1.— Etapa de enfriamiento del agua utilizando aire líquido. Nótese que las líneas curvas representan un enfriamiento del agua a medida que pasa el tiempo y la línea recta representa el cambio de fase de líquido a sólido.

Reemplazando (7) en (6), simplificando las masas y ordenando términos obtenemos la ecuación del calor latente:

$$L = ct \frac{dT}{dt} \quad (8)$$

El error de la ecuación (8) es:

$$\Delta L = c \sqrt{\left[\frac{dT}{dt} \Delta t \right]^2 + \left[t \Delta \left(\frac{dT}{dt} \right) \right]^2} \quad (9)$$

3. EXPERIMENTO

El objetivo era registrar la temperatura y el tiempo de enfriamiento del agua utilizando aire líquido. Se utilizó 2 vasos precipitados, uno de 250ml y el otro de 500ml; se llenó 200ml de agua de 189g de masa a temperatura ambiente en el vaso de 250ml, calentamos dicha agua en una hornilla eléctrica hasta 75°C, mientras en el vaso de 500ml se preparó una cantidad de aire líquido que no excedía de 250ml. La termocupla se colocó en el fondo del vaso y en el centro del mismo de tal manera que enfrié uniformemente. En el experimento se presentó un problema: en el fondo del vaso precipitado el agua se congelaba más rápido que en la superficie de tal manera que la fase en el fondo era sólida y en la superficie líquida. Finalmente en la última parte del enfriamiento no se presentó ningún problema, el tiempo de enfriamiento no excedió más de 6 minutos y la mínima temperatura registrada fue de -120°C . Se calentó el agua congelada para repetir el experimento una vez más y esta vez se cambió ligeramente la posición de la termocupla en el vaso precipitado, en este caso pudo registrarse una temperatura constante de 2°C en el punto de fusión por un tiempo relevante, continuando con el enfriamiento se llegó a la temperatura mínima de -127°C .

4. ANÁLISIS

Al analizar la figura 1 observamos que el enfriamiento del agua tiene tres etapas. Las irregulati-

dades observadas durante los primeros 108 segundos se deben a la evaporación del aire líquido en contacto con el agua caliente, esto se origina por la gran diferencia de temperatura existente entre uno y otro ocasionando una alta rapidez de evaporación, por este motivo el suministro de aire líquido durante la primera parte no fue constante. Durante el cambio de fase se presentó el problema mencionado en el experimento, la solidificación del agua ocurrió primero en la parte inferior del vaso, de tal manera que se obtuvo una mezcla de hielo y agua al mismo tiempo. Dicha mezcla ocasionó un registro irregular de temperatura, es por eso que el cambio de fase ocurrió aproximadamente entre los segundos 108 y 288 sin importar las temperaturas registradas ya que visualmente la termocupla se encontraba recubierta de hielo durante ese tiempo. Cabe resaltar que la temperatura de cambio de fase registrada se encuentra en el intervalo $[11-2]^{\circ}C$ y esto se debe a la presión atmosférica de la ciudad de La Paz. Durante la última etapa del enfriamiento no se presentó ninguna irregularidad por lo tanto la curva obtenida nos indica la aproximación del equilibrio térmico entre hielo y aire líquido.

Con el anterior análisis se obtendrá el valor del calor latente de fusión del agua. La figura 2 nos muestra los datos que mejor se adaptan a una tendencia lineal donde la pendiente es la más cercana al calor cedido por el agua. Realizando una regresión lineal obtenemos:

$$T = 528.16 - 0.883t.$$

Donde la pendiente nos indica la variación de la temperatura con respecto al tiempo:

$$\frac{dT}{dt} = (-0.883 \pm 0.001) \frac{K}{s}. \quad (10)$$

Considerando el punto de fusión del agua en La Paz ($65.995KPa$) es mayor a $0^{\circ}C$ entonces, según la figura 1 obtenemos el tiempo en el cual el agua se encuentra entre $[6-2]^{\circ}C$ obteniendo un tiempo de:

$$t = (90 \pm 1)s. \quad (11)$$

Por tablas sabemos que el calor específico es:

$$c = 4190 \frac{J}{kgK}. \quad (12)$$

Reemplazando (10), (11), (12) en la ecuación (8) obtenemos:

$$L = -332185 \frac{J}{kg}.$$

Ahora obtenemos el error del calor latente reemplazando los errores de (10), (11), (12) en (9) obteniendo:

$$\Delta L = 3718 \frac{J}{kg}.$$

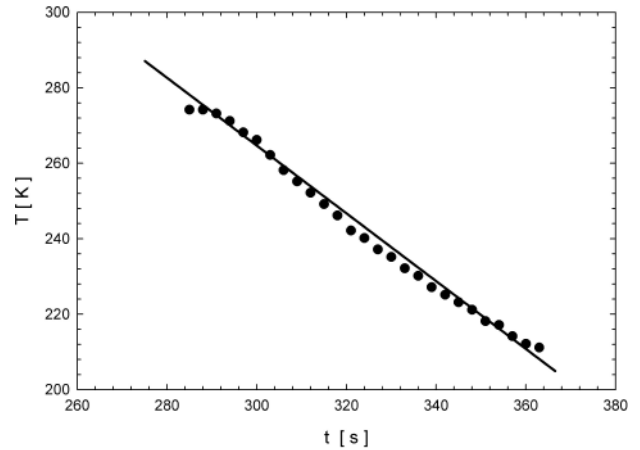


FIG. 2.— Datos de la curva (Figura 1) que se adaptan mejor a una tendencia lineal. Nótese que la temperatura se encuentra en Kelvin.

Obteniendo finalmente el calor latente de fusión del agua:

$$L = (-332185 \pm 3718) \frac{J}{kg}.$$

Es preciso tomar en cuenta que el signo negativo indica una absorción o extracción de energía para que ocurra el cambio de fase. En el caso del calentamiento es necesario proporcionar energía, obteniendo así un calor latente positivo. El signo del calor latente está determinado por la pendiente de la tendencia lineal.

El error porcentual del calor latente es:

$$e = 1.12\%.$$

El error porcentual respecto al valor nominal de $333kJ/kg$ es:

$$e_n = 0.24\%.$$

Tanto el error respecto al valor nominal y el error relativo porcentual son menor a 5% de tal manera que el método utilizado es muy preciso y efectivo.

5. CONCLUSIONES

El calor latente de fusión del agua es la energía necesaria para cambiar de estado líquido a sólido o viceversa, este puede ser hallado experimentalmente con mucha precisión mediante el enfriamiento con aire líquido, obteniendo errores muy bajos. Cabe resaltar que durante la etapa de solidificación se produce una mezcla de agua y hielo haciendo difícil el registro de la temperatura, es por eso que el tiempo de cambio de fase utilizado para el experimento fue durante las temperaturas $6^{\circ}C$ y $2^{\circ}C$, entendiendo que el punto de fusión es ligeramente mayor en la altura de La Paz debido a la presión atmosférica, aún así, este valor está dentro de nuestra estimación.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Licenciado Alfonso Velarde Chávez por su colaboración.

REFERENCIAS

Resnick, Halliday & Krane (1999), *Física Volumen 1* (Cuarta Edición) (Editorial Continental)

Wikipedia (2013), http://es.wikipedia.org/wiki/Aire_liquido

18^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA
8^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
1^{ra} ETAPA: UNIDADES EDUCATIVAS: HASTA EL 11 DE ABRIL DE 2013
2^{da} ETAPA: DISTRITAL: 11 DE MAYO DE 2013
3^{ra} ETAPA: DEPARTAMENTAL: 15 DE JUNIO DE 2013
4^{ta} ETAPA: FINAL NACIONAL: 14 AL 17 DE AGOSTO DE 2013

BUSTOS R.^{1,2,3}, RALJEVIC M.^{1,2}, TICONA A.^{1,2}, QUISPE C.^{1,2}, QUISPE L.^{1,2}, AGUILAR J. C.³, DE LA TORRE M.³, RODRIGUEZ F.⁴, GUAYGUA T.⁵, CASTELO J. J.⁵, JEMIO C.⁵, ANDRADE M.⁶, GUZMÁN R.⁶, MAMANI R.⁷, FUENTES W.⁷, VALDEZ S.⁸, JUSTINIANO I.⁹, JAILLITA J.⁹, PAYLLO J. P.¹⁰, CABRERA J.¹¹, VARGAS C.¹², CORAITE O.¹³, QUIROZ Z.¹⁴, ORTEGA L.¹⁵, MALLCU A.¹⁶, MARTINEZ L.¹⁷, TAQUICHIRI M.¹⁸, ZALLES R.¹⁹, ORTEGA M.²⁰.

