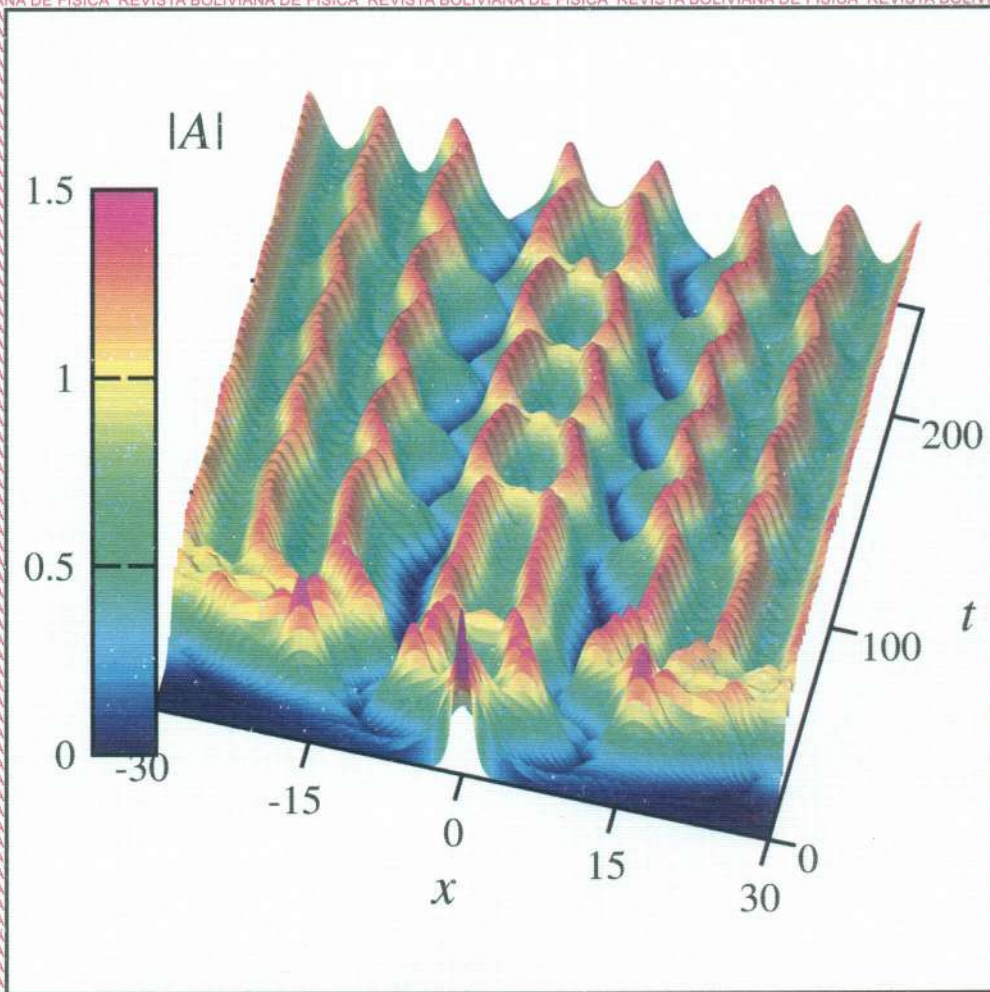


ISSN - 1562 - 3823

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

NUMERO 36

NOVIEMBRE 2020 - LA PAZ - BOLIVIA



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

Esta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Dr. Flavio Ghezzi Moris

Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo

Dr. Wilfredo Tavera Llanos

Email: witavera@fiumsa.edu.bo

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos

Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

CONSEJO EDITORIAL

Dr. Oscar Antonio Rondón

Institute of Nuclear and Particle Physics

University of Virginia

McCormick Road, Charlottesville, VA 22901

804 924-6787, USA

Email: or@virginia.edu

Dr. Carlos Navia

Instituto de Física

Universidade Federal Fluminense

Av. Gen. Milton Tavares de Souza

24210-340, Niterói, RJ-Brasil

Email: gfcnoej@if.uff.br

Dr. Pedro Lind

Department of Computer Science

and the Metropolitan Center for AI

Pilestredet 52 D246

0166 Oslo, Norway

Email: pedro.lind@oslomet.no

Dr. David Laroze

Instituto de Alta Investigación

Universidad de Tarapacá

Calle Antofagasta 1520

Casilla 7D, Arica, Chile

Email: dlarozen@uta.cl

ISSN 1562-3823



Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
Y
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 36
NOVIEMBRE DE 2020

Revista Boliviana de Física

ISSN 1562-3823

Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica

<http://www.scielo.org.bo>

<http://www.latindex.unam.mx>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

Diseño: A. Ticona

Dirección: Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.

Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

Portada: Diagrama espacio-temporal de una estructura localizada.

Formato $\text{L}^{\text{T}}\text{E}^{\text{X}}2_{\epsilon}$. *Tipo de fuente utilizada:* newcentury

Impreso por: **Imprenta Antofagasta**

Dirección: Canónigo Ayllón No. 524. Tel. (591 2) 2493609.

CONTENIDO

EDITORIAL	<i>Editor</i>	1
-----------	---------------	---

A. ARTÍCULOS

CONDICIONES EXTENDIDAS DE SINCRONIZACIÓN DE DOS MAPAS LOGÍSTICOS ACOPLADOS <i>R. O. E. Bustos-Espinoza & G. M. Ramírez-Ávila</i>		3
---	--	---

ESTRUCTURAS LOCALIZADAS Y EXTENDIDAS DE LA ECUACIÓN COMPLEJA DE GINZBURG-LANDAU CÚBICA-QUÍNTICA-SÉPTICA ASOCIADA A LA ECUACIÓN DE SINE-GORDON PARAMÉTRICAMENTE FORZADA Y CON DISIPACIÓN <i>Juliana Carrasco-Mejía & Deterlino Urzagasti</i>		11
--	--	----

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

HAMILTONIANO COVARIANTE PARA LA PARTÍCULA CARGADA <i>V. M. Peñafiel & Leoncio Gómez</i>		23
--	--	----

ESTUDIO DEL MÉTODO MONTE CARLO EN SIMULACIONES PARA LA ESTIMACIÓN DEL VALOR DE π <i>J. C. Vargas & Carlos Andrés Cruz-Carpio</i>		26
---	--	----

EDITORIAL

Tenemos el agrado de presentar el primer número de la Revista Boliviana Física (RBF) del año 2020, encontrándonos en una situación singular debido a la pandemia de CoVid 19 y a sus efectos y consecuencias que azotan a todo el planeta. Lastimosamente, Bolivia no es la excepción a las secuelas devastadoras de la pandemia en todos los ámbitos, principalmente en lo que se refiere a los aspectos económicos y sociales. Sin embargo, la comunidad científica boliviana en general y de física en particular, han mostrado su resiliencia frente a esta circunstancia peculiar. Esta robustez se refleja en el hecho de que las actividades académicas continuaron con el uso de nuevas tecnologías de comunicación que posibilitaron las denominadas “clases virtuales” las cuales se han consolidado como una muy buena alternativa de seguimiento académico y es encomiable el trabajo de docentes que incluso se dieron maneras de que los estudiantes puedan adquirir un nivel adecuado en las diferentes asignaturas, incluyendo las relacionadas con laboratorios.

Se debe destacar también la labor loable del Planetario Dr. Max Schreier, institución que en esta situación de pandemia, realizó enormes esfuerzos por divulgar la física y la astronomía a través de charlas magistrales, conversatorios y cursos, eventos que tuvieron gran aceptación no solamente de colectividades científicas sino también del público en general. Gracias a diferentes plataformas tecnológicas, la llegada de los eventos organizados por el Planetario Dr. Max Schreier tuvieron un gran alcance y ciertamente fue la institución que desarrolló más actividades y con un gran impacto en la sociedad. Deste esta tribuna, va nuestra sincera felicitación por el al personal técnico y administrativo así como a los docentes-investigadores, estudiantes auxiliares y voluntarios vinculados a este brazo de interacción social de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA).

Por otra parte, en lo que a investigación se refiere, los diferentes grupos han continuado activamente sus labores, a pesar de las limitaciones en cuanto al acceso a los laboratorios. Es quizás por este hecho de que en este número de la RBF se tengan contribuciones de aspectos teóricos de la física. En esta primera entrega correspondiente a la gestión 2020 de la RBF, toma mayor fuerza la opción de que los autores puedan enviar sus trabajos en inglés, con lo cual se espera que los mismos tengan mayor llegada a la comunidad científica internacional que utiliza preponderantemente al inglés como el lenguaje vinculante de la ciencia.

En este número de la RBF, se presentan dos artículos científicos sometidos a proceso de arbitraje internacional. En el primer artículo, Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila (2020) hacen un estudio de la sincronización de dos mapas logísticos acoplados en un espacio de parámetros extendido con respecto a anteriores trabajos de los mismos Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila (2012) y trabajando con el indicador de sincronización introducido por Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila (2016) y las periodicidades que este indicador presenta en su evolución temporal. Un aspecto interesante que muestran los autores, es la aparición de estructuras similares a las obtenidas por Ramírez-Ávila & Gallas (2011) al estudiar el comportamiento dinámico del mapa de Tinkerbell. En el segundo artículo, Carrasco-Mejía & Urzagasti (2020) estudian la formación de estructuras localizadas en un sistema descrito por la ecuación de Sine-Gordon perturbada (SGP) forzado paramétricamente con disipación débil y en la vecindad de la resonancia paramétrica. Los autores describen las estructuras localizadas mediante la ecuación compleja de Ginzburg-Landau cúbica-quíntica-séptica (CGL-séptica) asociada a la ecuación SGP. También los autores construyeron un diagrama de fase de las regiones en las que se presentan solitones tanto para la ecuación CGL-séptica como para la SGP.

