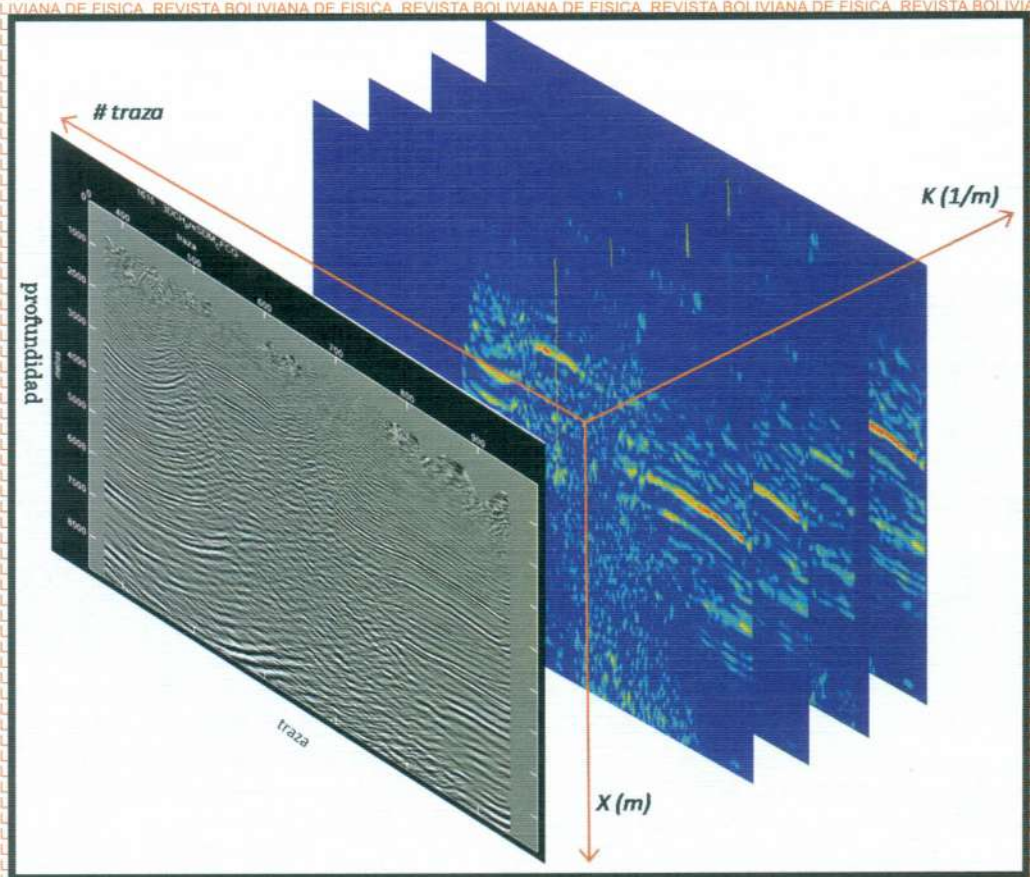


ISSN - 1562 - 3823

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 34

NOVIEMBRE 2019 • LA PAZ - BOLIVIA



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA
Ésta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Dr. Flavio Ghezzi Moris

Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos

Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

CONSEJO EDITORIAL

Dr. Oscar Antonio Rondón

Institute of Nuclear and Particle Physics
University of Virginia
McCormick Road, Charlottesville, VA 22901
804 924-6787, USA
Email: or@virginia.edu

Dr. Carlos Navia

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense
Av. Gen. Milton Tavares de Souza
24210-340, Niterói, RJ-Brasil
Email: gfcnoj@if.uff.br

Dr. Jason Alfredo Carlson Gallas

Departamento de Física
Universidade Federal da Paraíba
58051-970, João Pessoa
Brasil
Email: jgallas@fisica.ufpb.br

Dr. André Asevedo Nepomuceno

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense
Av. Gen. Milton Tavares de Souza
24210-340, Niterói, RJ-Brasil
Email: andre.asevedo@cern.ch

ISSN 1562-3823



Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
Y
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 34
NOVIEMBRE DE 2019

Revista Boliviana de Física

ISSN 1562-3823

Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica

<http://www.scielo.org.bo>

<http://www.latindex.unam.mx>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

Diseño: A. Ticona

Dirección: Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.

Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

Portada: Sección sísmica PSDM, decompuesto espectralmente por AMR en el espacio $k - x$.

Formato $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$. *Tipo de fuente utilizada:* newcentury

IMPRESO EN BOLIVIA — PRINTED IN BOLIVIA

CONTENIDO

EDITORIAL	<i>Editor</i>	1
-----------	---------------	---

A. ARTÍCULOS

SINCRONIZACIÓN DE TRÍOS DE NEURONAS DE RULKOV CARACTERIZADAS POR PERIODICIDADES	<i>Kevin Iglesias & Gonzalo Marcelo Ramírez-Ávila</i>	3
---	---	---

ANÁLISIS MULTI-RESOLUCIÓN (AMR) EN EL DOMINIO K-X APLICACIONES A SÍSMICA 3D-2D CASO: SUBANDINO CENTRO DE BOLIVIA	<i>Evanz Lázaro & Kim Bejarano</i>	11
--	--	----

ESTIMACIÓN DE REGIONES DE ESTABILIDAD EN UN MODELO DE PÉNDULO ELÁSTICO	<i>Nestor Rodrigo Condori U. & Diego Sanjinés Castedo</i>	19
--	---	----

E. HISTORIA

CIENT AUTORES CONTRA EINSTEIN: UNA TRADUCCIÓN CRÍTICA PARCIAL	<i>Lucas Blitz Lozada Gobilard</i>	33
---	------------------------------------	----

EDITORIAL

A pesar de las dificultades encontradas en el último tiempo para la continuidad de las entregas de la Revista Boliviana de Física (RBF), tenemos que anunciar con agrado que la misma sigue nutriéndose de trabajos científicos de investigadores tanto de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) como de instituciones que fomentan las actividades de investigación como es el caso de Yacimientos Petrolíferos Fiscales Bolivianos (YPFB) y Chaco S.A.

En esta nueva entrega de la RBF, ya en su número 34 y tras 24 años de publicación ininterrumpida, se tienen tres artículos científicos sometidos a proceso de arbitraje con referís internacionales como siempre ha sido el caso de la RBF. El Grupo de Física Teórica de la UMSA contribuye con dos trabajos, en tanto que las empresas petroleras mencionadas en el anterior párrafo con uno. Por otra parte, un estudiante destacado de la Carrera de Física de la UMSA, contribuye con una revisión histórica.

Este número 34 de la RBF, abre con el artículo de Iglesias & Ramírez-Ávila (2019) sobre sincronización de tríos de neuronas en las dos posibles configuraciones ligadas a los motivos de tres nodos, constituyéndose en una continuación natural de trabajos previos sobre el tema, debidos a Ramírez-Ávila *et al.* (2015) y Calderón de la Barca & Ramírez-Ávila (2017). En esta investigación, los autores reportan que la sincronización es mejorada para el motivo menos homogéneo; por otra parte, también mostraron la existencia de multiestabilidad para el modelo de neurona de Rulkov con el cual trabajaron.

En el segundo artículo, Lázaro & Bejarano (2019) aplican la técnica de análisis multi-resolución (AMR) para poder detectar las denominadas anomalías- k , las cuales muestran la existencia de una relación entre longitudes de onda larga y estructuras geológicas que contienen hidrocarburos. Los resultados anteriores son corroborados con técnicas experimentales con las cuales se obtiene una buena correlación. Finalmente, los autores muestran la gran riqueza de información que se tiene en los análisis espectrales de datos sísmicos.

El cierre de los artículos de investigación corresponde al trabajo de Condori & Sanjinés (2019) quienes utilizando el formalismo lagrangiano, estudian el péndulo elástico con dos grados de libertad, en el cual estiman las regiones de estabilidad sin invocar la aproximación de oscilaciones pequeñas.

Finalmente, reflejo del interés suscitado en uno de los cursos impartidos en la Carrera de Física de la UMSA, concretamente, la materia de “Historia de la Ciencia” dictada por el Dr. Diego Sanjinés, que varias veces ha dado lugar a trabajos de revisión histórica como el publicado acerca del concepto de tiempo por Aramayo (2004), y ahora, Lozada-Gobilard (2019), plasma en un artículo la extensión de su trabajo final de curso consistente en la traducción del alemán de una parte de libro editado por Israël *et al.* (1931) de las críticas aparecidas en dicho texto y una en específico debida a Jean-Marie le Roux quien se refiere a la Relatividad de Einstein. Aparte de la traducción del documento, el autor realiza comentarios pertinentes que llevan a una mejor comprensión del texto y las implicaciones físicas.

Esperamos que el contenido de este ejemplar de la RBF sea de su agrado y pueda motivar al lector en la profundización de los trabajos expuestos a través de estas páginas. También invitamos a la comunidad científica a enviar sus trabajos para ser publicados en la RBF.

REFERENCIAS

- Aramayo, A. (2004), *Revista Boliviana de Física*, **10**, 50.
Calderón de la Barca, I., & Ramírez-Ávila, G.M. (2017), *Revista Boliviana de Física*, **30**, 3.
Condori, N.R., & Sanjinés, D. (2019), *Revista Boliviana de Física*, **34**, 3.
Iglesias, K., & Ramírez-Ávila, G.M. (2019), *Revista Boliviana de Física*, **34**, 11.
Israël, H., Ruckhaber, E., & Weinmann, R. (Eds.) 1931, *100 Autoren Gegen Einstein*, R. Voigt Länder 8 Verlag, Leipzig.
Lázaro, E. & Bejarano, S. (2019), *Revista Boliviana de Física*, **34**, 19.
Lozada-Gobilard, L.B. 2019, *Revista Boliviana de Física*, **34**, 33.
Ramírez-Ávila, G.M., Gallas, M.R., & Gallas, J.A.C. (2015), *Revista Boliviana de Física*, **27**, 1.

EDITORIAL

Despite recent difficulties encountered in maintaining the continuity of the Revista Boliviana de Física (RBF), we are pleased to announce that the RBF continues to nourish itself with scientific work from the Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) and other institutions involved in research such as the Yacimientos Petrolíferos Fiscales Bolivianos (YPFB) and Chaco S.A.

In this new issue of the RBF, now in its number 34 and in its 24th year of uninterrupted publication and review, three scientific articles submitted to international review are presented. The theoretical physics group of UMSA contributes with two papers, while the oil and gas companies mentioned above present one paper. Also, within this issue of the RBF, an outstanding student from UMSA provides a historical review.

This number 34 of the RBF, opens with an article by Iglesias & Ramírez-Ávila (2019) on the synchronization of trios of neurons in the possible configurations connected to three node patterns, as part of a natural continuation of previous works on the theme by Ramírez-Ávila *et al.* (2015) and Calderón de la Barca & Ramírez-Ávila (2017). In this study the authors report that synchronization is improved for the less homogeneous case, in addition they show the existence of multi-stability for the Rulkov neuron model.

In the second article Lázaro & Bejarano (2019) use multiresolution analysis techniques (AMR) to detect the k -anomalies, where there is a relationship with long wavelength geological structures that contain hydrocarbons. Previous results are confirmed with experimental techniques and show a good correlation with the AMR analysis. Finally, the authors show the wealth of information that these spectral techniques can provide on seismic data.

The closing article corresponds to the work of Condori & Sanjinés (2019) who, using Lagrangian formalism study the elastic pendulum with two degrees of freedom, in which they estimate the regions of stability without invoking small oscillations.

Finally, the “History of Science” course taught by Dr. Diego Sanjinés, has inspired a number of historical reviews including a concept of time by Aramayo (2004) and now Einstein and the relativity theory by Lozada-Gobilard (2019). This work consists of a translation from German of texts from the book edited by Israël *et al.* (1931) including critical texts and in particular that of Jean-Marie le Roux who refers to Einstein’s Relativity theory. Apart from the translation of the document, the author makes relevant comments that lead to a better understanding of the text and its implications.

We hope that the content of this issue of the RBF is to your liking and can motivate the reader to further the works exhibited through these pages. We also invite the scientific community to send their work to be published in the RBF.

REFERENCIAS

- Aramayo, A. (2004), *Revista Boliviana de Física*, **10**, 50.
- Calderón de la Barca, I., & Ramírez-Ávila, G.M. (2017), *Revista Boliviana de Física*, **30**, 3.
- Condori, N.R., & Sanjinés, D. (2019), *Revista Boliviana de Física*, **34**, 3.
- Iglesias, K., & Ramírez-Ávila, G.M. (2019), *Revista Boliviana de Física*, **34**, 11.
- Israël, H., Ruckhaber, E., & Weinmann, R. (Eds.) 1931, *100 Autoren Gegen Einstein*, R. Voigt Länder 8 Verlag, Leipzig.
- Lázaro, E. & Bejarano, S. (2019), *Revista Boliviana de Física*, **34**, 19.
- Lozada-Gobilard, L.B. 2019, *Revista Boliviana de Física*, **34**, 33.
- Ramírez-Ávila, G.M., Gallas, M.R., & Gallas, J.A.C. (2015), *Revista Boliviana de Física*, **27**, 1.

SINCRONIZACIÓN DE TRÍOS DE NEURONAS DE RULKOV CARACTERIZADAS POR PERIODICIDADES

PERIODICITY CHARACTERIZED SYNCHRONIZATION OF A TRIO OF RULKOV NEURONS

KEVIN IGLESIAS* & GONZALO MARCELO RAMÍREZ-ÁVILA**

Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Campus Universitario, Casilla de Correos 8635
La Paz-Bolivia

(Recibido 2 de julio de 2019; aceptado 10 de agosto de 2019)

RESUMEN

Se estudia la sincronización en función a la intensidad de acoplamiento de tríos de neuronas de Rulkov caracterizadas por periodicidades y eléctricamente acopladas bidireccionalmente. Primeramente, se determinó el comportamiento dinámico de una neurona de Rulkov caracterizándolo mediante periodicidades en el plano de parámetros; donde se tiene regiones en las que se producen ráfagas de picos típicas de estos sistemas. Se obtuvieron cuencas de atracción del modelo de Rulkov, para las cuales se observó multiestabilidad. Se trabajó tanto con neuronas idénticas como diferentes pero con la misma periodicidad. Se encontró que la configuración heterogénea facilita la sincronización, lo cual se comprobó mediante el análisis de las series temporales de la variable lenta.

Código(s) PACS: 05.45.-a–87.19.1l–05.45.Xt

Descriptor: Dinámica no lineal y caos – Modelos neuronales – Sincronización; osciladores acoplados

ABSTRACT

We studied synchronization as a function of coupling strength in a trio of Rulkov neurons characterised by their periodicities, and considering electrically and bidirectional coupling. Firstly, we determined the dynamical behavior of a single neuron by using its periodicities in the parameter plane. We identified the typical behavior of spiking-bursting in several regions of this plane. Several basins of attraction for the Rulkov model were obtained exhibiting multistability. We worked with identical and different neurons but with the same periodicity. We found that the heterogeneous configuration enhances synchronization an aspect that was verified by analyzing the time series of the slow variable.

Subject headings: Nonlinear dynamics and chaos – Neuron models – Synchronization; coupled oscillators

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de muchos sistemas dinámicos conduce a ecuaciones diferenciales y/o mapas (sistemas discretos), que generalmente presentan un comportamiento no lineal y no poseen solución analítica. El área que trata dichos sistemas es la *dinámica no lineal*, estudiada ampliamente (ver por ejemplo los cursos introductorios de Strogatz (1994) y Nicolis (1995)). Para el estudio de sistemas no lineales, usualmente se recurre a un análisis de estabilidad lineal complementado por otro de bifurcación. La solución de este tipo de sistemas, generalmente es obtenida de manera numérica.

La *neurociencia* es el estudio de cómo se desarrolla el sistema nervioso, su estructura y su funcionalidad, como lo señala Wickens (1995). La parte más importante del sistema nervioso es el cerebro; en particular, el cerebro humano es uno de los sistemas más difíciles de analizar, debido a la gran cantidad de constituyentes (neuronas) que según Longstaff (2011) tiene un estimado de 8.6×10^{10} neuronas y cada una de ellas con aproximadamente 10^4 conexiones.

Para utilizar las ideas de la dinámica no lineal en neurobiología, se presenta al sistema nervioso como un sistema de entrada/salida de información; es decir, el sistema nervioso interactúa con su entorno mediante ráfagas de picos para transportar la información a través de circuitos neuronales como lo

*kcordova@fiumsa.edu.bo

**<http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/>

muestran Abarbanel & Rabinovich (2001). La información es procesada y distribuida para producir una respuesta relacionada a una actividad funcional específica del cerebro. Desde el punto de vista fisiológico, el papel principal lo tiene la membrana lipídica, donde se tienen cambios abruptos de potencial, lo cual genera una ráfaga de picos eléctricos o potenciales de acción que son transportados por el axón; siendo este comportamiento explicado por Izhikevich (2007).

El estudio de la interacción de neuronas en una red ha dado lugar al surgimiento de nuevas disciplinas, como por ejemplo, la *neurociencia computacional* que incluye técnicas matemáticas sofisticadas para resolver ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos en general, como lo hacen Borisyuk *et al.* (2005).

Existen distintos tipos de neurona con sus respectivos modelos. A grandes rasgos, Abarbanel *et al.* (1999) definen a la neurona como un sistema que no está en equilibrio y que además posee varios mecanismos de retroalimentación y retardo; los cuales, proporcionan a la neurona un carácter oscilatorio. El primer modelo de neurona fue propuesto por Hodgkin & Huxley (1952) después de realizar una serie de trabajos experimentales con neuronas de calamar gigante; en tanto que Lamberti & Rodríguez (2007) proporcionan una deducción matemática de dicho modelo.

Posteriormente, se postularon diversos modelos neuronales más simples con la característica principal de ser descritos por ecuaciones diferenciales no lineales, por lo que, obtener una solución analítica es muy difícil. Es así que se recurre al cálculo numérico.

En este trabajo se muestra el estudio de la sincronización para las dos posibles configuraciones de tríos de neuronas de Rulkov tanto diferentes como idénticas en sus parámetros intrínsecos, caracterizando a cada neurona por su periodicidad. En la Sec. 2 se explica el modelo utilizado y se caracteriza al mismo por sus periodicidades; en tanto que los detalles de la sincronización para los sistemas mencionados se dan en la Sec. 3. Los resultados que conducen a la determinación de multiestabilidad y a la descripción de la sincronización a través del error medio se exponen en la Sec. 4. Finalmente, se dan las conclusiones y perspectivas de este trabajo.

2. MODELO DE NEURONA DE RULKOV

Una versión simplificada de modelo de neurona es planteada por Rulkov (2001), cuya formulación consiste en dos ecuaciones en diferencias, lo que es conocido como *mapa de Rulkov*. Por lo tanto, se tienen dos variables dinámicas acopladas que reproducen los comportamientos neuronales más importantes como ser: oscilaciones sostenidas, situaciones de estacionariedad (punto fijo) y ráfagas de picos o “*bursts of spikes*” seguidos por episodios de estacionariedad o silencio. Las ecuaciones del modelo son:

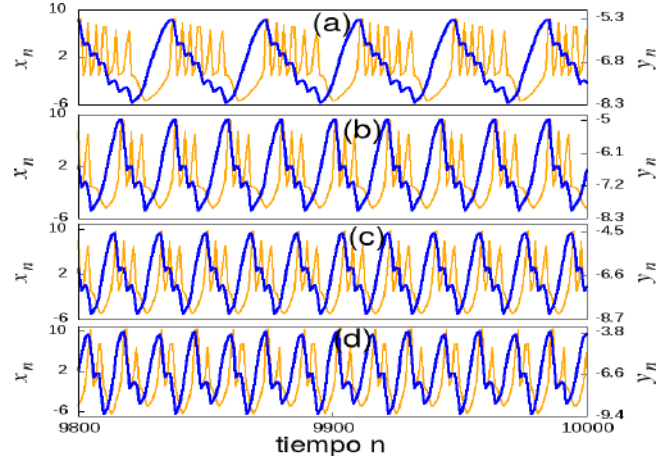


FIG. 1.— (Color online) Series temporales de las variables dinámicas rápida x (naranja) y lenta y (azul), obtenidas numéricamente para $n = 10000$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0.02800, y_0 = -0.05201$, usando distintos valores para el parámetro μ : (a) 0.05, (b) 0.10, (c) 0.15, (d) 0.20.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n + \beta_n) \\ y_{n+1} &= y_n - \mu(x_n + 1) + \mu\sigma, \end{aligned} \quad (1)$$

donde

$$f(x_n, y_n) = \begin{cases} \alpha/(1 - x_n) + y_n, & \text{si } x_n \leq 0, \\ \alpha + y_n, & \text{si } 0 < x_n < \alpha + y_n, \\ -1, & \text{si } x_n \geq \alpha + y_n. \end{cases} \quad (2)$$

Siendo x y y las variables dinámicas rápida y lenta respectivamente. Los parámetros μ, α y σ están asociados a las características biológicas del sistema.

Profundizando el significado de los parámetros relacionados a aspectos biológicos, Ibarz *et al.* (2011) señalan lo siguiente: el parámetro α cumple la función de identificar el voltaje de reinicialización relativo a las ramas estables e inestables de la nulclina rápida, σ desplaza la nulclina lenta de manera vertical en el plano de fases.

Ramírez-Ávila *et al.* (2015) realizaron un estudio detallado del modelo de Rulkov en relación al parámetro de actividad neuronal μ , en el cual se indica que dicho parámetro debe tener valores positivos pequeños ($\mu < 1$) para que se pueda reproducir el comportamiento neuronal regular. Por ejemplo, en la Fig. 1, se muestra la variación en el comportamiento de las ráfagas de picos en función del parámetro μ .

En este trabajo, el parámetro de actividad neuronal se mantuvo fijo $\mu = 0.1$, debido a que Ramírez-Ávila *et al.* (2015) muestran que este valor está asociado a valores de periodicidad pequeños de un comportamiento regular en la variable rápida x .

2.1. Caracterización del modelo de Rulkov

Para la caracterización del mapa de Rulkov, Ramírez-Ávila & Gallas (2011) proponen el cálculo de *periodicidades* como método alternativo al diagrama de bifurcación y al cálculo de exponentes de

Lyapunov.

La periodicidad se define como el número de pasos (tiempo) n que transcurren hasta que la variable dinámica alcance exactamente el mismo valor, lo que permite visualizar en el espacio de parámetros, estructuras regulares como por ejemplo regiones similares a patrones de troncos de palmera, llegando a tener una descripción más detallada de los regímenes oscilatorios.

Cabe resaltar que en el modelo de Rulkov, Ramírez-Ávila *et al.* (2015) indican que los valores de la periodicidad en la variable rápida x y la variable lenta y son generalmente equivalentes; por lo tanto, en este trabajo se calcula la periodicidad de la variable lenta y por tener una forma similar a una oscilación de relajación como lo muestra la Fig. 1. Además, se utilizó el plano de parámetros obtenido por Ramírez-Ávila *et al.* (2015), para un valor de $\mu = 0.1$, como se muestra en la Fig. 2.

Pisarchik & Feudel (2014) señalan que el análisis de multiestabilidad de un sistema dinámico es muy importante debido a la coexistencia de varios estados estables iniciales posibles para un conjunto de parámetros dados, donde el sistema depende crucialmente de las condiciones iniciales. Las condiciones iniciales que dan lugar a diferentes trayectorias que pueden converger a un atractor o no, se denomina *cuenca de atracción*.

El fenómeno de la multiestabilidad está presente casi en todas las áreas de la ciencia; la primera vez que se utilizó el término *multiestabilidad* fue en el estudio de la percepción visual de Atteneave (1971) donde se analiza un problema de perspectiva visual. En Biología, se tienen varios mecanismos y estructuras topológicas que conducen a la multiestabilidad; siendo la base para explicar fenómenos oscilatorios periódicos según lo señalan Ullner *et al.* (2007). En hidrodinámica, Ravelet *et al.* (2004) reportan la presencia de multiestabilidad asociada a la turbulencia de fluidos, a bajos y altos números de Reynolds. En óptica, se tiene el fenómeno de la *multiestabilidad espacial* observado en un láser, donde se encuentran patrones espaciales debido a la interacción de los modos de cavidad como lo muestran Brambilla *et al.* (1991). En reacciones químicas, Ganapathisubramanian & Showalter (1984) trabajaron con base en la biestabilidad de varias reacciones de oxidación. En el análisis de ecosistemas, Huisman & Weissing (2001) dan un enfoque desde la dinámica no lineal mostrando que la coexistencia de diversas especies puede ser caracterizada por cuencas de atracción de geometría fractal, donde una pequeña perturbación produce un cambio en la biodiversidad del sistema; por lo tanto, una transición a otro estado estable.

En *dinámica neuronal*, la multiestabilidad se presenta como mecanismo básico para explicar el contenido asociativo de almacenamiento direccionable y el reconocimiento de patrones, tanto en sistemas neuronales artificiales como los descritos por Hertz *et al.* (1991) y naturales estudiados por Canavier *et al.* (1993). A nivel de una sola neurona, la multi-

estabilidad indica la coexistencia de varios patrones de disparo de ráfagas de picos (*bursting*), ya sean regulares o caóticos como lo reportan Braun & Mattia (2010), lo que constituye un aspecto interesante de este trabajo.

Para redes neuronales, Newman & Butera (2010) muestran que la multiestabilidad y particularmente la *biestabilidad*, juega un papel importante para explicar la señal celular y las interacciones neuronales, donde la llegada de un potencial de acción activa mecanismos excitatorios e inhibitorios a través de neurotransmisores.

3. SINCRONIZACIÓN

La sincronización es un fenómeno emergente debido a la interacción de osciladores que constituyen un sistema complejo. Puede surgir abruptamente en redes complejas biológicas según se muestra en Boccaletti *et al.* (2016), donde los sistemas vivos tienden a ajustar sus ritmos en función a una interacción existente como lo señalan Manrubia *et al.* (2004). De acuerdo con Ramírez-Ávila (2007), se pueden distinguir diferentes tipos de sincronización, como por ejemplo: completa, generalizada, en fase, con retardo, con retardo intermitente y casi sincronización.

Para el estudio de la sincronización en neuronas modeladas por el mapa de Rulkov, Calderón de la Barca & Ramírez-Ávila (2017) usaron como indicadores de sincronización dos cantidades que involucran a la variable rápida x y a la variable lenta y . (i) El *error medio de sincronización* $\langle \varepsilon \rangle$ que se define como la distancia euclidiana promedio a la variedad de sincronización; por lo tanto, este valor debe tender a cero en las diferencias de las variables de cada oscilador para cada tiempo n en el caso de sincronización completa. Para dos neuronas de Rulkov acopladas se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{n - n_\tau} \sum_{i=n_\tau}^n \sqrt{(x_i^{(2)} - x_i^{(1)})^2 + (y_i^{(2)} - y_i^{(1)})^2}, \quad (3)$$

donde n_τ es un transitorio. (ii) El *error máximo*, que es el valor máximo de las distancias euclidianas para los $n - n_\tau$ valores, es decir:

$$\varepsilon_{\max} = \max \left\{ \sqrt{(x_i^{(2)} - x_i^{(1)})^2 + (y_i^{(2)} - y_i^{(1)})^2} \right\}, \quad (4)$$

con $i = n_\tau, \dots, n$.

3.1. Acoplamiento

Para modelar la interacción sináptica entre dos neuronas $i - j$, Girardi-Schappo *et al.* (2018) utilizan un acoplamiento eléctrico de carácter bidireccional y simétrico, expresado por:

$$\beta_n^{(i)} = \beta^e g_{ij} (x_n^{(j)} - x_n^{(i)}), \quad (5)$$

siendo n el tiempo, β^e una constante, g_{ij} los elementos de una matriz simétrica y de diagonal nula que define la conexión entre neuronas.

En la Fig. 3 se ve que tanto para neuronas idénticas y no idénticas, las regiones de sincronización completa son bastante extendidas.