¹ Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI)

² Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), *Carrera de Física*, La Paz

³ Asociación Boliviana para el Avance de la Ciencia (ABAC)

⁴ Universidad Mayor, Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCH),
Facultad de Tecnología - Carrera de Ingeniería de Sistemas, Sucre

⁵ Universidad Técnica de Oruro (UTO), *Facultad Nacional de Ingeniería (FNI)*, Oruro

⁶ Universidad Mayor de San Simón (UMSS), *Facultad de Ciencia y Tecnología*, Cochabamba

⁷ Universidad Autónoma Tomás Frías (UATF), *Carrera de Física*, Potosí

⁸ Colegio Cardenal Cushing, Santa Cruz de la Sierra

⁹ Colegio María Auxiliadora, Cobija Pando

¹⁰ Colegio Natush Bush, Yacuiba, Tarija

¹¹ Colegio Amor de Dios, La Paz

¹² Colegio Buenas Nuevas, Sucre

¹³ Colegio La Salle, Oruro

¹⁴ Instituto Americano, La Paz

¹⁵ Colegio Felipe Palazó'n, Tarija

¹⁶ CORIMEX LTDA, La Paz

¹⁷ Universidad Privada de Santa Cruz (UPSA), Santa Cruz de la Sierra

¹⁸ Universidad Autónoma Juan Misael Saracho (UAJMS), Tarija

¹⁹ Observatorio Astronómico Nacional (OAN), Tarija &

²⁰ Asociación Boliviana para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias (AMEC), Beni

RESUMEN

La 18^{va} Olimpiada Boliviana de Física (18^{va} OBF) y la 8^{va} Olimpiada Boliviana de Astronomía y Astrofísica (8^{va} OBAA) se llevaron a cabo simultáneamente y con éxito en 4 etapas: 1^{ra} ETAPA: UNIDADES EDUCATIVAS, 2^{da} ETAPA: DISTRITAL: 11 de Mayo de 2013, 3^{ra} ETAPA: DEPARTAMENTAL: 15 de Junio de 2013 y la 4^{ta} ETAPA: FINAL NACIONAL: 14 al 17 de Agosto de 2013 Tarija.

Los proyectos se enmarcaron en el proyecto titulado 3^{ra} Olimpiada Científica Estudiantil Plurinacional Boliviana (3^{ra} OCEPB) impulsado por el Estado Plurinacional de Bolivia a través del Ministerio de Educación y del Viceministerio de Ciencia y Tecnología (VCyT), donde, por tercer año consecutivo, se invitó a que participen 6 áreas de las ciencias puras y naturales: Astronomía y Astrofísica, Biología, Física, Informática, Matemática y Química.

La organización del evento contó también con la participación de los siguientes organismos e instituciones: Comité Olímpico Boliviano de Astronomía y Astrofísica, Comité Olímpico Boliviano de Física, Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI), la Asociación Boliviana para el Avance de la Ciencia (ABAC), la Dirección Departamental de Cochabamba; las Carreras de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), la Universidad Mayor de San Simón (UMSS) y la Universidad Autónoma Tomás Frías (UATF), los departamentos de Física de la Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra (UPSA), la Universidad Técnica de Oruro (UTO), la Universidad Mayor, Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCh), la Universidad Autónoma Juan Misael Saracho (UAJMS), la Asociación para el Mejoramiento de la enseñanza de las Ciencias (AMEC).

Participaron 9 delegaciones departamentales: Beni, Chuquisaca, Cochabamba, La Paz, Oruro, Pando, Potosí, Santa Cruz de la Sierra y Tarija.

En la 18^{va} OBF y la 8^{va} OBAA se evaluaron las categorías de 6^{to} de primaria y los seis cursos de Secundaria en las tres etapas previas al evento nacional pero. En dicho evento solo participaron los cursos de 3^{ro}, 4^{to} y 5^{to} de Secundaria.

La categoría de 6^{to} de Secundaria tienen como principal premio el ingreso libre y directo

a cualquiera de las carreras de Ciencias y/o Ingeniería de las universidades comprometidas con los proyectos.

Los ganadores de las etapas previas al evento nacional, de las categorías: 2^{do}, 1^{ro} de Secundaria y 6^{to} de Primaria fueron premiados por el VCyT y todas las categorías (5^{to}, 4^{to}, 3^{ro}, 2^{do}, 1^{ro}, de Secundaria y 6^{to} de Primaria) forman los equipos Bolivianos preseleccionados postulantes a futuros eventos olímpicos: Latinoamericanos, Iberoamericanos e Internacionales a llevarse a cabo las gestiones 2014, 2015, 2016, 2017 y 2018 respectivamente.

El gobierno nacional a comprometido el apoyo administrativo de todas las áreas de las olimpiadas desde la divulgación de las convocatorias hasta el apoyo a las delegaciones Bolivianas invitadas a participar fuera de nuestras fronteras. Es sin duda un gran apoyo, pero ha eliminado categorías que antes tenían participación en los eventos nacionales, sin entender todavía el fundamental incentivo que debemos dar a toda la juventud Boliviana, como es el de preseleccionar delegaciones no solo para la siguiente inmediata gestión sino con 3, 4, 5, 6, 7 o más años de anticipación; dicha receta es sin duda la mejor manera de ser cada vez más competitivos a nivel internacional.

Sin lugar a dudas se ha ganado participantes de todas las regiones a nivel nacional, motivando e incentivando a toda la juventud Boliviana inclinada al estudio de las Ciencias Naturales, en especial de la Física, la Astronomía y Astrofísica.

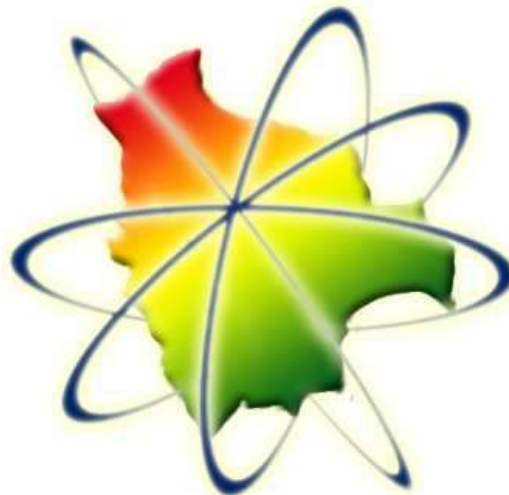
¡Felicidades! a tod@s l@s jóvenes participantes y ganadores de las distintas etapas y categorías así como también a todas las Unidades Educativas fiscales, particulares y de convenio de todo el país que se animaron a participar en el apasionante mundo de la Física, la Astronomía y Astrofísica por que están dando un digno ejemplo a seguir por otros establecimientos, profesores, estudiantes contemporáneos y por todas las generaciones venideras.

En la 1^{ra} ETAPA: UNIDADES EDUCATIVAS, se invitó a que cada profesor de Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Física, etc. seleccione a un equipo de hasta 10 estudiantes, de cada curso, de cada olimpiada, para que participen en la 2^{da} ETAPA: DISTRITAL.

A continuación se presentan las soluciones de todas las categorías de ambas olimpiadas: 18^{va} OBF y 8^{va} OBAA que se tomo en dicha 2^{da} ETAPA: DISTRITAL o CLASIFICADOS DE LOS DISTRITOS EDUCATIVOS.

Página WEB: <http://200.105.152.242/olimpiada/>

OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA



OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

Descriptor: Olimpiadas de Física, Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica

Subject headings: Physics Olympiads, Astronomy and Astrophysics Olympiads

18^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA
6^{to} DE PRIMARIA

1. (10%) Al subir la temperatura de un líquido se alcanza un punto en el que se forman burbujas de vapor en su interior, es el punto de:

- a) Fusión
- b) Ebullición
- c) Condensación
- d) Sublimación

2. (10%) ¿Cuál es el volumen de un cubo de lado $l = 1[cm]$?