Respecto a las otras contribuciones, una corresponde a Peñafiel & Gómez (2020) quienes muestran que para una partícula cargada en un campo electromagnético, se puede preservar la covariancia manifiesta para un tratamiento bajo la teoría de Dirac para el formalismo hamiltoniano asociado a lagrangianas singulares; en tanto que la otra contribución correspondiente a la sección de enseñanza de la física trata de la estimación del valor de π mediante el método de Montecarlo, cuya explicación detallada es realizada por Vargas & Cruz-Carpio (2020).

Esperamos que el contenido de este ejemplar de la RBF sea de su agrado y pueda motivar al lector en la profundización de los trabajos expuestos a través de estas páginas. También invitamos a la comunidad científica a enviar sus trabajos para ser publicados en las diferentes secciones de la RBF.

REFERENCIAS

- Bustos-Espinoza, R.O.E., & Ramírez-Ávila, G.M. 2020, Revista Boliviana de Física, **36**, 3.
- Bustos-Espinoza, R.O.E., & Ramírez-Ávila, G.M. 2012, Revista Boliviana de Física, **22**, 1.
- Bustos-Espinoza, R.O.E., & Ramírez-Ávila, G.M. 2016, The European Physical Journal Special Topics, **225**, 2697
- Carrasco-Mejía, J. & Urzagasti, D. 2020, Revista Boliviana de Física, **36**, 11.
- Vargas, J. C. & Cruz-Carpio, C. A. 2020, Revista Boliviana de Física, **36**, 26.
- Peñafiel, V.M. & Gómez, L. 2020, Revista Boliviana de Física, **36**, 23.
- Ramírez-Ávila, G.M., & Gallas, J.A.C. 2011, Revista Boliviana de Física, **19**, 1.

EDITORIAL

We are pleased to present the first issue of the Bolivian Journal of Physics (RBF) for the year 2020. We find ourselves in a unique situation due to the CoVid 19 pandemic and its effects that are affecting the entire planet. Unfortunately, Bolivia is no exception to its devastating consequences including economic and social aspects. Despite this, the Bolivian scientific community in general and the physics community in particular, have shown their resilience in the face of this particular circumstance. This robustness is reflected in the continuity of academic activities, including “virtual classes”, using new communication technologies which have been consolidated in the last few years. “Virtual classes” have served as a very good alternative for academic follow-up. Also, commendable is the work of lecturers who have adapted to the situation on a constant basis so that students can acquire an adequate level in the different subjects, including those related to laboratories.

Worthy of recognition is the work of the Dr. Max Schreier Planetarium. This institution has during the pandemic made enormous efforts to disseminate physics and astronomy through lectures, talks, courses and other activities which have been well accepted not only by scientific communities but also by the public. Thanks to different technological platforms, the events organized by the Dr. Max Schreier Planetarium had a great reach and impact on society. Our sincerest congratulations to the staff of the Dr. Max Schreier Planetarium; to the technical and administrative staff as well as to the teachers-researchers, students, assistants and volunteers linked to this social interaction arm of the Universidad Mayor de San Andrés (UMSA).

Regarding research activities, the different groups have actively continued their work, in spite of the limitations in terms of access to laboratories. It is perhaps for this reason that this issue of the RBF contains mainly contributions on theoretical aspects of physics.

In this first issue, corresponding to 2020, we have noticed an increased uptake in the option to submit papers in English and this furthers our reach to the international scientific community that predominantly uses the English language.

In this issue of the RBF, two scientific articles submitted to the international refereeing process are presented. In the first article, Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila (2020) study the synchronization of two coupled logistic maps in an extended parameter space with respect to previous works of the same Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila (2012) and working with the synchronization indicator introduced by Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila (2016) and the periodicities that this indicator presents in its temporal evolution. An interesting aspect shown by the authors, is the appearance of structures similar to those obtained by Ramírez-Ávila & Gallas (2011) when studying the dynamical behavior of the Tinkerbell map. In the second article, Carrasco-Mejía & Urzagasti (2020) study the formation of localized structures in a system described by the perturbed Sine-Gordon equation (SGP) parametrically forced with weak dissipation and in the neighborhood of the parametric resonance. The authors describe the localized structures by means of the complex Ginzburg-Landau ubiquitous-quintic-septic (CGL-septic) equation associated with the SGP equation. Also, the authors constructed a phase diagram of the regions in which solitons occur for both the CGL-septic and the SGP equations.

Regarding the other contributions, one corresponds to Peñafiel & Gómez (2020), who show that for a charged particle in an electromagnetic field, the manifest covariance can be preserved for a treatment under the Dirac theory for the Hamiltonian formalism associated to the singular Lagrangian. The other contribution corresponds to the teaching section and deals with the estimation of the π value by means of the Monte Carlo method, which is explained in detail by Vargas & Cruz-Carpio (2020).

We hope that the contents of this issue of the RBF are well received and motivate the reader to further and deepen the work presented. We invite the scientific community to send us their comments and also to send their papers to be published in the different sections of the RBF.

REFERENCIAS

- Bustos-Espinoza, R.O.E., & Ramírez-Ávila, G.M. 2020, *Revista Boliviana de Física*, **36**, 3.
- Bustos-Espinoza, R.O.E., & Ramírez-Ávila, G.M. 2012, *Revista Boliviana de Física*, **22**, 1.
- Bustos-Espinoza, R.O.E., & Ramírez-Ávila, G.M. 2016, *The European Physical Journal Special Topics*, **225**, 2697
- Carrasco-Mejía, J. & Urzagasti, D. 2020, *Revista Boliviana de Física*, **36**, 11.
- Vargas, J. C. & Cruz-Carpio, C. A. 2020, *Revista Boliviana de Física*, **36**, 26.
- Peñafiel, V.M. & Gómez, L. 2020, *Revista Boliviana de Física*, **36**, 23.
- Ramírez-Ávila, G.M., & Gallas, J.A.C. 2011, *Revista Boliviana de Física*, **19**, 1.

CONDICIONES EXTENDIDAS DE SINCRONIZACIÓN DE DOS MAPAS LOGÍSTICOS ACOPLADOS SYNCHRONIZATION EXTENDED CONDITIONS OF TWO COUPLED LOGISTIC MAPS

R. O. E. BUSTOS ESPINOZA[†] & G. M. RAMÍREZ ÁVILA[‡]

Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés
Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

(Recibido 10 de agosto de 2020; aceptado 15 de septiembre de 2020)

RESUMEN

Se analizan las regiones de sincronización de dos mapas logísticos acoplados difusivamente en un amplio plano de parámetros. Se encontraron nuevas estructuras bien definidas que amplifican la caracterización de dos osciladores móviles. Debido a su simplicidad y a su rico comportamiento dinámico, los mapas logísticos acoplados nos permiten estudiar diferentes tipos de sincronización. Nos enfocamos específicamente en la sincronización en fase caracterizándola mediante periodicidades que se presentan simétricamente en el plano de parámetros. Lo anterior, nos permite distinguir claramente entre regiones con comportamiento regular o caótico. Finalmente, se indican posibles aplicaciones de este tipo de sistemas.

Código(s) PACS: 05.45.Xt, 05.45.Pq, 05.45.-a

Descriptores: Sincronización, caos — sistemas caóticos — dinámica no lineal.

ABSTRACT

We analyze the synchronization regions of two diffusively coupled logistic maps in an ample parameter plane where we found new and well-defined structures of synchrony that allow us to amplify the characterization of two motile oscillators. Due to their simplicity and rich dynamical behavior, the coupled logistic maps enable us to study different kinds of synchronization. We focus specifically on phase synchronization characterizing it by periodicities that symmetrically pervades the parameter plane. A clear distinction is found between the above mentioned synchronous regions from those exhibiting chaotic behavior. Finally, we point out some possible applications of this kind of system.

Subject headings: Synchronization, chaos — chaotic systems — nonlinear dynamics.