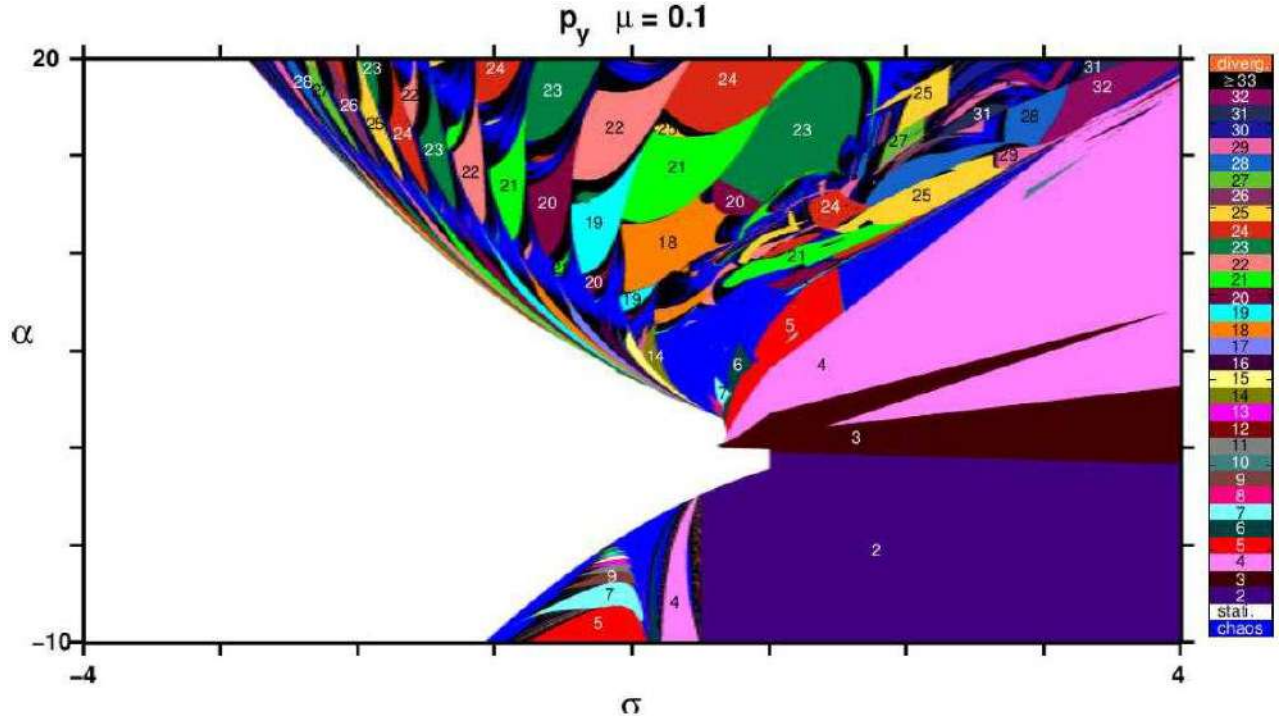


FIG. 2.— (Color online) Espacio de parámetros del modelo de Rulkov α vs. σ caracterizado por la periodicidad en la variable y (p_y) y con $\mu = 0.1$, donde se especifican los valores de periodicidad dentro de algunas zonas mediante el índice de colores. Las regiones blanca, negra y azul corresponden a punto fijo, oscilaciones de alta periodicidad ($p_y \geq 33$) y caos respectivamente. La región de estudio considerada en este trabajo corresponde a una de periodicidad 21. Figura tomada de Ramírez-Ávila *et al.* (2015).

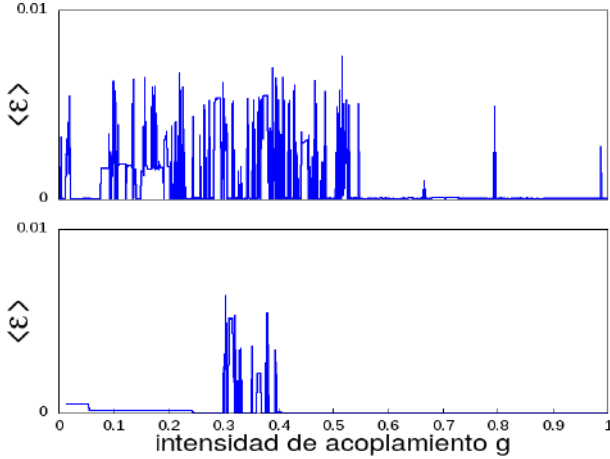


FIG. 3.— Comportamiento del error medio en función de la intensidad de acoplamiento g para dos neuronas de Rulkov con $\mu = 0.1$ y periodicidad 21: con parámetros $(\alpha, \sigma) = (14.0, 1.25)$ y $(\alpha, \sigma) = (14.0, 1.22)$ para las neuronas no idénticas representadas en la parte superior y $(\alpha, \sigma) = (13.9, 1.21)$ para las neuronas idénticas representadas en la parte inferior.

3.2. Heterogeneidad

Estrada (2010) define la *heterogeneidad* de una red compleja en términos de la topología de la misma; con base en las distintas distribuciones de conexiones que se puede tener entre los nodos de la red. Cuando el número de nodos es pequeño cada estructura de red recibe el nombre de *motivo*. En nuestro caso, tenemos dos motivos (ver Fig. 4) para los cuales se estudiará la sincronización.

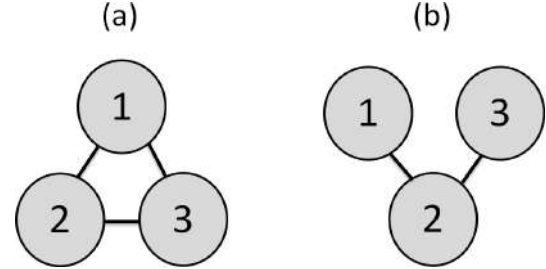


FIG. 4.— Motivos de acoplamiento bidireccional para tres neuronas. Con motivos: (a) homogéneo con acoplamiento global y (b) heterogéneo donde se tiene un acoplamiento en forma de **V**.

4. RESULTADOS

4.1. Multiestabilidad

Las cuencas de atracción de la Fig. 5 muestran la biestabilidad y la triestabilidad de la neurona de Rulkov, además de una discontinuidad para el valor $x_0 = 0.25$. Para analizar y confirmar la existencia de dicha discontinuidad se recurre a la obtención de series temporales para condiciones iniciales en la vecindad de la misma, mostrándose en la Fig. 6 el caso de la cuenca superior de la Fig. 5. La triestabilidad observada en la cuenca inferior de la Fig. 5 se ilustra también mediante series temporales representadas en la Fig. 7.

La Tabla 1 muestra que para los experimentos numéricos se tomó un conjunto de tres neuronas que comparten la misma periodicidad ($p_y = 21$); es decir, se encuentran en la misma región de periodicidad en la Fig. 2.

Para el estudio de sincronización de los motivos mostrados en la Fig. 4; primero se tomó en cuenta un

TABLA 1

TRÍO DE NEURONAS SELECCIONADO PARA LOS EXPERIMENTOS NUMÉRICOS, MOSTRANDO BIESTABILIDAD RESPECTO A SU CONDICIÓN INICIAL.

Neurona	α	σ	Periodicidad	(x_0, y_0)
1	14.0	1.25	21	$(-0.03, 0.05)$
			46	$(-0.01, -0.03)$
2	14.0	1.22	21	$(-0.04, -0.01)$
			23	$(-0.06, -0.06)$
3	13.9	1.21	21	$(-0.06, -0.04)$
			23	$(0.06, -0.02)$

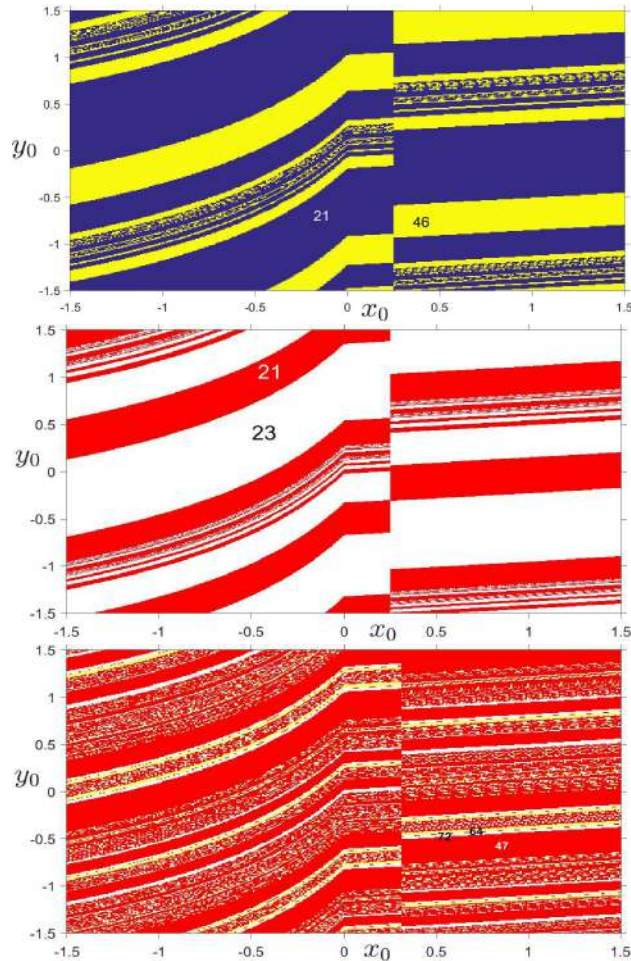


FIG. 5.— (Color online) Cuencas de atracción para el modelo de neurona de Rulkov con $\mu = 0.1$, donde se tiene periodicidades coexistentes $p_y : 21, 46$, $p_y : 21, 23$ y $p_y : 72, 64, 47$, con los parámetros $(\alpha, \sigma) = (14.0, 1.25)$ en la cuenca superior, $(\alpha, \sigma) = (14.1, 1.25)$ en la cuenca media y $(\alpha, \sigma) = (13.6, 1.31)$ en la cuenca inferior, teniendo como condiciones iniciales los intervalos $x_0 = [-1.5, 1.5]$ y $y_0 = [-1.5, 1.5]$. En las cuencas obtenidas la discontinuidad se presenta para $x_0 = \sigma - 1$.

trío de neuronas diferentes en los parámetros según la Tabla 1; sin embargo, tenían la misma periodicidad

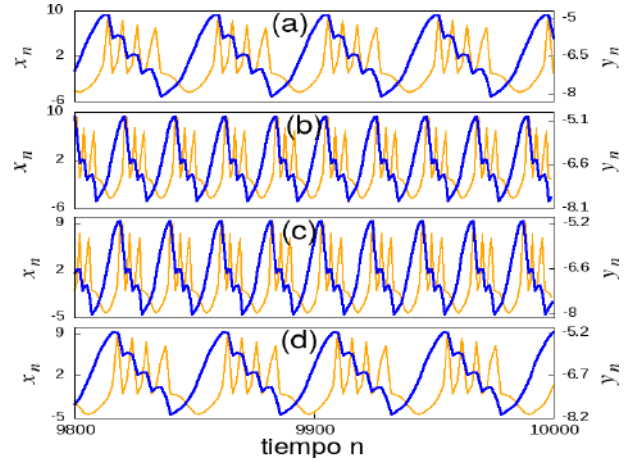


FIG. 6.— (Color online) Series temporales para condiciones iniciales (x_0, y_0) cercanas a la discontinuidad de la primera cuenca de atracción mostrada en la Fig. 5, con su respectiva periodicidad, (a) $(0.2458, -0.7470)$; $p_y = 46$, (b) $(0.2559, -0.7470)$; $p_y = 21$, (c) $(0.2458, -0.1555)$; $p_y = 21$, (d) $(0.2559, -0.1555)$; $p_y = 46$.

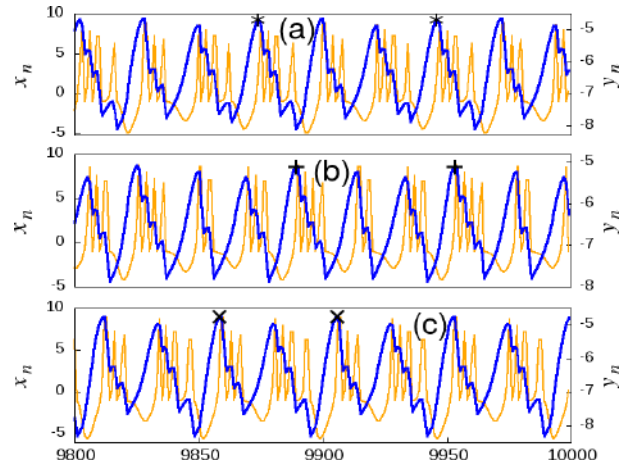


FIG. 7.— (Color online) Series temporales para condiciones iniciales (x_0, y_0) tomadas de la cuenca inferior de la Fig. 5 con su respectiva periodicidad p_y (a) $(0.286, 1.099)$; $p_y = 72$, (b) $(0.2759, 1.149)$; $p_y = 64$, (c) $(0.2759, 1.059)$; $p_y = 47$ las marcas en los picos de la variable lenta y_n (azul) indican los valores que se tomaron en cuenta para el cálculo de periodicidades.

dad $p_y = 21$. Luego se consideró un trío de neuronas idénticas (caso 1) de la Tabla 1.

4.2. Trío de neuronas no idénticas

Motivo (a) de la Fig. 4.

En la Fig. 8 se puede ver que para un valor de la intensidad de acoplamiento en la vecindad de $g = 0.04$, el error medio de sincronización $\langle \varepsilon \rangle$ tiende a ser nulo; por lo tanto, en la Fig. 9 se verifica si este valor de g lleva al sistema a la sincronización recurriendo a las series temporales de las variables lentas y de cada neurona.

Motivo (b) de la Fig. 4.

Como se puede ver en la Fig. 10, para valores pequeños de g y en la vecindad de $g = 0.36$ se tiene que el error medio de sincronización $\langle \varepsilon \rangle$ tiende a ser nulo. Así, en la Fig. 11 se verifica que para un valor g dentro de este intervalo el sistema sincroniza, lo que

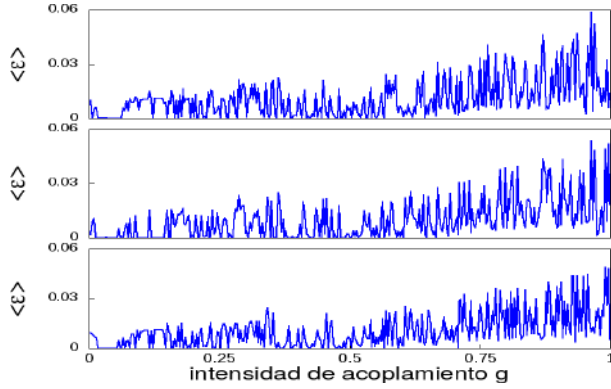


FIG. 8.— Comportamiento del error medio (ε) en función de la intensidad de acoplamiento g , para la configuración (a) de la Fig. 4, considerando un trío de neuronas diferentes en los parámetros α y σ , compartiendo la misma periodicidad en la variable lenta $p_y = 21$ y según su condición inicial en la Tabla 1.

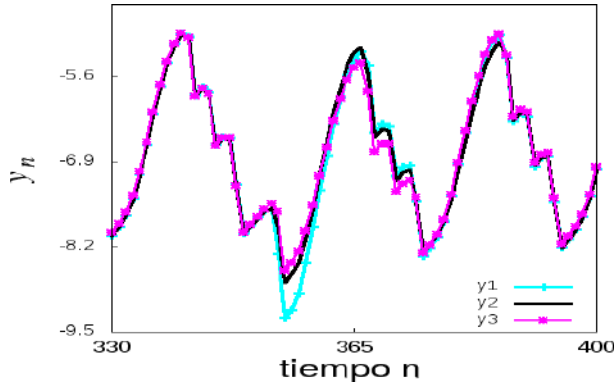


FIG. 9.— (Color online) Series temporales de las variables lentas y del motivo (a) según la Fig. 4 para un trío de neuronas no idénticas $(\alpha_1, \sigma_1) = (14.0, 1.25)$, $(\alpha_2, \sigma_2) = (14.0, 1.22)$, $(\alpha_3, \sigma_3) = (13.9, 1.21)$, con un valor de la intensidad de acoplamiento $g = 0.04$, observándose sincronización completa entre las neuronas 2 y 3 más no con la 1.

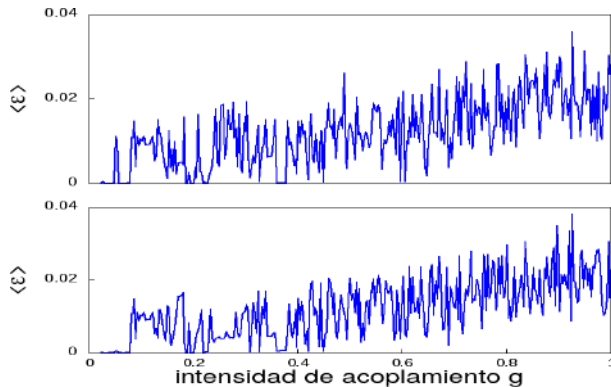


FIG. 10.— Comportamiento del error medio en función de la intensidad de acoplamiento g para la configuración (b) de la Fig. 4, considerando a un trío de neuronas diferentes en los parámetros α , σ , compartiendo la misma actividad $\mu = 0.1$ y periodicidad 21 con su respectiva condición inicial según la Tabla 1.

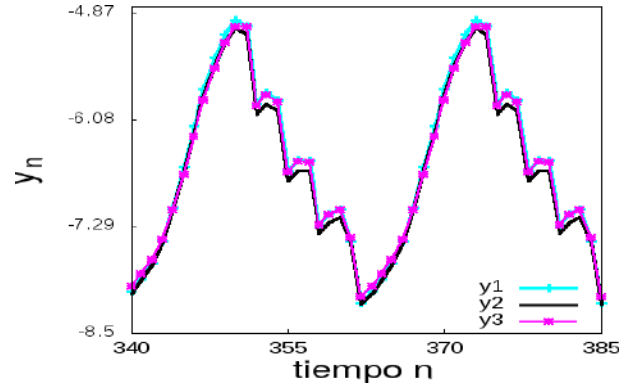


FIG. 11.— (Color online) Series temporales de las variables lentas y para la configuración (b) de la Fig. 4, para un trío de neuronas no idénticas con los mismos parámetros de la Fig. 10, un valor de la intensidad de acoplamiento $g = 0.37$, donde se observa sincronización en fase.

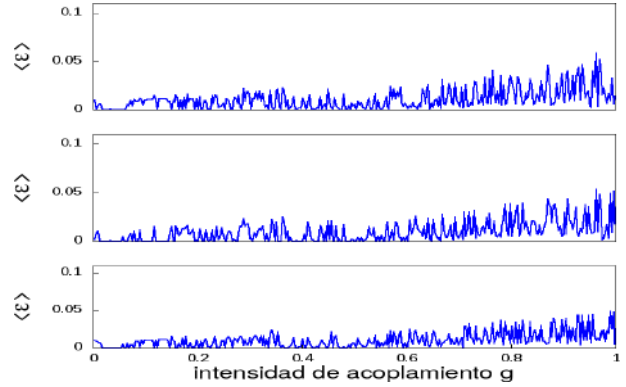


FIG. 12.— Comportamiento del error medio en función de la intensidad de acoplamiento g para la configuración (a) de la Fig. 4, considerando a un trío de neuronas idénticas en los parámetros α , σ y $\mu = 0.1$. Una periodicidad de 21 con su respectiva condición inicial según la Tabla 1, siendo la neurona 1 la seleccionada.

se muestra mediante las series temporales de las variables lentas y .

4.3. Trío de neuronas idénticas

Motivo (a) de la Fig. 4.

Como se puede ver en la Fig. 12, existe un intervalo para g donde el error medio de sincronización (ε) tiende a ser nulo; por lo tanto, en la Fig. 13 se verifica que este valor de g lleva al sistema a la sincronización como se ve en las series temporales de las variables lentas y con un valor de g específico.

Motivo (b) de la Fig. 4.

Como se puede ver en la Fig. 14 existe un intervalo grande para $g = 0.36$ donde se tiene que el error medio de sincronización (ε) tiende a ser nulo; por lo tanto, en la Fig. 15 se verifica que este valor de g lleva al sistema a la sincronización, lo que se muestra en las series temporales de las variables lentas y con un valor de g específico.

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se determinó la sincronización en tríos de neuronas idénticas y no idénticas caracterizadas por sus periodicidades que pueden ser las mismas o no. Se encontró el carácter multiestable

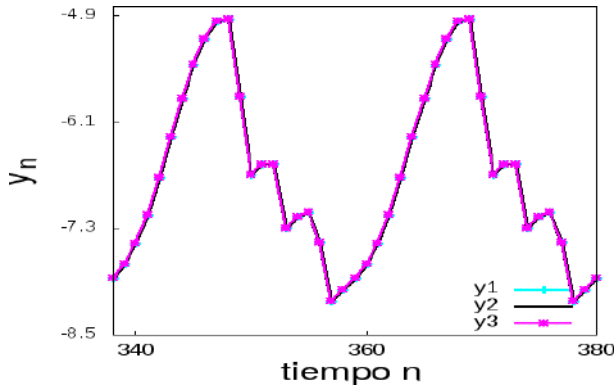


FIG. 13.— (Color online) Series temporales de las variables lentas y , para un trío de neuronas idénticas con $(\alpha, \sigma) = (14.0, 1.25)$ con un valor de la intensidad de acoplamiento $g = 0.04$, donde se puede ver sincronización completa.

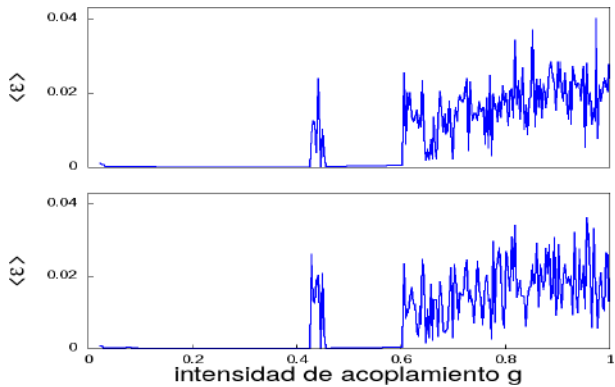


FIG. 14.— Comportamiento del error medio en función de la intensidad de acoplamiento g para la configuración (b) de la Fig. 4, considerando a un trío de neuronas iguales en los parámetros α , σ y $\mu = 0.1$. Una periodicidad de $p_y = 21$ con su respectiva condición inicial según la Tabla 1, siendo la neurona 1 la seleccionada.

de neuronas mediante la obtención de las cuencas de atracción, encontrando una discontinuidad en $x_0 = \sigma - 1$ verificándola mediante series temporales. Comparando los errores medios de sincronización de ambos motivos, se ve que la configuración heterogénea facilita la sincronización.

Comparando el error medio de sincronización $\langle \varepsilon \rangle$ para motivos formados por 2 y 3 neuronas; se

tiene como impacto principal la reducción considerable del intervalo de valores de g que muestran sincronización ($\langle \varepsilon \rangle \rightarrow 0$) incluso con neuronas no idénticas.

Se tiene previsto trabajar con la determinación de los tiempos de sincronización para poder responder de manera más precisa a la cuestión anterior. Se tiene también como perspectiva trabajar con motivos de 4 y 5 neuronas para determinar si la heterogeneidad de las redes subyacentes a estos motivos juega o no un rol importante en lo que concierne a la sincronización. También, sería interesante abordar el problema de la multiestabilidad para diferentes regiones en el plano de parámetros.

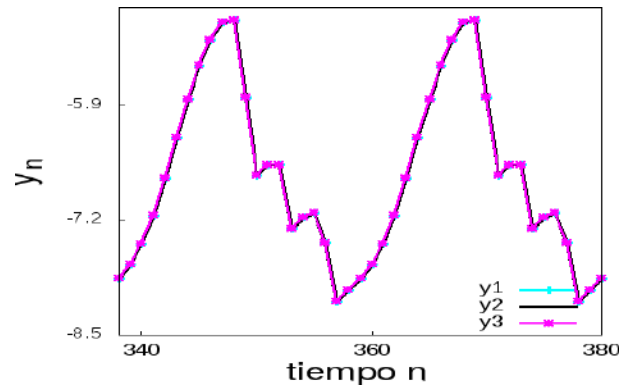


FIG. 15.— (Color online) Series temporales de las variables lentas y , para un trío de neuronas idénticas con $(\alpha, \sigma) = (14.0, 1.25)$ con un valor de la intensidad de acoplamiento $g = 0.23$, donde se puede ver sincronización completa.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y al I.I.F. por las facilidades que nos brindan para realizar investigación en las mejores condiciones.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Abarbanel, H.D., Szücs, A., Varona, P., Volkovskii, A., Rabinovich, M. & Selverston, A. (1999), *Computational Neuroscience* **11**, 563.
- Abarbanel, H. D. & Rabinovich, M. (2001), *Current Opinion in Neurobiology*, **11**, 423.
- Atteneave, F. (1971), *Scientific American* **225**, 63.
- Boccaletti, S., Almendral, J.A., Guan, S., Leyva, I., Liu, Z., Sendiña-Nadal, I., Wang, Z. & Zou, Y. (2016), *Physics Reports* **660**, 1.
- Borisyyuk, A., Friedman, A., Ermentrout, B. & Terman, D. (2005), *Mathematical Neuroscience*, (Berlín: Springer- Verlag).
- Brambilla, M., Lugiato, L., Penna, V., Prati, F., Tamm, C. & Weiss, C. (1991), *Physical Reviews Letters* **43**, 5114.
- Braun, J. & Mattia, M. (2010), *NeuroImage* **52**, 740.
- Calderón de la Barca, I. & Ramírez-Ávila, G.M. (2017), *Revista Boliviana de Física* **30**, 3.
- Canavier, C., Baxter, D., Clark, J. & Byrne, J. (1993), *Journal of Neurophysiology* **69**, 2252.
- Estrada, E. (2010), *Physical Review E* **82**, 066102.
- Ganapathisubramanian, N. & Showalter, K. (1984), *The Journal of Chemistry Physics* **80**, 4177.
- Girardi-Schappo, M., Tragtenberg, M. & Kinouchi, O. (2018), *Journal of Neuroscience Methods* **220**, 116.
- Hertz, J., Krogh, A. & Palmer, R. (1991), *Introduction to the Theory of Neural Computation*, (New York, Addison-Wesley).
- Hodgkin, A.L. & Huxley, A.F. (1952), *The Journal of Physiology* **117**, 500.
- Huisman, J. & Weissing, F. (2001), *The American Naturalist* **157**, 171.
- Ibarz, B., Casado, J. & Sanjuán, M.A.F. (2011), *Physics Reports* **501**, 1.
- Izhikevich, E. (2007), *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*, (Cambridge: The MIT Press 505).
- Lamberti, W. & Rodríguez, V. (2007), *Electroneurobiología* **15**, 31.
- Longstaff, A. (2011), *Instant Notes in Neuroscience*, (New York Springer-Verlag with BIOS Scientific Publishers).

- Manrubia, S., Mikhailov, A. & Zanette, D. (2004), *Emergence of Dynamical Order: Synchronization Phenomena in Complex Systems*, **2**, (Singapur, World Scientific Printers).
- Newman, P. & Butera, R. (2010), *Chaos* **20**, 023118.
- Nicolis, G. (1995), *Introduction to nonlinear science*, (Cambridge Great Britain, Ed. Cambridge).
- Pisarchik, A. & Feudel, U. (2014), *Physics Reports* **540**, 167.
- Ramírez-Ávila, G.M. (2007), *Revista Boliviana de Educación Superior* **7**, 25.
- Ramírez-Ávila, G.M. & Gallas, J. (2011), *Revista Boliviana de Física* **19**, 1.
- Ramírez-Ávila, G.M., Gallas, M. & Gallas, J. A. (2015), *Revista Boliviana de Física* **27**, 1.
- Ravelet, F., Marié, L., Chiffaudel, A. & Daviaud, F. (2004), *Physical Review Letters* **93**, 164.
- Rulkov, N. (2001), *Physical Review Letters*. **86**, 183.
- Strogatz, S.H. (1994), *Nonlinear Dynamics and Chaos. With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, (New York, Perseus Books).
- Ullner, E., Zaikin, A., Volkov, E. & García-Ojalvo, J. (2007), *Physical Review Letters* **99**, 148.
- Wickens, A. (1995), *A History of THE BRAIN From Stone Age surgery to modern neuroscience*, (London and New York, Psychology Press).