- a) $3[cm]$
- b) $1[cm]$
- c) $1[cm^6]$
- d) $3[cm^3]$

3. (10%) El núcleo atómico está compuesto por:

- a) Electrones
- b) Protones y Neutrones
- c) Neutrones
- d) Protones

4. (10%) Se ordenó decrecientemente las densidades de 3 sustancias, indique cuál de los siguientes incisos es correcto a) Agua , aceite , oro

- b) Oro , agua , aceite
- c) Oro , agua ,aceite
- d) Aceite ,oro, agua

5. (10%) ¿Cuál es la densidad de una sustancia de masa $m = 100g$ y volumen $V = 10[cm^3]$?

- a) $10[g/cm^3]$
- b) $0.1 [g/cm^3]$
- c) $10[g/cm]$
- d) $10[cm^3/g]$

6. En cientos de misiones espaciales el oro es utilizado para proteger partes internas de dispositivos electrónicos, dado que las condiciones de temperatura en el universo son muy diferentes a las de la tierra. Por este motivo es necesario conocer muy bien sus propiedades físicas como su punto de ebullición y el punto de congelamiento. Si se sabe que el punto de fusión del oro es $1\ 064\ ^\circ C$ y el de ebullición es $2\ 856\ ^\circ C$, con esta información responda:

(10%) ¿En qué estado se encuentra el oro a $0^\circ C$?

- a) Sólido
- b) Líquido
- c) gaseoso
- d) Sólido

(10%) ¿En qué estado se encuentra el oro a $2000^\circ C$?

- a) Sólido
- b) Líquido
- c) gaseoso
- d) Sólido y líquido

(10%) ¿En qué estados se encuentra el oro a $1064^\circ C$?

- a) Sólido
- b) Líquido
- c) Sólido y gaseoso
- d) Sólido y líquido

(10%) ¿En qué estados se encuentra el oro a $2856^\circ C$?

- a) Líquido
- b) Líquido y gaseoso
- c) Gaseoso
- d) Sólido y líquido

7. (10%) Los tornados ocurren cuando se juntan dos masas de aire, una fría (encima) y la otra caliente (debajo). Entonces, el aire caliente tiende a subir y el frío a bajar ¿Por qué sucede este movimiento?

- a) Porque la densidad del aire caliente es menor que la densidad del aire frío.
- b) Porque la densidad del aire caliente es mayor que la densidad del aire frío.
- c) Falta información
- d) Ninguna de las anteriores

18^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA
1^{ro} DE SECUNDARIA

- (10%) ¿Cuáles son las unidades de medida del sistema
 - Centímetro- gramo-segundo
 - metro-kilogramo-segundo
 - metro-kilogramo-hora
 - longitud-masa-tiempo
- (10%) ¿Qué estado de la materia ocupa todo el espacio que tiene disponible?
 - Sólido
 - Líquido
 - Gaseoso
 - Plasma
- (10%) ¿Cuántos segundos tiene un minuto?
 - 120[s]
 - 30[s]
 - 60[m]
 - 60[s]
- (10%) ¿En qué unidades se mide el tiempo en el sistema CGS?
 - Segundos
 - minutos
 - horas
 - días
- (10%) El tamaño del átomo de hidrógeno es de 0.0000000001 metros, exprese este tamaño en potencias de diez:
 - $10 \times 10^{-10}[m]$
 - $10 \times 10^{-9}[m]$
 - $101 \times 10^{-10}[m]$
 - $1 \times 10^{10}[m]$
- (10%) Indique cuál de las siguientes operaciones no tiene sentido:
 - 5[m]+2[m]
 - 3[s]+8[s]
 - 1[kg]+3[kg]
 - 9[m]+1[m²]
- (10%) Su mejor amigo después de 20 años le escribe para decirle que mide 2.0[m] ¿Cuáles su estatura en cm?
 - 200 [cm]
 - 2000[cm]
 - 100 [cm]
 - 150[cm]
- (10%) Si la masa de un protón es $1.67 \times 10^{-27}[Kg]$, calcula la masa de un millón de protones.
 - $1.67 \times 10^{21}[Kg]$
 - $1.67 \times 10^{-24}[Kg]$
 - $1.67 \times 10^{-21}[Kg]$

Sol.

$$M_{tot} = 10 \times 6 m_{pro}$$

$$M_{tot} = 10 \times 6 1.67 \times 10^{-27}[Kg]$$

$$M_{tot} = 1.67 \times 10^{-21}[Kg]$$

- (10%) Si un núcleo ${}^A_Z X$, denominado núcleo padre X, donde A es el número de masa y Z es el número atómico, pierde dos protones y dos neutrones decae en un nuevo núcleo Y llamado núcleo hijo, a este proceso se lo conoce como decaimiento alfa. Si el núcleo padre ${}^{238}_{92} X$ experimenta un decaimiento alfa el núcleo hijo resultante es:

- ${}^{238}_{90} Y$

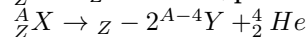
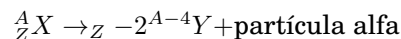
- ${}^{236}_{90} Y$

- ${}^{234}_{90} Y$

- ${}^{238}_{92} Y$

Sol.

El decaimiento alfa puede expresarse como:



Dado que una partícula alfa es un núcleo de helio (Esta información no es necesaria para resolver el ejercicio)

Según los datos del ejercicio tenemos

$${}^{238}_{92} X \begin{cases} A = 238 \\ Z = 92 \end{cases}$$

la cual es remplazada en la ecuación anterior:

$${}^{A-4}_{Z-2} Y = {}^{238-4}_{92-2} Y$$

$${}^{A-4}_{Z-2} Y = {}^{234}_{90} Y$$

- (10%) Es sabido que la rapidez del sonido en el aire aumenta con la temperatura en 0.61[m/s] por cada grado centígrado . Si la velocidad del sonido en el aire a 0°C es de 331[m/s] ¿Cuál es la rapidez del sonido a 2°C ?
 - 335.22 [cm/s]
 - 332[m]
 - 332.22 [m/s]
 - 1.22[m/s]

Sol.

Como la rapidez del sonido es 331 [m/s] a °C y aumenta en 0.61 [m/s] por cada grado centígrado se tiene que la velocidad del sonido a una determinada temperatura T es:

$$V = 331[m/s] + 0.61 \times T$$

Reemplazando los datos del ejercicio $T = 2^\circ C$

$$V = 331[m/s] + 0.612 \times 2$$

$$V = 332.22[m/s]$$

18^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA
2^{do} DE SECUNDARIA

- (10%) Indique el instrumento de medición que utilizaría para medir el largo de su texto de Física.
 - Romana
 - cronómetro
 - Balanza
 - Regla
 - Reloj
- (10%) ¿Cuál de los siguientes objetos tiene mayor densidad: un lingote de oro o anillo de oro?
 - El lingote de oro
 - El anillo de oro
 - Ambos tienen la misma densidad
 - Faltan datos
- (10%) Considere dos objetos electrizados A y B. Se halla que A repele a B y se sabe que A está cargado positivamente ¿Cuál es el signo de la carga de:
 - Positivo
 - Negativo
 - No tiene carga
 - Faltan datos
- (10%) El peso de un cuerpo depende
 - Su masa
 - El valor de la gravedad
 - Su tamaño
 - Su masa y valor de la gravedad
- (10%) Indique el orden correcto que sigue el método científico
 - Observación, Hipótesis, Experimentación, Teoría y Ley.
 - Observación, Hipótesis, Experimentación, Ley y teoría.
 - Teoría, observación, Hipótesis, Experimentación y Ley
 - Ley, Teoría, observación, Hipótesis y Experimentación
 - Hipótesis, observación, Teoría, Experimentación y Ley
- (10%) ¿Cuál es el resultado en grados centígrados de la siguiente operación $10^{\circ}C + 5^{\circ}F + 2K$?
 - $17^{\circ}C$
 - $10^{\circ}C$
 - $10^{\circ}C$
 - $-276^{\circ}C$

Sol.