1. INTRODUCTION

The synchronization phenomena, so abundant in nature, and extensively studied in a wide variety of systems, from physics to social sciences, is defined by Pikovsky et al. (2001) as an adjustment of rhythms of self-sustained oscillators due to their interactions. Several works have been devoted to study synchronous behavior in different kind of oscillators, for instance, in electronically-implemented systems, such as the paradigmatic chaotic circuit proposed by Chua and introduced by Matsumoto (1984). Coupled Chua's circuits give rise to chaotic synchronization firstly formulated intuitively by Tang et al. (1983), and demonstrated afterwards by Chua (1993). Other interesting circuits exhibiting synchronization are the light controlled oscillators introduced by Ramírez-Ávila et al. (2003), and characterized by their pulsatile coupling; and also that conceived by L'Her et al. (2016) for studying coupled

logistic maps. It is worthy to mention the oscillators introduced by Kuramoto & Nishikawa (1987) which became an example for excellence for studying synchronization in different network configurations in many contexts, including power-grids described by Schultz et al. (2014), and in mobile agents studied by Fujiwara et al. (2011). The omnipresence of synchronization in nature makes that this phenomenon acquires an essential role in science due to their universal feature that is understood within the nonlinear dynamics conceptual framework as expounded by Fujisaka & Yamada (1983). The study of synchronization using maps was started with the work of Yamada & Fujisaka (1983). Some other interesting systems described by maps exhibit synchronization such as in neurons described by Sun & Cao (2016), Calderón de la Barca, & Ramírez-Ávila (2017) and Iglesias & Ramírez-Ávila (2019), and even in social systems which are studied through the relationship between synchronization and consensus as stated in the edited book of Kocarev (2013), and analyzed in terms of discrete models by Subieta-

[†]<http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/rbustos/>

[‡]<http://www.fiumsa.edu.bo/docentes/mramirez/>

Frías & Ramírez-Ávila (2017). Transients or synchronization time, plays also an important role in the description of synchronization as pointed out by Ramírez-Ávila et al. (2006), where they study synchronization regions and transients in locally coupled oscillators in linear and ring configurations.

In this work, we describe a huge region of the parameter plane of a systems composed of two coupled logistic maps, where the dynamical behavior allowed us to describe the synchronous behavior of the system according to the coupling strength, and the difference between the oscillators. The description in terms of periodicities gives an insight of the dynamical behavior of such a system. This paper is organized as follows: the logistic map and its features are set forth in Sect. 2, the model for two coupled maps is presented in Sect. 3, where we focus on the types of coupling, the definition of the synchronization factor, the synchronization regions and some other important remarks. The results are presented in Sect. 4 emphasizing in the aspects related to periodicities and the possibility of varying coupling in relationship with mobile oscillators. Finally, in Sect. 5, we give conclusions and some perspectives.

2. THE LOGISTIC MAP AND ITS FEATURES

The logistic map is represented by a recurrent equation based on a model proposed by Verhulst (1838). This model describes population dynamics taking into account aspects like birth and death rate. This map was formulated by May (1976) who realized about the complicated dynamics exhibited by this very simple system including chaotic behavior.

This map has been used in many different disciplines and situations going from studies on competitive models, developed by Burgoa & Nogales (2001) to the emergence of coherent motion as studied by García-Cantú et al. (2011), and the spatiotemporal intermittency in coupled maps lattices described by Kaneko (1985), and Chaté & Manneville (1988). On the other hand, due to their simplicity and robustness as chaos generator, coupled logistic maps have been extensively used to describe synchronization in different scenarios as for instance with delayed coupling as studied by Masoller et al. (2001). For the above-mentioned reasons, we chose as a model for the dynamics of each of the oscillators a logistic map given by:

$$D_{n+1} = \mu D_n (1 - D_n), \quad (1)$$

where D_n is a number between zero and one that represents the dynamics of the oscillator. D_0 represents the initial condition; μ is the control parameter, a positive number whose value determines the dynamical behavior of the map, and n plays the role of time, as explained in Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila (2012).

2.1. Main hypothesis

We work with two coupled oscillators, considering the following simplifying assumptions concerning their dynamics:

- The coupled oscillators constitute an isolated system.
- Each oscillator follows a logistic map dynamics.
- The oscillators cannot collide.
- We assume that the oscillators interact in two modes: maintaining a fixed distance between them or not (see Sect. 3)

3. MODEL

Intending to study the synchronization of two motile or static oscillators, we consider the instantaneous coupling between two logistic maps whose dynamical equations are:

$$\begin{aligned} D_{n+1}^{(1)} &= \mu^{(1)} D_n^{(1)} (1 - D_n^{(1)}) + \beta_{12} (D_n^{(2)} - D_n^{(1)}) \\ D_{n+1}^{(2)} &= \mu^{(2)} D_n^{(2)} (1 - D_n^{(2)}) + \beta_{21} (D_n^{(1)} - D_n^{(2)}) \end{aligned}, \quad (2)$$

where superscripts identify the oscillators and subscripts represent the temporal evolution, and β represents the coupling strength between oscillators. Assuming the coupling symmetry: $\beta_{12} = \beta_{21} = \beta$. We consider the following cases:

- Constant coupling ($\beta = \text{const}$):
 β constant means that oscillators do not move and the coupling strength does not change.

$$\beta = \beta_{12} = \beta_{21} = \text{constant} \quad . \quad (3)$$

- Distance dependent coupling ($\beta \neq \text{const}$):
 $\beta \neq \text{const}$, means that oscillators can move. We proposed that the coupling strength varies with the inverse of the square of the Euclidean distance ρ , between their spatial positions, $(x_n^{(i)}, y_n^{(i)}, z_n^{(i)})$, of the oscillators:

$$\begin{aligned} \beta &\propto \rho^{-2} \\ \rho_n &= \sqrt{(x_n^{(2)} - x_n^{(1)})^2 + (y_n^{(2)} - y_n^{(1)})^2 + (z_n^{(2)} - z_n^{(1)})^2} \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

3.1. Existence Conditions

Taking into account that D_n must be defined in the interval $[0, 1]$, and in order to avoid values out of range, we need to impose the conditions:

$$\begin{aligned} \text{if } D_n &\geq 1 &\Rightarrow D_n &= 1 \\ \text{if } D_n &\leq 0 &\Rightarrow D_n &= 0 \end{aligned} \quad .$$

3.2. Abstract Vector

In order to study the oscillators' dynamics, we define the following n -dimensional abstract vector, \vec{V} ,

$$\vec{V}_n^{(i)} = f(D_n^{(i)}, \rho_n) \quad , \quad i = 1, 2 \quad , \quad (5)$$

where $D_n^{(i)}$ represents the i -th oscillator dynamics and ρ_n the Euclidean distance with respect to other oscillator. In this manner, we consider that each oscillator will be described by this new mathematical definition.

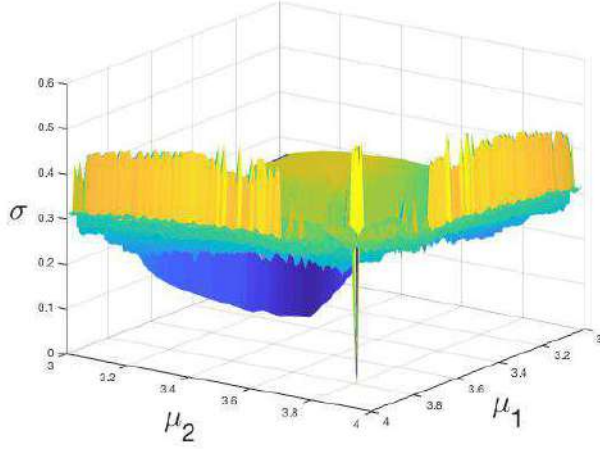


FIG. 1.— (Color online) Synchronizability factor σ_n in terms of the parameters μ_1 and μ_2 , after $n = 10^6$ time steps, for two coupled logistic maps defined in the interval $[3, 4]$ and being $\beta = 0.0029$.

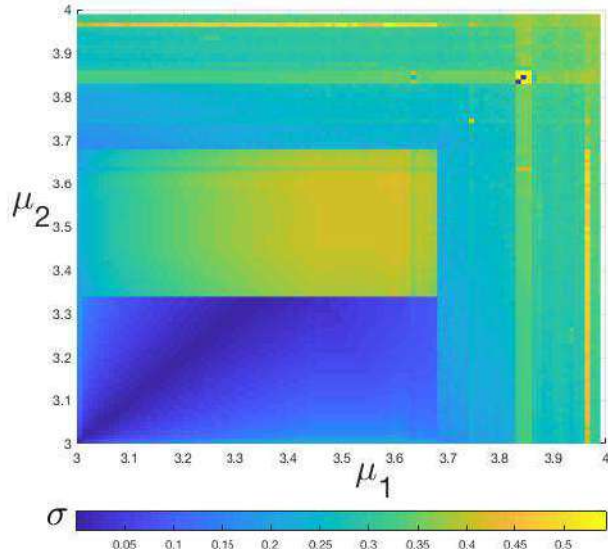


FIG. 2.— (Color online) Parameter plane (μ_1, μ_2) , in terms of the synchrony factor σ_n whose values are related to the color bar.

3.3. Synchronizability Factor

In order to quantify the general synchronization between two or more oscillators we define the *synchronizability factor* as:

$$\sigma_n^{i,j} = \frac{1}{\binom{N}{2}} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k>j}^N \left| D_n^{(i)} - D_n^{(j)} \right|, \quad (6)$$

where in the case of two oscillators, as used by Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila (2012):

$$\sigma_n^{1,2} = \left| D_n^{(1)} - D_n^{(2)} \right|. \quad (7)$$

There are many works dedicated to synchronization on coupled maps that use a synchronization factor as the indicator to characterize synchronization, e.g., several authors used the variance as such an indicator, i.e., $\sigma^2 = \frac{1}{N} \left\langle \sum_i [x_i(t) - \langle x \rangle]^2 \right\rangle_t \rightarrow 0$ to ana-

lyze coupled chaotic maps. Thus, Lind et al. (2004) adopt this indicator to study the coherence in scale-free networks; Masoller & Martí (2005) employ the variance to characterize the synchronous behavior of an array with random delays in the maps' dynamics; Lind et al. (2006) use this indicator in networks with different topologies and considering delayed couplings. In this work, we characterize synchronization using Eq. (7) when $\sigma_n \rightarrow 0$ for describing complete synchronization, in the same line of the usage of the variance as an indicator. Besides, we also consider the periodical oscillating behavior of σ_n as a manner to characterize phase-synchronization.