ANÁLISIS MULTI-RESOLUCIÓN (AMR) EN EL DOMINIO $k - X$, APLICACIONES A SÍSMICA 3D-2D
CASO: SUBANDINO CENTRO DE BOLIVIA

MULTIRESOLUTION ANALYSIS IN THE $k - X$ DOMAIN, 3D-2D SEISMIC APPLICATIONS IN THE
CENTRAL BOLIVIAN SUBANDEAN ZONE

EVANZ LÁZARO[†] & KIM BEJARANO[‡]

[†] YPFB Chaco S.A. &

[‡] Université Toulouse III Paul Sabatier

(Publicado con la autorización de la Université Toulouse III Paul Sabatier)

RESUMEN

Se muestra la aplicación de la técnica Análisis Multi-Resolución (AMR) en el espacio $k - x$ (número de onda-espacio) a los datos sísmicos 3D de un campo productor de gas en el subandino central de Bolivia. Geológicamente la investigación se centra en estudios profundos alrededor de los 4200 m (TVD), sobre la formación Robore (arenas ArRob I, II y III) en niveles del Devónico Inferior (390 MA). Los resultados, denominados anomalías- k , muestran una interesante relación entre longitudes de onda larga y estructuras geológicas contenedoras de hidrocarburos. Para dar certeza a los resultados se han correlacionado con registros gamma ray (GR) y densidad neutrón de pozo, mostrando gran coherencia entre anomalías- k y la ubicación en profundidad de los reservorios de hidrocarburos. Adicionalmente los resultados son comparados con atributos sísmicos extraídos desde una PSDM, y extraídos desde un cubo 3D de anomalías- k , mostrando mejor resolución en el último caso.

Código(s) PACS: 93.85.Rt – 02.30.Nw – 91.25.Ga

Descriptores: Métodos sísmicos – Análisis de Fourier – Variaciones espaciales: todos los armónicos y anomalías

ABSTRACT

The Multiresolution Analysis (AMR) technique is applied in the $k - x$ domain (wave number - space) to 3D seismic data of the gas producer field in the central Bolivian sub-andean zone. Geologically the research is focused on deep studies around 4200 m (TVD), on the Robore sands (ArRob I, II and III) at levels of the Lower Devonian (390 MA). The results, called k -anomalies, show an interesting relationship between long wavelengths and geological structures containing hydrocarbons. To give certainty to the results, these anomalies have been correlated with well-log gamma ray (GR) records, showing great coherence between k -anomalies and the deep location of hydrocarbon reservoirs. Additionally, the results are compared with seismic attributes extracted from a PSDM seismic and extracted from a 3D cube of k -anomalies, showing better resolution in the latter case.

Subject headings: Seismic methods – Fourier analysis – Spatial variations: all harmonics and anomalies

1. INTRODUCCIÓN

El origen de la técnica de **Análisis Multi-Resolución (AMR)** se remonta a los años 90 del siglo pasado en la ingeniería eléctrica, donde la preocupación principal era identificar pulsos parásitos (ruido) acoplados en transmisiones eléctricas. Valiéndose de análisis espectral mediante transformadas de Fourier en ventanas de tiempo menores a la longitud de una señal, logran caracterizar espectralmente estos pulsos, localizar su posición en tiempo y de esa manera, diseñar filtros para aislarlos. En el campo de exploración y desarrollo de

hidrocarburos, no es habitual encontrar estudios de análisis espectrales aplicados a datos sísmicos; por lo general, los estudios se enfocan en la interpretación de amplitudes sísmicas correlacionados con modelos geológicos. Es posible citar algunos pocos trabajos de análisis espectrales tales como el ISA (análisis espectral instantáneo, por sus siglas en inglés) desarrollado por Huang *et al.* (1998), Transformadas Wavelet CWT explicadas por Daubechies (1992), la transformada S expuesta por Stockwell *et al.* (1996) y recientes como la descomposición empírica completa en modos por conjuntos (CEEMD por su sigla en inglés), utilizada por Han & van der Baan (2012), que tienen en común el concepto de descomposición espectral de secciones sísmicas, con el obje-

[†] lazaro.evanzv@gmail.com

[‡] geokim7@gmail.com

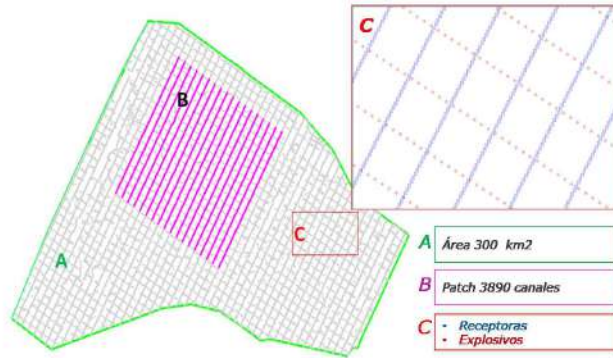


FIG. 1.— (Color online) A) en verde el área de adquisición sísmica 3D. B) área de patch, con 3800 canales vivos (geófonos o receptoras) y C) muestra del diseño sísmico, puntos azules receptoras, puntos rojos explosivos.

tivo de estudiar el vínculo entre frecuencias bajas y estructuras con presencia de hidrocarburos como lo señalan Odebeatu *et al.* (2006). En este marco conceptual el presente trabajo viene a ser de alguna manera una aplicación del proceso de **Descomposición Espectral**.

En 2012 con fines de exploración y desarrollo de hidrocarburos, se llevó a cabo una campaña de adquisición sísmica 3D sobre un campo productor de gas en pie de monte del subandino centro de Bolivia. El diseño sísmico para esta campaña fue de tipo Regular como se muestra en la Fig. 1; es decir, un diseño ortogonal entre línea de receptoras (geófonos o canales-InLine) y línea de explosivos (shot-XLine). Con un espaciado entre receptoras de 40 m (puntos azules) y 80 entre puntos explosivos (puntos rojos), con separación entre InLine de 480 m igual que para XLine y con un fold nominal de 80 (puede entenderse como repetitividad de trazas en un mismo punto reflector en subsuelo).

En general los datos sísmicos 3D obtenidos de esta campaña fueron de muy buena calidad. Posteriormente, estos datos se procesaron en ambos dominios: tiempo (PSTM- pre stack time migration) y en profundidad (PSDM- pre stack depth migration) mediante el algoritmo Kirchhoff (ver Fig. 2). Durante el procesamiento de datos sísmicos se dio énfasis en mantener, en lo posible, las características de las trazas sísmicas; es decir, al menos tener un procesamiento con preservación de amplitudes sísmicas consistentes con superficie y recuperación de frecuencias por deconvolución.

A pesar de la variedad y riqueza de información que contiene una descomposición espectral de secciones sísmicas, no es muy común que los intérpretes geofísicos o geólogos la utilicen durante la interpretación y generación de prospectos o modelos estructurales; esto por diferentes razones, una de ellas podría ser que no se cuenta con una plataforma informática que esté al alcance de todos.

2. ANÁLISIS MULTI-RESOLUCIÓN (AMR) MEDIANTE TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

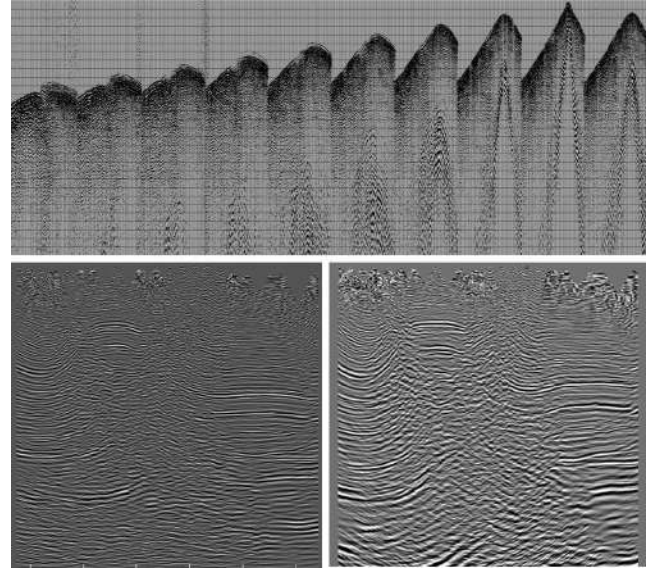


FIG. 2.— Arriba registros sísmicos de campo. Abajo, izquierda una sección sísmica procesada en tiempo (PSTM). Abajo, una sección sísmica procesada en profundidad (PSDM)

El **análisis multi-resolución (AMR)** consiste en estudiar las condiciones **no estacionarias** de una señal o serie de tiempo, a través del análisis espectral aplicado por ventanas temporales a lo largo de una señal. Matemáticamente el análisis AMR demanda un operador de transformación, que podría ser algo sofisticado como transformadas wavelets o algo más simple como una transformada de Fourier. Evidentemente, la condición de **no estacionaria** de una onda está reflejada en su dependencia funcional de la frecuencia ω respecto de la posición x , tiempo t y velocidad v , esta dependencia puede ser aprovechada para identificar y asociar fases específicas de la onda con las propiedades físicas del medio de propagación.

$$\omega = f([x, t], v), \quad (1)$$

En el caso específico de ondas sísmicas, durante su propagación y al margen de los procesos de pérdida de amplitud por decaimiento, propagación y otros factores, los cambios de amplitud están asociados generalmente a cambios de densidad y si además existe un cambio en las frecuencias se atribuye a variaciones de velocidad del medio de propagación de la onda sísmica. Estos dos aspectos, cambio de amplitud y frecuencia, define geofísicamente el caso de un medio anisotrópico, que en términos estructurales implicaría presencia de cuerpos anómalos. El análisis espectral de señales sísmicas, puede ser abordado en dos dominios: tiempo-frecuencia o espacio-número de onda, dependiendo si la sísmica está procesada en tiempo PSTM o profundidad PSDM respectivamente.

3. DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA (AMR)

Para entender la metodología de manera didáctica, considere como señal de estudio una traza sintética, cuya forma caracterizada por la frecuencia ω y número de onda k esta descrita en la Ec. (2), una

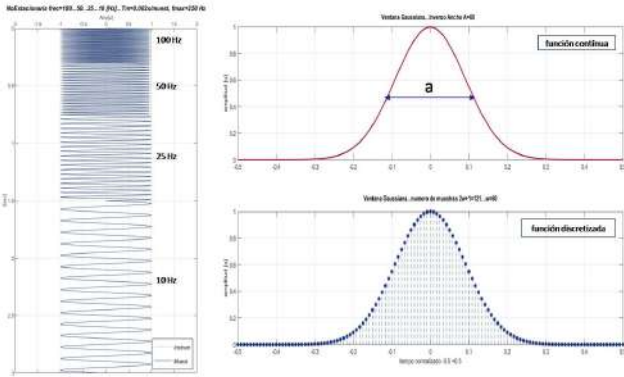


FIG. 3.— (Color online) Izquierda, traza sintética con cuatro fases, periodo de muestreo $T_m = 0.002$ s y longitud en tiempo de 3 s. Derecha, función ventana tipo Gauss de longitud $L=121$ muestras y ancho $a=60$. Arriba versión continua y abajo versión discretizada.

función ventana tipo gauss dada por la Ec. (3) y un proceso de deconvolución entre ambas funciones.

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx + \omega t), \quad (2)$$

$$g(t) = \exp(-u^2 a), \quad (3)$$

donde u está definido como el vector:

$$u = [(2q + 1) - (L + 1)] / (2L)$$

con $q = 1, 2, \dots, L$, L es la longitud y a es el ancho, de la función ventana expresado en muestras. Este último estadísticamente representa la desviación estándar del valor más probable en una distribución de gauss.

Definamos el carácter de la traza sintética como no estacionaria, con cuatro fases de 100 Hz, 50 Hz, 25 Hz y 10 Hz, con un periodo de muestreo de 0.002 s y una longitud total de 3 s. Fig. 3. La función ventana tipo gauss está definida por los parámetros, longitud de 121 muestras y un ancho de 60 muestras Fig. 3.

Ambas funciones, traza sintética y ventana gaussiana, son sometidos a un operador de convolución e inmediatamente se determina el contenido espectral, de la ventana resultante, mediante una transformada rápida de Fourier STF (Short-time Fourier Transform). Se establece una secuencia iterativa, desplazando la ventana gaussiana en pasos de $a/2$ muestras a lo largo de la traza sintética, realizando en total n -iteraciones hasta cubrir la totalidad de la longitud de la traza. El resultado espectral de cada iteración será integrada en un único espectrograma Fig. 4.

En efecto, debido a la posibilidad de elegir diferentes parámetros de la función ventana, cada conjunto de parámetros seleccionados, enfatizará con mayor precisión o la frecuencia o la posición temporal de cada fase, pero no ambos, un análogo al principio de incertidumbre de Heisenberg aplicado a ondas sísmicas, tal como se muestra en la Fig. 4 (parte inferior, los dos espectrogramas), donde se puede apreciar la resolución en posición temporal (abscisas) o la definición de frecuencia de las fases (ordenadas)

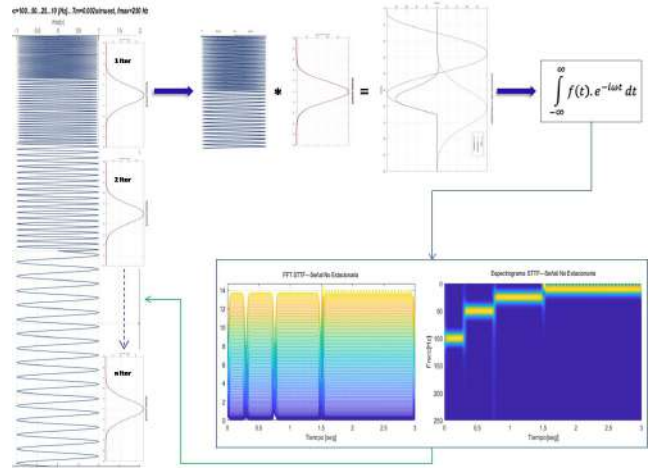


FIG. 4.— (Color online) Flujo de trabajo, secuencia AMR por ventanas, determinando temporalmente la posición de cada fase y su frecuencia, en un espectrograma.

todo en el espacio $f - t$ (frecuencia-tiempo). Ahora bien, si es posible descomponer espectralmente la traza sintética en sus cuatro fases, entonces es posible separar una fase en particular del resto, de hecho esta será parte fundamental de la técnica para la generación de espectrogramas en las siguientes secciones.

4. APLICACIÓN POST-PROCESO DE LA METODOLOGÍA (AMR) A SÍSMICA 3D

4.1. Geología y Estratigrafía del área de estudio

El área en cuestión es un campo productor de gas descubierto preliminarmente con sísmica 2D y desarrollado en producción con sísmica 3D. La forma geométrica del campo productor, está definida dos fallas (líneas continuas rojas en la sección sísmica) y levantado verticalmente por esfuerzos tectónicos, formando una especie de cono. Este campo presenta dos niveles de producción de hidrocarburos, uno de niveles someros como las formaciones Yantata y Cajones del sistema Cretácico y otro de niveles profundos vinculado a formaciones del Devónico Inferior, denominadas Arenas Robore (ArRob I, II y III) Fig. 5.

En la Fig. 6 se muestra la columna estratigráfica tipo del área de estudio y se destacan los niveles de producción de hidrocarburos con marcas en rojo para gas y verde para petróleo. Este trabajo está enfocado únicamente a los reservorios profundos.

4.2. Análisis Multiresolución en tiempo PSTM

Consideremos el cubo sísmico 3D migrado en tiempo PSTM (pre stack time migration) de donde se toma la sección sísmica InLine 1615, línea celeste en el mapa Fig. 5. Se considera ahora una traza sísmica real, extraída de la sección sísmica, línea azul en la figura (fig.7), a la cual se aplica la metodología AMR. La traza sísmica seleccionada es de 6 segundos de longitud, esta muestreada a razón de 2 ms lo que implica una recuperación de fases teóricamente hasta 250 Hz (Teorema de Nyquist). Consideremos además la necesidad de obtener fases sísmicas con una mayor

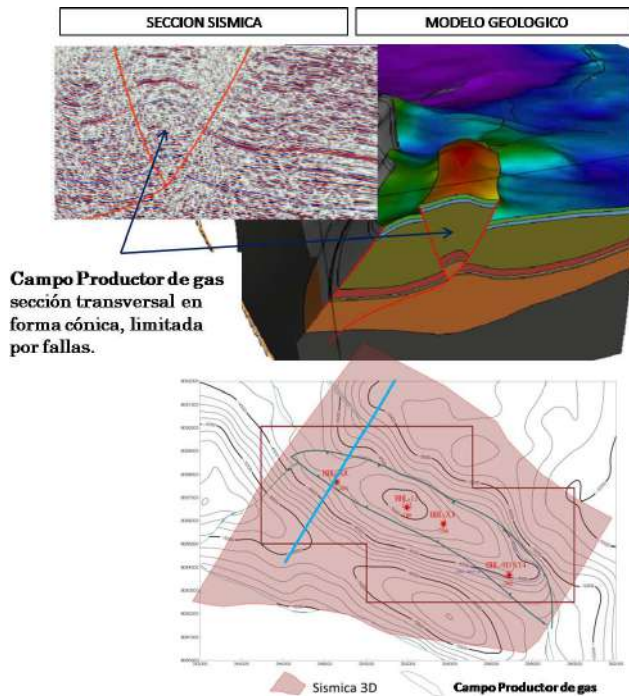


FIG. 5.— (Color online) Superior, sísmica 2D y modelo geológico, limitada por dos fallas (líneas rojas continuas) transversalmente generando una geometría cónica del campo productor. Inferior, vista en planta la extensión areal del campo productor y su estructura conformada de los niveles productores profundos, los puntos rojos marcan la ubicación de pozos desarrollados en el área. En celeste ubicación de la sección sísmica.

resolución temporal que una resolución en frecuencia (Barnes, 2007; Han and van der Baan, 2011), esto implica un proceso de selección por comparación cualitativa entre diferentes parámetros de la función ventana. En este caso se selecciona una función ventana tipo Gauss de longitud 60 y un ancho de 30 muestras, el criterio de esta selección esta fundamentada en aspectos geológicos como se mostrará más adelante.

Queda claro que cada traza de la sección sísmica genera un espectrograma, entonces se genera un cubo espectral por cada sección sísmica. En el lenguaje del álgebra lineal, una traza sísmica representa un vector, el espectrograma de una única traza es una matriz, el espectrograma de una sección sísmica representa una hipermatriz y el espectrograma de todo un cubo sísmico 3D representa un hipercono. Como referencia para efectos de informáticos, el cubo sísmico 3D contiene del orden de 10^4 trazas, cada traza se descompone en 250 frecuencias y cada traza además tiene del orden de 10^3 muestras, por lo que la cantidad de datos que compone el hipercono es del orden de 10×10^{10} . Esto implica un manejo muy grande de datos y mucha exigencia informática, razón por la cual es necesario acotar intervalos de frecuencias y decimar los pasos de frecuencia.

4.3. Análisis Multiresolución en profundidad PSDM

Se considera la misma sección sísmica InLine1615, pero esta vez del cubo sísmico 3D con proceso de mi-

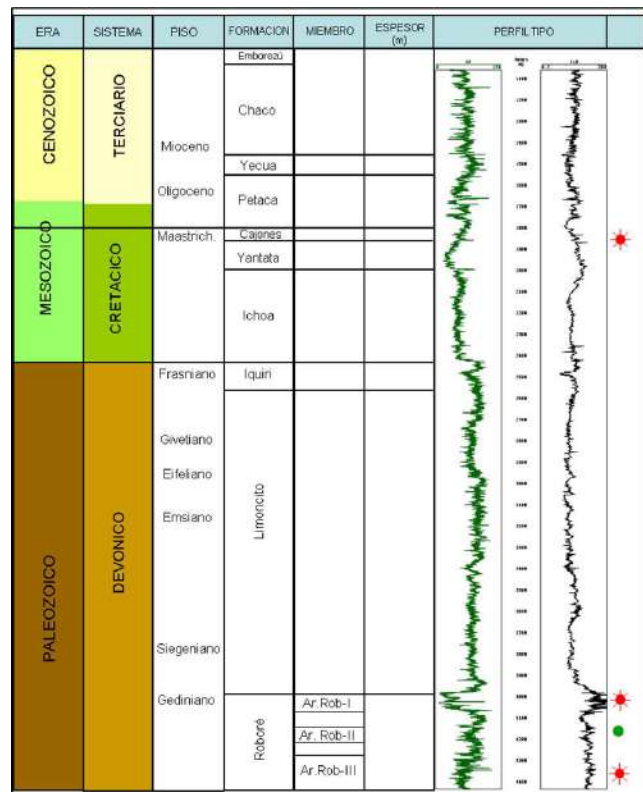


FIG. 6.— (Color online) Columna estratigráfica tipo del área, describiendo era, sistema y formaciones geológicas. Incluye un registro gamma ray (GR-traza verde) y un registro de resistividad (traza negra). Marcas en rojo y verde, en la columna final describe la ubicación en profundidad de los niveles productores de hidrocarburos.

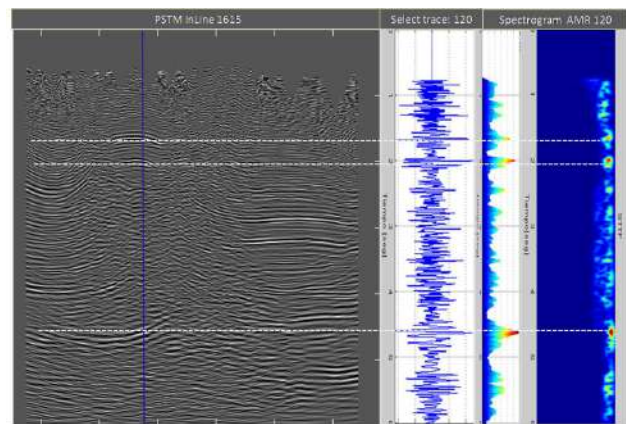


FIG. 7.— (Color online) Izquierda, sección sísmica PSTM, In-Line1615. Intermedio, traza sísmica seleccionada para AMR. Derecha, espectrogramas resultado del análisis MRA. Sobre la sección sísmica en celeste ubicación de la traza seleccionada. En líneas punteadas blancas, principales reflectores sísmicos.

gracion PSDM. Esta sección corta transversalmente al campo productor y pasa exactamente por un pozo productor de gas de los niveles profundos, Fig. 8.

Nuevamente se aplica la secuencia AMR traza por traza a toda la sección sísmica PSDM, con la diferencia que ahora se trabaja en el dominio $k - x$ (número de onda-espacio) puesto que la sección sísmica se encuentra migrada en profundidad. La construcción de

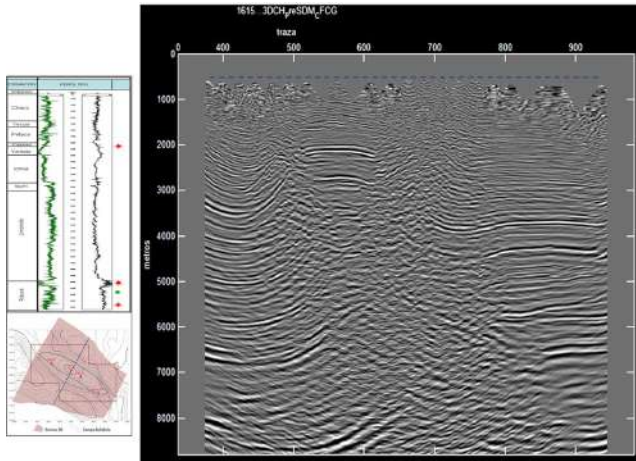


FIG. 8.— (Color online) Izquierda, arriba registros de pozo ubicando zonas productoras de hidrocarburos, abajo mapa con ubicación de la sección sísmica. Derecha sección sísmica migrada en PSDM

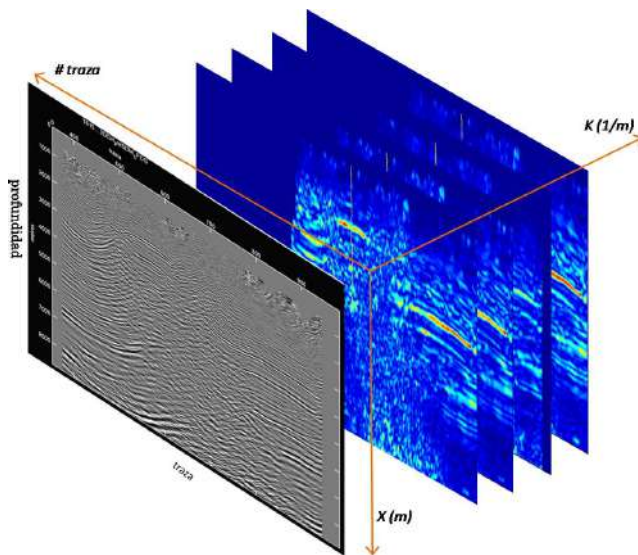


FIG. 9.— (Color online) Sección sísmica PSDM, decompuesto espectralmente por AMR en el espacio $k - x$. A lo largo del eje de numero de onda, se muestra espectrogramas para determinados valores de k

los espectrogramas ahora se hace solo para determinados valores de k , Fig. 9

El criterio de selección de valores de k , debe estar ligado al sentido geológico, alguno de estos pueden ser espesores de las diferentes formaciones geológicas, estratigrafía definida por registros de pozo, condiciones geotectónicas y estructurales del medio, entre otros. Longitudes de onda fuera de este rango posiblemente no tendrían sentido geológico. En la Fig. 10, se visualiza el impacto de la selección de diferentes valores de k , mostrando cada sección espectral detalles del subsuelo diferentes para cada longitud de onda. Es evidente que longitudes de onda larga detallan mejor aspectos profundos del subsuelo, mientras que longitudes de onda corta son más apropiadas para eventos someros.

4.4. Anomalías- k y Registros de Pozo

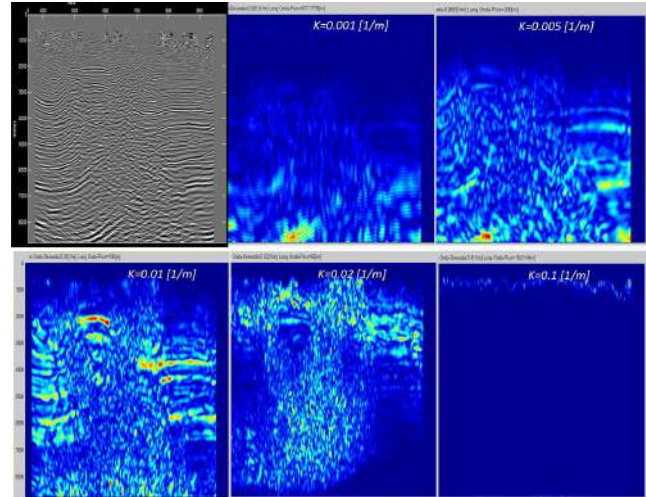


FIG. 10.— (Color online) Se muestra la sección sísmica en PSDM y secciones espectrales cinco valores de $k = 0.001, 0.005, 0.01, 0.02, 0.1$ (1/m), que detallan diferentes eventos en subsuelo. La selección de k se restringe por criterios geológicos.

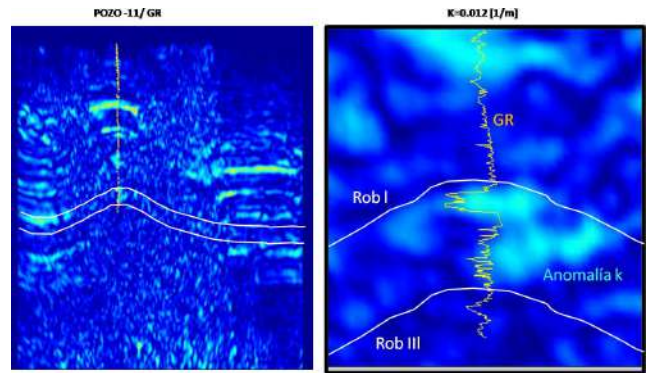


FIG. 11.— (Color online) Líneas continuas en blanco, niveles geológicos de referencia correspondiente a los topes superior e inferior de la formación Robore, Rob I y Rob III respectivamente. A la izquierda sección espectral para $k=0.012$ (1/m), sobrepuesta en amarillo registro GR (gamma ray). A la derecha ventana ampliada que corresponde al campo productor y los niveles profundos de la formación Robore. En amarillo el registro GR (gamma ray) coincidiendo con una anomalía- k .

Ahora es posible separar secciones espectrales para determinadas longitudes de onda o número de onda k que sean de algún interés en particular. Por ejemplo el número de onda $k = 0.012$ (1/m) presenta una empatía muy alta con el registro gamma ray (GR) y el registro de resistividad, que claramente identifican las arenas de Robore (ArRob I, II y III) productoras de hidrocarburos y la anomalía espectral posicionada a la misma profundidad proveniente del análisis AMR, a estas coincidencias de valores espectrales, se denominan **anomalías- k** . Fig. 11. Puede entonces inferirse que para este valor de k y a profundidades alrededor de los 4200 m (TVD-true vertical depth), las areniscas ArRob I-III pueden ser identificadas y mapeadas como anomalías- k , a lo largo de todo el campo.