Convertimos $5^{\circ}F$ a grados centígrados

$$\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9}$$

$$C = 5 \times \frac{F-32}{9}$$

$$C = 5 \times \frac{5-32}{9} = -15^{\circ}C$$

Ahora convertimos 2K a grados centígrados:

$$C = K - 273$$

$$C = 2 - 273 = -271^{\circ}C$$

Finalmente sumamos todos los resultados

$$10^{\circ}C + (-15^{\circ}C) + (-271^{\circ}C) = -276^{\circ}C$$

- (10%) Si la densidad del agua es de $\rho = 1000[kg/m^3]$. ¿Qué densidad tendrá el agua de una botella de un litro?
 - $\rho = 1000kg/m^3$
 - $\rho = 2000kg/m^3$
 - $\rho = 500kg/m^3$
 - $\rho = 1kg/m^3$

- (10%) Se sabe que la gravedad lunar es aproximadamente $1/6$ de la gravedad terrestre. Si Daniela hace un viaje a la luna:
 - Su masa aumenta
 - Su masa disminuye
 - Es cero
 - No varía

- (10%) ¿A qué temperatura la lectura en $^{\circ}F$ es el doble de la lectura en $^{\circ}C$?
 - $^{\circ}C = 160^{\circ}C$
 - $^{\circ}C = 100^{\circ}C$
 - $^{\circ}C = 2000^{\circ}C$
 - $^{\circ}C = 0^{\circ}$

Sol.

Sabemos que:

$$\frac{^{\circ}C}{5} = \frac{^{\circ}F-32}{9}$$

Por condición del ejercicio: $^{\circ}F = 2^{\circ}C$

Reemplazando

$$\frac{^{\circ}C}{5} = \frac{2^{\circ}C-32}{9}$$

Despejo $^{\circ}C$:

$$^{\circ}C = \frac{-32}{\frac{5}{9}-2} \quad ^{\circ}C = 160^{\circ}C$$

- (10%) La densidad del núcleo atómico es aproximadamente 4.2×10^{13} veces mayor que la densidad de la tierra. Dado que la densidad nuclear es tan grande ¿Qué pasaría con el tamaño de la tierra si su densidad se eleva al valor de la densidad nuclear?. Considere que la masa de la tierra no cambia.
 - Aumenta muy poco
 - Aumenta demasiado
 - Disminuye muy poco
 - Disminuye demasiado
 - Faltan datos

18^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA
3^{ro} DE SECUNDARIA

- (10%) ¿Qué instrumento utilizaría para medir el tiempo que demorara en hacer este examen?
 - Regla
 - Reloj
 - Balanza
 - Termómetro
- (10%) ¿Cuántos nanosegundos hay en un segundo?
 - 10^9 [s]
 - 10^{-9} [s]
 - 2×10^{-9} [s]
 - 10 000 000 000 [s]
- (10%) Si la aceleración instantánea de un móvil es $5m/s^2$, esto significa que:
 - Va a una velocidad de 5m/s
 - Varía su velocidad 5 m/s en un segundo
 - Faltan Datos.
- (10%) Realizando la medición de cierta magnitud se obtuvo el siguiente resultado: $70 \pm 0.05[u]$, el cual no fue expresado correctamente. ¿Cuál es la expresión correcta?
 - $70.0 \pm 0.5[u]$
 - $70.0 \pm 0.1[u]$
 - $70.0 \pm 0.05[u]$
 - $70.00 \pm 0.05[u]$
- (10%) Un alumno de física hace el siguiente comentario durante una clase: "Un cuerpo en caída libre cae mayor distancia en un segundo que la distancia que ha recorrida en el segundo anterior". Esta afirmación es
 - Correcta
 - Incorrecta
- (10%) ¿Cuál es el error relativo porcentual de la siguiente medida $100 \pm 10[u]$?
 - 20%
 - 15%
 - 0.01%
 - 10% Sol.

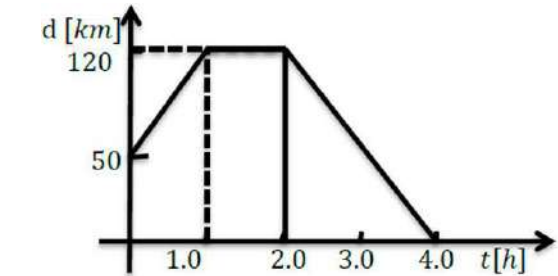
Sabemos que el error relativo porcentual, viene dado por la siguiente expresión:

$$\%E = \frac{\Delta X}{X} \times 100$$

Reemplazando valores:

$$\%E = \frac{10}{100} \times 100$$

$$\%E = 10\%$$
- (10%) En la determinación de la gravedad en laboratorio dos grupos obtuvieron los siguientes resultados: Grupo A: $g = (9.7 \pm 0.2)[m/s^2]$ y Grupo B: $g = (10.05 \pm 0.05)[m/s^2]$ Sabiendo que el valor de la gravedad es $9.81[m/s^2]$. ¿Cuál de las afirmaciones es correcta?
 - El grupo A tuvo mayor precisión y el grupo B mayor exactitud
 - El grupo A tuvo mayor precisión y exactitud
 - El grupo B tuvo mayor precisión y el grupo A mayor exactitud
 - El grupo B tuvo mayor precisión y exactitud



(10%) ¿Cuál era la posición del automóvil en el instante $t=1[h]$?

- 50[Km]
- 120 [Km]
- 0 [Km]
- 60[Km]

(10%) ¿Qué velocidad desarrollo en la primera hora de viaje?

- 70[Km/h]
- 70[Km/h]
- 70[Km/h]
- 70[Km/h]

Sol.

La velocidad está representada por la pendiente de la gráfica:

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$$

Reemplazando los valores que corresponden a la primera hora de viaje, tenemos:

$$v = \frac{120km - 50km}{1h - 0h}$$

$$v = 70km/h$$

(10%) ¿Cuánto tiempo permaneció parado?

- 2[h]
- 1.5[h]
- 3[h]
- 1[h]

18^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA
4^{to} DE SECUNDARIA

- (10 %) ¿Qué instrumento de medida utilizaría para medir la temperatura del ambiente?
 - Regla
 - Reloj
 - Balanza
 - Termómetro
 - ninguno
- (10 %) Si $\vec{A} = \vec{B}$ ¿Qué se puede concluir acerca de los componentes de \vec{A} y \vec{B} ?
 - Son iguales
 - Son diferentes
 - Son cero
 - Faltan datos
 - son infinitos
- (10 %) ¿Qué indica la desviación estándar?
 - La dispersion de los datos respecto al valor del promedio
 - La dispercion de los datos con respecto al valor verdadero
 - Ninguna de las anteriores
- (10 %) ¿Siempre es posible adicionar una cantidad vectorial a una cantidad escalar? Indique si la afirmación es :
 - Verdadera
 - Falsa
- (10 %) El dibujo muestra cuán separadas están las medidas de cierta magnitud fisica. Si se considera que el valor verdadero se encuentra en el centro del dibujo, se deduce que:



- Se cometió un error aleatorio en la medición.
 - Las medidas son inexactas pero precisas.
- (10%) En la determinación de la gravedad en laboratorio dos grupos obtuvieron los siguientes resultados: Grupo A: $g = (9.7 \pm 0.2)[m/s^2]$ y Grupo B: $g = (10.05 \pm 0.05)[m/s^2]$ Sabiendo que el valor de la gravedad es $9.81[m/s^2]$. ¿Cuál de las afirmaciones es correcta?
 - El grupo A tuvo mayor presicion y el grupo B mayor exactitud
 - El grupo A tuvo mayor presicion y exactitud
 - El grupo B tuvo mayor presicion y el grupo A

mayor exactitud

d) El grupo B tuvo mayor presicion y exactitud Sol.

La precisión está relacionada con el valor del error relativo porcentual, es decir mientras más grande es el error relativo porcentual más imprecisa es la medición. Por otro lado la exactitud señala si el valor verdadero se encuentra dentro del intervalo calculado.

Ahora calculamos los errores relativos porcentuales de ambos grupos:

Grupo A:

$$\%E = \frac{\Delta g}{g} \times 100$$

$$\%E_A = \frac{0.2}{9.7} \times 100$$

$$\%E_A = 2\%$$

Grupo B:

$$\%E_B = \frac{0.05}{10.05} \times 100$$

$$\%E_B = 0.5\%$$

- Cristian midió la longitud de su gato tres veces obteniendo los siguientes resultados $L_1 = 33.0[cm]$, $L_2 = 32.5[cm]$ y $L_3 = 35.0[cm]$

(10%) ¿Cuál es el promedio del conjunto de medidas?