3.4. Cases Studied

We considered three synchronous situations: *complete synchronization* and *antisynchronization* means a synchronization in phase and amplitude, while *phase synchronization* means a periodicity value for each synchrony factor considered. Thus, we define each case as a behavior of the synchronizability factor,

- Complete synchronization: ($\sigma_n \rightarrow 0$)
- Complete Antisynchronization: ($\sigma_n \rightarrow 1$)
- Phase synchronization: ($\sigma_n \rightarrow \text{oscillant}$)

3.5. Spatial Positions and Synchronization

Following our model, each oscillator can keep a fixed distance as long as we get a synchronization factor threshold, $\sigma_n^{\text{threshold}}$, indicating that the system tends toward complete synchronization; in that case, the oscillators turn on synchronized. We can express that fact with the following expression:

$$\begin{aligned} \text{if } \sigma_n \geq \sigma_n^{\text{threshold}} &\Rightarrow \\ \left(x_{n+1}^{(i)}, y_{n+1}^{(i)}, z_{n+1}^{(i)} \right) &= \left(x_n^{(i)} + \Delta x, y_n^{(i)} + \Delta y, z_n^{(i)} + \Delta z \right) \\ \text{if } \sigma_n < \sigma_n^{\text{threshold}} &\Rightarrow \\ \left(x_{n+1}^{(i)}, y_{n+1}^{(i)}, z_{n+1}^{(i)} \right) &= \left(x_n^{(i)}, y_n^{(i)}, z_n^{(i)} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

where Δx , Δy and Δz , are small random displacements in the x , y and z directions respectively, following a Gaussian distribution.

3.6. Noncollisional Condition

In order to avoid collisions between oscillators once we randomly generate their initial positions, we introduce the condition:

$$\begin{aligned} \text{if } d_n \leq d_{\text{threshold}} &\Rightarrow \\ \left(x_{n+1}^{(i)}, y_{n+1}^{(i)}, z_{n+1}^{(i)} \right) &= \left(x_n^{(i)} + \Delta x, y_n^{(i)} + \Delta y, z_n^{(i)} + \Delta z \right) \\ \wedge d_{n+1} > d_n &, \end{aligned} \quad (9)$$

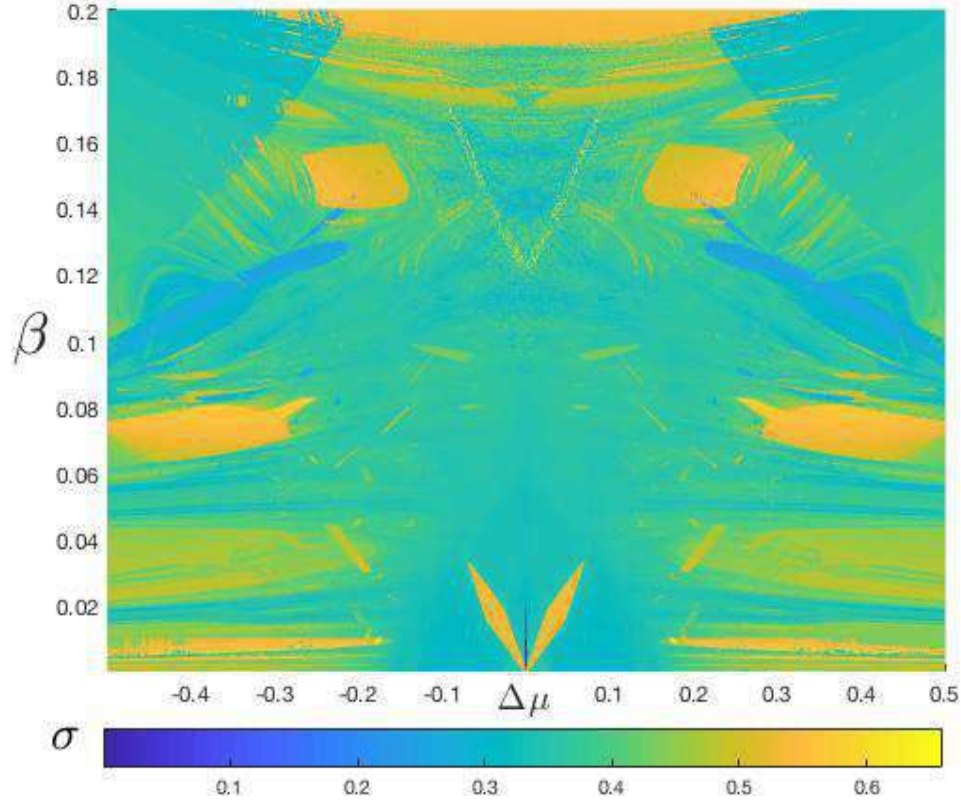


FIG. 3.— (Color online) Synchronization regions, obtained with $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 3.83$, in the plane coupling strength (β) vs. parameter mismatch ($\Delta\mu$) and described in terms of the synchronizability, σ whose values are represented in the color bar, similar to that used in Fig. 2. The central down part was reported by Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila (2016).

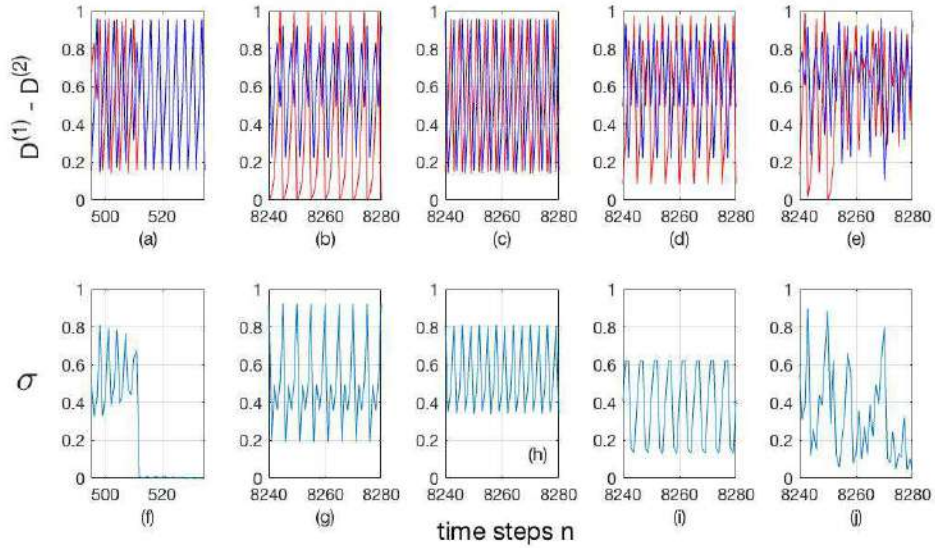


FIG. 4.— (Color online) (a)–(e) Time series of variables $D^{(1)}$ (blue) and $D^{(2)}$ (red), and (f)–(j) synchronizability, σ : (a) and (f): $\Delta\mu = 0.0000$, $\beta = 0.0064$, *complete synchronization* ($\sigma \rightarrow 0$); (b) and (g): $\Delta\mu = 0.2045$, $\beta = 0.0342$, *phase synchronization* ($\sigma_P = 5$); (c) and (h): $\Delta\mu = 0.0220$, $\beta = 0.0128$, *phase synchronization* ($\sigma_P = 6$); (d) and (i): $\Delta\mu = 0.0695$, $\beta = 0.0128$, *phase synchronization* ($\sigma_P = 10$); (e) and (j): $\Delta\mu = 0.0685$, $\beta = 0.0545$, *chaos* ($\sigma_P \rightarrow \infty$).