5. ATRIBUTOS SÍSMICOS VS ANOMALÍAS- K

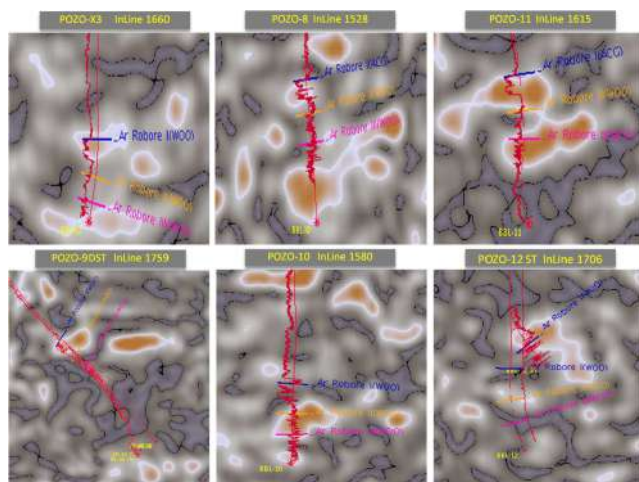


FIG. 12.— (Color online) Se muestra ventanas ampliadas de las secciones espectrales sobre puestas en rojo los registros GR. Líneas continuas anaranjadas, son los paths o camino planificado de perforación. Las zonas productoras son los niveles arenosos Ar-Rob I,II y III, que se correlacionan con las anomalías- k (cuerpos amorfos naranja) con mucha precisión.

Es menester que los resultados obtenidos sean sometidos a comparación con el fin de validar y apreciar los beneficios a obtener o incluso las mejoras por realizar. La identificación y el mapeo de anomalías- k en todo el cubo espectral requiere de una base de datos (geológico-geofísico) y con el propósito de realizar comparaciones con atributos sísmicos realizado con otros algoritmos, se exportan los resultados espectrales a un software comercial y especializado en visualización de imágenes sísmicas, interpretación geológica y extracción atributos sísmicos. En esta plataforma comercial, se muestran las secciones espectrales y anomalías- k (manchas amorfas naranja claro) que atraviesan pozos profundos con registros GR (en rojo), Fig. 12. Para este propósito se consideraran los registros GR de seis pozos profundos denominados POZO-X3, POZO-8, POZO-10, POZO-11, POZO-9DST y POZO-12ST productores de hidrocarburos en los niveles profundos.

Un caso interesante es el del POZO-12ST. Inicialmente se programó como un pozo vertical con un pequeño desvío (línea continua naranja en el gráfico). Durante la perforación el equipo sufre un problema de entrapamiento de herramienta (pesca), por lo que se decide realizar un sidetrack (desviar la dirección de perforación del pozo) en dirección de los mejores indicios de detección de hidrocarburos resultando un pozo exitoso, que coincide plenamente con las anomalías- k .

Para el mapeo de anomalías- k en el cubo espectral, se considera una ventana de aproximadamente 250 m de espesor utilizando como tope alto el horizonte sísmica Rob I y como base el horizonte sísmico Rob III (Fig. 11). Haciendo una extracción de anomalías- k , entre estos horizontes obtenemos un corte variable en profundidad visto como un plano en la Fig. 13. El campo productor de hidrocarburos está enmarcado en línea oscura y es de destacar, que de acuerdo al mapeo geológico, la distribución de las arenas Robore

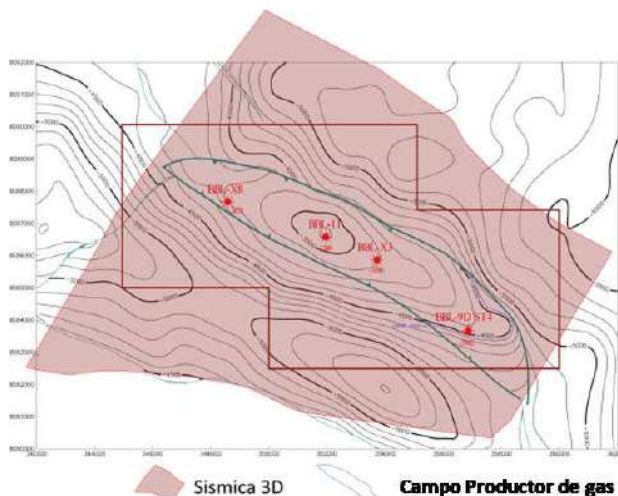
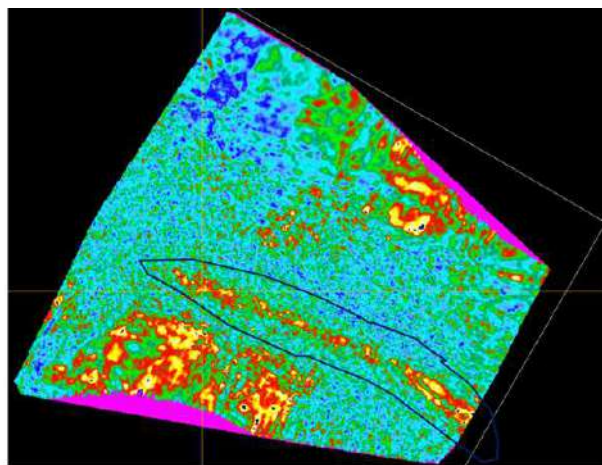


FIG. 13.— (Color online) Arriba mapeo de anomalías- k dentro el campo productor. Abajo, mapa estructural de las arenas ArRob I-III y pozos productores (puntos rojos) dentro el campo

I-III, zonas de concentración de hidrocarburos con muy alta probabilidad de certeza (verificado con los pozos productores), coincidentes con la concentración de anomalías- k .

Sobre el mismo campo y entre los mismos horizontes Rob-I y Rob-III, se realiza un análisis de atributos sísmicos, basados en extracción de amplitudes y espectros, pero sobre el cubo 3D PSDM convencional. En la Fig. 14, se muestran las diferencias entre atributos sísmicos, anomalías de amplitud y las anomalías- k , como era de esperar, las anomalías- k caracterizan con mayor resolución la distribución de las arenas productoras ArRob I-II-III a lo largo de todo el campo.

6. OTRAS APLICACIONES- GEOCUERPOS E INTERPRETACION ESTRUCTURAL

Otra aplicación de las anomalías- k , con la premisa de que éstas reflejan propiedades petrofísicas del medio de propagación de ondas sísmicas, tal como la de saturación de fluidos, es construir Geocuerpos celulares. Considerando nuevamente el paquete sísmico entre los horizontes Rob-I y Rob III. se define el llenado de todas las anomalías espectrales con microcélulas de forma esférica a través de algorit-

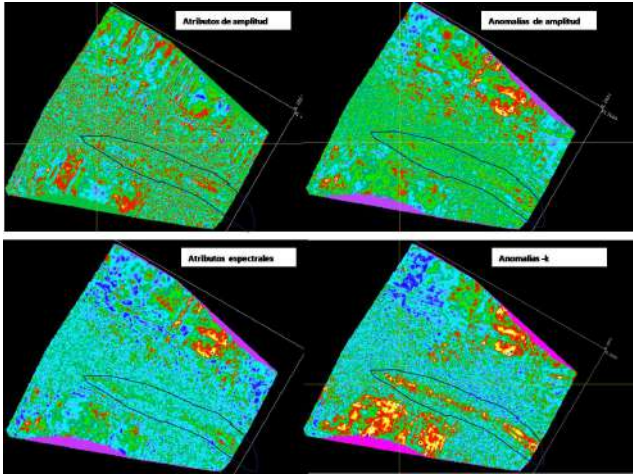


FIG. 14.— (Color online) Se muestra las diferencias entre los atributos sísmicos extraídos desde la sísmica 3D- PSDM convencional y anomalías- k extraídas desde el cubo espectral del análisis AMR

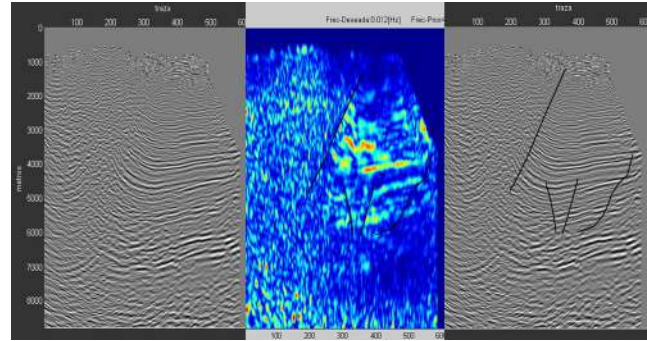


FIG. 16.— (Color online) Izquierda, imagen sísmica convencional, no se puede distinguir claramente las discontinuidades. Intermedio, se observa que el límite de la zona de falla está bien definida en la visualización espectral AMR, pueden observarse también algunas discontinuidades. Derecha se sobrepone los límites visualizados en la imagen espectral, sobre la sección convencional.

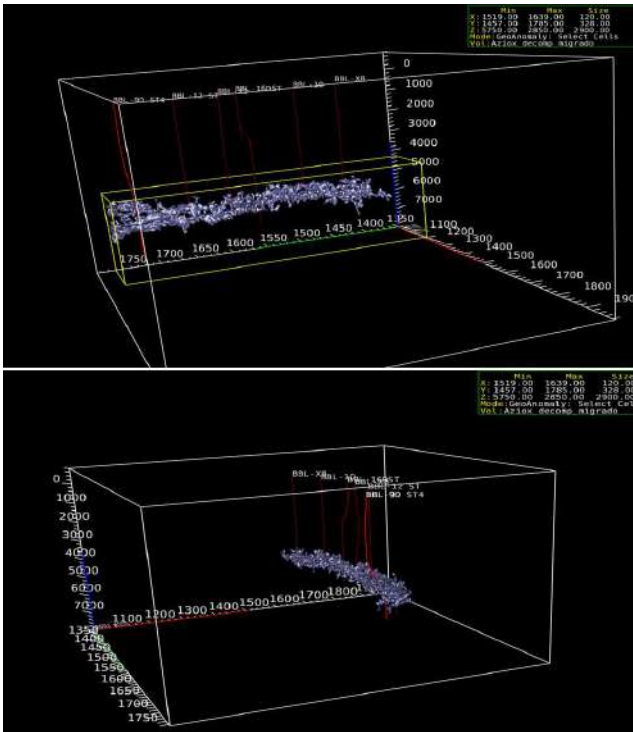


FIG. 15.— (Color online) Vista 3D en subsuelo de la distribución de anomalías- k , mediante geocuerpos a lo largo del campo productor

mos estadísticos que permiten minimizar los espacios vacíos entre esferas. En la Fig. 15 se muestra la imagen de lo que sería probablemente la más realista de la forma de distribución de hidrocarburos para los niveles profundos del campo productor.

Una de las potenciales utilidades del análisis multiresolución es la generación de imágenes en el espacio $f - t$ durante una interpretación estructural, reduciendo ruidos de migración, difracciones y definiendo límites no visibles en la imagen sísmica convencional.

Se ha aplicado el análisis AMR a sísmica 2D PSTM antigua. Seleccionando bajas frecuencias, se llega a

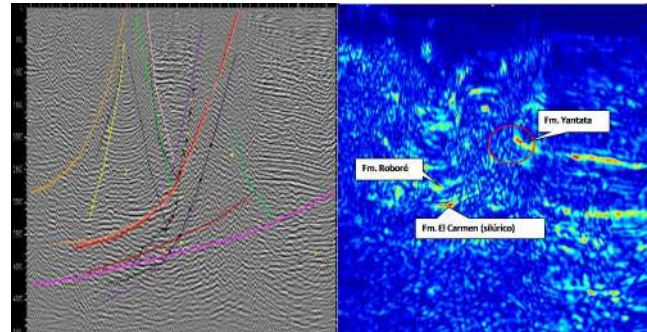


FIG. 17.— (Color online) Izquierda imagen sísmica 2D PSTM, sobrepuesta con posibles límites sísmicos. Derecha sección espectral de MRA, donde es más simple definir algunos eventos geológicos.

observar el nivel del basamento y se logra definir las formaciones principales que en sísmica PSTM no es tan simple de distinguir. Figura 17 En esta última imagen se puede observar claramente los horizontes guía como son las formaciones Yantata y Roboré a lo largo de la línea sísmica. Se pueden observar dos eventos claros en esta imagen:

- 1. La frecuencia en la zona de la Fm El Carmen (Ver Fig. 17), por debajo de la Formación Roboré, más concretamente las rocas del Silúrico.
- 2. El límite de la formación Yantata en la zona central norte (Ver Fig. 17).

Estos dos tramos muestran la misma resolución, posiblemente generada por los esfuerzos del contacto entre la roca y la falla adyacente, ya que si se observan estos puntos variando las frecuencias, se mantendrán con mucha resolución.

Se hace hincapié en este evento, ya que se presenta en el área de imagen pobre generando incertidumbre, por lo que sería una confirmación de la presencia de esfuerzos compresivos.

Estos horizontes son muy coherentes con los de la sísmica, llegando a definir de mejor forma cualquier interrupción en cuanto a litología, incluso llegando a definir pendientes abruptas.

7. CONCLUSIONES

La metodología de Análisis Multiresolución AMR, muestra la riqueza de información contenida en los análisis espectrales de datos sísmicos. Esta metodología funciona independientemente de la disponibilidad de otros datos geofísicos; sin embargo, con mayor certeza si existen registros de pozos; específicamente para la determinación de los números de onda k coherente con el sentido geológico. Bajo estas condiciones:

- **1.** Se muestra una buena correlación de las anomalías k , con niveles arenosos productores de hidrocarburos.
- **2.** Acompañado de un buen análisis petrofísico, podría utilizarse para determinación de volúmenes mediante la generación de geocuerpos y para estudios de caracterización de reservorios.
- **3.** La extracción de atributos sísmicos son de mayor resolución sobre cubos espectrales 3D construidos con AMR que sobre simples cubos

3D de amplitud PSTM/PSDM.

- **4.** Ayuda en procesos de interpretación estructural e identificación de discontinuidades, reflectores sísmicos eliminando ruidos de sub o sobre migración o difracciones en general.

Adicionalmente a este trabajo, se ha generado una plataforma JAVA interactiva, con algoritmos escritos en C++ y librerías de MatLab, que permite trabajar los datos sísmicos desde el cargado SGY hasta la generación de cubos espectrales tanto en el espacio $f - t$ para PSTM como en el espacio $k - x$ para PSDM, es decir se trata de una aplicación post-proceso, disponible con permiso de los autores.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la gerencia de YPFB CHACO S.A., a la Université Toulouse III Paul Sabatier por cooperar con esta investigación y al Dr. Patrice Baby por la transmisión de conocimientos en aspectos estructurales.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Huang, N.E., Shen, Z., Long, S.R., Wu, M.C., Shih, H.H., Zheng, Q., Yen, N.C., Tung, C.C. & Liu, H.H. (1998), *Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **454**, 903-995.
- Daubechies, I. (1992), *Ten Lectures on Wavelets* (Pennsylvania: The Society for Industrial and Applied Mathematics).
- Stockwell, R.G., Mansinha, L. & Lowe, R.P. (1996), *IEEE Transactions on Signal Processing* **44**, 998-1001.
- Han, J. & van der Baan, M. (2012), *Complete Ensemble Empirical Mode Decomposition for Seismic Time-Frequency Analysis*, University of Alberta, SEG Las Vegas 2012 Annual Meeting.
- Odebeatu, E., Zhang, J., Chapman, M., Liu, E. & Li, X. (2006), *The Leading Edge* **25**(2), 206-210.

ESTIMACIÓN DE REGIONES DE ESTABILIDAD EN UN MODELO DE PÉNDULO ELÁSTICO STABILITY ZONE ESTIMATION IN AN ELASTIC PENDULUM MODEL

NESTOR RODRIGO CONDORI U. & DIEGO SANJINÉS CASTEDO

Carrera de Física

Universidad Mayor de San Andrés

c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635, La Paz, Bolivia

(Recibido 28 de julio de 2019; aceptado 15 de septiembre de 2019)

RESUMEN

Se investiga el sistema dinámico del péndulo elástico con dos grados de libertad (radial y angular) a través del formalismo de Lagrange que conduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales no-lineales acopladas. Este sistema se transforma en una ecuación de Hill para la proyección horizontal de la coordenada radial, cuyo coeficiente periódico en el tiempo se modela por una función constante por tramos a fin de aplicar un criterio de estabilidad (traza de la matriz de evolución); este criterio permite obtener numéricamente un diagrama de estabilidad para los parámetros característicos del sistema sin invocar la aproximación de pequeñas oscilaciones. Así, la simulación de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales con los parámetros elegidos según dicho diagrama de estabilidad permite verificar la precisión de su cálculo, encontrándose resultados bastante buenos. Para pequeñas oscilaciones se recupera los resultados conocidos de la ecuación de Mathieu y su correspondiente diagrama de estabilidad (diagrama de Strutt). Finalmente se discute algunas perspectivas interesantes.

Código(s) PACS: 05.45.–a – 45.20.Jj – 43.20.Ks

Descriptores: Dinámica no-lineal – Mecánica lagrangiana y hamiltoniana – Conservación de la energía

ABSTRACT

We investigate the elastic pendulum dynamical system with two degrees of freedom (radial and angular) through the Lagrangian formalism which yields a system of two coupled non-linear differential equations. By projecting the radial coordinate, we obtain a Hill equation with a time-periodic coefficient modelled by a piecewise constant function. A stability diagram for the characteristic parameters of the system is then calculated by means of a criterion based on the trace of the evolution matrix without invoking the small oscillation approximation. The numerical solution of the system equations for the chosen parameters verifies the precision of the calculated stability diagram and a reasonably good agreement is found. For small oscillations we obtain the known results of the Mathieu equation and its corresponding stability diagram (Strutt diagram). We finally discuss some interesting perspectives.

Subject headings: Nonlinear dynamics – Lagrangian and Hamiltonian mechanics – Energy conservation

1. INTRODUCCIÓN

El problema del péndulo elástico ha sido ampliamente estudiado en regiones de oscilaciones pequeñas (ángulos y amplitudes despreciables) con lo cual el sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas se hace más sencillo de tratar matemáticamente. Los primeros que aplicaron el modelo del péndulo elástico a un problema fueron Gorelik y Vitt en 1933 [1]; ellos propusieron el modelo para describir la resonancia paramétrica (esto es, el fenómeno de transferencia de energía entre dos modos de oscilación) en la molécula del dióxido de carbono y hallar sus líneas espectrales. Simplificando el problema y usando la teoría

de perturbaciones Gorelik y Vitt encontraron soluciones periódicas aproximadas. En 1976 Olsson [2] estudió el problema del péndulo elástico en un sistema cartesiano; realizó un desarrollo de Taylor del lagrangiano y despreció términos superiores bajo la aproximación de oscilaciones pequeñas llegando así a la ecuación de Mathieu para la proyección de la longitud del resorte en el eje horizontal. Olsson describió también la resonancia paramétrica y concluyó que no hay soluciones analíticas expresables mediante el principio de superposición en funciones armónicas simples de los modos de oscilación. En 2002 Peter Lynch [3,4,5] trató el problema del péndulo elástico en dos y en tres dimensiones en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas bajo la

aproximación de pequeñas oscilaciones. Aunque Lynch deriva la ecuación de Mathieu, no se preocupa tanto por las regiones de estabilidad, si no más bien por hallar las expresiones analíticas de las soluciones en función al tiempo. En 2005 Sanjinés [6] estudió la relación entre las soluciones del péndulo elástico (de nuevo, bajo la aproximación de pequeñas oscilaciones) y su aplicación a la teoría de bandas en un modelo unidimensional de sólido cristalino; así, una vez que relaciona la ecuación de Mathieu con la ecuación de Schrödinger, utiliza el criterio de la traza para hallar el diagrama de Strutt (que indica las regiones de estabilidad e inestabilidad) y relaciona las regiones estables con un estado físico de aislante eléctrico y las regiones inestables con un estado físico de conductor eléctrico.

La determinación de las regiones de estabilidad e inestabilidad en el péndulo elástico tiene diversas aplicaciones, por ejemplo, en dinámica atmosférica [5], construcción de barcos, aeroplanos, sistemas robóticos, pues se requiere un estrecho rango de variación de parámetros característicos para el correcto funcionamiento de estos dispositivos. En este trabajo usaremos la teoría de Floquet [7,8] para calcular los parámetros para los cuales hay estabilidad en las soluciones de una ecuación diferencial con coeficientes periódicos; los resultados permitirán elaborar el diagrama de estabilidad correspondiente *sin* invocar la aproximación de pequeñas oscilaciones.

La organización de este artículo es la siguiente. En la Sección II se describe la dinámica del péndulo elástico en coordenadas polares *sin* invocar la aproximación de pequeñas oscilaciones; a partir del sistema acoplado de ecuaciones diferenciales no-lineales se deduce una ecuación diferencial de segundo orden en variable compleja, lo que es posible gracias a un cambio de variable muy oportuno que no es trivial. En la Sección III se supone que la coordenada radial $r(t)$ varía de manera armónica, por lo que la ecuación de movimiento del péndulo se convierte en una ecuación de Hill (esto es, una ecuación de segundo orden con un coeficiente periódico); en el límite de pequeñas oscilaciones se define las constantes apropiadas para realizar luego la comparación con una ecuación de Mathieu. En la Sección IV se aplica la teoría de Floquet para segmentar el coeficiente periódico de la ecuación de Hill y elaborar el diagrama de estabilidad, que en el límite de pequeñas oscilaciones corresponde al conocido diagrama de Strutt, lo que es consistente con el hecho de que en ese límite se obtiene la ecuación de Mathieu a partir de la ecuación de Hill. En la Sección V se realiza las simulaciones numéricas de las ecuaciones de movimiento *exactas* del sistema (i.e., sin aproximar el coeficiente de la ecuación de Hill por una función constante por tramos); se obtiene un acuerdo bastante bueno entre las predicciones analíticas realizadas para el modelo aproximado y las simulaciones numéricas para el sistema exacto. Finalmente, en los Apéndices se trata los temas complementarios sobre: las aproximaciones para la función de la traza y el diagrama de estabilidad (Apéndice A), la ecuación radial (Apéndice B) y el caos en el péndulo

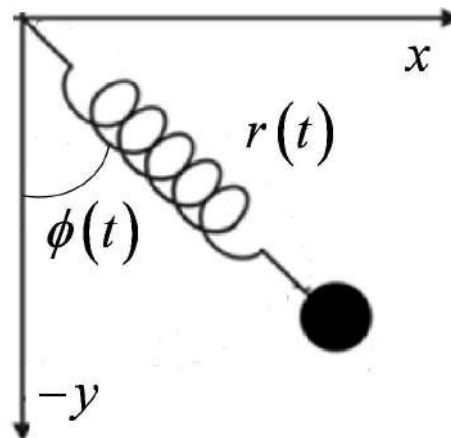


FIG. 1.— Esquema del péndulo elástico con coordenadas polares (r, ϕ) y coordenadas cartesianas (x, y) .

elástico (Apéndice C).

2. EL PÉNDULO ELÁSTICO

El péndulo elástico es un sistema físico complicado. Si la magnitud de la coordenada radial es constante y las oscilaciones angulares no son pequeñas, se tiene un péndulo simple cuya coordenada angular se expresa en términos de la función elíptica de Jacobi de primera clase [9,10], mientras que el movimiento radial o longitudinal obedece a la ley de Hooke (se supone como aproximaciones válidas que la masa del resorte es despreciable y la constante elástica se mantiene aún para grandes elongaciones).

En general el péndulo elástico es un problema tridimensional cuyo movimiento con tres grados de libertad es complicado. Se ha visto que ocurren fenómenos tales como la flexión del resorte o la alternancia de regímenes de orden y caos, y aunque hay simulaciones numéricas de estos fenómenos, aún no se ha conseguido una solución analítica completa a más de 300 años desde la deducción de sus ecuaciones de movimiento [11,12]. Como aproximaciones adicionales a las ya referidas, se supondrá en este trabajo que el péndulo oscila en un plano (dos grados de libertad) y que la coordenada radial depende del tiempo de manera armónica.

A continuación deduciremos las ecuaciones de movimiento del sistema (Fig. 1) para las coordenadas radial $r(t)$ y angular $\phi(t)$. La energía cinética es

$$T = \frac{m}{2}(r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2), \quad (1)$$

y la energía potencial es

$$U = \frac{k}{2}(r - r_0)^2 - mgr \cos \phi, \quad (2)$$

así que la energía total es

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{k}{2}(r - r_0)^2 - mgr \cos \phi, \quad (3)$$

donde r_0 es la longitud de relajamiento del resorte, m es la masa puntual de la carga y k es la constante elástica. La condición de equilibrio cuando la masa cuelga bajo el

efecto de su peso es

$$\rho = r_0 + \frac{mg}{k}. \quad (4)$$

La función lagrangiana del sistema es $L = T - U$:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{k}{2}(r - r_0)^2 + mgr \cos \phi, \quad (5)$$

así que de las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene:

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} + g \sin \phi = 0, \quad (6)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \phi = 0. \quad (7)$$

Éste es un sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales acopladas que no tiene una solución analítica cerrada, pues posee sólo una constante de movimiento que es la energía total; sin otra constante de movimiento no es posible resolver analíticamente el sistema [12]. Multiplicando (6) por $\cos \phi$, (7) por $\sin \phi$, y sumando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\cos \phi(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) + \sin \phi(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) + \frac{k}{m}r \sin \phi(1 - \frac{r_0}{r}) = 0. \quad (8)$$

De manera similar multiplicamos (6) por $-\sin \phi$ y (7) por $\cos \phi$, de donde obtenemos:

$$\cos \phi(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) - \sin \phi(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) + \frac{k}{m}r \cos \phi(1 - \frac{r_0}{r}) - g = 0. \quad (9)$$

Aunque parece que las nuevas ecuaciones (8) y (9) no son más sencillas que (6) y (7) podemos sin embargo trabajar con ellas. Para ello realizamos el cambio de variable $\xi = re^{i\phi}$, con ello el sistema (8) y (9) se reduce a:

$$\ddot{\xi} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \xi - g = 0. \quad (10)$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden en variable compleja, cuya parte real es (9) y cuya parte imaginaria es (8). Para dilucidar las propiedades dinámicas del sistema se puede graficar $r(\phi)$ o bien proponer una función $r(t)$ adecuada y resolver (10) para $\phi(t)$. La ecuación para ξ se construye tomando el complejo conjugado de (10):

$$\ddot{\xi}^* + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r^*}\right) \xi^* - g = 0, \quad (11)$$

y multiplicando por ξ^* para obtener:

$$\xi^* \ddot{\xi} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \xi \xi^* - g \xi^* = 0. \quad (12)$$

Análogamente, multiplicamos (11) por $-\xi$:

$$-\xi \ddot{\xi}^* - \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r^*}\right) \xi \xi^* + g \xi = 0, \quad (13)$$

y se suma (12) y (13):

$$\ddot{\xi} \xi^* - \xi \ddot{\xi}^* - g(\xi^* - \xi) = 0. \quad (14)$$

Esta ecuación para ξ y su complejo conjugado equivale a (6). De manera similar, restando (12) de (13) se obtiene

el equivalente de (7). Vemos pues que el péndulo elástico se describe efectivamente por (10) ya que de aquí se deducen (6) y (7).

3. ECUACIÓN DE HILL

En la ecuación (10) es posible desarrollar (en principio) la función periódica $r(t)$ en una serie de Fourier, por lo que (10) tendrá un coeficiente periódico. Ésta es la ecuación de Hill [8]. No obstante no seguiremos ese procedimiento en este trabajo sino que se propondrá un modelo simple para $r(t)$:

$$r(t) = \rho - a \cos \omega t, \quad (15)$$

donde a es la amplitud de oscilación (que no se considera pequeña) y ω , como se verá, es la frecuencia de oscilación de la coordenada radial. Reemplazando (15) en (10) se obtiene:

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{g - (ak/m) \cos \omega t}{\rho - a \cos \omega t} \right) \xi - g = 0. \quad (16)$$

Esta ecuación se reduce a una ecuación de Mathieu para el caso de pequeñas oscilaciones. Tal reducción nos permitirá relacionar las variables de los ejes del diagrama de Strutt con las correspondientes del diagrama de estabilidad para nuestra ecuación de Hill (sección V).