- 33.0[cm]
- 35.0[cm]
- 32.0[cm]
- 33.5[cm]

Sol.

El promedio es:

$$\bar{L} = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{3}$$

Reemplazando las medidas:

$$\bar{L} = \frac{33.0 + 32.5 + 35.0}{3}$$

$$\bar{L} = 33.5[cm]$$

(10%) ¿Cuál es la desviación estándar del conjunto de medidas?

- 1.22[cm]
- 0.49%
- 1.62[cm]
- 1.32[cm]

Sol.

La expresión matemática de la desviación estándar de la media es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(L_i - \bar{L})^2}{n-1}}$$

Donde L_i es la iésima medida, \bar{L} es el promedio del conjunto de mediciones y n es el número de Medidas. Se hace la siguiente tabla, para facilitar los cálculos de la ecuación anterior:

n	$L_i [cm]$	$(L_i - \bar{L})^2$
1	33,0	0,25
2	32,5	1,00
3	35,0	2,25
	suma	3,50 $[cm^2]$

Reemplazamos los valores:

$$\sigma = \sqrt{\frac{3.50}{3-1}}$$

$$\sigma = 1.32[cm]$$

8. (10%) Las magnitudes de dos vectores \vec{A} y \vec{B} son $|\vec{A}| = 7$ unidades y $|\vec{B}| = 3$ unidades. Encuentre el valor máximo posible para la magnitud del vector resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

a) 50[u]

b) 4[u]

c) 21[u]

d) 10[u]

Sol.



El valor máximo de la resultante de dos vectores, se da cuando los vectores son colineales y tienen los mismos sentidos. De ahí:

$$|R_{Max}| = |\vec{A}| + |\vec{B}| = 7[u] + 3[u]$$

$$|R_{Max}| = 10[u]$$

9. (10%) Hay alrededor de $\pi \times 10^7$ segundos en un año. Encuentre el porcentaje de error en esta aproximación. Considere que un año tiene 365 días.

a) 0.38%

b) 0.449%

c) 0.5%

d) 1%

Sol.

Calculamos la cantidad de segundos que hay en un año, tomaremos este periodo de tiempo como el valor verdadero:

$$t_{medido} = 365[dias] \times \frac{24[h]}{1[dia]} \times \frac{3600[s]}{1[h]}$$

Sabemos que el error relativo porcentual de una medida está dado por la siguiente expresión:

$$\%E = \frac{|t_{medido} - t_{verdadero}|}{t_{verdadero}} \times 100$$

Reemplazando valores:

$$\%E = \frac{|\pi \times 10^7 - 365 \times 24 \times 3600|}{365 \times 24 \times 3600} \times 100$$

$$\%E = 0.38\%$$

18^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA
5^{to} DE SECUNDARIA

1. (10%) ¿En el movimiento rectilíneo uniforme, ¿qué permanece constante?
 - a) La aceleración
 - b) El tiempo
 - c) El desplazamiento
 - d) La velocidad
 - e) ninguna de las anteriores
2. (10%) ¿En qué unidad se mide en el sistema internacional la fuerza?
 - a) Newtons
 - b) Kilogramo
 - c) Joules
 - d) Ergios
 - e) Watts
3. (10%) ¿Puede que la energía cinética de un cuerpo sea negativa?
 - a) Si
 - b) Unas veces sí y otras no
 - c) Muy rara vez
 - d) Nunca
4. (10%) Una pelota se deja caer desde una altura h , con velocidad inicial cero. Si la colisión con el piso es elástica y se desprecia el rozamiento con el aire, se concluye que:
 - a) luego de la colisión la aceleración de la pelota es cero.
 - b) la energía cinética de la pelota no varía mientras cae.
 - c) luego de rebotar, la altura de la pelota será igual a h .
 - d) la energía mecánica total varía, porque la energía potencial cambia mientras la pelota cae.
 - e) la pelota no rebotará.
5. (10%) Tres objetos A, B y C, de la misma masa parten del reposo y caen desde la misma altura. Despreciando todas las fuerzas de fricción, subraye la afirmación correcta:
 - a) El objeto C posee mayor energía cinética que A y B al llegar al piso.
 - b) Las energías cinéticas de los tres objetos son las mismas al llegar al piso.
 - c) El objeto A posee la menor energía cinética al llegar al piso
 - d) El vector desplazamiento de los tres objetos es diferente.
6. (10%) Considere una partícula en movimiento circular uniforme. Sea E_C la energía cinética de esta partícula y \vec{p} su cantidad de movimiento. ¿Es correcto afirmar que?
 - a) E_C varía y \vec{p} permanece constante
 - b) Tanto E_C como \vec{p} permanecen constantes
 - c) E_C y \vec{p} experimentan variación

- d) E_C permanece constante y \vec{p} varía
- e) Ninguna de las anteriores

7. (10%) Matemáticamente, el trabajo (W) se define como el producto escalar entre el vector fuerza (\vec{F}) y el vector desplazamiento (\vec{d}), esto es: $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Ahora imagine que sobre una partícula actúa una fuerza $\vec{F} = (3i + 4j)[N]$ y esta se desplazó según el vector desplazamiento $\vec{d} = (i - 5j)[m]$. ¿Qué trabajo realizó la fuerza \vec{F} ?

- a) -17[J] b) 7[J] c) -27[J] d) 17[J] e) 3 [J]

Sol.

Calculamos el producto escalar que define al trabajo:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

$$W = (3i + 4j) \cdot (i - 5j) = (3)(1) + (4)(-5)$$

$$W = -17[J]$$

8. Mariela arroja una pelota verticalmente hacia abajo, desde lo alto de un edificio. En el punto A, cuando la pelota sale de la mano de Mariela, su energía potencial con respecto del suelo es $E_{PA} = 10[J]$ y su energía cinética es $E_{cA} = 5[J]$. Despreciando la fricción con el aire durante la caída y midiendo todas las energías respecto del piso, responda:

(10%) ¿Cuál es la energía mecánica total de la pelota en el punto A?

- a) 10[J] b) 15[J] c) 5[J] d) 0[J]

Sol.

La energía mecánica es la suma de todas las formas de energía presente. Para el ejercicio es:

$$E_{Mec.} = E_{Cin.} + E_{Pot.grav.}$$

$$E_{Mec.} = 5[J] + 10[J]$$

$$E_{Mec.} = 15[J]$$

(10%) La única fuerza que actúa sobre la pelota mientras cae es su peso. Esta fuerza es:

- a) Conservativa
b) Disipativa

(10%) ¿Cuánto vale la energía potencial cuando la pelota llega al piso?

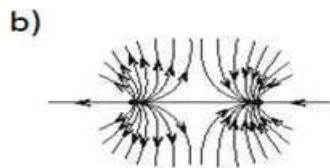
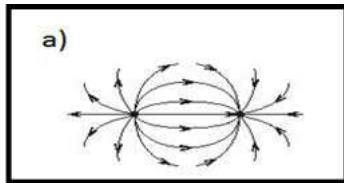
- a) 0 Newtons
b) 5 Joules
c) 0 Joules
d) 5 Ergios

Sol.

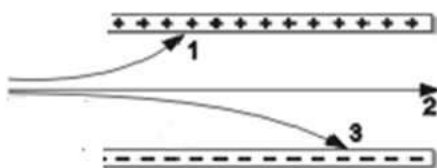
Dado que la energía potencial gravitacional depende de la altura h a la que se encuentre con respecto al piso, cuando el objeto se encuentra en el piso esta energía es cero, dado que la altura h es cero. Debe notarse también que si cambiamos de nivel de referencia la energía potencial en el piso será diferente de cero.

18^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA
6^{to} DE SECUNDARIA

- (10%) ¿En qué unidad se mide la carga eléctrica en el sistema internacional?
 - Electrones
 - Coulomb
 - Ampere
 - Voltio
 - Watts
- (10%) ¿Cuál es la carga neta de un átomo neutro?
 - Cero
 - +e
 - Ze
 - e
 - 50e
- (10%) Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas de iguales valores y signos contrarios situadas a una distancia d la una de la otra. Las líneas de campo eléctrico en las cercanías del dipolo son:



- (10%) En regiones, donde es mayor la intensidad del campo eléctrico:
 - Las líneas de fuerza son aún más fuertes
 - Las líneas de fuerza aparecen más cercanas entre sí
 - Hay menos carga
 - El potencial desaparece
 - ninguna de las anteriores
- Un haz de partículas constituido por protones, neutrones y electrones, penetran en un campo uniforme formado entre dos placas paralelas electrizadas. Se observa que el haz se divide en otros tres : 1, 2 y 3 como se muestra en el dibujo.