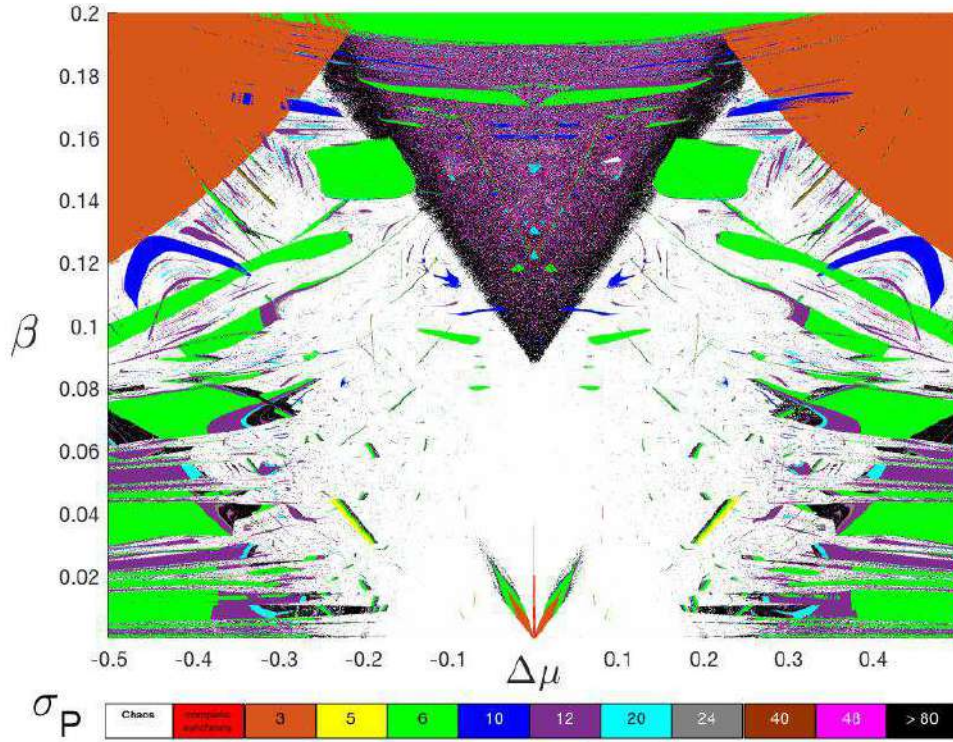


FIG. 5.— (Color online) Phase diagram: $\Delta\mu$ vs. β in terms of σ_P . The horizontal color bar represents the main periodicities appearing in the synchronization regions and also the situation of non-synchronization (white=chaos). The darkness regions (black color) means periods greater than 80. It is important to underline a integer sequence of periods found: 3, 5, 6, 10, 12, 20, 24, 40, 48, 80,... Bustos-Espinoza & Ramirez-Ávila (2016) reported the central down part.

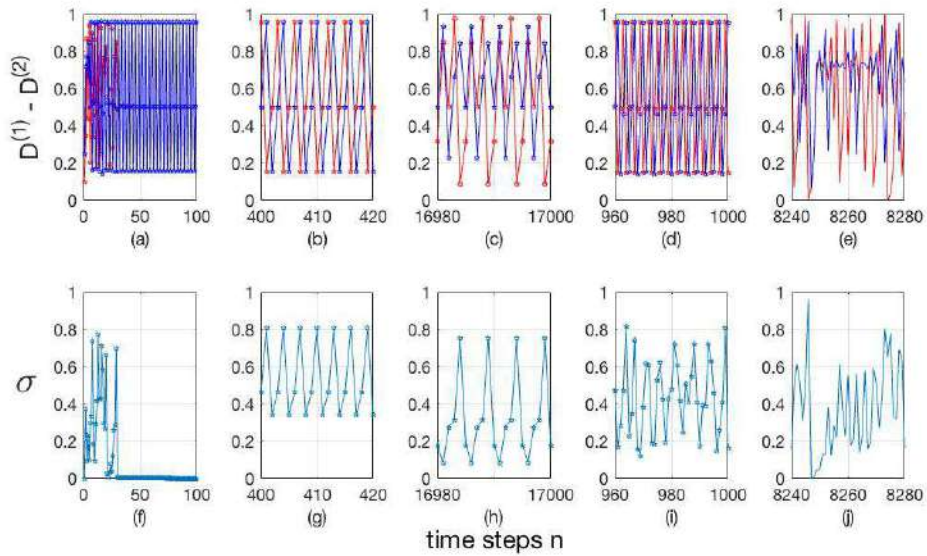


FIG. 6.— (Color online) Time series of (a)–(e) variables $D^{(1)}$ (blue) and $D^{(2)}$ (red), and (f)–(j) synchronizability, σ : (a) and (f): $\Delta\mu = 0.0000$, $\beta = 0.0070$, complete synchronization ($\sigma \rightarrow 0$); (b) and (g): $\Delta\mu = 0.0100$, $\beta = 0.0050$, phase synchronization ($\sigma_P = 3$); (c) and (h): $\Delta\mu = 0.0855$, $\beta = 0.0085$, phase synchronization ($\sigma_P = 5$); (d) and (i): $\Delta\mu = 0.0260$, $\beta = 0.0154$, phase synchronization ($\sigma_P = 6$); (e) and (j): $\Delta\mu = 0.0770$, $\beta = 0.0565$, chaos ($\sigma_P \rightarrow \infty$).

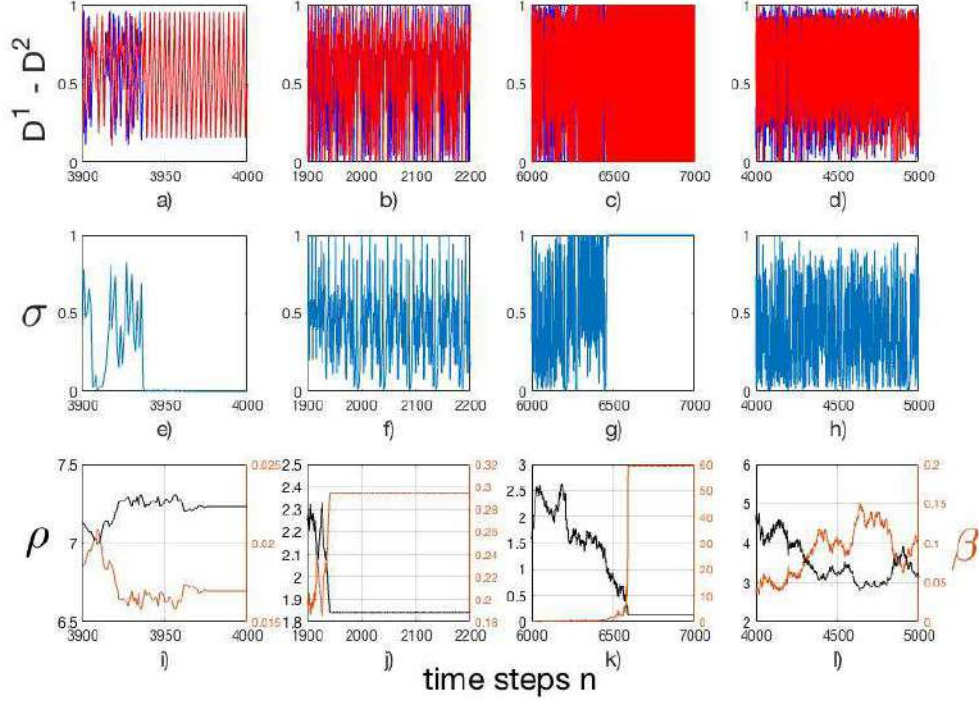


FIG. 7.— (Color online) Time series of, (a)–(d), the dynamical variables $D^{(1)}$ (blue) and $D^{(2)}$ (red); (e)–(h) the synchronizability factor σ ; (i)–(l) the relative distance ρ (black) and coupling strength, β (brown). The first column (a), (e) and (i) illustrates complete synchronization, with initial conditions (i.c.): $\vec{V}_0^{(1)} = (D_0^{(1)}, x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, z_0^{(1)}) = (0.150, 5.250, 8.000, 5.250)$; $\vec{V}_0^{(2)} = (D_0^{(2)}, x_0^{(2)}, y_0^{(2)}, z_0^{(2)}) = (0.250, 8.000, 5.250, 8.000)$; $\rho = 1.900$; (b), (f) and (j) show a phase synchrony, with i.c.: $\vec{V}_0^{(1)} = (D_0^{(1)}, x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, z_0^{(1)}) = (0.10, 8.25, 5.00, 8.25)$; $\vec{V}_0^{(2)} = (D_0^{(2)}, x_0^{(2)}, y_0^{(2)}, z_0^{(2)}) = (0.250, 5.000, 8.250, 5.000)$; $\rho = 1.900$, with a period $\sigma_P = 48$; (c), (g) and (k) show a anti-synchrony, with i.c.: $\vec{V}_0^{(1)} = (D_0^{(1)}, x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, z_0^{(1)}) = (0.100, 5.000, 5.000, 5.000)$; $\vec{V}_0^{(2)} = (D_0^{(2)}, x_0^{(2)}, y_0^{(2)}, z_0^{(2)}) = (0.250, 8.300, 8.756, 8.000)$; $\rho = 0.2$, with a period $\sigma_P = 2$; (d), (h) and (l) show a chaotic situation, with i.c.: $\vec{V}_0^{(1)} = (D_0^{(1)}, x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, z_0^{(1)}) = (0.150, 5.250, 8.000, 5.250)$; $\vec{V}_0^{(2)} = (D_0^{(2)}, x_0^{(2)}, y_0^{(2)}, z_0^{(2)}) = (0.250, 8.000, 5.250, 8.000)$; $\rho = 1.900$, with a period $\sigma_P \rightarrow \infty$. All pics with $\mu_1 = \mu_2 = 3.830$

where $d_{\text{threshold}}$, is a threshold distance that ensures non-collision between oscillators, thus avoiding an infinite coupling strength.