A continuación proyectamos $\xi(t)$ en coordenadas cartesianas:

$$\xi(t) = r(t)e^{i\phi(t)} = r \cos \phi + ir \sin \phi = -y(t) + ix(t); \quad (17)$$

derivando dos veces obtenemos:

$$\ddot{\xi} = -\ddot{y} + i\ddot{x}, \quad (18)$$

de donde se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas al sustituir (17) y (18) en (16):

$$\ddot{y} + \left(\frac{g - (ak/m) \cos \omega t}{\rho - a \cos \omega t} \right) y + g = 0, \quad (19)$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{g - (ak/m) \cos \omega t}{\rho - a \cos \omega t} \right) x = 0. \quad (20)$$

Si hacemos $a \simeq 0$ en la ecuación de Hill (20) y desarrollamos el denominador en serie para a alrededor de cero se obtiene:

$$\ddot{x} + \left(\frac{g}{\rho} - \frac{a\omega^2 r_0 \cos \omega t}{\rho^2} \right) x = 0. \quad (21)$$

Ésta es la ecuación de Mathieu que posee como coeficiente periódico una función armónica en el numerador. Comparando con las halladas en [2, 6] se ve que poseen la misma estructura y las mismas constantes, con la siguiente identificación: $\delta = g/\rho$ y $\lambda = a\omega^2 r_0/\rho^2 = akr_0/m\rho^2$ (δ y λ son constantes); así, identificamos $\omega^2 = k/m$ y se prueba que nuestra ecuación de Hill se reduce a una ecuación de

Mathieu. De manera equivalente, este resultado se obtiene también multiplicando el segundo término de (20) en el numerador y denominador por $\rho + a \cos \omega t$:

$$\ddot{x} + \frac{(g\rho - \omega^2 a^2 \cos^2 \omega t) - (\omega^2 r_0 a \cos \omega t)}{\rho^2 - a^2 \cos \omega t} x = 0. \quad (22)$$

Si a tiende a cero se desprecia el término cuadrático y se obtiene nuevamente (21). Ahora que hemos encontrado la constante ω , volvamos a la ecuación de Hill (20). Factorizando ρ en el denominador del coeficiente, obtenemos dicha ecuación donde se introducen las constantes α y β :

$$\ddot{x} + \frac{\beta - \alpha \cos \pi \tau}{1 - (\alpha/\pi^2) \cos \pi \tau} x(\tau) = 0, \quad (23)$$

donde

$$\alpha = \frac{a\pi^2}{\rho}, \quad \beta = \frac{g\pi^2}{\rho\omega^2}, \quad \pi\tau = \omega t. \quad (24)$$

En adelante identificaremos por $Q(\tau)$ al coeficiente periódico de la ecuación de Hill (23).

4. APROXIMACIÓN DE LA FUNCIÓN $Q(\tau)$

Consideremos a continuación la función $Q(\tau)$:

$$Q(\tau) = \frac{\beta - \alpha \cos \pi \tau}{1 - (\alpha/\pi^2) \cos \pi \tau}. \quad (25)$$

A fin de elaborar el correspondiente diagrama de estabilidad para la ecuación de Hill debemos modelar $Q(\tau)$ por una función constante por tramos sin singularidades (ver Figs. 2 (a), 2 (b) y 2 (c)), es decir,

$$\tau \neq \arccos(\rho/a) - 2n\pi, \quad (26)$$

con n un número entero y

$$0 < \alpha < \beta\rho\omega^2/g. \quad (27)$$

En la Fig. 2 (a) y 2 (b) se verifica un comportamiento periódico (cosenoidal) cuando se dan las condiciones expresadas arriba; si dichas condiciones no se cumplen entonces $Q(\tau)$ es singular (Fig. 2 (c)) o posee una forma periódica complicada. A continuación segmentemos $Q(\tau)$ modelándola por la siguiente función constante por tramos

$$Q(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta - \alpha}{1 - (\alpha/\pi^2)} \quad \text{si } 0 \leq \tau < 1, \\ \frac{\beta + \alpha}{1 + (\alpha/\pi^2)} \quad \text{si } 1 \leq \tau < 2. \end{array} \right\} \quad (28)$$

La condición (27) parecería restringir el valor de a de tal forma que no sería posible determinar las regiones de estabilidad sin la aproximación de oscilaciones pequeñas pues a posee una cota superior. Veamos que éste no es el caso. A partir de (15) se tiene que, para los valores extremos de $\cos \omega t$, $r = r_0 + mg/k \pm a$, con $a \simeq r_0 + mg/k$ (condición (27)), así que:

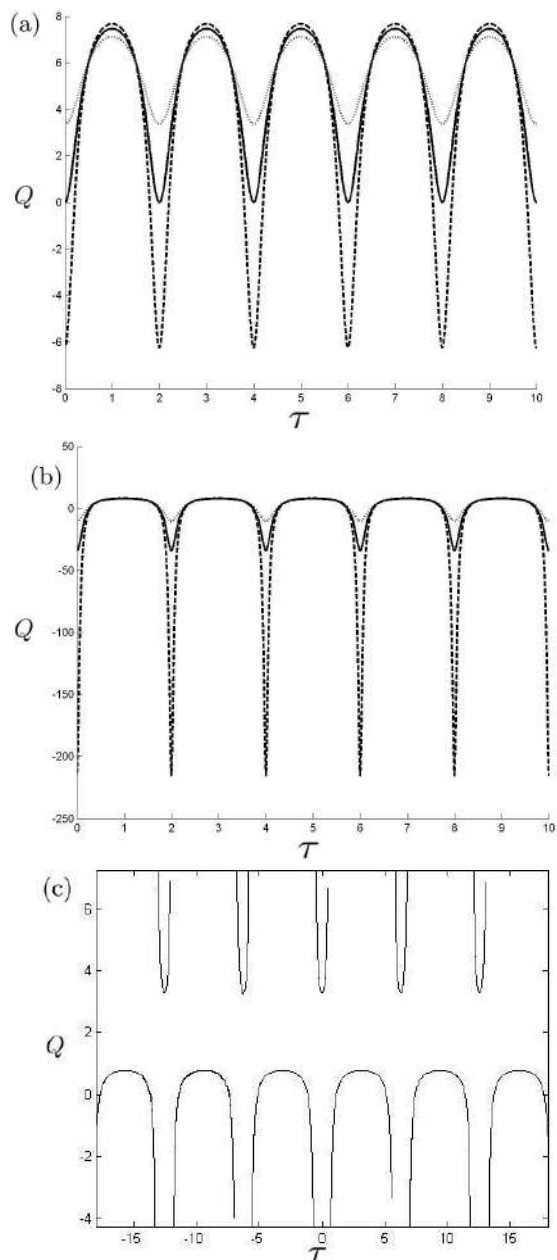


FIG. 2.— Comportamiento de la función $Q(\tau)$ para diferentes valores de α . (a) La función $Q(\tau)$ es periódica y puede aproximarse por una función constante por tramos cuando $\alpha < \pi^2$ (lo que significa que $a < \rho$, donde $\rho = r_0 + mg/k$). Con $\alpha = 4$ (línea punteada), $\alpha = 7.5$ (línea segmentada) y $\alpha = 6$ (línea sólida). (b) Forma de $Q(\tau)$ a medida que α se aproxima a su cota superior. Se observa que aún $Q(\tau)$ se puede modelar por una función constante por tramos. Con $\alpha = 8$ (línea punteada), $\alpha = 9.7$ (línea segmentada) y $\alpha = 9$ (línea sólida). (c) Cuando $\alpha > \pi^2$ la función $Q(\tau)$ aún es periódica pero tiene singularidades (o es demasiado complicada) como para modelarla por una función constante por tramos. Se ha tomado el valor $\beta = 6$ en las gráficas (a), (b) y (c).

$$r_{max} \simeq 2(r_0 + mg/k), \quad (29)$$

$$r_{min} \simeq 0. \quad (30)$$

De esta manera, el acotamiento de a evita que la

longitud del péndulo sea cero o negativa y al mismo tiempo permite una elongación máxima correspondiente a su longitud de equilibrio (29). Así, el tratamiento del péndulo elástico presentado en este trabajo ya no se restringe a pequeñas oscilaciones.

5. FUNCIÓN DE LA TRAZA Y DIAGRAMA DE ESTABILIDAD

Para elaborar el diagrama de estabilidad seguimos el criterio de la traza que se deduce de la teoría de Floquet [6,7,8]. Expresamos (23) en forma matricial:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\frac{d}{d\tau} X(\tau) = \Gamma(\tau)X(\tau). \quad (32)$$

El vector X definido así en (32) contiene a la función $x(\tau)$ y a su derivada. La solución formal para $X(\tau)$ se puede expresar en términos de la condición inicial $X(\tau_0)$ y de la matriz de evolución $T(\tau, \tau_0)$:

$$X(\tau) = T(\tau, \tau_0)X(\tau_0). \quad (33)$$

Combinando (33) y (32) se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{d\tau} T(\tau, \tau_0) = \Gamma(\tau)T(\tau, \tau_0), \quad (34)$$

($T(\tau_0, \tau_0) = 1$) cuya solución formal es:

$$T(\tau, \tau_0) = e^{\int_{\tau_0}^{\tau} \Gamma(z) dz}. \quad (35)$$

La matriz de evolución (matriz de Floquet) es unimodular y consiste de un mapeo biparamétrico o aplicación lineal que posee las propiedades de grupo abeliano; esta matriz cumple la propiedad de composición:

$$T(\tau_m, \tau_0) = T(\tau_m, \tau_{m-1})T(\tau_{m-1}, \tau_{m-2}) \dots T(\tau_1, \tau_0). \quad (36)$$

Esta propiedad será útil para calcular la matriz de evolución resultante de una región segmentada donde en cada intervalo (segmento) la integral (35) se pueda calcular de manera exacta [8,13]. Luego, se aplica la condición de estabilidad usual en (33) con $T(\tau, \tau_0)$ ya calculada: $X_1(\tau)$ y $X_2(\tau)$, con condiciones iniciales $X_1(0)$ y $X_2(0)$, son soluciones estables de (32) si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de tal forma que si $|X_1(0) - X_2(0)| < \delta$, entonces $|X_1(\tau) - X_2(\tau)| < \epsilon$ ($\tau > 0$). Así, las regiones de estabilidad para los parámetros α y β dados en (24) se determinan si la función de la traza $S(\alpha, \beta) \equiv Tr(T(L, 0)) \in (-2, 2)$, donde L es el periodo de la matriz de evolución; éste es el criterio de la traza [6,13]. En estas regiones la norma de $X(\tau)$ se mantiene acotada. Vale la pena mencionar que el criterio de la traza utilizado en este trabajo lleva al mismo resultado que el obtenido por el algoritmo de Meissner [8]. Ahora podemos aplicar el criterio de la traza a la función $Q(\tau)$ dada en (28). El resultado para $S = Tr(T(\tau_2, \tau_1)T(\tau_1, \tau_0))$ es:

$$S = 2 \cos \sqrt{\frac{\beta + \alpha}{1 + \alpha/\pi^2}} \cos \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha/\pi^2}} - 2 \frac{\beta - (\alpha^2/\pi^2)}{\sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)[1 - (\alpha/\pi^2)^2]}} \sin \sqrt{\frac{\beta + \alpha}{1 + \alpha/\pi^2}} \sin \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha/\pi^2}}, \quad (37)$$

con $T(\tau_j, \tau_i)$ calculada según (35) para los valores constantes de $\Gamma(z)$ en (32) que corresponden a $Q(\tau)$ dado en (28). Si el valor de a es muy pequeño la ecuación (37) corresponde a las regiones de estabilidad para oscilaciones pequeñas, lo que equivale a $\alpha \approx 0$ en el diagrama de estabilidad (apéndice A). En la Fig. 3 se muestra el diagrama de estabilidad obtenido con la condición $|S| \leq 2$.

6. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Ahora volvamos al sistema (6)-(7) y trabajemos con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0[\pi^2/(\pi^2 - \beta)] - a; \phi(0) = 0.017 \\ \dot{r}(0) &= \dot{\phi}(0) = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

donde se ha utilizado (24) para relacionar β con la condición inicial radial; r_0 se mide en metros; el ángulo inicial es $1^\circ = 0.017$ rad. (e iguales resultados se obtiene para $\phi(0) < 1.53$ rad.) El régimen de inestabilidad corresponde al fenómeno de "resonancia paramétrica" definido como el régimen en el que la transferencia de energía es óptima entre los modos radial y angular [2]; esta condición ocurre cuando la frecuencia radial es el

doble de la frecuencia angular, lo que corresponde a $\beta = (\pi/2)^2$ y, de manera equivalente, a que el cociente de las longitudes (en reposo) del resorte cargado y sin cargar sea $r_0/\rho = 4/3$ [6]. En efecto, se puede verificar en la Figs. 4 (a) y 4 (b) la inestabilidad del sistema (resonancia paramétrica). En las Figs. 4 (c) y 4 (d) se muestra casos del régimen de estabilidad donde los modos de oscilación no se alternan, es decir, la energía se mantiene en cada modo. Un caso extremo de esta situación ocurre cuando $\phi(0) = 0$: la energía del sistema se mantiene en el modo radial y el modo angular no se excita pues nunca recibe energía del modo radial, por lo que $\phi(t) = 0$ para $t > 0$. La simulación numérica de este caso es trivial por lo que no se incluye en los casos de la Fig. 4; de todas maneras se realizó a fin de verificar la precisión numérica del algoritmo para resolver el sistema (6) - (7).

Los gráficos anteriores, que se obtuvieron resolviendo numéricamente el sistema de ecuaciones (6)-(7), corresponden a los parámetros α y β extraídos del diagrama de estabilidad para valores arbitrarios de las coordenadas radial y angular.

Recordemos, sin embargo, que este diagrama de estabilidad es aproximado pues se elaboró con base en

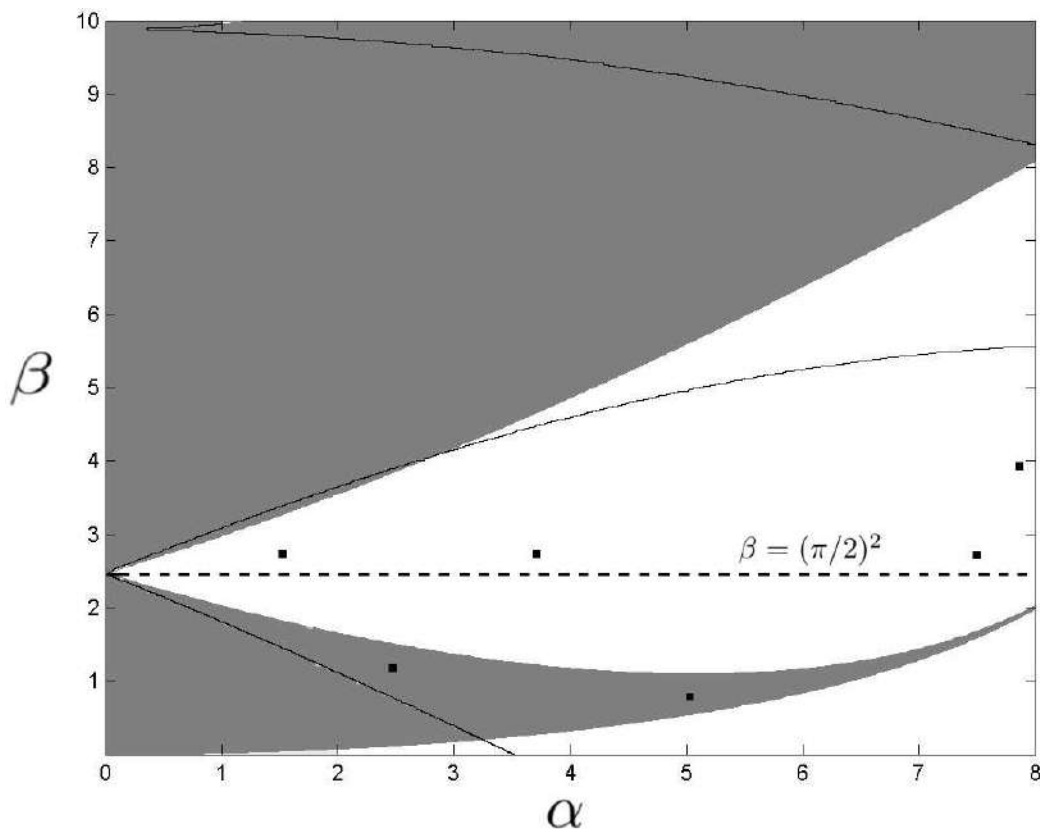


FIG. 3.— Las regiones oscuras y claras corresponden a los regímenes de estabilidad e inestabilidad respectivamente. Comparación de diagramas de estabilidad: la región con borde negro corresponde al diagrama de Strutt obtenido en [6] y la región oscura corresponde al diagrama de estabilidad obtenido de la ecuación (37). Nótese la coincidencia de ambos diagramas hasta el valor de $\alpha \simeq 0.2$. Los puntos negros representan los valores de α y β tomados para las simulaciones de la Fig. 4 y cuyos casos, en orden creciente de α , son: (a), (c), (b), (d), (g), (e).

una función $Q(\tau)$ constante por tramos (sección IV), pero para efectos prácticos resulta bastante bueno. Debemos indicar que la condición de resonancia paramétrica ($\beta = (\pi/2)^2$) no es única, pues otros valores de β corresponden al régimen de inestabilidad, sin embargo podemos afirmar cualitativamente que $\beta = (\pi/2)^2$ hace que el sistema transfiera más eficientemente la energía entre los modos radial y angular. Cuando $\beta = (\pi/2)^2$ no se puede dar la elongación máxima al péndulo pues la masa choca con el punto de suspensión; así, el valor máximo de elongación inicial es $a \simeq r_0 + \tilde{r}_0$ con $mg/k \gg \tilde{r}_0$. Para $\beta = (2\pi/5)$ no ocurre tal choque y por lo tanto $a \simeq r_0 + mg/k$ puede tomar este valor máximo, lo que es consistente con el diagrama de estabilidad (ver Figs. 3, 4 (e), 4 (f), 4 (g) y 4 (h)). El diagrama de estabilidad aproximado que se obtuvo en este trabajo es bastante preciso en las regiones estables $\beta > (\pi/2)^2$ pero menos preciso en $\beta < (\pi/2)^2$. Nótese que para $\beta > \alpha$ las áreas de estabilidad son más grandes que para $\beta < \alpha$, lo que significa que los resortes con longitudes de relajación pequeñas y valores grandes de la constante elástica tienden a ser inestables cuando son sometidos a elongaciones (o compresiones) grandes.

7. PÉNDULO ELÁSTICO AMORTIGUADO

Consideremos las ecuaciones de Euler-Lagrange para un sistema disipativo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (39)$$

donde $\mathcal{F} = \sum_i \kappa_i \dot{q}_i^2 / 2$ es la función de disipación de Rayleigh que corresponde a una fuerza disipativa proporcional a la velocidad [10]. Para el caso del péndulo elástico en coordenadas polares se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} + g \sin \phi + \frac{\kappa_2}{m} r \dot{\phi} = 0, \quad (40)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \phi + \frac{\kappa_1}{m} \dot{r} = 0. \quad (41)$$

Para coeficientes de fricción iguales $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ las dos ecuaciones anteriores se expresan de manera compacta (con $\xi = re^{i\phi}$):

$$\ddot{\xi} + \kappa \dot{\xi} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \xi - g = 0, \quad (42)$$

donde se han realizado operaciones análogas a las de la sección II con un coeficiente de disipación constante. La anterior ecuación es una ecuación de Hill con $r(t)$ periódica según (15). En coordenadas cartesianas se obtiene:

$$\ddot{x} + \kappa \dot{x} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) x = 0, \quad (43)$$

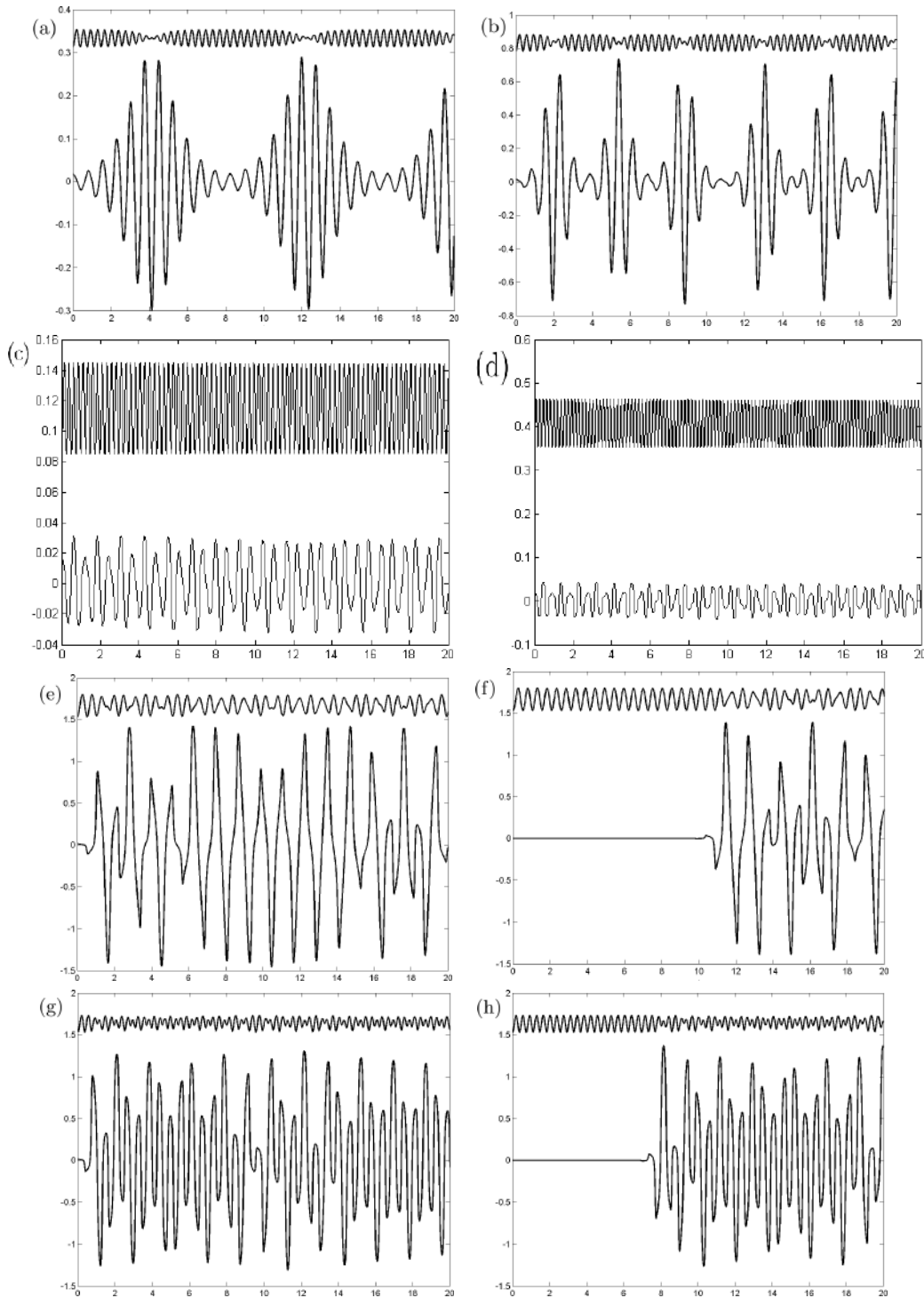


FIG. 4.— Gráficas de $r(t)$ (curva superior) y $\phi(t)$ (curva inferior). La coordenada radial está medida en metros, la coordenada angular está medida en radianes y el tiempo está medido en segundos. Los valores de $r(t)$ se desplazaron por un Δr conveniente a fin de distinguirlos de los valores de $\phi(t)$. Los valores de $(r(0), \phi_{max})$ con un ángulo inicial $\phi(0) = 0.017$ rad son : (a) (0.12, 0.28), (b) (0.15, 0.785), (c) (0.13, 0.031), (d) (0.053, 0.042), (e) (0.233, 1.5), (g) (0.201, 1.44). Los casos (f) y (h) corresponden a (e) y (f) respectivamente, con un ángulo inicial 10^{-20} rad. Los valores de (α, β) son : (a) (1.48, 2.47), (b) (3.70, 2.47), (c) (2.57, 1.29), (d) (5.0, 0.76), (e) (7.88, 3.95), (g) (7.48, 2.47).

$$\ddot{y} + \kappa \dot{y} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) y - g = 0. \quad (44)$$

Así, el movimiento en el eje x obedece la ecuación:

$$\ddot{x} + \kappa \dot{x} + \left(\frac{g - a\omega^2 \cos \omega t}{\rho - a \cos \omega t}\right) x = 0, \quad (45)$$

que con el cambio de variable $x(t) = e^{-\kappa t/2} \chi(t)$ conduce a:

$$\ddot{\chi} + \left(\frac{g - a\omega^2 \cos \omega t}{\rho - a \cos \omega t} - \frac{1}{4}\epsilon^2\right) \chi(t) = 0, \quad (46)$$

$$S_1 = 2 \cos B_1 \cos B_2 - 2 \frac{\beta - \epsilon^2/4 - (\alpha^2/\pi^2)(1 - \epsilon^2/4\pi^2)}{\sqrt{[(\beta - \epsilon^2/4)^2 - \alpha^2(1 - \epsilon^2/4\pi^2)^2][1 - (\alpha/\pi^2)^2]}} \sin B_1 \sin B_2, \quad (48)$$

donde:

$$B_1 = \sqrt{\frac{(\beta - \frac{1}{4}\epsilon^2) + \alpha(1 - \epsilon^2/4\pi^2)}{1 + \alpha/\pi^2}}, \quad (49)$$

$$B_2 = \sqrt{\frac{(\beta - \frac{1}{4}\epsilon^2) - \alpha(1 - \epsilon^2/4\pi^2)}{1 - \alpha/\pi^2}}. \quad (50)$$

Nótese que si el coeficiente de disipación es cero se recupera el resultado del péndulo elástico sin fricción, como debe ser. ¿Qué cambios induce el término disipativo en el diagrama de estabilidad y en la solución para $x(\tau)$? Si la variable ϵ es pequeña el diagrama de estabilidad se mantiene prácticamente inalterado; sin embargo, mientras mayor sea su valor el área de las regiones estables se altera. Las amplitudes de las oscilaciones (radiales y angulares) se van amortiguando con el tiempo de manera exponencial. Así, el péndulo elástico con fricción aún exhibe el fenómeno de resonancia paramétrica y se espera que el diagrama de estabilidad correspondiente se modifique.

8. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo se elaboró un procedimiento aproximado para hallar las regiones de estabilidad de un modelo de péndulo elástico con dos grados de libertad; no se invocó la aproximación de pequeñas oscilaciones, así que los resultados de este trabajo son una generalización de aquellos que se presentaron en [6]. La fórmula (10) y (42) son novedosas y comprenden las ecuaciones dinámicas del péndulo elástico para el caso general de oscilaciones de amplitud arbitraria. Se logró aplicar el criterio de la traza de la matriz de evolución a la ecuación de Hill (deducida a partir de (10)) por medio de la segmentación del coeficiente periódico $Q(\tau)$ en dos partes y de aquí se obtuvo el correspondiente diagrama de estabilidad (Fig. 3) que es una generalización del conocido diagrama de Strutt. En el límite de pequeñas oscilaciones se recupera todos los resultados conocidos. Aunque la segmentación elegida para $Q(\tau)$ ciertamente es burda, el diagrama de

donde se definió el coeficiente de disipación $\epsilon = \kappa\pi/\omega$. Esta ecuación posee la misma estructura que en el caso del movimiento del péndulo sin disipación, por lo tanto se puede repetir el criterio de la traza de la teoría de Floquet y obtener la traza de matriz de evolución y luego el correspondiente diagrama de estabilidad. Así, (46) se reescribe (con $\omega t = \pi\tau$) como :

$$\ddot{\chi} + \left(\frac{\beta - \alpha \cos \pi\tau}{1 - (\alpha/\pi^2) \cos \pi\tau} - \frac{1}{4}\epsilon^2\right) \chi(\tau) = 0, \quad (47)$$

donde α y β tiene el mismo significado que en el caso del péndulo elástico sin fricción. Luego, la traza de la matriz de evolución resulta ser:

estabilidad (Fig. 3) es razonablemente bueno, al menos para los puntos señalados en los que el comportamiento dinámico del péndulo es el que se espera según (10).