- (10%) ¿Cuál de las partículas mostradas corresponde a los protones?
- 1
 - 2
 - 3
 - 1 y 3
 - 3 y 2

(10%) ¿Cuál de las partículas mostradas corresponde a los neutrones?

- 1
 - 2
 - 3
 - 2 y 3
 - 1 y 3
- (10%) Determine el módulo de la intensidad de campo eléctrico en un punto situado a 1 metro de una carga $q = 1[C]$ Dato: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}[C^2N^{-1}m^{-2}]$
 - $18 \times 10^9[N]$
 - $1[N]$
 - $9[N]$
 - $9 \times 10^9[N]$

Sol.

El campo eléctrico producido por una carga puntual está dado por la siguiente ecuación:

$$|\vec{F}| = K \frac{q}{r^2}$$

Reemplazando valores

$$|\vec{F}| = (9 \times 10^9) \frac{1}{1^2}$$

$$|\vec{F}| = 9 \times 10^9[N]$$

- (10%) ¿Cuántos electrones aproximadamente están presentes en 1[Kg] de electrones? Considere que la masa del electrón es $m_e = 9.11 \times 10^{-31}[Kg]$
 - 2.1×10^{30} electrones
 - 1.1×10^{-30} electrones
 - 1.1×10^{30} electrones
 - 9.1×10^{31} electrones
 - 9.1×10^{-31} electrones

Sol.

El número de electrones está dado por el siguiente cociente:

$$N = \frac{M_{Tot. de elec.}}{m_e}$$

$$N = \frac{1[Kg]}{(9.11 \times 10^{-31}[Kg])}$$

$$N = 1.1 \times 10^{30} \text{ electrones}$$

- (10%) Dos cargas puntuales de igual magnitud y signos contrarios se encuentran separadas una distancia d . ¿En qué punto a lo largo de la línea que une a las cargas podemos tener la magnitud del campo eléctrico resultante igual a cero?
 - Sobre la carga positiva
 - Sobre la carga negativa
 - En medio de las dos cargas
- (10%) En el movimiento rectilíneo uniforme, ¿qué permanece constante?
 - La aceleración
 - El tiempo
 - El desplazamiento
 - La velocidad
 - ninguna de las anteriores

8^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE
ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
6^{to} DE PRIMARIA

1. (10%) ¿Cuántos planetas posee el Sistema Solar?
 - a) 10
 - b) 7
 - c) 8
 - d) 9
 - e) 11
2. (10%) ¿Quién planteo la teoría geocéntrica?
 - a) Aristóteles
 - b) Newton
 - c) Ptolomeo
 - d) Platón
 - e) Copérnico
3. (10%) ¿Quién planteo la teoría heliocéntrica?
 - a) Platón
 - b) Einstein
 - c) Copérnico
 - d) Ptolomeo
 - e) Newton
4. (10%) El Eclipse total de Sol se produce en:
 - a) Luna nueva
 - b) Luna en cuarto creciente
 - c) Luna en cuarto menguante
 - d) Luna llena
 - e) ninguna de las anteriores
5. (10%) ¿Cuanto vale el periodo de la luna alrededor de la Tierra?
 - a) 20 días
 - b) 28 días
 - c) 24 días
 - d) 30 días
 - e) 22 días
6. (10%) ¿Cuáles son los planetas gaseosos del Sistema Solar?
 - a) Tierra, Marte, Saturno
 - b) Saturno, Júpiter, Neptuno, Plutón, Urano
 - c) Mercurio, Venus, Tierra, Marte
 - d) Neptuno, Saturno, Júpiter
 - e) Saturno, Neptuno, Júpiter, Urano
7. (10%) ¿Cuántas veces es más grande el diámetro de la Tierra con el de la Luna?
 - a) 4 veces
 - b) 10 veces
 - c) 2 veces
 - d) 6 veces
 - e) 3 veces
8. (10%) El “Cinturón de Asteroides” está ubicado entre las órbitas de:
 - a) La Tierra y Marte
 - b) Marte y Júpiter
 - c) Júpiter y Saturno
 - d) Marte y Saturno
 - e) La Tierra y la Luna
9. (10%) ¿Cuál es la velocidad de movimiento de la Tierra alrededor del Sol, suponiendo que esta se mueve uniformemente por un círculo de radio de 149 600 00 km con un periodo orbital igual a 365 1/4 días? AYUDA: La velocidad media se define como la distancia recorrida sobre el tiempo dado
 - a) 30 km/hora
 - b) 55 km/seg
 - c) 30 km/seg
 - d) 65 km/hora
 - e) ninguno de los anteriores
10. (10%) ¿Cuál de las siguientes planetas está más próximo al Sol?
 - a) Marte
 - b) Venus
 - c) Júpiter
 - d) Saturno
 - e) Ninguno de los anteriores

8^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE
ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
1^{ro} DE SECUNDARIA

1. (10%) Los eclipses de Luna ocurren cuando esta está en su fase:
 - a) Llena
 - b) Nueva
 - c) Creciente
 - d) Menguante
 - e) Cualquiera de las anteriores
2. (10%) El Sol es:
 - a) Un planeta gigante
 - b) Un Asteroide
 - c) Una Luna brillante
 - d) Un Meteoro
 - e) Una Estrella
3. (10%) El principal combustible de las estrellas como el Sol, en la secuencia principal es el:
 - a) Hidrógeno
 - b) Helio
 - c) Carbono
 - d) Litio
 - e) Nitrógeno
4. (10%) La distancia Tierra-Sol a comparación de la distancia Tierra-Luna es:
 - a) Mayor
 - b) Menor
 - c) Igual
 - d) Imposible de determinar
5. (10%) Un estrella es:
 - a) Un bola de gas caliente
 - b) Un roca de hielo sucio
 - c) Un planeta mas grande que Júpiter
 - d) Un meteoro en su etapa de formación
 - e) El destino final de planetas como la Tierra
6. (10%) La distancia de la Tierra al Sol es aproximadamente:
 - a) 1 Unidad Astronómica
 - b) 1 Parsec
 - c) 100000 Km
 - d) 1 Aõ luz
 - e) 10000 Km
7. (10%) Las mareas se producen por:
 - a) La gravedad de la Tierra
 - b) La rotación de la tierra sobre su propio eje
 - c) La fuerza gravitacional que existe entre la Tierra y la Luna
 - d) La gravedad de un cometa
 - e) La gravedad del Sol
8. (10%) ¿Cuál sería la duración de un día solar medio en horas solares medias?
 - a) 23h 56min 4s
 - b) 23h 58min 3s
 - c) 24h 0min 0s
 - d) 23h 56min 8s
 - e) Ninguna de las anteriores
9. (20%) Los planetas visibles a simple vista son: (Nota: acá debe seleccionar más de una opción)
 - a) Júpiter
 - b) Mercurio
 - c) Urano
 - d) Venus
 - e) La luna
 - f) Neptuno
 - g) Marte

8^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE
ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
2^{do} DE SECUNDARIA