3.7. Synchronization Regions

Our system is composed of two coupled logistic maps. To study the synchronization regions in the parameter plane, we determine a correlation between, coupling strength β , parameter mismatch $\Delta\mu$ and σ_n . And the most important and “new” approach: β vs. parameter mismatch $\Delta\mu$, and the σ -periodicities.

$$D_{n+1}^{(1)} = \left(\mu^{(1)} + \frac{\Delta\mu}{2} \right) D_n^{(1)} \left(1 - D_n^{(1)} \right) + \beta \left(D_n^{(2)} - D_n^{(1)} \right)$$

$$D_{n+1}^{(2)} = \left(\mu^{(2)} + \frac{\Delta\mu}{2} \right) D_n^{(2)} \left(1 - D_n^{(2)} \right) + \beta \left(D_n^{(1)} - D_n^{(2)} \right)$$

4. RESULTS

We can characterize the synchronization of the system following the model described in Sect. 3, revealing the synchronizability or synchronization factor σ in terms of the parameters, i.e., $\mu^{(1)} - \mu^{(2)}$, where σ ,

has been computed taking the mean over the last 700 values. The parameters $\mu^{(i)}$, ($i = 1, 2$) where for simplicity, we adopt the notation $\mu^{(i)} = \mu_i$, are defined in the interval $[3, 4]$, regions where the logistic coupled maps can exhibit regular or chaotic behavior, as was reported by Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila (2012). In Fig. 1, we show a three-dimensional insight $\mu_1 - \mu_2 - \sigma$ that represents the surface generated after $n = 10^6$ time steps, and considering a coupling strength, $\beta = 0.0029$. The projection of Fig. 1 onto the plane $\mu_1 - \mu_2$ (the parameter plane) is shown in Fig. 2, where the color code is related to the value of σ . Both from Figs. 1 and 2, it is easy to identify a remarkable point for which σ plummets to zero. This point corresponds to $\mu_1 = \mu_2 = 3.83$. In what it follows, we will consider these values of μ_i as referential ones to describe the dynamical behavior of the (10) coupled maps when the parameter mismatch ($\Delta\mu$) is increased. The computation of the σ values when varying the coupling strength (β) and $\Delta\mu$ results in constructing the phase diagram of the system after an extensive analysis of the periodicities.

4.1. Constant Coupling

In order to find the synchronization regions for the system of two coupled logistic map, we follow the model explained in Sect. 3, i.e., $\beta = \text{const}$ or nonmoving oscillators. We recompute the synchronizability σ using Eq. (10) and introducing the parameter mismatch $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$, i.e., when both oscillators are identical $\Delta\mu = 0$ or they are nonidentical $\Delta\mu \neq 0$. We chose an ample interval of coupling strength values, β , obtaining a new parameter plane given by β vs. $\Delta\mu$ and depicted in terms of the σ -values shown in Fig. 3, where it is notable the symmetry manifested for the quadratic form of the logistic maps.

To know more about the dynamics of the system, we choose some points inside some regions of Fig. 3 for obtaining the evolution of the dynamical variables, $D^{(i)}$, ($i = 1, 2$), and their corresponding σ_n time series shown in Fig. 4(a)–(e) and Fig. 4(f)–(j) respectively.

From Fig. 4(a) we observe that the signals are completely synchronized, i.e. our quantifier of the phenomenon, σ , goes to zero ($\sigma \rightarrow 0$) as it is shown in Fig. 4(f). In Figs. 4(b)–(d), we can see that the time series are in phase synchronization, whose synchronizability factor oscillates with a well defined period, shown in Figs. 4(g)–(i). Finally, in Figs. 4(e) and (j) the time series exhibit a chaotic behavior and their synchronizability σ oscillates without any specific period. Time series of (a)–(e) variables $D^{(1)}$ (blue) and $D^{(2)}$ (red), and (f)–(j) synchronizability, σ , are: (a) and (f): $\Delta\mu = 0.0000$, $\beta = 0.0064$, *complete synchronization* ($\sigma \rightarrow 0$); (b) and (g): $\Delta\mu = 0.2045$, $\beta = 0.0342$, *phase synchronization* ($\sigma_P = 5$); (c) and (h): $\Delta\mu = 0.0220$, $\beta = 0.0128$, *phase synchronization* ($\sigma_P = 6$); (d) and (i): $\Delta\mu = 0.0695$, $\beta = 0.0128$, *phase synchronization* ($\sigma_P = 10$); (e) and (j): $\Delta\mu = 0.0685$, $\beta = 0.0545$, *chaos* ($\sigma_P \rightarrow \infty$).

4.2. Periodicities

To have a deeper insight of the system's dynamical properties, we analyze the parameter plane by measuring the periods of the synchronizability, σ_P taking the mean over the last 500 values of each σ . With this technique we obtain a new extended parameter plane, β vs. $\Delta\mu$ described in terms of the periodicities σ_P , shown in Fig. 5, where the horizontal color bar represents the main periodicities appearing in the synchronization regions. The extreme cases, complete synchrony and chaos, are defined as that they do not have any periodicity because the synchronizability in these cases remains stable or oscillates chaotically, respectively. Note that the symmetry and the relevant regions of apparent same σ values in Fig. 5. Another interesting issue found in the upper part of Fig. 5, below the orange region with periodicity 3, is the presence of regions with similar shapes to those found by Ramírez-Ávila & Gallas (2011) in the parameter space of the Tinkerbell map.

To test the system we choose some points inside specific regions for evaluating the dynamic variables, $D^{(i)}$, and their corresponding synchronizability σ , as we can see in Fig. 6(a)–(e) and Fig. 6(f)–(j) respectively. The time series of the variables $D^{(1)}$ and $D^{(2)}$

are represented in blue and red respectively. The chosen points $(\Delta\mu, \sigma)$ were: (0.0000, 0.0070), showing *complete synchronization*, i.e. $\sigma \rightarrow 0$; (b) and (g): (0.0100, 0.0050), exhibiting *phase synchronization*, with $\sigma_P = 3$; (c) and (h): (0.0855, 0.0085), also displaying *phase synchronization*, with $\sigma_P = 5$; (d) and (i): (0.0260, 0.0154), also showing *phase synchronization*, with $\sigma_P = 6$; and finally (e) and (j): (0.0770, 0.0565), illustrating *chaotic* behavior, without any specific periodicity. Note the integer sequence of periods: 3, 5, 6, 10, 12, 20, 24, 40, 48, 80, 96,...

4.3. Integer Sequence of Periods

We found the integer sequence of periods: 3, 5, 6, 10, 12, 20, 24, 40, 48, 80, 96, ..., might be described by the recurrent integer sequence relation given by Eq. (11), with a new seed, i.e., $P(1) = 3$ and $P(2) = 5$, different of what was found by Brockhaus (2009). We do not include the extreme cases of complete synchronization and chaos.

$$\begin{aligned} P(n) &= 2P(n-2) \quad (n > 2); \\ P(1) &= 3, \quad P(2) = 5 \end{aligned} \quad (11)$$

4.4. Distance dependence

As we proposed in Sect. 3, synchronization depends on the magnitude of the coupling strength, β , i.e., we can consider a system where the oscillators can move according to Eqs. (8) and (9); that means a permanent change in the spatial positions before they can synchronize. In several cases, movement tends to facilitate synchronization, as was pointed out by Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila (2012). In this work, we study an amplified parameter plane in order to confirm if the movement enhances or not the synchronization. To this end, we study the abstract vector \vec{V} , defined in Eq. (5), i.e., the dynamical variables, $D^{(i)}$, ($i = 1, 2$), the relative distance between oscillators, ρ , altogether with their correspondent coupling strength, $\beta \propto \rho^{-2}$ and the synchronizability factor, σ , the whole as a function of time n . The results are shown in a matrix of graphs shown in Fig. 7, where we can check the time series of the dynamical variables $D^{(1)}$ (blue) and $D^{(2)}$ (red), in Fig. 7(a)–(d); the synchronizability σ in Fig. 7(e)–(h), and the relative distance, ρ (black) and the coupling strength, β (brown) in Fig. 7(i)–(l). Drawing attention to the columns, the first one Figs. 7(a), (e) and (i) describing the situation of complete synchronization, with the initial conditions (i.c.): $\vec{V}_0^{(1)} = (D_0^{(1)}, x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, z_0^{(1)}) = (0.15, 5.250, 8.000, 5.250)$; $\vec{V}_0^{(2)} = (D_0^{(2)}, x_0^{(2)}, y_0^{(2)}, z_0^{(2)}) = (0.250, 8.000, 5.250, 8.000)$; a threshold distance, $d_{\text{threshold}} = \rho = 1.900$; (b), (f) and (j) shown a phase synchrony, with i.c.: $\vec{V}_0^{(1)} = (D_0^{(1)}, x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, z_0^{(1)}) = (0.10, 8.250, 5.000, 8.250)$; $\vec{V}_0^{(2)} = (D_0^{(2)}, x_0^{(2)}, y_0^{(2)}, z_0^{(2)}) = (0.25, 5.000, 8.250, 5.00)$; with a threshold distance, $\rho = 1.900$, and a periodicity value, $\sigma_P = 48$. In the situation shown in (c), (g) and (k) we decrease the threshold distance, $\rho = 0.2$ in order to get an anti-synchronization, i.e., $D_n^{(1)} + D_n^{(2)} = 1$, with i.c.:

$$\vec{V}_0^{(1)} = (D_0^{(1)}, x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, z_0^{(1)}) = (0.10, 5.000, 5.000, 5.00);$$

$$\vec{V}_0^{(2)} = (D_0^{(2)}, x_0^{(2)}, y_0^{(2)}, z_0^{(2)}) = (0.25, 8.300, 8.756, 8.00).$$

In this column the dynamic oscillation goes from 0 to 1 repeating a few times ($n = 118$); and finally, (d), (h) and (l), shown a chaos situation, with i.c.:
 $\vec{V}_0^{(1)} = (D_0^{(1)}, x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, z_0^{(1)}) = (0.15, 5.250, 8.000, 5.25);$
 $\vec{V}_0^{(2)} = (D_0^{(2)}, x_0^{(2)}, y_0^{(2)}, z_0^{(2)}) = (0.25, 8.000, 5.250, 8.000);$
 a threshold distance, $\rho = 1.900$, with a periodicity $\sigma_P \rightarrow \infty$. All pics were calculated with $\mu_1 = \mu_2 = 3.830$

5. CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES

Using the proposed model and the extended domain of our parameters we get an amplified new synchronization region, where we apply the periodicity technique, reported by Bustos-Espinoza & Ramírez-Ávila (2016), in order to get a new phase diagram. It was possible to identify a natural sequence of integers (periods) that appear on our map, this sequence comes from a bifurcation cascade into the parameter plane, exiting a chaotic window and going to another chaotic region in a system of two coupled logistic maps whose dynamical behavior in terms of their integer periodicities, follows a recurrence relation with a new seed, a different to that found by Brockhaus (2009), who combine the series, $P(n) = 3 \times 2^n$ and $P(n) = 5 \times 2^n$, but without initial term 3 in the first one.