Se observa que las regiones de estabilidad se encogen a medida que aumenta la amplitud de las oscilaciones radiales hasta llegar a desaparecer completamente (en el régimen de resonancia paramétrica), lo que también se observa en el diagrama de Strutt, aunque este último no permite una interpretación válida para la estabilidad de oscilaciones de gran amplitud. En el diagrama de estabilidad obtenido en este trabajo se observa que no existe estabilidad para el valor $\beta = (\pi/2)^2$, lo que corresponde al “péndulo elástico 4/3” reportado en [6], lográndose así una interpretación física consistente del fenómeno de resonancia paramétrica para este sistema. Considerando que la elongación máxima posible (en el modo radial) corresponde a la longitud de equilibrio del resorte cargado, se observa la predominancia de regiones de inestabilidad, salvo los casos extremos en donde la masa del sistema es muy pequeña o la constante del resorte es muy grande.

Una perspectiva interesante de este trabajo es refinar la dependencia temporal de $r(t)$ dada por (15), en vista de los resultados de las Figs. 4(a) y 4(b), donde se aprecia una envolvente en las oscilaciones de $r(t)$ con un periodo $T = 2\pi/\omega'$ que corresponde a la transición entre los regímenes radial y angular. Se podría tratar por ejemplo, $r(t) = \rho - a \cos(\omega t)(\cos \omega' t)$. Este refinamiento, así como una segmentación más fina de $Q(\tau)$, seguramente mejorarán la precisión del diagrama de estabilidad (Fig. 3). Notemos, sin embargo, que a lo largo de la “lengua de estabilidad” (en la que se encuentra el punto $(\alpha, \beta) = (5, 0.76)$) la amplitud de las oscilaciones de $r(t)$ se mantiene aproximadamente constante pues no se transfiere energía al modo angular; esto es lo que se observa en las Figs. 4(c) y 4(d). Por lo tanto el refinamiento en el modelo de $r(t)$ dado por (15) no afectará a la envolvente de las oscilaciones pero probablemente modificará su frecuencia, incluyendo el eventual caso de caos (Apéndice C).

Por otra parte, de manera inesperada se observó un comportamiento interesante (Figs. 4(f), 4(h)): en el régimen de resonancia paramétrica (inestabilidad) correspondiente a $\beta = (\pi/2)^2$, para un ángulo inicial del orden de 10^{-20} rad (!) el péndulo tarda un tiempo apreciable de varios segundos (que es mayor mientras menor es el ángulo inicial) en cambiar del modo de oscilación radial al modo angular; cuando el ángulo inicial es cero el sistema aparentemente no cambia al modo angular, al menos dentro del intervalo temporal considerado. El que este fenómeno sea un resultado solamente de la simulación computacional o pueda corresponder a un fenómeno físico *bona fide* queda como un tema abierto para una investigación futura.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

APÉNDICE

A. APROXIMACIONES PARA LA FUNCIÓN DE LA TRAZA Y EL DIAGRAMA DE ESTABILIDAD

Hagamos el cambio de variable $\pi\tau = \omega t$ en la ecuación de Mathieu (21):

$$\ddot{x} + q(\tau)x(\tau) = 0, \quad (\text{A1})$$

con $q(\tau) = (\beta - \nu \cos \pi\tau)$, $\beta = g\pi^2/\rho\omega^2$ y $\nu = \pi^2 ar_0\omega^2/\rho^2\omega^2$. Si aproximamos $q(\tau)$ por una función constante por tramos:

$$q(\tau) = \begin{cases} \beta - \nu, & 0 \leq \tau < 1 \\ \beta + \nu, & 1 \leq \tau < 2, \end{cases} \quad (\text{A2})$$

se obtiene la siguiente función de la traza:

$$S = 2 \cos \sqrt{\beta + \nu} \cos \sqrt{\beta - \nu} - \frac{2\beta \sin \sqrt{\beta + \nu} \sin \sqrt{\beta - \nu}}{\sqrt{(\beta^2 - \nu^2)}}, \quad (\text{A3})$$

cuya gráfica se muestra en la Fig. A1 y fue tomada de [6].

A continuación veamos el caso particular de la función de la traza (37) para la ecuación de Mathieu (caso de pequeñas oscilaciones). Notemos que el eje de las ordenadas es el mismo en ambos diagramas pero no así el eje de las abscisas; manipulemos entonces el parámetro α de (37) para lograr la coincidencia de las escalas de ese eje:

$$\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha/\pi^2} = (\alpha + \beta) \left(1 - \frac{\alpha}{\pi^2} + \frac{\alpha^2}{\pi^2} - \dots\right) \quad (\text{A4})$$

$$\approx \beta + \alpha \left(1 - \frac{\beta}{\pi^2}\right), \quad (\text{A5})$$

$$\approx \beta + \frac{ar_0\pi^2}{\rho^2} \approx \beta + \nu, \quad (\text{A6})$$

con $\nu = ar_0\pi^2/\rho^2$, donde se despreciaron potencias de α mayores a dos (según α y β dados en (24)). Se procede de manera similar para obtener el siguiente factor:

$$\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha/\pi^2} = (\beta - \alpha) \left(1 + \frac{\alpha}{\pi^2} + \dots\right) \approx \beta - \nu. \quad (\text{A7})$$

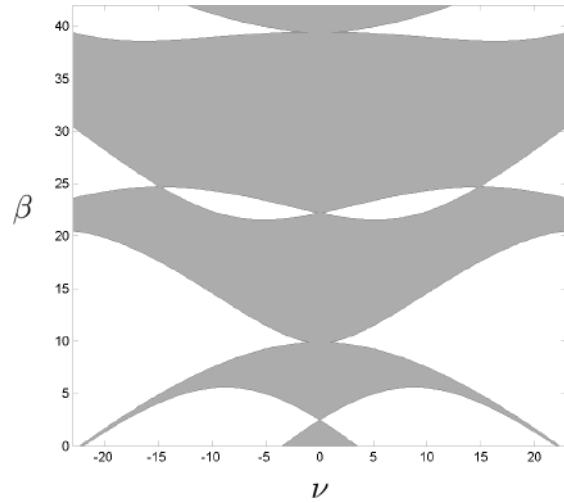


FIG. A1.— Aproximación del diagrama de Strutt para pequeñas oscilaciones calculado por el método de la matriz de evolución [6].

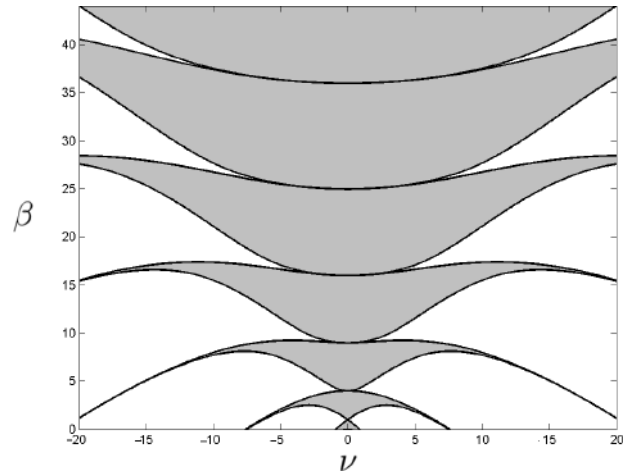


FIG. A2.— Diagrama de estabilidad de Strutt exacto calculado por métodos perturbativos (u otros métodos tradicionales).

A continuación trabajemos el término:

$$\frac{2(\beta - \alpha^2/\pi^2)}{\sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)(1 - \alpha^2/\pi^4)}} \approx \frac{2\beta}{\sqrt{(\beta^2 - \nu^2)}}, \quad (\text{A8})$$

donde en el numerador se despreció potencias de la amplitud mayores a dos y en el denominador se utilizó los resultados (A6) y (A7). La función de la traza que resulta es:

$$S = 2 \cos \sqrt{\beta + \nu} \cos \sqrt{\beta - \nu} - \frac{2\beta \sin \sqrt{\beta + \nu} \sin \sqrt{\beta - \nu}}{\sqrt{(\beta^2 - \nu^2)}}, \quad (\text{A9})$$

que es el mismo resultado que se obtuvo en [6] (Fig. A1).

El método de aproximar una función continua $Q(\tau)$ por una función constante por tramos (segmentación de la función) es más preciso mientras más funciones constantes por tramos se tomen, lo que mejora a su vez la precisión del diagrama de estabilidad asociado a la ecuación de Hill cuyo coeficiente periódico es $Q(\tau)$ (sección IV). Para una secuencia infinita de funciones

continuas por tramos el diagrama de estabilidad se aproxima mejor al diagrama verdadero, pero aún no lo es debido a la limitación impuesta por la aproximación para $r(t)$ en (15). Sin embargo, el cálculo de la función de la traza a medida que aumenta la segmentación de $Q(\tau)$ se hace demasiado complicado. En algunos casos es posible calcular directamente la función de la traza integrando $Q(\tau)$. Para ilustrar tal método obtendremos el diagrama de Strutt integrando de manera directa la matriz de transferencia a partir de la ecuación de Mathieu (21):

$$\ddot{x} + (g/\rho - \frac{a\omega^2 r_0 \cos \omega t}{\rho^2})x(t) = 0, \quad (\text{A10})$$

que con el cambio de variable $\omega t = 2\eta$ adopta su forma estándar:

$$\ddot{x} + (\beta' - 2\alpha' \cos 2\eta)x(\eta) = 0, \quad (\text{A11})$$

donde $\alpha' = 2ar_0/\rho^2$ y $\beta' = 4g/\rho\omega^2$. De manera equivalente, la solución de (A11) se expresa en forma matricial como se hizo en (31)-(35):

$$T(\pi, 0) = \exp \int_0^\pi \Gamma(\eta) d\eta, \quad (\text{A12})$$

con:

$$\Gamma(\eta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathcal{G} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A13})$$

y con $\mathcal{G} = (\beta' - 2\alpha' \cos 2\eta)$; así, el primer paso para encontrar la matriz de evolución es resolver la integral:

$$S_0 = 2 \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\beta' + 4\alpha'/\pi} \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\beta' - 4\alpha'/\pi} - \frac{2\beta' \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{\beta' + 4\alpha'/\pi} \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{\beta' - 4\alpha'/\pi}}{\sqrt{\beta'^2 - (4\alpha'/\pi)^2}}. \quad (\text{A18})$$

El mismo resultado puede hallarse si segmentamos la matriz de evolución en cuatro partes; así, la matriz total es el producto de cuatro matrices que conmutan y a las que se aplica propiedades de grupo abeliano [7, 13]. El resultado para el diagrama de estabilidad se muestra en la Fig. A4 (región oscura) y se compara con el diagrama de Strutt exacto (curva negra).

A continuación apliquemos el anterior procedimiento para calcular el diagrama de estabilidad para el péndulo elástico sin la restricción de oscilaciones pequeñas. Partimos de (20):

$$\ddot{x} + \left(\frac{g - (ak/m) \cos \omega t}{\rho - a \cos \omega t} \right) x = 0, \quad (\text{A19})$$

y realizando el cambio de variables $2\eta = \omega t$:

$$\ddot{x} + \left(\frac{\beta' - 2\alpha'' \cos 2\eta}{1 - (\alpha''/2) \cos 2\eta} \right) x = 0, \quad (\text{A20})$$

donde $\alpha'' = 2a/\rho$ y $\beta' = 4g/\omega^2\rho$; requerimos la integral:

$$\mathcal{M}(\alpha'', \beta') = \int_0^p \mathcal{G}(\eta) d\eta = \int_0^p \frac{\beta' - 2\alpha'' \cos 2\eta}{1 - \frac{\alpha''}{2} \cos 2\eta} d\eta, \quad (\text{A21})$$

donde $p = \pi$ es el periodo de la función. Suponemos $\alpha < 2$ que es la restricción para que la longitud del péndulo

$$\mathcal{M}(\alpha', \beta') = \int_0^{p=\pi} \mathcal{G}(\eta) d\eta, \quad (\text{A14})$$

donde p es el periodo, y $\mathcal{M}(\alpha', \beta')$ es una función de dos variables. Para el caso de la ecuación de Mathieu el resultado de la integración anula la variable α' , de tal manera que no es posible calcular la función de la traza con argumentos α' y β' :

$$\mathcal{M}(\alpha', \beta') = \int_0^{p=\pi} (\beta' - 2\alpha' \cos 2\eta) d\eta = \pi\beta'. \quad (\text{A15})$$

Esto ocurre por la simetría impar del resultado de integrar \mathcal{G} en nuestro caso particular. Una forma de evitar eso es aprovechar las propiedades de simetría de la siguiente forma:

$$\int_0^{p=\pi} \mathcal{G}(\eta) d\eta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathcal{G}(\eta) d\eta + 2 \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{G}(\eta) d\eta \right|, \quad (\text{A16})$$

de donde se obtiene:

$$\mathcal{M}(\alpha', \beta') = \int_0^\pi \mathcal{G}(\eta) d\eta = \frac{\pi}{2} (\beta' - \frac{4\alpha'}{\pi}) + \left| \frac{\pi}{2} (\beta' + \frac{4\alpha'}{\pi}) \right|. \quad (\text{A17})$$

Vemos pues que se recuperó el parámetro α' . Ahora podemos hallar la función de la traza:

elástico no sea negativa, lo que equivale a que la máxima elongación del modo radial sea igual a la longitud de equilibrio del péndulo cargado; así, el denominador de la integral anterior se desarrolla en serie:

$$\int_0^p (\beta' - 2\alpha'' \cos 2\eta) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha''}{2} \right)^m \cos^m 2\eta \right) d\eta, \quad (\text{A22})$$

$$\mathcal{M} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha''}{2} \right)^m [\beta' \int_0^p \cos^m 2\eta d\eta - 2\alpha'' \int_0^p \cos^{m+1} 2\eta d\eta]. \quad (\text{A23})$$

La integral en cuestión se reduce a integrales de potencias pares e impares del coseno:

$$\begin{aligned} & \int_0^p \cos^m 2\eta d\eta \\ &= \frac{\cos^{m-1} 2\eta \sin 2\eta}{2m} + \frac{m-1}{m} \int_0^p \cos^{m-2} 2\eta d\eta, \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

con lo que se obtendría –en principio– el diagrama de estabilidad. En la aproximación a primer orden en la serie de potencias se genera la ecuación de Mathieu y los

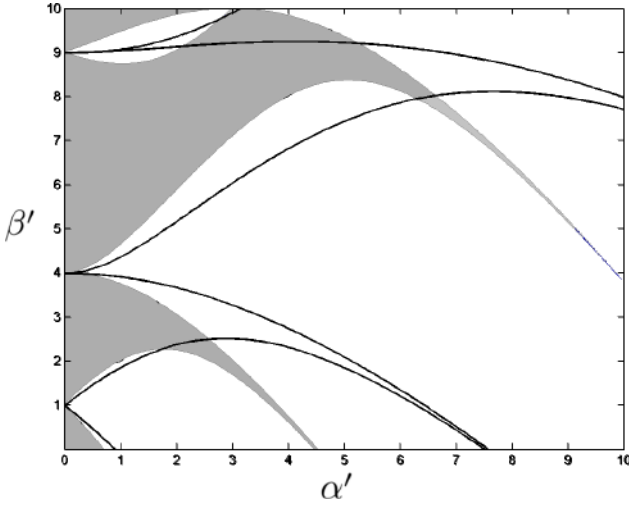


FIG. A3.— Diagrama de Strutt (borde negro) y la aproximación encontrada en [6] (región oscura) en la misma escala. $Q(\tau)$ se segmentó en 2 partes.

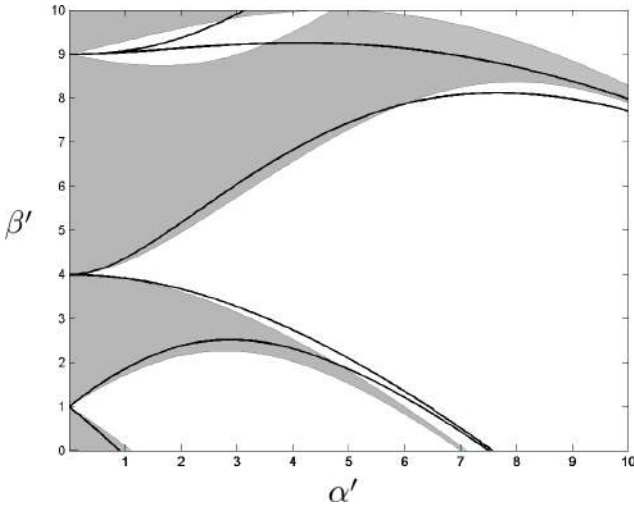


FIG. A4.— Diagrama de Strutt (borde negro) y la aproximación encontrada en este apéndice (región oscura) en la misma escala. $Q(\tau)$ se segmentó en 4 partes.

órdenes superiores corrigen el diagrama de estabilidad. Sin embargo, para oscilaciones arbitrarias los órdenes superiores de la serie no se pueden despreciar. Se debe pues resolver analíticamente tal integral. Si esto no es factible entonces el método de segmentar la función continua es la mejor forma para calcular de manera aproximada el diagrama de estabilidad. En la Fig. A3 se compara el diagrama de Strutt exacto con el obtenido en [6].

B. ECUACIÓN RADIAL

En este apéndice veremos el tratamiento analítico para algunos casos particulares de ecuaciones radiales. La ecuación (6) se puede re-escribir para obtener una aproximación de $\dot{\phi}$:

$$\frac{r\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} + 2\dot{r} + \frac{g \operatorname{sen} \phi}{\dot{\phi}} = 0; \quad (\text{B1})$$

dividiendo entre r , aplicando la derivada del logaritmo e integrando se obtiene:

$$\dot{\phi}(t)r^2(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{g \operatorname{sen} \phi(t')}{r(t')\dot{\phi}(t')} dt'\right). \quad (\text{B2})$$

Si se conserva sólo el primer término del desarrollo en serie de la exponencial se obtiene:

$$\dot{\phi}(t) \simeq \frac{1}{r^2(t)}. \quad (\text{B3})$$

Esta aproximación es razonable cuando la anterior integral tiene un valor pequeño, lo que puede ocurrir si $\phi \simeq 0$ es muy pequeño con respecto al producto en el denominador $r\dot{\phi}$. A partir de (7) consideremos la ecuación:

$$\ddot{r} - \tilde{\delta}r\dot{\phi}^2 + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \phi = 0, \quad (\text{B4})$$

donde el caso de $\tilde{\delta} = 0$ y $\phi \simeq 0$ corresponde a la propuesta para $r(t)$ en (15) que se usa en este trabajo. Sustituyendo (B3) en (B4) se tiene que:

$$\ddot{r} - \frac{\tilde{\delta}}{r^3} + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \phi = 0; \quad (\text{B5})$$

ya que $\cos \phi \simeq 1$ para ángulos pequeños, se obtiene una ecuación para r :

$$\int \dot{r} d\dot{r} = \int \left[\frac{\tilde{\delta}}{r^3} - \frac{k}{m}(r - r_0) + g \right] dr. \quad (\text{B6})$$

Integrando:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{-\frac{\tilde{\delta}}{r^2} - \frac{k}{m}r^2 + 2\frac{k}{m}r_0r + 2gr + 2\tilde{c}}, \quad (\text{B7})$$

(\tilde{c} es la constante de integración) y volviendo a integrar:

$$\int dt = \int \frac{r dr}{\sqrt{2(g + \frac{k}{m}r_0)r^3 + 2\tilde{c}r^2 - \frac{k}{m}r^4 - \tilde{\delta}}}, \quad (\text{B8})$$

que es una integral abeliana (que hasta donde conocemos no es soluble). Si $\tilde{\delta} = 0$ se recupera la propuesta para $r(t)$ en este trabajo.

El paso de (B2) a (B3) es quizá poco natural, pues sólo se considera el primer término del desarrollo del exponencial, no obstante podemos encontrar una ecuación radial con la única condición de $\phi \simeq 0$. Para tal objeto reordenemos (7):

$$r\dot{\phi}^2 = \ddot{r} + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \phi; \quad (\text{B9})$$

reemplazando esta ecuación en la ecuación de la energía (3) se obtiene:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r[\ddot{r} + \frac{k}{m}(r - r_0) - g \cos \phi]) + \frac{k}{2}(r - r_0)^2 - mgr \cos \phi. \quad (\text{B10})$$

Aproximando la anterior ecuación para pequeños ángulos y estableciendo $\mathcal{E} = 2E/m - kr_0^2/m$, (B10) queda como :

$$\dot{r}^2 + r\ddot{r} + 2\omega^2 r^2 - 3\omega^2 \rho r - \mathcal{E} = 0, \quad (\text{B11})$$

que es una ecuación de r con una solución analítica en el límite de pequeños ángulos dada por (15). Tratando (3) y (7) de manera similar se obtiene:

$$\dot{r}^2 - 2r\ddot{r} - \omega^2 r^2 + 3r^2 \dot{\phi}^2 - \mathcal{E} = 0. \quad (\text{B12})$$

Esta ecuación es general pues no se ha supuesto ángulos pequeños. Si se supone que $\dot{\phi}$ esta dada por (B3) se obtiene una ecuación para r que no es soluble:

$$\dot{r}^2 - 2r\ddot{r} - \omega^2 r^2 + \frac{3}{r^2} - \mathcal{E} = 0. \quad (\text{B13})$$

De las ecuaciones presentadas en esta sección sólo (B8) es soluble cuando $\tilde{\delta} = 0$. Es probable que la solución radial deba expresarse por una generalización de la integral elíptica tal como una integral abeliana [9], sin embargo para el caso general de oscilaciones arbitrarias (amplitudes y ángulos arbitrarios) una solución analítica parece no existir por la monodromía del sistema Hamiltoniano en consideración [11].

C. CAOS EN EL PÉNDULO ELÁSTICO

El estudio del caos en el péndulo elástico ha sido ampliamente tratado (ver, por ejemplo, [12], [14], [15] y [16]) en vista de la cuestión natural de saber si en el régimen de resonancia paramétrica (inestabilidad) determinado por $\beta = (\pi/2)^2 \cong 2.4674$ (línea segmentada de la Fig. 3) alguna perturbación caótica inicial se puede amplificar de la misma forma en que en dicho régimen el pequeño ángulo inicial $\phi(0) = 0.017$ rad se amplifica hasta alcanzar valores significativos (Fig. 4). Dichos estudios reportan el fenómeno de transición orden-caos-orden como función de parámetros físicos fácilmente controlables, como por ejemplo, la energía total del sistema. En un contexto más general, el estudio del caos en el péndulo elástico está expuesto detalladamente en el trabajo de Lynch [5], donde se invoca el teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) y su relación con las condiciones iniciales lineal y no-lineal, aunque dicho estudio está restringido a pequeñas oscilaciones. Recordemos que en nuestro trabajo estudiamos las regiones de estabilidad sin invocar la aproximación de pequeñas oscilaciones.

Las cantidades α y β definidas en (24) son adecuadas para caracterizar la transición orden-caos-orden pues α comprende la elongación (o compresión) inicial $a = r_0 - r(0) + mg/k$ que se le da al péndulo en el modo radial, mientras que β comprende a los parámetros propios del resorte (masa, constante elástica, longitud del resorte relajado). Así, combinando (3) y (24), la energía total E se puede expresar por

$$E(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}kr_0^2 \left[\frac{\beta^2 + \alpha^2 - 2\beta\pi^2}{(\pi^2 - \beta)^2} \right], \quad (\text{C1})$$

que, en el caso de la condición de resonancia paramétrica, se reduce a

$$E(\alpha) = \frac{1}{2}kr_0^2 \left(\frac{16\alpha^2 - 7\pi^4}{9\pi^4} \right). \quad (\text{C2})$$

Podemos ver que $E(\alpha, \beta)$ es una función monótona creciente de α , por lo que se espera la transición orden-caos-orden a medida que aumenta el valor de α sobre la línea segmentada de la Fig. 3, de manera consistente con lo reportado por los autores citados en este apéndice, en particular, por Núñez-Yépez *et al.* [14]. Aunque nuestro propósito original no es investigar el caos, las simulaciones que hicimos de $r(t)$ y $\phi(t)$ para diferentes valores de α en el régimen de resonancia paramétrica sugieren la transición referida entre el orden y el caos (estas simulaciones no se muestran en nuestro trabajo); para efectos de caracterizar dichos estados de orden y caos sólo acudimos a una inspección visual de los gráficos $r(t)$ y $\phi(t)$ de la Fig. 4. Por otra parte, los casos (a), (b) y (g) de la Fig. 4 corresponden a un resorte con $\beta = 2.47$ que es un valor apenas mayor que el del régimen de resonancia paramétrica. En este caso podemos inferir que ocurre una transición orden-caos para algún valor de α entre los valores correspondientes a los casos (a) y (b); no sabemos si ocurre una transición caos-orden para algún valor de α mayor al que corresponde al caso (g). Otra observación interesante de las simulaciones de la Fig. 4 es la de estados aparentemente caóticos (al menos para $\phi(t)$) en los casos (c) y (d) que corresponden al régimen de estabilidad, lo que sugiere que el estado de caos no solamente estaría asociado al régimen de resonancia paramétrica. Estos aspectos, y seguramente otros, son posibles temas de futuras investigaciones.

REFERENCIAS

- [1] Vitt A. y Gorelik G., *Z. Tekh. Fiz.* 3 (1933) 294-307.
- [2] Olsson M. G., *Am. J. Phys.* 45 (1976) 1211 .
- [3] Lynch P., *Journal of Non-Linear Mechanics* 37 (1996) 345.
- [5] Lynch P., *The Swinging Spring, A model for Atmospheric Balance* (Cambridge University Press, 2002: Large Scale Atmospheric-Ocean Dynamics, Vol II).
- [6] Sanjinés D., *Rev. Bol. Fís.* 11 (2005) 31.
- [7] Sanjinés D., *Rev. Mex. Fís.* 36 (S1) (1990) 181.
- [8] Magnus W. y Winkler S., *Hill's Equation* (Inter-

science Tracts in Pure and Applied Mathematics, Vol. 20, Wiley, 1966).

[9] Barker A. L., *Elliptic Functions, An Elementary Text-Book for Students of Mathematics* (Cornell University Library, 2010).

[10] Goldstein H., *Classical Mechanics* (2nd ed., Addison-Wesley, 1980).

[11] Fitch N. J. *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 034301.

[12] Van Der Weele J. P. y De Kleine E., *Physica A* **228** (1996) 245.

[13] Sanjinés D., *Rev. Bol. Fís.* **8** (2002) 1.

[14] Núñez-Yépez H. N., Salas-Brito A. L., Vargas C. A. y Vicente L., *Phys. Lett. A* **145** (1990) 101-105.

[15] Carretero-González R., Núñez-Yépez H. N. y Salas-Brito A. L., *Eur. J. Phys.* **15** (1994) 139-148.

[16] Anurag B. M., Bhattacharjee J. K. y Chakraborty S., *Physica D* (en prensa), 2019.

CIEN AUTORES CONTRA EINSTEIN: UNA TRADUCCIÓN CRÍTICA PARCIAL
A HUNDRED AUTHORS AGAINST EINSTEIN: A PARTIAL CRITICAL TRANSLATION

LUCAS BLITZ LOZADA GOBILARD
Carrera de Física
Universidad Mayor de San Andrés
c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635
La Paz, Bolivia

RESUMEN

La teoría de la relatividad de Einstein fue objeto de críticas de carácter científico, filosófico, gnoseológico e ideológico, principalmente en los primeros años posteriores a su publicación. En 1931, vio la luz en Leipzig, una obra titulada *Cien autores contra Einstein (Hundert Autoren gegen Einstein)*. A pesar que el libro pasó al olvido sin mayor repercusión (no se hizo traducción oficial alguna de su idioma original: el alemán) e incluso fue catalogado por Hans Reichenbach como “una acumulación de errores ingenuos”, es posible encontrar entre los pocos argumentos físicos y matemáticos rigurosos, algunos que deban ser mencionados y discutidos. Así, es posible trascender los prejuicios personales y descubrir razonamientos lógicos que sustentan algunas críticas, reforzando paradójicamente sin embargo, el valor científico y heurístico de la concepción einsteniana de la relatividad. Tal es la posición de quienes aseguraron que los autores que criticaron a Einstein incurrieron en errores gruesos porque no comprendieron adecuadamente la concepción de la relatividad. En este artículo traduzco el texto de uno de los autores que, en mi opinión, muestra el contenido del libro en general. Lo pongo al alcance del lector hispanohablante, ofreciendo también un comentario breve de los segmentos traducidos desde la perspectiva del conocimiento físico actual.