- a) 50 km
b) 65 km
c) 75 km
d) 7000 m
- (10%) Mercurio puede ser visto:
 - Sólo al atardecer
 - Sólo al amanecer
 - Sólo al atardecer y al amanecer
 - Sólo cerca de la medianoche
 - En cualquier momento de la noche
 - (10%) Los planetas conocidos en la época de Galileo y Kepler eran:
 - Venus, Tierra, Marte y Júpiter
 - Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno
 - Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno
 - Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno y Plutón
 - Ninguna de las anteriores
 - (10%) Las "estrellas fugaces" son:
 - Partículas de polvo y hielo, o rocas que se encuentran en el espacio y que son interceptadas por la órbita terrestre
 - Restos de cometas o de la formación del Sistema Solar
 - Objetos que en ocasiones alcanzan la superficie de la Tierra debido a que no se desintegran por completo en la atmósfera
 - Todas las anteriores
 - Ninguna alternativa es correcta
 - (10%) Nuestro Sistema Solar posee:
 - Un Sol y 8 Planetas
 - 2 Soles y 8 Planetas
 - 1 Sol y 9 Planetas
 - Un Sol
 - 9 Planetas
 - (10%) Un año-luz corresponde a:
 - La distancia entre la Tierra y el Sol
 - 365 días
 - La distancia que recorre la luz durante 365 días
 - 300000 [km/s]
 - La distancia al centro de la Tierra
 - (20%) El diámetro angular del cráter Copérnico en la Luna es igual a $40''$. La distancia de la Luna a la Tierra es de 386000 km. Cuál es, aproximadamente, el diámetro lineal del cráter? Ayuda: $1'' = (1 / 3600)^\circ$; $3.14159 \text{ [rad]} = 180^\circ$; Diámetro Angular = Distancia por Diámetro Lineal
 - Una milésima de segundo
 - 1/2 segundo
 - 8 minutos
 - 3/4 de hora
 - 7 horas
 - (20%) Para llegar del Sol a la Tierra, ¿Cuánto demora en llegar la luz aproximadamente? Ayuda: la velocidad de la luz es $c = 299792458 \text{ m/s}$ y la distancia Tierra – Sol es igual a 149597870700 metros
 - Una milésima de segundo
 - 1/2 segundo
 - 8 minutos
 - 3/4 de hora
 - 7 horas
 - (10%) Respecto a nuestro sistema solar, se puede afirmar que:
 - El Sol concentra más del 95 % de la masa total
 - Es el más antiguo de nuestra todas las otras estrellas visibles
 - Posee al planeta más grande descubierto a la fecha
 - Ocupa aproximadamente el 50% del volumen de la Vía Láctea (nuestra galaxia)
 - Se encuentra cerca del centro galáctico

6^{ta} OLIMPIADA BOLIVIANA DE
ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
3^{ro} DE SECUNDARIA

1. (10%) La Tierra, además del movimiento de traslación en torno al Sol, posee el(los) movimiento(s), de:
 - a) Rotación
 - b) Precesión
 - c) Nutación
 - d) Todos los anteriores
 - e) Sólo rotación y precesión
2. (10%) Otra de las constelaciones que destaca en el cielo nocturno es la denominada Cruz de Sur, y se encuentra ubicada:
 - a) Muy cerca del polo sur celeste
 - b) Muy cerca de la constelación Centauro
 - c) Cerca de la constelación Triangulo Austral
 - d) Todas las anteriores
 - e) ninguna de las anteriores
3. (10%) ¿Cuán a menudo está el Sol directamente sobre el Ecuador terrestre?
 - a) Una vez al día
 - b) Una vez al mes
 - c) Una vez cada seis meses
 - d) Una vez al año
 - e) Cada 12 horas
4. (10%) ¿Dónde coinciden el Cenit y el polo sur celeste?
 - a) En el polo sur
 - b) En el polo norte
 - c) En el ecuador
 - d) En cualquier lugar de la Tierra
 - e) En ningún lugar
5. (10%) El centro de la esfera celeste es:
 - a) El ojo del observador
 - b) El centro de la Tierra
 - c) El centro del Sol
 - d) El observatorio de Greenwich
 - e) El suelo debajo del telescopio
6. (10%) Bolivia tiene un uso horario de -4 ¿A qué distancia del meridiano cero, en grados de longitud, equivale eso?
 - a) 4°
 - b) 15°
 - c) 60°
 - d) 180°
 - e) 310°
7. (10%) Por lo general las coordenadas mostradas en los mapas estelares son:
 - a) Ascensión Recta y Declinación
 - b) Altura y Acimut
 - c) Distancia y brillo
 - d) Todas las anteriores
 - e) Ninguna de las anteriores
8. (10%) ¿Cuánto tiempo aproximadamente le toma al Sol realizar un 'viaje' completo alrededor de la eclíptica? a) 23 horas 56 minutos 4 s
b) 24 horas
c) 27 días
d) 183 días
e) 365 días
9. (10%) En el modelo de esfera celeste del cielo, la posición del Sol (vista desde la Tierra durante el año) sobre el horizonte Oeste al atardecer cambia porque:
 - a) La Tierra es estacionaria
 - b) Las estrellas rotan con la esfera celeste
 - c) La posición del Sol a lo largo de la eclíptica está cambiando constantemente
 - d) El eje de rotación de la Tierra está inclinado 23.5 grados
 - e) Un año terrestre dura aproximadamente 365 días.
10. (10%) ¿Cuál es la fecha aproximada cuando el camino del Sol a lo largo de la eclíptica cruza el ecuador terrestre moviéndose hacia el norte?
 - a) 3 de Enero
 - b) 21 de Marzo
 - c) 21 de Junio
 - d) 22 de Septiembre
 - e) 21 de Diciembre

8^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE
ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
4^{to} DE SECUNDARIA

1. (10%) ¿Cuántas constelaciones existen registradas en la actualidad?
 - a) 44
 - b) más de 100
 - c) 88
 - d) 12
 - e) ninguna de las anteriores
2. (10%) La estrella Alfa Centauro se encuentra a 4.3 Años Luz, ¿a cuanto equivale esa distancia en parsecs?
 - a) 1.5
 - b) 1.3
 - c) 2
 - d) 5
 - e) 4.3
3. (10%) Los modelos de hoyos negros están basados en
 - a) La Teoría de la Gravitación de Newton (Ley de Gravitación Universal)
 - b) El Electromagnetismo de Maxwell
 - c) La Teoría de la Gravitación de Einstein (Relatividad General)
 - d) El principio de exclusión de Pauli (Física Cuántica)
 - e) Observaciones detalladas de estos objetos
4. (10%) La distancia del Sol al centro de la Vía Láctea es aproximadamente
 - a) 4 años luz
 - b) 65 años luz
 - c) 350 años luz
 - d) 25 mil años luz
 - e) 20 millones de años luz
5. (10%) En galaxias espirales, hay fuerte evidencia para la existencia de materia oscura (materia que no emite suficiente radiación electromagnética como para ser detectada), basada en que:
 - a) Todas las estrellas se van moviendo hacia el centro
 - b) No es posible ver todas las estrellas, porque su luz es absorbida por la materia oscura
 - c) La velocidad orbital de las estrellas en torno al centro de la galaxia es demasiado alta para ser explicable sólo por la fuerza de atracción por parte de las otras estrellas
 - d) No hay muchas estrellas
6. (10%) ¿Sigue un cometa periódico, exactamente la misma órbita en sus regresos sucesivos al Sol?

SI
NO
7. (10%) Las galaxias conocidas más cercanas a la nuestra son:
 - a) Galaxia enana del Can Mayor y galaxia enana elíptica de Sagitario
 - b) Nube Grande de Magallanes y Nube Pequeña de Magallanes
 - c) Galaxia de Andrómeda y galaxia del Triángulo
 - d) Nube Pequeña de Magallanes y galaxia Andrómeda
8. (10%) Cuantas veces las estrellas de primera magnitud son más brillantes que las de la más baja luminosidad observables a simple vista (es decir de 6ta magnitud):
 - a) 60 veces
 - b) 80 veces
 - c) 100 veces
 - d) 1000 veces
9. (10%) La mayoría de los planetas extrasolares hasta ahora han sido descubiertos por:
 - a) Su radiación infrarroja
 - b) El movimiento que inducen en la estrella en torno a la cual orbitan
 - c) Las variaciones de flujo de luz que ocurren cuando el planeta pasa frente a la estrella
 - d) Ninguna de las anteriores, porque aún no se han descubierto planetas extrasolares
 - e) b y c son correctas
10. (10%) Desde nuestro hemisferio, una de las siguientes constelaciones NO es considerada una constelación circumpolar:
 - a) Hidra
 - b) Cruz del Sur
 - c) Triángulo Austral
 - d) Osa Mayor
 - e) Carina

8^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE
ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
5^{to} DE SECUNDARIA