In our study of static and dynamic situations, we find in both cases other types of synchronization besides the complete one, i.e. phase and anti synchronization. The abstract vector, which includes dynamics and spatial positions, enables us to understand in

a deeper way the dynamical aspects related to synchronization in this type of system. Another important result is the confirmation that movement tends to enhance synchronization.

Our comprehensive study on the synchronization of coupled logistic maps using periodicities, allowed us to find synchronization regions with shapes very different to the typical Arnold tongues and with the feature that due to the knowledge of periods, the determination of the so-called winding numbers is done. The huge interval of coupling strength values considered in this work might be essential information in the situation in which the oscillators are moving. This knowledge permits us to know instantaneously whether the oscillators are located in positions allowing synchronization. The method to detect synchronization developed here might be extended to systems with many coupled maps and organized under different topologies similar to those studied by Lind et al. (2004a, 2006). Moreover, our method might also be used for detecting synchronization in other kinds of maps, for instance, in cubic maps exhibiting bistability as those studied by Lind et al. (2004) or multistability as in the case of coupled trios of Rulkov maps considered by Iglesias & Ramírez-Ávila (2019). Finally, it is possible to use other potentials according to the type of movement and interaction between the oscillators, as the Lennard-Jones potential that models soft attractive, and repulsive interactions.

Conflict of interests

Authors declare that there is no conflict of interest with respect to the publication of this document.

REFERENCIAS

- Brockhaus, K. 2009 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (A164095), available in <https://oeis.org/A164095>
- Burgoa, K. L., & Nogales, J. A. C. 2001, Revista Boliviana de Física, **7**, 51
- Bustos-Espinoza, R. O. E., & Ramírez-Ávila, G. M. 2016, The European Physical Journal Special Topics, **225**, 2697
- Bustos-Espinoza, R. O. E., & Ramírez-Ávila, G. M. 2012, Revista Boliviana de Física, **22**, 1
- Calderón de la Barca, I., & Ramírez-Ávila, G. M. 2017, Revista Boliviana de Física, **30**, 1
- Chaté, H., & Manneville, P. 1988, Physica D, **32**, 409
- Chua, L. 1993, Journal of Circuits, Systems and Computers, **3**, 93
- Fujisaka, H., & Yamada, T. 1983, Progress of Theoretical Physics, **69**, 32
- Fujiwara, N., Kurths, J., & Díaz-Guilera, A. 2011, Physical Review E, **83**, 025101
- Iglesias, K., & Ramírez-Ávila, G. M. 2019, Revista Boliviana de Física, **34**, 3
- Kaneko, K. 1985, Progress of Theoretical Physics, **74**, 1033
- Kuramoto, Y., & Nishikawa, I. 1987, Journal of Statistical Physics, **49**, 569
- Kocarev, L. (Ed.) 2013, Consensus and Synchronization in Complex Networks (Berlin: Springer)
- García-Cantú, A., Antonopoulos, Ch G., & Basios, V. 2011, Chaos, Solitons & Fractals, **44**, 574
- L'Her, A., Amil, P., Rubido, N., Martí, A. C., & Cabeza, C. 2016, The European Physical Journal B, **89**, 81
- Lind, P. G., Corte-Real, J., & Gallas, J. A. C. 2004, Physical Review E, **69**, 026209
- Lind, P. G., Gallas, J. A. C., & Herrmann, H. J. 2004, Physical Review E, **70**, 056207
- Lind, P. G., Nunes, A., & Gallas, J. A. C. 2004, Physica A, **371**, 100
- Masoller, C., Cavalcante, H. L. D., & Rios Leite, J. 2001, Physical Review E, **64**, 037202
- Masoller, C., & Martí, A. C. 2001, Physical Review Letters, **94**, 134102-4
- Matsumoto, T. 1984, IEEE Transactions on Circuits and Systems, **31**, 1055
- May, R. 1976, Nature, **261**, 459
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., & Kurths, J. 2001, Synchronization, A Universal Concept in Nonlinear Sciences (Cambridge: Cambridge University Press)
- Ramírez-Ávila, G. M., Guisset, J. L., & Deneubourg, J. L. 2003, Physica D: Nonlinear Phenomena, **182**, 254
- Ramírez-Ávila, G. M., Guisset, J. L., & Deneubourg, J. L. 2006, Revista Boliviana de Física, **12**, 1
- Ramírez-Ávila, G. M., & Gallas, J. A. C. 2011, Revista Boliviana de Física, **19**, 1
- Schultz, P., Heitzig, J., & Kurths, J. 2014, New Journal of Physics, **16**, 125001
- Subieta-Frias, V. & Ramírez-Ávila, G. M. 2017, Revista Boliviana de Física, **31**, 3
- Sun, H., & Cao, H. 2016, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **40**, 15
- Tang, Y., Mees, A., & Chua, L. 1983, IEEE Transactions on Circuits and Systems, **30**, 620
- Verhulst, P. 1838, Correspondance Mathématique et Physique, **10**, 113
- Yamada, T., & Fujisaka, H. 1983, Progress of Theoretical Physics, **70**, 1240

ESTRUCTURAS LOCALIZADAS Y EXTENDIDAS DE LA ECUACIÓN COMPLEJA DE
GINZBURG-LANDAU CÚBICA-QUÍNTICA-SÉPTICA ASOCIADA A LA ECUACIÓN DE SINE-GORDON
PARAMÉTRICAMENTE FORZADA Y CON DISIPACIÓN

LOCALIZED AND EXTENDED STRUCTURES OF THE COMPLEX
GINZBURG-LANDAU CUBIC-QUINTIC-SEPTIC EQUATION ASSOCIATED WITH THE
PARAMETRICALLY FORCED AND DISSIPATIVE SINE-GORDON EQUATION

JULIANA CARRASCO-MEJÍA[†] & DETERLINO URZAGASTI
Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés
Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia
(Recibido 27 de septiembre de 2020; aceptado 30 de octubre de 2020)

RESUMEN

En el presente trabajo se estudió la formación de estructuras localizadas y extendidas en un sistema forzado paraméricamente cerca de la resonancia paramétrica y con débil disipación descrito por la ecuación de Sine-Gordon perturbada (SGP). Estas estructuras fueron descritas a partir de la ecuación de amplitud asociada considerando hasta los términos de séptimo orden, esto es, mediante la ecuación compleja de Ginzburg-Landau Cúbica-Quíntica-Séptica (CGL-Séptica) asociada a la ecuación SGP. No se encontraron soluciones analíticas estables localizadas; sin embargo, si se hallaron soluciones numéricas en forma tanto de estructura localizada como de patrón, encontrándose comportamientos dinámicos oscilatorios de dichas estructuras debido a la presencia de los términos de séptimo orden. Finalmente, se han comparado las regiones de existencia de solitones de los modelos SGP y CGL-Séptica.

Descriptor: Solitones — teoría Ginzburg-Landau — fenómenos no lineales

Código(s) PACS: 05.45.Yv, 74.20.De, 52.35.Mw

ABSTRACT

In the present work we studied the formation of localized and extended structures in a parametrically forced system near the parametric resonance and with weak dissipation described by the perturbed Sine-Gordon equation (SGP). These structures were described from the associated amplitude equation considering up to the seventh-order terms, i.e., by the complex Ginzburg-Landau Cubic - Quintic-Septic (CGL-Septic) equation associated with the SGP equation. No localized stable analytical solutions were found, however, numerical solutions were found in the form of both localized structure and pattern. Oscillatory dynamic behavior of these structures was found due to the presence of the seventh order terms. Finally, the soliton existence regions of the SGP and CGL-Septic models were compared.