Código(s) PACS: 01.65.+g – 04.90.+e – 01.75.+m

Descriptores: Historia de la ciencia – Publicaciones sobre Teoría de la Relatividad – Ciencia y Sociedad

ABSTRACT

Einstein’s theory of relativity has been the subject to criticism: scientific, philosophical, epistemological and ideological, mainly in the first years after its publication. In 1931 in Leipzig a book called *A Hundred Authors against Einstein (Hundert Autoren gegen Einstein)* was printed. Despite the fact that the book was easily forgotten and had no major repercussion (an official translation of its original language, German, was never made) and it was even described by Hans Reichenbach as an “accumulation of naive errors”. It is possible to find among the few rigorous physical and mathematical arguments, some that should be mentioned and discussed. Thus, it is feasible to transcend personal prejudices and discover the logic behind some of the criticisms, paradoxically reinforcing, the scientific and heuristic value of Einstein’s conception of relativity. Such is the position of those who asserted that the authors who criticized Einstein made major errors because they did not properly understand the conception of relativity. In this article, the text of one of the authors who generally reflects the content of the book has been translated, so as to make it available to the Spanish-speaking reader. The article, also offers a brief commentary on the translated segments from the perspective of current physical knowledge.

Subject headings: History of science – Publications on Theory of Relativity – Science and Society

1. INTRODUCCIÓN

El físico, historiador y filósofo de la ciencia estadounidense Thomas Kuhn diferencia lo que denomina *ciencia normal* de la *revolución científica*. La primera refiere la producción de conocimiento como ejercicio relativamente rutinario, es el trabajo del día a día de científicos bajo la égida de

algún paradigma; es decir según las estipulaciones explícitas e implícitas que posibilitan y restringen el conjunto de prácticas científicas en algún momento histórico. Cuando surge una nueva teoría, lo más probable es que sea asimilada a la ciencia normal, en la medida que no cuestione el conocimiento previo establecido que es asumido como válido por la co-

munidad respectiva. Pero cuando algún científico o filósofo piensa nuevos contenidos siguiendo pautas que no son aceptadas, cuando evidencia supuestos diferentes, elabora conceptos nuevos y se refiere a objetos cuya naturaleza parecía estar completamente entendida; también cuando propone relaciones inéditas entre los objetos, sucede lo que Kuhn denomina “revolución científica”. Se trata de una conmoción acumulada por las ideas y teorías que contradicen el paradigma instaurado, aunque sin destituirlo de manera absoluta. Es posible que una revolución científica, según Kuhn, se consuma durante largo tiempo y se precipite solo por la formulación de una teoría; pero para que se dé el cambio revolucionario, debe proyectar formalmente una nueva concepción del universo. Al inicio, la teoría revolucionaria es rechazada por la comunidad que ve afectado su poder académico; a tal comunidad le disgustan los conceptos y las nuevas percepciones que hasta ese momento fueron inconcebibles y que la ciencia normal se empeña en criticar o censurar. Sin embargo, la historia muestra que constatada la consistencia y verdad de la nueva teoría, se reconstituye la comunidad científica, siendo reemplazada por personas que aceptan, valoran y proyectan la teoría revolucionaria generando nuevo y fértil conocimiento que a la vez, revoluciona el viejo paradigma e instituye uno nuevo.



FIG. 1.— Thomas Kuhn. Esta y todas las imágenes del presente trabajo fueron obtenidas de la colección de fotos libres de derecho de autor de Wikipedia.

La revolución relativista, la einsteniana, constela las características principales de una revolución científica según Thomas Kuhn. Hoy día, la teoría de la relatividad es auto-consistente, se respalda con resultados experimentales y es la base de otras teorías exitosas como la electrodinámica cuántica. Sin embargo, inmediatamente después de su publicación, varios autores se opusieron a ella con diversos argumentos; siendo intensas y múltiples las expresiones de rechazo. El libro *Cien autores contra Einstein* (*Hundert Autoren gegen Einstein*) publicado en Leipzig y recopilado y escrito por Israel, Ruckhaber & Weinman (1931), es un manifiesto de rechazo in-

mediato a su teoría; incluye la colección de textos cortos de 29 autores con citas de publicaciones de otros 19 escritores que critican a Albert Einstein.

El presente artículo incluye a continuación la traducción al español del texto aportado por el profesor Dr. Jean-Marie Le Roux, un matemático francés. Existen dos razones que motivaron mi elección del Dr. Le Roux: en primer lugar, representa el empeño por demeritar a Einstein resumiendo con propiedad los argumentos expuestos por varios autores del libro. En segundo lugar, entre los 47 autores que forman la compilación y que fueron citados, solamente hay tres matemáticos de profesión que se empeñan en argüir razonamientos lógico-matemáticos que invaliden la teoría de la relatividad: uno de ellos es Le Roux. Los otros dos matemáticos son Emanuel Lasker y Hjalmar Mellin, destacando, además el físico Karl Strehl.

2. TRADUCCIÓN

A continuación se presenta la traducción al español de los argumentos del Dr. Jean-Marie Le Roux expuestos en la obra referida (traducción del francés al alemán por el Dr. Erick Ruckhaber, uno de los autores principales del libro). Las críticas del matemático francés al físico alemán se presentan en nueve puntos. El presente artículo traduce cada uno de tales puntos, seguido de un comentario breve con base en conocimientos actuales del tema en cuestión. Los comentarios recopilan la bibliografía específica sobre cada punto ofreciendo un panorama general. Además, son frecuentes las referencias a la obra de Hans Reichenbach, físico y lógico alemán mencionado en el resumen. No obstante, debo decir que de ningún modo me considero especialista en relatividad, ni trato de desmeritar al autor o desacreditar los alegatos expuestos en el texto traducido.



FIG. 2.— Portada de *100 Autoren gegen Einstein*.

1. EL QUIEBRE DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD. La teoría de la relatividad (TR) ¹ de Einstein ha provocado un vívido movimiento mental y ha iniciado varias investigaciones teóricas y experimentales que han contribuido al avance de la ciencia. La teoría en sí misma no resiste una prueba exhaustiva. A la luz de la crítica, se muestra que la síntesis dada es un resplandor vacío, que solo se puede preservar en una semioscuridad proteccionista favorable. La incoherencia de los argumentos y la puerilidad de las hipótesis son del mismo tipo. Las inferencias a veces no tienen relación con las premisas y los componentes básicos de los cálculos en el resultado adquieren un significado que no se corresponde con la definición en los datos subyacentes. Quizás se puede pasar por alto los errores metodológicos, si los resultados trajesen consigo un verdadero provecho para nuestro conocimiento. Lamentablemente, este no es el caso. Uno u otro de los resultados obtenidos son independientes de la teoría y de ninguna manera sirven para respaldarla.

Se sabe que la TR especial se creó con motivo del experimento de Michelson. Pero su propio autor no entendió los resultados de este experimento correctamente. Ha extraído de ellos conclusiones que en realidad no están incluidas. ¡Después trató de explicar estas conclusiones mediante una serie de hipótesis que se contradicen entre sí y no tienen relación con el fenómeno!

La teoría gravitatoria también es muy extraña. Aquí, sin embargo, viene el defecto del gigantesco engaño en la supuesta explicación de la progresión secular del movimiento del perihelio de Mercurio. La magnitud observada de dicho movimiento es de aproximadamente 374''. La teoría de Einstein da un desfase de aproximadamente 42''. La teoría de Newton predice un valor de 336'' para este movimiento. Para deducir la superioridad de la doctrina de Einstein, se necesita algo más que la autocomplacencia más ciega y aberrante.

La impotencia de la TR en este sentido se debe a toda su composición. La teoría toma su propio principio como el punto de partida de sí misma

al comprometerse a representar el movimiento de los cuerpos mediante medidas geodésicas en forma de diferenciales cuadráticos con cuatro variables, por espacio-tiempo con cuatro dimensiones. Esta hipótesis está en contradicción con la gravitación.

Los intentos de los matemáticos, que son más concienzudos que clarividentes, de reconciliar entre sí las cosas lógicamente incompatibles, son forzosamente rechazados y no tienen éxito. En los aproximadamente quince años desde que se fundó la TR general, ha sido imposible deducir de ella una representación aproximada del movimiento del sistema solar o de cualquier otro sistema. Las promesas hechas no se han cumplido, esto es un fracaso significativo.

El texto no contiene referencias de los datos mencionados en este punto. Sin embargo, respecto a la precesión del perihelio de Mercurio existe bastante literatura; por ejemplo, en el libro *Theory of Relativity*, de Wolfgang Pauli (1958) se lee:

“Las dos consecuencias de la teoría de gravitación de Einstein acá desarrolladas admiten ambas una revisión experimental. Para la precesión del perihelio ² (...), esta solo es medible en el caso de Mercurio, donde las condiciones son particularmente favorables debido a su corta distancia al Sol y la grande excentricidad de su órbita. El valor teórico de la precesión en un siglo es

$$\Delta\pi = 42.89''$$

$$e\Delta\pi = 8.82''.$$

Se sabe entre los astrónomos desde tiempos de Leverrier que un residuo está presente en la precesión del perihelio de Mercurio, que no puede ser causado por perturbaciones debidas a otros planetas. De acuerdo a los cálculos renovados de Newcomb, es de magnitud:

$$\Delta\pi = 42.24''$$

$$e\Delta\pi = 8.48'' \pm 0.43''$$

Sobre este punto, debo decir que no se aclara si los datos mencionados por el Dr. Le Roux hacen referencia a una precesión secular, a una precesión teórica o de otro tipo.

La versión original del libro de Pauli fue publicada en alemán en 1921. Se sabe que el Dr. Le Roux no hablaba alemán, porque de otro modo no hubiese necesitado un traductor (Ruckhaber) para su aporte

¹ El texto en alemán abrevia “teoría de la relatividad” como RTH. El presente artículo señala TR.

² Aquí solo se hace alusión a la ecuación usada para calcular la precesión.

a *Cien autores contra Einstein*. Una versión en inglés fue publicada en 1958, y aunque se desconoce si Le Roux estaba al tanto de las cifras presentadas en el libro de Pauli, vale decir que en la página de Wikipedia del matemático francés se dice que él editó el artículo *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Emanuel Czuber (ver Jean-Marie Le Roux en Wikipedia). Curiosamente, fue en esa enciclopedia que Pauli publicó su trabajo sobre relatividad, dando la noción que Le Roux sí estaba enterado del trabajo. Por todo lo mencionado, es pertinente decir que nunca cambió su criterio de oposición de la teoría de la relatividad de Einstein (este no es el caso de todos los autores que aportan al libro).

Si el experimento de Albert Abraham Michelson fue el motivo de la creación de la TR, es un tema que trataré en el siguiente punto.

2. LA PRUEBA DE MICHELSON. A partir del experimento de Michelson, la TR concluye que la velocidad relativa de propagación de la luz es la misma para el observador en todas las direcciones. Esta conclusión es incorrecta. La isotropía de la onda de interferencia no incluye la de la onda de propagación. A lo sumo, se puede concluir que el medio en el que la luz se propaga, sea éter o llamado de otra forma, es homogéneo e isótropo respecto a un sistema de referencia dado solo bajo ciertas condiciones.

Si se admite que el éter está influido por la gravedad, entonces incluso la ley de propagación puede satisfacer las siguientes condiciones:

- a) Hay un sistema de referencia S , tal que los medios de propagación son homogéneos e isotrópicos con respecto a S en cualquier región suficientemente alejada de los cuerpos.
- b) Para cada fuente de luz inmutablemente unida al mismo sistema de referencia, la onda de interferencia es isotrópica en un área particular.
- c) Para cada fuente de luz, transportada por y ligada a una masa material, la onda de interferencia también es isotrópica en un área específica.

Hay un número interminable de soluciones cuyas características comunes son fáciles de determinar. Por lo tanto, el análisis exacto del fenómeno no da paso a las implicaciones peculiares que forman la base de la relatividad especial. Los resultados muy precisos de los nuevos experimentos de Miller son de gran interés porque pueden ayudarnos a conocer la influencia de la materia en las condiciones de propagación de la luz.

Vale decir que el Dr. Le Roux es el único autor que en el libro hace mención a sistemas de referencia físicos. Por otra parte, decir que la TR concluye tesis *a partir* del experimento de Michelson es osado. Aunque mucha literatura -principalmente pedagógica- presenta la teoría de la relatividad como el propósito de explicar los resultados del experimento de Michelson, aquí se encuentra uno de los genuinos problemas históricos de la física.

En la primera parte de su artículo titulado "Einstein and the *Crucial* Experiment", Gerald Holton (1969), después de hacer un exhaustivo análisis y tratar el problema, concluye que el experimento de Michelson no fue *crucial* para Einstein en el desarrollo de la teoría de la relatividad, a pesar de la insistencia de tantos autores que arguyen lo contrario.

Respecto a los incisos a), b) y c) de este punto, resulta inmediato asociar el sistema de referencia mencionado por Le Roux con la teoría del arrastre del éter. Esta sustancia hipotética, supuesto medio de propagación de la luz, resulta en un sistema de referencia privilegiado. La relatividad especial por sí sola prescinde de la hipótesis del éter. Es más, esta cuestión fue desbancada por la teoría general de la relatividad y la hipótesis fue anulada por posteriores resultados experimentales. Para más detalle sobre la teoría del arrastre del éter ver, por ejemplo, Stokes (1845) y acerca de la vasta validación experimental de la teoría de la relatividad, recomiendo consultar Clifford (2014).

En el último párrafo, el Dr. Le Roux refiere a los trabajos de Dayton Miller, físico norteamericano y ferviente opositor de la TR de Einstein que trabajó con Edward Morley en el desarrollo de su interferómetro, entre otras cosas. Miller intentó detectar experimentalmente éter luminoso, pero los resultados en algunas de sus publicaciones (ver, por ejemplo, Eddy, Morley & Miller (1898)), por el contrario, sirvieron para validar la TR de Einstein. Miller se empeñó en aumentar la precisión de sus experimentos para mostrar la existencia de éter luminoso, lo que le llevó a fabricar el interferómetro más preciso jamás construido hasta entonces.

3. LA EXPLICACIÓN RELATIVISTA DEL EXPERIMENTO DE MICHELSON. Luego de obtener conclusiones incorrectas del experimento de Michelson, la escuela relativista intenta explicarlas. Dado que la ecuación con derivadas parciales para la propagación de las ondas para la transformación analítica, que representa una traslación lineal regular no es válida, se cambia el significado de las palabras. La transformación de Voigt-Lorentz, que mantiene la forma analítica de la ecuación en cuestión, es renombrada "traslación".

Esta es una treta ridícula. La traslación es una cosa y las transformaciones de Voigt-Lorentz son otra. Hay un grupo de traslaciones así como hay un grupo de



FIG. 3.— Dayton Miller.

Voigt-Lorentz. Ambos grupos tienen su propio significado y área de estudio en las matemáticas. Como se trata de un asunto de definiciones, no se las puede mezclar.

Con el propósito de trabajar con el grupo de Voigt-Lorentz, Einstein adopta dos sistemas de referencia: cada uno de ellos tiene un observador con un conjunto completo de escalas y relojes. Cada uno de ellos realiza mediciones de longitud en su propio sistema, colocando las escalas, de acuerdo con los métodos de la geometría euclidiana. Los observadores y los objetos tienen una existencia permanente e incluso, como se le llama, pueden pasar de un sistema a otro. Finalmente, la relación entre las coordenadas de uno y el mismo punto de evento relacionado con ambos sistemas está establecida por las fórmulas de Lorentz.

Es inmediatamente obvio que estas hipótesis no tienen nada en común con las condiciones del experimento de Michelson, donde solo hay un observador que no tiene que consultar su reloj ni fijar el valor numérico de la velocidad de la luz.

El Dr. Le Roux no expone explícitamente la ecuación con derivadas parciales a la que se refiere en este punto, aunque resulta lógico asumir que se trata de una ecuación de onda. Dos años después de la publicación de *100 Autoren gegen Einstein*, Le Roux (1933) publicó un trabajo en francés titulado *El principio de la relatividad y la ley de gravitación*, donde expone detalladamente sus alegatos y razonamientos matemáticos para desacreditar e invalidar la teoría de la relatividad de Einstein.

En un espacio-tiempo 4D, las transformaciones de Lorentz son “rotaciones” y no “traslaciones”. El autor parece confundir estos dos conceptos y asume como correctas las transformaciones de Voigt. Estas

difieren de las transformaciones de Lorentz y pueden mencionarse de forma sencilla como sigue:

$$x' = x - vt, \quad y' = \frac{y}{\gamma}, \quad z' = \frac{z}{\gamma},$$

$$t' = t - \frac{v}{c^2}x^2; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Para mayor detalle, consultar a Ernst & Hsu (2001).

Respecto a este trabajo, cabe señalarse que alrededor de 1886, el físico alemán Woldemar Voigt investigó la perspectiva de los cuerpos en movimiento en la misma forma como Albert Einstein formuló la TR.



FIG. 4.— Woldemar Voigt.

Por otro lado, Hendrik Lorentz fue un físico neerlandés, ganador del premio Nóbel de Física en 1902. En su artículo, “Special Relativity”, O’Connor & Robertson (1996) resumen el papel que jugaron Voigt y Lorentz en la formulación de la TR:

“Lorentz escribió un artículo en 1886 donde criticaba el experimento de Michelson, apelando a la poca precisión del mismo. Michelson fue persuadido por William Thomson, entre otros, a repetir el experimento y así lo hizo con Morley. En los resultados parecía que la velocidad de la luz era independiente de la velocidad del observador.

También en 1887 Voigt escribió las transformaciones que llevan su nombre y mostró que ciertas ecuaciones eran invariantes bajo estas transformaciones. Con un factor de escala diferente, tales transformaciones son conocidas como las ecuaciones de Lorentz y el grupo de transformaciones de Lorentz proporciona la geometría de la relatividad especial. Todo esto era desconocido para Voigt cuando escribió las transformaciones.”

Aunque estas transformaciones se hallan en el estudio de teoría de relatividad, la motivación original de Lorentz radicaba en el intento de resolver

las inconsistencias entre la mecánica clásica y el electromagnetismo. En este sentido, uno de los sistemas de referencia de Lorentz fue el éter luminoso.

El factor de escala mencionado en el texto de O'Connor y Robertson refiere a una constante multiplicativa en la transformación de un operador d'alambertiano al pasar de un sistema de referencia a otro:

$$\text{Lorentz } \square' = \square$$

$$\text{Voigt } \square' = \gamma^2 \square$$

Así, la denominada "invariancia" de las transformaciones de Lorentz se da con una diferencia de una constante multiplicativa. Para mayor detalle, consultar Kittel (1971).



FIG. 5.— Hendrik Lorentz.

Los resultados experimentales, donde destacan los realizados por Michelson, mostraron que este factor no está presente, lo que parece contradecir parcialmente el punto 2. Es por esto, en parte, que muchos autores consideran que los resultados del experimento de Michelson fueron prueba experimental suficiente para validar la teoría de la relatividad, a pesar de haber sido obtenidos mucho antes del desarrollo de Einstein.

4. INCOMPATIBILIDAD DE LAS CONDICIONES DE EINSTEIN. Pero aún más: las hipótesis son lógicamente incompatibles entre sí.

Puede haber dos sistemas con las variables $S(x, y, z, t)$ y $S'(x', y', z', t')$ que se corresponden entre sí según las fórmulas de Lorentz. Si se va a fijar un punto en el sistema S' , entonces x', y', z' deben ser constantes mientras que t' permanece arbitrario. Entonces, la ecuación que determina t' no juega ningún papel.

En estas circunstancias, todos los puntos vinculados a S' se someten a una traslación directa y uniforme con respecto a S' ; pero las variables x', y', z' no representan coordenadas cartesianas con

ángulos rectos tal como ocurre en el sistema S . Lo mismo es obviamente cierto si se toma x, y, z como fijos y t como arbitrario.

Einstein no distinguió entre los valores instantáneos fijos y los valores variables de t y t' , entre un objeto permanente y un evento momentáneo.

Pero los observadores, sus estándares y relojes en el sistema al que están vinculados deben considerarse como cosas permanentes.

De acuerdo con una de las hipótesis básicas de Einstein sobre la longitud de masa en uno de los sistemas, dos objetos similares en el mismo sistema se relacionan entre sí mediante una transformación euclidiana realizada sobre las variables de ese sistema.

Por otro lado, de acuerdo con las hipótesis formuladas, los observadores, los sistemas de coordenadas y los relojes se referencian mutuamente de un sistema a otro. El total de estas suposiciones requeriría que la transformación de una sustitución euclidiana sea invariante, lo cual no es el caso.

La interpretación einsteniana del grupo de Lorentz encuentra pues una contradicción lógica. Toda la TR especial se basa en este frágil fundamento.

Sería interesante disponer del detalle de los sistemas S y S' , señalándose la relación entre los mismos y explicitándose el ejercicio que mantenga una variable arbitraria y las otras constantes, según lo mencionado por el Dr. Le Roux. Quizás de este modo sería ilustrativo y sencillo comparar los sistemas mencionados, como los que se encuentran en la teoría de la relatividad de Einstein.

No obstante, aludiendo a los argumentos de Le Roux mencionados en el primer párrafo, podría ocurrir que en las transformaciones de Lorentz:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma(t - vx) = \frac{t}{\gamma},$$

x' adopte un valor constante arbitrario, siendo posible que tome valor nulo. Por otro lado, en la ecuación $t' = t/\gamma$, el factor γ es perfectamente conocido. De esta forma, t' asume un valor bien definido a través de la transformación de Lorentz: se trata de la dilatación del tiempo, donde t' corresponde al tiempo propio.

En su trabajo *Einstein y la Geometría*, Álvarez-Gaumé & Vázquez-Mozo (2005) proporcionan de manera clara conceptos esenciales en la TR de Einstein. En la sección "La Geometría del Espacio-Tiempo", escriben:

“El principio de relatividad galileano supone la existencia de un conjunto infinito de sistemas de referencia inerciales (esto es, sistemas de referencia en los que se satisface la ley de la inercia) y que necesariamente se mueven unos con respecto a los otros con velocidad constante. Este principio afirma que las leyes de la mecánica toman la misma forma en todos los sistemas inerciales (...). En particular, en la relatividad galileana el tiempo no cambia al pasar de un sistema de referencia inercial a otro más allá del cambio producido por una diferente elección en el origen de los tiempos: los relojes de dos observadores inerciales no tiene por qué marcar la misma hora, pero sí medirán el mismo intervalo temporal transcurrido entre dos sucesos”.



FIG. 6.— Hans Reichenbach.

Tiempo y simultaneidad son dos conceptos esenciales en la TR. En el capítulo IX: “¿Qué es el tiempo?” del libro *La filosofía científica*, Hans Reichenbach (1951) -quien calificó a *Hundert Autoren gegen Einstein* con el adjetivo de “errores ingenuos”- escribe:

“La definición de sucesión temporal tiene una pareja en la definición de *simultaneidad*. Llamamos simultáneos a dos acontecimientos cuando ninguno de ellos es anterior o posterior al otro. El problema de la simultaneidad lleva a consecuencias peculiares cuando se comparan acontecimientos ocurridos en lugares diferentes. Este problema ha adquirido fama gracias al análisis de Einstein.

Cuando queremos conocer el tiempo en que ocurre un acontecimiento lejano hacemos uso de una señal que nos transmite el mensaje de la realización del acontecimiento. Pero como la señal tarda en llegar, el momento en que la recibimos no es idéntico al tiempo en que ocurrió el acontecimiento y que es el que nosotros queremos averiguar. Esto es cosa bien conocida en el caso de señales sonoras.”

Desarrollar la transformación de una ‘sustitución

euclidiana’ y confirmar por qué debería ser invariante según las hipótesis de Einstein es un trabajo que cualquier persona que desee entender a profundidad el punto 4 del Dr. Le Roux debería realizar.

No obstante, huelga decir que la carencia de una definición concreta de conceptos tales como ‘longitud de masa’ o ‘sustitución euclidiana’ dificulta seriamente la comprensión física de este punto.

5. ESPACIO Y ESPACIOS. En la TR general hay una mezcla de dos cosas que los matemáticos suelen llamar erróneamente con el mismo nombre: el espacio geométrico y los espacios analíticos.

En los casos en que se producen n variables³, los analistas a menudo dan a un sistema de valores numéricos asignados a estas variables, el nombre de “punto analítico” y y a la suma de estos puntos el nombre de “espacio analítico”. El número de dimensiones del espacio analítico considerado es el número de variables que lo componen. Estas definiciones son puramente analíticas e independientes de los significados concretos de las variables dadas.

El punto de vista del geómetra es diferente. Para él, el número de dimensiones no es una propiedad del espacio, sino una propiedad del elemento de espacio.

Esto requiere una explicación. La posición de un punto geométrico está determinada por tres coordenadas. La totalidad de las posiciones de los puntos geométricos formaría así un espacio analítico tridimensional. Pero una recta está determinada por cuatro números, que asimismo son también llamados sus coordenadas; la posición de un sólido rígido está determinada por seis coordenadas, y así sucesivamente. Si se considera a la recta como un elemento, la totalidad de las posiciones posibles forma un espacio analítico de cuatro dimensiones (espacio ordenado de Plücker). El conjunto de las posiciones de un sólido rígido también determinaría un espacio analítico de seis dimensiones.

Para el geómetra, la ubicación de los puntos es la misma que la de la recta o el sólido: siempre es el mismo espacio.

Por lo tanto, el espacio considerado como un lugar en el sentido del geómetra no tiene un número definido de dimensiones.

La mecánica clásica considera sistemas cuya posición depende de cualquier

³ En el texto se denota cualquier variable con negrilla (**n**). En la traducción, yo uso itálicas para evitar la confusión con variables vectoriales.

número n de parámetros. El total de las posibles posiciones de este sistema forma un espacio analítico de n dimensiones; el lugar de estas posibles ubicaciones siempre pertenece al mismo espacio indeterminado del geómetra.

El punto de un evento en el sentido relativista está determinado por tres coordenadas de posición asociadas con un valor de tiempo. Su totalidad forma un espacio analítico tetra-dimensional. Pero cuando el evento se compone de la consideración simultánea de dos posiciones de puntos y un valor de tiempo, el todo forma un espacio analítico de siete dimensiones.

El total de las conexiones posibles de dos puntos de evento completamente independientes formaría un espacio analítico de ocho dimensiones.

Otros ejemplos son superfluos. El aquí dado es suficiente para aclarar qué diferencia esencial existe entre el geómetra entre el espacio de lugar y los espacios totales. Hay dos términos diferentes que reciben el mismo nombre.

En la terminología moderna, suele entenderse el llamado espacio analítico como “espacio de configuraciones”. En la relatividad general, la geometría del espacio-tiempo no es igual al espacio de configuraciones de la mecánica. El primero corresponde a un espacio físico y el segundo al mencionado en este punto por el autor, quien parece confundirlos.

Cómo determina el Dr. Le Roux en este punto el número de dimensiones de un espacio analítico detalladamente, según sea el caso, es algo que escapa de mi conocimiento. Insto para que algún lector experto en el tema ponga especial atención a este punto. No obstante, parece intuitivo asimilar que las siete dimensiones a las que se refiere el autor corresponden a 2 eventos localizados en un espacio de configuraciones con coordenadas (x, y, z) y (x', y', z') respectivamente, y un tiempo absoluto compartido: (t) .

Acerca de la naturaleza del espacio, que revela la relatividad general, en su libro *La filosofía científica*, al mencionar la teoría de Einstein en el capítulo “La Evolución”, Reichenbach (1951) escribe:

“Según Einstein el universo no es infinito, sino un espacio riemanniano cerrado de tipo esférico. Esto no quiere decir que el universo se halle encerrado dentro de una especie de cascarón esférico, encerrado a su vez dentro de un espacio infinito. Quiere decir que el espacio total es finito, sin linde alguno. Dondequiera que nos encontremos, siempre habrá espacio alrededor de nosotros en todas direcciones, y no podrá verse ningún fin; pero si avanzamos en línea recta, algún día regresaremos a nuestro punto de partida por la dirección opuesta.

Podemos comparar estas propiedades tridimensionales del espacio con las propiedades observables de la superficie bidimensional de la Tierra, que en todas partes muestra el aspecto de una superficie prácticamente plana, en tanto que la totalidad de estas áreas es cerrada, de modo que quien avance en línea recta regresará finalmente a su punto de partida. Como todas las demás concepciones de la geometría no euclidiana, el espacio cerrado es susceptible de representación, aun cuando esta representación requiere alguna práctica para vencer el condicionamiento de un medio geométrico más simple.”