1. (10%) Entre los roles históricos de las leyes de Kepler no estuvo
 - a) Corregir el modelo copernicano, cambiando las órbitas circulares por elípticas
 - b) Respalda el modelo heliocéntrico
 - c) Preparar el camino para la formulación de las leyes mecánicas y de gravitación de Newton
 - d) Explicar cómo se formó el Sistema Solar
 - e) Dar una descripción más precisa del movimiento de los planetas
2. (20%) Cuántas estrellas de sexta magnitud juntas tienen el mismo brillo que una estrella de primera magnitud?
 - a) 10
 - b) 50
 - c) 100
 - d) 160
 - e) 200
3. (20%) Las estrellas nos envían no solo el espectro visible sino además:
 - a) Radiación ultravioleta
 - b) Rayos infrarrojos
 - c) Electrones y positrones
 - d) Todas las anteriores
 - e) ninguna de las anteriores
4. (10%) Los telescopios ópticos a veces se ubican en satélites para:
 - a) No dañar la salud de la población circundante.
 - b) No dañar al ecosistema terrestre.
 - c) Poder detectar pruebas nucleares de países enemigos.
 - d) Poder detectar radiación energética del espacio, que no penetra la atmósfera terrestre.
 - e) Impedir que las imágenes se distorsionen por efectos de la turbulencia atmosférica.
5. (10%) La segunda ley de Kepler (áreas iguales en tiempos iguales) dice en efecto que:
 - a) cada planeta se mueve a un ritmo constante alrededor del Sol
 - b) los planetas más remotos deben orbitar más rápido, para barrer el área completa al mismo tiempo
 - c) los planetas de órbitas más cercanas al Sol se mueven más rápido
 - d) un planeta dado se mueve más lento cuando está más cerca del Sol
 - e) un planeta dado se mueve más rápido cuando está más cerca del Sol
6. (10%) Según la 2^a ley de Kepler, al orbitar un planeta en torno al Sol, la línea que los une barre áreas iguales en tiempos iguales. En este contexto, cuál de las siguientes afirmaciones NO es correcta:
 - a) El planeta se mueve más rápido mientras más cerca esté del Sol.
 - b) El momento angular del planeta es constante.
 - c) La atracción del Sol acelera al planeta mientras se va acercando y lo desacelera a medida que se aleja
 - d) Dada la órbita y el período orbital del planeta, podemos calcular su velocidad en cualquier punto de la órbita.
 - e) El momento angular del planeta es mayor mientras más cerca esté del Sol.
7. (20%) Si un ocular, empleado con un objetivo cuya distancia focal es de 1 m produce un aumento de 50 veces, que aumento dará este ocular con un objetivo de distancia focal de 5 m?
 - a) 100 veces
 - b) 150 veces
 - c) 250 veces
 - d) 500 veces

8^{va} OLIMPIADA BOLIVIANA DE
ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA
6^{to} DE SECUNDARIA

1. (15%) La constelación de Orion tiene, entre sus estrellas constituyentes, a Betelgeuse que emite un resplandor Rojo y Rigel que emite un color Azul. ¿Cuál de las estrellas tiene una temperatura superficial más baja?
 - a) Betelgeuse (*El color Rojo tiene mayor longitud de onda que el color Azul. Por la ley de desplazamiento de Wien, a mayor longitud de onda le corresponde una menor temperatura*)
 - b) Rigel
 - c) Ambas poseen la misma temperatura superficial
 - d) Imposible de determinar
 - e) Las estrellas no tienen una temperatura superficial

2. (15%) En el Universo las estrellas tienen tendencia a formar una jerarquía de sistemas de diferentes magnitudes. El eslabon esencial en esta jerarquía son los enormes sistemas de centenares de miles de millones de estrellas, denominadas galaxias. Una parte pequeña de la masa de las galaxias pertenece al gas enrarecido y al polvo, que cubren el espacio entre las estrellas
 - a) galaxias; estrellas; magnitudes; masa; espacio
 - b) estrellas; galaxias; magnitudes; masa; espacio
 - c) magnitudes; galaxias; estrellas; masa; espacio
 - d) estrellas; magnitudes; galaxias; masa; espacio
 - e) galaxias; magnitudes; estrellas; masa; espacio

3. (15%) Según su aspecto exterior y carácter de distribución del brillo la mayoría de las galaxias se dividen principalmente en eclípticas y espirales. Las galaxias elípticas tienen en las fotografías la forma de elipses (o elipsoides en tres dimensiones) sin límites bruscos. El brillo aumenta paulativamente desde la periferia hacia el centro sin mostrar una estructura interna. Las galaxias espirales son las más numerosas entre las observables. Nuestra galaxia y la nebulosa de andrómeda son representantes típicas. A diferencia de las galaxias elípticas en éstas se observa una estructura en forma de ramas espirales típicas.
 - a) eclípticas; espirales; observables; periferia; bruscos; andrómeda; ramas
 - b) eclípticas; espirales; ramas; periferia; observables; andrómeda; bruscos
 - c) eclípticas; espirales; bruscos; periferia; observables; andrómeda; ramas
 - d) andrómeda; espirales; bruscos; periferia; observables; eclíptica; ramas
 - e) ramas; espirales; bruscos; periferia; observables; andrómeda; eclípticas

4. (15%) Un cuerpo negro es un sistema ideal que absorbe toda radiación incidente. La radiación electromagnética emitida por un cuerpo negro se conoce como radiación de cuerpo negro. Los espacios entre los carbones ardientes en una fogata emiten una luz que es bastante similar a la radiación de un cuerpo negro. La potencia total de la radiación emitida aumenta con la temperatura según la relación de Stefan Boltzmann: $P = S\epsilon\sigma T^4$, donde P es la potencia en Watts en todas las longitudes de onda desde la superficie del cuerpo emisor, Sigma es la constante de Stefan Boltzmann, dada por $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$, S es la superficie del cuerpo emisor en m^2 , epsilon es la emisividad de la superficie, sin unidades y T es la temperatura de la superficie en grados Kelvin. En el caso de un cuerpo negro la emisividad es igual a la unidad.
 - a) potencia; radiación; Watts; constante; superficie; emisividad; temperatura; unidad
 - b) radiación; potencia; Watts; constante; superficie; emisividad; temperatura; unidad
 - c) radiación; potencia; constante; Watts; superficie; emisividad; temperatura; unidad
 - d) radiación; potencia; Watts; constante; emisividad; superficie; temperatura; unidad
 - e) radiación; potencia; Watts; constante; superficie; emisividad; unidad; temperature

5. (15%) La segunda ley de Kepler (áreas iguales en tiempos iguales) dice en efecto que:
 - a) cada planeta se mueve a un ritmo constante alrededor del Sol
 - b) los planetas más remotos deben orbitar más rápido, para barrer el área completa al mismo tiempo
 - c) los planetas de órbitas más cercanas al Sol se mueven más rápido
 - d) un planeta dado se mueve más lento cuando está más cerca del Sol
 - e) un planeta dado se mueve más rápido cuando está más cerca del Sol

6. (15%) Cuantas estrellas de sexta magnitud juntas tienen el mismo brillo que una estrella de primera magnitud?
 - a) 10
 - b) 50
 - c) 100
 - d) 160
 - e) 200

7. (10%) ¿Cuál es la fecha aproximada cuando el camino del Sol a lo largo de la eclíptica cruza el ecuador terrestre moviéndose hacia el norte?
- a) 3 de Enero
 - b) 21 de Marzo
 - c) 21 de Junio
 - d) 22 de Septiembre
 - e) 21 de Diciembre

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Dr. Diego Sanjinés Castedo

Email: sanjines@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Dr. Eduardo Palenque Vidaurre

Email: edyruy@yahoo.es

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos

Email: aticon@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

Misión

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica semestralmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

Instrucciones para los autores

Los trabajos enviados para su publicación deberán estar escritos preferentemente en castellano. Trabajos escritos en inglés podrán ser aceptados por el Comité Editorial y, pasado el proceso de aceptación, serán traducidos al castellano para su publicación en la RBF.

Los autores deberán enviar sus trabajos preferentemente en los formatos $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, *MS Word*, o *sólo texto* (con extensiones *.tex*, *.doc* y *.txt*, respectivamente), ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. Las figuras deberán tener una resolución razonable a fin de que puedan ser vistas con suficiente claridad por el lector.

Los artículos científicos serán revisados por el Comité Editorial y posteriormente por un par de árbitros anónimos quienes dan el veredicto sobre si el artículo es aceptado o no.

La comunicación de los autores con los árbitros se realiza únicamente a través del editor encargado del área.

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

Conflicto de interés: Los autores que envíen artículos para su publicación en la RBF admiten que no tienen conflicto de interés en relación a los trabajos realizados y presentados.