Adicionalmente, Álvarez-Gaumé & Vázquez-Mozo (2005) ofrecen una explicación sencilla y completa sobre la geometría usada por Einstein en sus trabajos sobre la teoría de la relatividad. En la introducción de *Einstein y la Geometría* escriben:

“Tuvieron que pasar no obstante 300 años desde el intento de Kepler para que la geometrización de la Física viniera de la mano de la teoría de la relatividad einsteiniana. A pesar de la fascinación infantil de Einstein con la geometría no fue él quien dio el primer paso. En su celeberrimo artículo de junio de 1905 la relatividad es presentada de manera física a través de relojes y reglas. Fue el matemático suizo Hermann Minkowski quien en 1908 se dio cuenta de que las transformaciones entre los diferentes sistemas de referencia inerciales se podían entender geoméricamente como ciertos cambios de coordenadas en el “espacio-tiempo”, un hiperespacio de cuatro dimensiones en las que tres de ellas se identifican con las dimensiones espaciales habituales mientras que la cuarta corresponde al tiempo.”



FIG. 7.— Hermann Minkowski.

Más adelante, Álvarez-Gaumé y Vázquez-Mozo explican las características del espacio de Minkowski y cómo la geometría en la teoría de la relatividad especial se desarrolla asumiendo tales características. Quizás en este punto y en

los siguientes se fundamentan los razonamientos matemáticos del Dr. Le Roux, que usualmente no son considerados en el ámbito de la física. También es posible que el pensamiento de matemático *puro* no permitió al Dr. Le Roux desplegar el *olfato* físico para captar y asimilar los postulados de la TR.

Respecto a la diferencia mencionada en el último párrafo del punto, la naturaleza de la geometría empleada en la TR ha mostrado que Einstein sí comprendía y diferenciaba correctamente estos conceptos.

6. EL ESPACIO-TIEMPO RELATIVISTA Y EL ESPACIO ANALÍTICO DE LA GRAVEDAD NEWTONIANA. La relatividad tiene solo un espacio-tiempo tetradimensional a la vista, que analiza en forma de diferenciales cuadráticos; esto debería jugar un papel similar al elemento de línea de una superficie en geometría.

Luego, la fuerza de gravedad estaría determinada por esta forma cuadrática. El movimiento natural de un punto estaría representado por una línea geodésica de la forma diferencial en cuestión. Esta línea geodésica sería su línea de mundo, de tal forma que cada movimiento corresponde a una línea geodésica.

Hay algo similar en la mecánica clásica. El principio de mínima acción lleva a la suposición de que el movimiento de un sistema se basa en una línea geodésica en forma de diferenciales cuadráticos. Pero uno tiene en mente el movimiento de un sistema completo que se considera como un todo sólido y ya no es el de un solo elemento.

La forma cuadrática comprende tantas variables como sea necesario para determinar la posición del sistema, y es el movimiento del todo lo que está representado por una línea de la forma en cuestión.

Si se piensa, por ejemplo, que el universo está constituido por un conjunto de n puntos de masa, la posición de todo dependerá de $3n$ variables. El espacio analítico correspondiente tendrá $3n$ dimensiones. El tiempo no es una coordenada complementaria, ya que el movimiento de un reloj, sea cual sea su naturaleza, es independiente de los movimientos de los cuerpos en el universo.

La forma cuadrática mencionada es la siguiente:

$$U \sum mds^2$$

donde U denota una función de las coordenadas del sistema. El cálculo implica

la introducción de una variable auxiliar t , que está determinada por la ecuación:

$$dt^2 = \frac{\sum mds^2}{2U}$$

Esto permite volver las ecuaciones diferenciales geodésicas a la forma usual de las ecuaciones de la mecánica. Esta variable auxiliar t es el tiempo canónico de la mecánica clásica.

El sistema de referencia canónico es aquel para el cual la energía cinética del universo observable es mínima.

Si se determina U mediante una minimización de dicha energía, se encuentra:

$$U = f \sum \frac{m_i m_k}{r_{jk}} + h$$

donde m_i y m_k denotan las masas de dos elementos y r_{jk} su distancia. Esta es la primera ley de Newton. Las ecuaciones de movimiento, entonces tienen la siguiente forma:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (1)$$

Estas ecuaciones contienen no solo las coordenadas del punto considerado, sino también las de todos los otros puntos del sistema, dando así la unidad al todo.

Un hecho interesante de la relatividad, que revela la mecánica clásica, pero escapó de la escuela de Einstein, es el carácter relativo del principio de igual acción y reacción. Este principio no expresa una propiedad de la materia: es una propiedad que proviene de la elección del sistema de referencia.

En el ámbito de la geometría, una línea geodésica es aquella que une dos puntos en una superficie dada y tiene longitud mínima. Además, la línea geodésica está contenida dentro de la mencionada superficie. Una curva temporal es aquella que en cualquiera de sus puntos su vector tangente es un *vector temporal*. Así, una geodésica temporal es una curva temporal que además es geodésica. Para mayor detalle, ver Nomizu (1996). Las curvas geodésicas temporales han servido para ilustrar el comportamiento predicho por la teoría general de la relatividad con fuerte validación experimental en los últimos años. En particular, recomiendo los textos de Clifford (2014), quien ha dedicado años de su vida a recopilar la evidencia experimental que ha servido como sustento para validar y dar crédito a la teoría de la relatividad.

Al referirse a la similitud con la mecánica clásica, Le Roux parece no objetar el razonamiento de la

TR, pero sí parece cuestionar su originalidad. Nuevamente, la percepción del Universo para el Dr. Le Roux está dada en un espacio de configuraciones, como evidencian las mencionadas $3n$ variables. Por otro lado, la propiedad del tiempo como parámetro absoluto fue discutida en el punto 4.

Aunque la naturaleza de la función U no es determinada *a priori*, puede resultar ilustrativo para el lector expresarla como variable despejada de la segunda ecuación de este punto, de tal modo que adquiere la forma de energía cinética:

$$U = \sum \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

Por otra parte, lo que el autor llama en este punto primera ley de Newton se refiere a la ley de gravitación universal. Confío en que este error se produjo por una distracción en la traducción o la transcripción por parte de Ruckhaber.

Sería ilustrativo disponer de un procedimiento detallado que explique la obtención de las ecuaciones (1). Lamentablemente, en la compilación *Cien autores contra Einstein* es frecuente referir las ecuaciones que desmerecen la TR sin presentar el proceso lógico o matemático realizado para obtenerlas. Los detalles se hallan mayoritariamente en el trabajo de Le Roux publicado en 1933, al que hago mención en el comentario del punto 3.

No obstante, es posible deducir las ecuaciones a partir del principio variacional de Jacobi, quien estableció que en la integral de la acción, el tiempo debe ser eliminado por el principio de *vis viva*, y todo se reduce a elementos de espacio. Para más detalle al respecto, recomiendo la lectura de Jourdain (1912). Esto explica la ausencia inicial de un diferencial de tiempo en las ecuaciones, que termina siendo definido de manera astuta, como mejor le parezca al autor. En relatividad general, el proceso de extremizar el diferencial para obtener las geodésicas es similar, donde el parámetro corresponde al tiempo propio.

Aunque el supuesto carácter relativo del principio de acción y reacción, mencionado por Le Roux, resultó algo inédito para mí y mis futuros colegas físicos con los que pude discutir sobre este trabajo, sí es evidente una tendencia por parte del autor a asimilar y defender la validez absoluta del principio de Mach. La primera pauta de esto se halla en el último párrafo de este punto y se refuerza en los argumentos de los puntos siguientes.

7. SOBRE LA IMPOSIBILIDAD DE REPRESENTAR LOS FENÓMENOS DE LA GRAVITACIÓN MEDIANTE LA TEORÍA DE EINSTEIN. Todavía queda por demostrar que es imposible representar los fenómenos de gravitación, si se parte de la hipótesis básica de Einstein.

Sea t una forma cuadrática de diferenciales de cuatro variables x_1, x_2, x_3, x_4 . Las ecuaciones de las líneas geodésicas de esta forma se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\frac{d \frac{\partial T}{\partial(dx_i)} - \frac{\partial T}{\partial x_i}}{\frac{\partial T}{\partial(dx_i)}} = \frac{d \frac{\partial T}{\partial dx_k} - \frac{\partial T}{\partial x_k}}{\frac{\partial T}{\partial(dx_k)}} \quad (2)$$

Se permite que tres de las coordenadas se expresen como función de la cuarta y seis constantes de integración arbitrarias. Dos soluciones difieren solo en valores numéricos de estas seis constantes.

Consideramos dos soluciones que representan los movimientos de dos cuerpos arbitrarios. Sea y_1, y_2, y_3, y_4 las coordenadas de los elementos de la primera, mientras que z_1, z_2, z_3, z_4 las de la segunda. Se puede considerar, por ejemplo, que y_1, y_2, y_3 se expresan como una función de y_4 , y también z_1, z_2, z_3 como una función de z_4 . Pero no hay necesariamente una relación entre y_4 y z_4 : En general, no hay una relación necesaria del tipo elemento a elemento entre dos líneas geodésicas. Evidentemente, esto podría hacerse, estableciendo $y_4 = z_4 = t$, donde t denota un tiempo. Este acuerdo de ninguna manera es necesario. En las ecuaciones diferenciales (2), nada cambiaría si establecemos $y_4 = t$ para la primera línea y $z_4 = t + \alpha$ para la segunda, donde α denota una constante arbitraria.

La ausencia de una relación regular entre los puntos de evento de dos líneas geodésicas diferentes es la razón principal por la cual la teoría de Einstein es inadecuada para representar un fenómeno de la gravitación. Es posible derivar de la teoría de ecuaciones diferenciales que se aproximarán más o menos a las del movimiento de un solo punto; pero nunca se podrá deducir a partir de ahí las ecuaciones para el movimiento de un sistema fijo, sin importar cuál. El fracaso de los experimentos realizados en este sentido no se debe a la dificultad del problema o la incapacidad de los autores, sino a la contradicción esencial entre el principio de la teoría de Einstein y la consistencia del conocimiento establecido.

Ni siquiera ha sido posible establecer las ecuaciones para el movimiento de un sistema de dos cuerpos basado en un sistema de referencia que no considera a uno de estos cuerpos como punto de partida.

El secreto de esta incapacidad radica en la limitación del espacio analítico correspondiente al problema de la gravitación en cuatro dimensiones.

La mecánica analítica, libre de la superstición del espacio-tiempo, resuelve el problema de forma clara y precisa al

introducir el número necesario de variables.

La mecánica relativista patalea en el mismo lugar, incapaz de salir de su prisión tetra dimensional.

El espacio analítico tetra dimensional de Einstein no contiene los puntos analíticos $3n$ -dimensionales correspondientes a cada ubicación de un conjunto de n partículas. Mientras que la relatividad solo puede tratar los elementos individualmente, la mecánica clásica trata el conjunto del universo observable en su totalidad.

Una vez más, el libro prescinde de los procedimientos para llegar a la ecuación (2). A pesar de esto, se puede apreciar que ambos numeradores corresponden a ecuaciones de Euler-Lagrange, que al ser iguales a cero pueden igualarse entre sí, al dividirse ambas entre un denominador común, como hace el Dr. Le Roux. A partir de esto, el autor realiza varias suposiciones para llegar a la conclusión que la TR está limitada por sus propias hipótesis.

Nuevamente, el espacio de configuraciones se presenta como el único relevante y necesario. Las geodésicas pueden ser reparametrizadas, y el establecimiento de $z^4 = t + \alpha$ corresponde a una parametrización afín, lo cual representa para el autor una ambigüedad.

Dado que Le Roux menciona en este punto el caso de dos soluciones que representan dos cuerpos arbitrarios, cabe mencionar que el problema de los 2 cuerpos no está analíticamente resuelto en relatividad general. Contextualizando, el problema de un cuerpo en relatividad general consiste en resolver la dinámica de un objeto masivo que orbita alrededor de otro, lo suficientemente grande como para ser considerado en reposo. Así, por ejemplo, el perihelio de Mercurio se calcula dentro de esta aproximación. Por otro lado, el problema de los dos cuerpos consiste en estudiar la dinámica de un genuino sistema binario (por ejemplo, dos estrellas de neutrones con masas comparables). La no linealidad de las ecuaciones de campo de Einstein y el hecho que el sistema binario produce ondas gravitacionales (ausentes en la teoría de Newton), hacen de este problema un desafío en cuanto a su resolución analítica se refiere. No obstante, este hecho no favorece la afirmación de Le Roux respecto a la incapacidad de la teoría relativista de dar cuenta de los fenómenos naturales; simplemente refleja la complejidad inherente de los mismos. El argumento es análogo a querer descalificar la teoría newtoniana de la gravitación por el simple hecho que el problema de los tres cuerpos no ha podido ser resuelto de forma analítica hasta la actualidad. Para una explicación más rigurosa y detallada del problema de uno y dos cuerpos en relatividad general, recomiendo Damour (2013).

A pesar de esto, cualquier persona con conocimiento de la teoría de la relatividad que ana-

lice lo expuesto por el Dr. Le Roux desde una perspectiva matemática, debe otorgarle a este punto y a la publicación de Le Roux (1933) especial atención.

Acotando la idea general del punto 7, en un libro muy referido en la pedagogía de la física, *Fundamentals of Modern Physics*, Robert Eisberg (1961) escribe lo siguiente:

“La teoría general de la relatividad que generaliza la teoría especial describiendo el movimiento en espacios-tiempos curvados, además engloba una teoría relativista de la gravitación que *generaliza* la teoría de gravitación de Newton.”

Esta última frase está en total contradicción con la primera oración y la idea general presentada en el punto 7. La teoría de la relatividad cumple muy bien el denominado principio de correspondencia: Bajo ciertas condiciones, la teoría se corresponde al límite clásico. De este modo, la teoría de gravitación de Newton prueba ser un caso específico de la teoría relativista de gravitación. Actualmente, esto es demostrado y aceptado por la comunidad científica.

8. La fuerza de gravedad es una propiedad del universo observable, considerada en su totalidad. La gravitación se considera comúnmente como la ley de aceleración o interacción. De esta manera, sin embargo, es privada del problema de su verdadera naturaleza. El llamado efecto newtoniano, que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, es válido solo para movimientos relacionados con ciertos sistemas de referencia. Como estos sistemas están orientados hacia el cielo estrellado, en realidad dependen de la totalidad de las posiciones en el fondo observable de estrellas.

La redacción de la ley de atracción también presupone la elección de una característica especial para el tiempo, de modo que se pueda determinar la aceleración. Este tiempo canónico también se fija, teóricamente a través de la consideración del universo entero, prácticamente mediante la aparente rotación del cielo estrellado. Siempre es la totalidad del universo lo que se valida.

El concepto de dos efectos remotos iguales y directamente opuestos parece en principio ser contrario a nuestro entendimiento. Sin embargo, demostramos que:

- Cualquiera que sea el tipo de movimiento de un sistema de partículas, siempre existen sistemas de referencia tales que el movimiento relativo de la totalidad de partículas en relación

a cualquier partícula, se debe únicamente a efectos mutuos, iguales y opuestos.

- Las acciones recíprocas son, por lo tanto, esencialmente un hecho de la relatividad que resulta de la determinación de un sistema de referencia.

El método de Einstein no permitió descubrir este resultado significativo.

Para finalmente expresar la ley de acción mutua en una forma independiente de la elección de la variable de referencia, se tendría que usar todos los parámetros utilizados para determinar la posición del universo total observable.

Esto también excede las posibilidades del método de Einstein. Los resultados confirmados por la escuela relativista parecen satisfactorios solo si se los admite sin críticas. Esto es cierto, por ejemplo, para la afirmación engañosa de 42'' para Mercurio en lugar de 374'' y la incapacidad del método para explicar esta diferencia.

Las observaciones presentadas en el primer párrafo de este punto parecen estar motivadas por el hecho que Einstein se esforzó durante varios años en construir una teoría compatible con el principio de Mach, algo que nunca pudo concretarse.

Una discusión pormenorizada sobre el principio de Mach en la relatividad general está fuera de los objetivos de este trabajo. Empero, dado que la cuestión sigue en discusión hoy día y existen opiniones diversas y divididas entre los expertos sobre este tema, sugiero acudir al texto Barbour & Pfister (1995) para mayores referencias.



FIG. 8.— Ernst Mach.

Por otra parte, una de las consecuencias de carácter filosófico de la mecánica relativista es que elimina la acción a distancia. Como la información en la naturaleza es transmitida con una velocidad

límite dada por la luz, se debe abandonar el concepto de *simultaneidad* presente, por ejemplo, en la mecánica newtoniana. Naturalmente, esto también se cumple en la interacción gravitatoria. Un párrafo del capítulo “¿Qué es el tiempo?” de *La filosofía científica* de Reichenbach (1951) señala lo siguiente:

“Vemos que la definición causal de orden temporal conduce a una indeterminación con respecto a la comparación temporal de hechos ocurridos en puntos distantes. Y esto sucede así debido al carácter limitativo de la velocidad de la luz. El tiempo absoluto, es decir, la simultaneidad no ambigua, existiría en un mundo en el que no hubiera límite superior para la velocidad de las señales. Pero debido a que en nuestro mundo la velocidad de transmisión causal es limitada, no existe absoluta simultaneidad. La *teoría causal del tiempo* explica el significado de la sucesión y la simultaneidad temporales en tal forma que la explicación es aplicable tanto al mundo de la física clásica como a nuestro mundo, en el que la velocidad de la transmisión causal se halla sujeta a un límite superior y la simultaneidad no es definida sin ambigüedad.”

Acerca del concepto de tiempo estelar y las relaciones físicas dadas respecto al movimiento del cielo estrellado y la posición del universo en su totalidad, es mi recomendación personal acudir al excelente texto “The End of Time”, escrito por Barbour (1999).

9. CONCLUSIÓN. Estos hallazgos generales hacen que sea innecesario tratar varias irregularidades del método y las teorías pseudo-geométricas de la relatividad. Uno gana la misma impresión con ellas y encuentra la misma falta de crítica, combinada con algunas afirmaciones que significan verdaderos absurdos.

Mi conclusión muy clara es que la TR de Einstein no pertenece al campo de la ciencia positiva.

Debe entenderse que el autor usa la palabra “positiva” para referirse a aquella ciencia que es provechosa para la humanidad. No queda mucho que comentar sobre el punto 9. La conclusión del Dr. Le Roux es el texto perfecto para dar pie a las conclusiones de este trabajo.

3. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Mientras algunos autores utilizan argumentos en contra de las implicaciones metafísicas, religiosas y filosóficas de la teoría de la relatividad, los puntos expuestos por el Dr. Le Roux se presentan de forma pretendidamente científica o académica, por lo que sus críticas son relevantes en comparación a las anteriores. Es de destacar el aparato físico y matemático (siendo este último el preponderante) que da una base científica común para refutar dichas críticas.

Los comentarios expuestos en este trabajo solo refieren puntos específicos de réplica a los argu-

mentos del Dr. Le Roux. Sin embargo, es relevante señalar algunas paradojas del texto, como que variados argumentos físico-matemáticos empleados eventualmente para desacreditar e invalidar la teoría de la relatividad, terminaron por validarla incrementando su credibilidad.

Por eso con el paso del tiempo, varios autores terminaron aceptando la teoría de la relatividad. Aunque no es el caso de Le Roux, mi opinión refrenda la tesis de Kuhn que indica que una vez consolidado el paradigma, termina siendo aceptado por la comunidad científica, convirtiéndose en la fuente de nuevas temáticas de investigación que refuerzan el nuevo paradigma.

Para apoyar esta tesis, acudo a un párrafo escrito en *Fundamentals of Modern Physics*, por Robert Eisberg (1961):

“La teoría de la relatividad fue diseñada para estar de acuerdo con el hecho experimental que se observa que la velocidad de la luz es la misma en sistemas de referencia que tienen una traslación uniforme con respecto al otro. Sin embargo, en adición a esto, la teoría *predice* nuevos fenómenos tales como la contracción de la longitud, la dilatación del tiempo, el aumento relativista de masa y una relación entre la masa y la energía. Esto es típico de una teoría científica. También es típico el hecho que la aceptación inicial de la teoría fue solo tentativa, a pesar que parecía estar basada a partir de lógica correcta. La teoría no alcanzó completo prestigio hasta que sus predicciones concernientes a nuevos fenómenos fueron puestas a prueba por experimentos.”

Finalmente acudo al físico teórico alemán Hubert Goenner (1993), quien en su trabajo titulado *The Reaction to Relativity Theory in Germany, III: “A Hundred Authors against Einstein”* indaga extensamente en las motivaciones de los autores que aportan al libro, sus alegatos y publicaciones. Como él mismo afirma, su escrito se centra en responder las interrogantes de qué motivó a los editores del libro, quiénes fueron los que contribuyeron al mismo y cuáles fueron sus problemas para entender la relatividad especial y general. No obstante, antes de dar cuenta de esto en el subtítulo titulado *Einstein’s Opponents*, el Prof. Goenner escribe:

“Para mí, el libro es un ejemplo de una comedia pero inadecuada reacción de la clase media en Alemania (*Bildungsbürgertum*) a un tópico en las ciencias exactas sin consecuencias económicas o tecnológicas inmediatas: la teoría de la relatividad. No existen muchos ejemplos de tal interacción; en el siglo XIX, la teoría de la evolución de Darwin sería

uno; en nuestros tiempos, tal vez, la crisis en el fundamento de las matemáticas, que se conoce a través de la sociedad en la forma de “nueva matemática”. (...) Podemos ver claramente que tres temas están ocultos detrás de gran parte del pensamiento relativista en *Hundert Autoren gegen Einstein*: la disputa sobre la relación entre ‘realidad objetiva’ y teoría física, la falta de conocimiento acerca de la manera por la cual el consentimiento público entre los científicos para la validación de una teoría científica es establecida, y la cuestión de qué posible rol pueden jugar los no científicos en este proceso.”

Los temas que señala objetivamente el Profesor Goenner atribuyen a la teoría de la relatividad, sin mayor reflexión, el carácter de revolución científica. Esto se evidencia además, en las características comunes con la teoría heliocéntrica de Copérnico y la teoría de la evolución de Darwin: dos revoluciones científicas por excelencia, según Thomas Kuhn.

Queda abierto para los hispanohablantes conocedores de la teoría de relatividad, el ejercicio de analizar profundamente los argumentos del Dr. Le Roux, formulando juicios científicos y de valor sobre los mismos, en mi opinión, orientándolos a restar crédito al matemático francés. Finalmente, invito a los lectores curiosos germano-parlantes, a leer la obra *Hundert Autoren gegen Einstein*, para consolidar y aun eventualmente discutir, en torno a la epistemología de los paradigmas de Thomas Kuhn y la teoría de la revolución científica generada por la teoría de la relatividad, criticando los fundamentos de quienes se opusieron a la brillante teoría de Albert Einstein.

AGRADECIMIENTOS

El presente artículo surgió como una extensión del trabajo final de la materia Historia de la Ciencia, dada en la carrera de física, UMSA en el periodo I/2018. Agradezco a quien impartió la materia: Diego Sanjinés Castedo, Ph.D. por darme a conocer la existencia del libro, sugerirme y orientar el tema. Además, por sus recomendaciones, correcciones e invaluable ayuda con la edición del mismo. También agradezco a Zui Oporto-Almaraz, Ph.D. por las valiosas reuniones y la bibliografía proporcionada. Sus comentarios, correcciones y aportes al trabajo permitieron pulir y dar forma final al texto.

Conflicto de intereses

El autor declara que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Álvarez-Gaumé, L. & Vázquez-Mozo, M. (2005). Einstein y la Geometría, *CERN-PH-TH*, **034**, 05.
- Barbour, J. (1999). *The End of Time: The Next Revolution on Physics*. Oxford University Press. ISBN 13 978-0-19-511729-5.
- Barbour, J. & Pfister, J. (1995). *Mach’s Principle: From Newton’s Bucket to Quantum Gravity*. Birkhäuser Boston. ISBN 0-8176-3823-7.
- Clifford, W. (2014). Was Einstein Right? A Centenary Assessment. A publicarse en: *General Relativity and Gravitation: A Centennial Perspective*. arXiv:1409.7871 [gr-qc].
- Clifford, W. (2014). The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Reviews in Relativity*, **17**, 4.
- Damour, T. (2013). *The general relativistic two body problem*, en Brumberg Festschrift, Berlin. Editado por S. M. Kopeikin. arXiv:1312.3505 [gr-qc].

- Eddy, H., Morley, E. & Miller, C. (1898). The Velocity of Light in the Magnetic Field. *Physical Review*, **5**, 283-295.
- Eisberg R. (1961). *Fundamentals of Modern Physics*, 3ª edición. Ed. John Wiley and Sons. CCN 61-6770.
- Ernst, A. & Hsu, J. (2001). First proposal of the universal speed of light by Voigt in 1887. *Chinese Journal of Physics*, **39**, 3.
- Goenner, H. (1993). The Reaction to Relativity Theory I: The Anti-Einstein Campaign in Germany in 1920. *Science in Context*, **6**(1), 107-133. doi:10.1017/S0269889700001332
- Holton, G. (1969). Einstein and the "Crucial" Experiment. *American Journal of Physics*, **37**, 10.
- Israel, H., Ruckhaber, E. & Wienman, R. (1931). *Hundert Autoren gegen Einstein*. Voigtländer^s Verlag. CDB 94197100.
- Jourdain, P. (1912). The Principle of Least Action. Remarks on some Passages in Mach's Mechanics. Source: *The Monist*, **22**, 2, 285-304.
- Kittel, C. (1971). Larmor and the Prehistory of the Lorentz Transformation. *American Journal of Physics*, **42**, 726-729.
- Le Roux, J. (1933). Le principe de relativité et la loi de la gravitation. *Annales Scientifiques de L'E.N.S.*, **50**, 3. 127-169.
- Nomizu, K. (1996). *Foundations of Differential Geometry*. Ed. Wiley-Interscience. CCN 63-19209.
- O'Connor, J. & Robertson, E. (1996). *Special Relativity*. History Topics, Mathematical Physics. School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland. Web. 2 de febrero de 2020.
- Pauli, W. (1958). *Theory of Relativity*, Dover Publications. ISBN 0-486-64152-X.
- Reichenbach, H. (1951). *La Filosofía Científica*. Berkeley, California. Segunda edición en español, traducido por Horacio Flores Sánchez. Fondo de cultura de México.
- Stokes, G. (1845). On the aberration of light. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **27**, 177, 9-15.
- Wiki: Jean-Marie Le Roux. En Wikipedia. Recuperado el 12 de febrero de 2020.
<https://en.wikipedia.org/wiki/Jean-Marie-Le-Roux>

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física Instituto de Investigaciones Físicas

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Dr. Flavio Ghezzi Moris

Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos

Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

Misión

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica semestralmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

Instrucciones para los autores

La Revista Boliviana de Física recibe trabajos escritos en castellano, inglés o portugués y deben contar con un resumen en castellano y su correspondiente traducción en inglés.

Los autores deberán enviar sus trabajos preferentemente en los formatos $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, *MS Word*, o *sólo texto* (con extensiones *.tex*, *.doc* y *.txt*, respectivamente), ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. Las figuras deberán tener una resolución razonable a fin de que puedan ser vistas con suficiente claridad por el lector.

Los artículos científicos serán revisados por el Comité Editorial y posteriormente por un par de árbitros anónimos quienes dan el veredicto sobre si el artículo es aceptado o no.

La comunicación de los autores con los árbitros se realiza únicamente a través del editor encargado del área.

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

Conflicto de interés: Los autores que envíen artículos para su publicación en la RBF admiten que no tienen conflicto de interés en relación a los trabajos realizados y presentados.

CONTENIDO

A. ARTÍCULOS

SINCRONIZACIÓN DE TRÍOS DE NEURONAS DE RULKOV CARACTERIZADAS POR PERIODICIDADES

Kevin Iglesias & Gonzalo Marcelo Ramírez-Ávila

ANÁLISIS MULTI-RESOLUCIÓN (AMR) EN EL DOMINIO K-X APLICACIONES A SÍSMICA 3D-2D CASO: SUBANDINO CENTRO DE BOLIVIA

Evanz Lázaro & Kim Bejarano

ESTIMACIÓN DE REGIONES DE ESTABILIDAD EN UN MODELO DE PÉNDULO ELÁSTICO

Nestor Rodrigo Condori U. & Diego Sanjinés Castedo

E. HISTORIA

CIEN AUTORES CONTRA EINSTEIN: UNA TRADUCCIÓN CRÍTICA PARCIAL

Lucas Blitz Lozada Gobilard