Subject headings: Solitons — Ginzburg-Landau theory — Nonlinear phenomena

1. INTRODUCCIÓN

La dinámica no lineal, la cual es un campo de estudio relativamente nuevo, tiene gran importancia para lograr un mejor entendimiento de los fenómenos físicos presentes en la naturaleza. Los sistemas no lineales presentan fuertes interacciones entre sus componentes, es decir, matemáticamente no cumplen con el principio de superposición por lo que su análisis resulta mucho más complicado que el de los sistemas lineales, los cuales si son iguales a la suma de sus partes permitiendo una gran simplificación de los problemas complejos. Por otra parte, los sistemas no-lineales pueden ser muy

sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales provocándose grandes diferencias en los comportamientos del sistema y llegándose a presentar dinámicas muy complejas y/o caóticas. Debido a estas complicaciones, la mayoría de los sistemas no lineales son imposibles de resolver analíticamente, de manera que el uso de soluciones numéricas es una herramienta invaluable en el estudio de dichos sistemas. De esta forma, con los avances computacionales se ha dado inicio al estudio de la dinámica no lineal, permitiendo experimentar con ecuaciones de una manera que antes resultaba imposible.

El comportamiento de los sistemas no lineales es descrito por ecuaciones no lineales en derivadas parciales (EDPN), las cuales son capaces de generar una variedad de estructuras espacio-temporales.

[†]maradejuly@gmail.com

Existe un tipo especial de EDPN completamente integrables que presentan soluciones localizadas tipo-partícula, denominadas *solitones*. Estas son ondas solitarias capaces de preservar su forma y velocidad durante su propagación e incluso tras interactuar con otras semejantes. Una de las EDPN más importantes es la ecuación de Sine-Gordon (SG), la cual aparece en muchas áreas de la ciencia moderna, describiendo distintos fenómenos físicos principalmente en una aproximación unidimensional, incluyendo la propagación de flujos magnéticos en las uniones de Josephson, ondas en materiales ferromagnéticos, movimientos de dislocaciones en cristales, pulsos ópticos en un medio láser, y osciladores no lineales acoplados, entre otros Cuevas-Maraver *et al.* (2014); Braun and Kivshar (2013); Barone and Paterno (1982); Gulevich and Kusmartsev (2006); Feldtkeller (1968); Nabarro (1987); Leblond *et al.* (2013); Mihalache (2012); Ivancevic and Ivancevic (2013).

La generalización del concepto de solitón como estructura coherente ha dado lugar a una variedad de estudios sobre dinámica no lineal en los últimos años, principalmente en la formación de estructuras localizadas Coulet (2002) y patrones Coulet *et al.* (1994) que han sido observadas en los sistemas alejados del equilibrio (sistemas con inyección y disipación de energía) en distintos campos de la ciencia, como por ejemplo en medios magnéticos, cristales líquidos, sistemas ópticos no lineales, fluidos, reacciones químicas, por mencionar algunos Ankiewicz and Akhmediev (2008); Descalzi *et al.* (2011); Eschenfelder (2012); Edwards and Fauve (1994); Umbanhowar *et al.* (1996).

Muchos de los sistemas físicos que exhiben estructuras localizadas y extendidas están sujetos a un forzamiento paramétrico, particularmente periódico en el tiempo. Sin embargo, este tipo de perturbaciones, en el caso de la ecuación de Sine-Gordon, hacen que pierda su completa integrabilidad y presente una dinámica muy complicada. Por tanto, generalmente estos sistemas no pueden ser resueltos analíticamente y por esta razón es preciso recurrir a métodos analíticos aproximados, en particular aquellos que nos permitan describir la existencia de estas estructuras espacio-temporales. Una forma es a través de un análisis perturbativo cerca de las bifurcaciones, por medio de las denominadas *ecuaciones de amplitud*, válidas para sistemas débilmente disipativos, para las cuales pueden o no existir soluciones exactas Van Hecke *et al.* (1994); Cross and Hohenberg (1993); donde la ecuación compleja de Ginzburg-Landau (CGLE) es la ecuación de amplitud más general Aranson and Kramer (2002); Akhmediev and Ankiewicz.

En la mayoría de los estudios realizados respecto a la descripción de estructuras localizadas y extendidas por medio de ecuaciones de amplitud, se ha tratado dichas ecuaciones hasta el orden cúbico. En trabajos recientes se mostró que términos quinticos (en particular de la CGLE) permiten la aparición de estructuras que no se aparecían en el caso cúbico,

además de exhibir una mejor aproximación al sistema original.

En el presente trabajo se tiene como objetivo estudiar la existencia y las propiedades de estructuras localizadas y extendidas que presenta el modelo de Sine-Gordon unidimensional cuando es perturbado con un forzamiento paramétrico y con disipación de energía. El problema es abordado de una manera unificada por medio de la ecuación de amplitud asociada con términos de hasta séptimo orden, cuyas soluciones nos describirán los diferentes tipos de estructuras espacio-temporales que el sistema es capaz de generar; por lo cual se estudia el sistema cerca de la resonancia paramétrica. Se buscan por un lado soluciones localizadas de manera analítica y por otro lado soluciones numéricas a la CGLE Cúbica-Quintica-Séptica asociada a la ecuación de Sine-Gordon forzada paramétricamente y con disipación.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Estructuras localizadas y extendidas

Un solitón es considerado como una entidad tipo partícula, la cual se propaga conservando su identidad incluso tras interactuar con otros solitones Remoissenet (2013). Se refiere a una solución localizada de una ecuación dispersiva no-lineal, tal que puede ser entendido como el resultado del balance entre el efecto de la no-linealidad y el de la dispersión. Por otra parte, está relacionado con la propagación de ciertas ondas que no sufren atenuación en un medio disipativo, generalizándose como una estructura localizada presente en sistemas disipativos y alejados del equilibrio denominada solitón disipativo. Bajo este último contexto, una estructura disipativa puede entenderse como la encargada de permitir alcanzar un cierto orden a expensas de un continuo aporte de energía externa al sistema, por lo cual se dice que dichos sistemas concluyen en un estado de cuasi-equilibrio. De esta forma, una estructura disipativa se entiende como producto del balance dinámico entre la no-linealidad, la dispersión y la disipación.

En un sistema unidimensional, los estados localizados son entendidos como trayectorias que conectan un estado estacionario consigo mismo, es decir, desde el punto de vista de la teoría de sistemas dinámicos, son órbitas homoclínicas. Por otra parte, las soluciones tipo frentes representan trayectorias espaciales que conectan dos estados estacionarios diferentes, correspondientes a las curvas heteroclínicas.

Por tanto, sistemas extendidos espacialmente que son mantenidos lejos del equilibrio mediante inyección y disipación de energía, son capaces de exhibir comportamientos más complejos tales como estructuras localizadas y formación de patrones Pismen (2006); Nicolis *et al.* (1977); Cross and Hohenberg (1993). Estas estructuras representan estados que rompen localmente la simetría de traslación, es decir, son desarrolladas a partir de un estado ho-

mogéneo espacialmente.

Para nuestro particular interés, un sistema forzado paramétricamente es aquel sistema al cual se le inyecta energía por medio de la modulación temporal de alguno de sus parámetros. En el caso de un oscilador, si el parámetro varía periódicamente con una frecuencia igual al doble de la frecuencia natural del mismo ocurre lo que se denomina resonancia paramétrica, lo cual puede generar inestabilidades de los puntos de equilibrio bajo estudio. En sistemas disipativos, una manera de compensar las pérdidas de energía eficientemente es mediante el fenómeno de la resonancia paramétrica.

Se sabe que los efectos físicos producidos debido a fuerzas directas y paramétricas son diferentes, en los sistemas lineales la inestabilidad de la oscilación debido a una fuerza paramétrica no puede ser limitada por disipación como lo es en el caso de la resonancia por un forzamiento directo Landau and Lifshitz (1960).

Los sistemas reversibles temporalmente, que son perturbados con inyección y disipación de energía, son denominados sistemas cuasi-reversibles. Cuando dichos sistemas son forzados paramétricamente cerca de la resonancia paramétrica se dice que muestran una resonancia subarmónica, lo cual quiere decir que el sistema responde con una frecuencia igual a la mitad de la frecuencia de forzamiento. De este modo, el forzamiento externo da lugar a que el sistema presente biestabilidad, es decir, la coexistencia entre dos estados estables de equilibrio dentro de un rango de parámetros, generalmente se da entre el estado oscilatorio de amplitud finita con frecuencia vinculada a la del forzamiento y el estado trivial de amplitud nula. En todo caso, la presencia de biestabilidad en el sistema está asociada con la aparición de estructuras localizadas Knobloch (2008); Clerc *et al.* (2009). Cuando en dichos sistemas la disipación es pequeña, cerca de la resonancia paramétrica el sistema puede ser descrito mediante la ecuación de amplitud asociada al mismo, donde dicha ecuación nos permite estudiar estructuras localizadas en el sistema que describen la evolución de la envolvente de las oscilaciones uniformes.

2.2. Ecuación de amplitud (CGLE)

Generalmente, al tratar con sistemas dinámicos, a uno le interesa el comportamiento asintótico a largo plazo. El estado asintótico hacia el cual el sistema tiende a evolucionar es denominado un *atractor*, el cual, puede ser un estado estacionario o una órbita periódica, cuasi-periódica o caótica. En sistemas no-lineales extendidos espacialmente, éstos pueden ser por ejemplo patrones periódicos estacionarios o cuasi-periódicos, estados localizados ó estados desordenados, entre otros.

Cuando los parámetros del sistema cambian, sus atractores también los hacen generalmente de forma cuantitativa; sin embargo, para ciertos valores de parámetros se producen cambios cualitativos en el comportamiento del sistema donde los atractores cambian su carácter o bien desaparecen y surgen

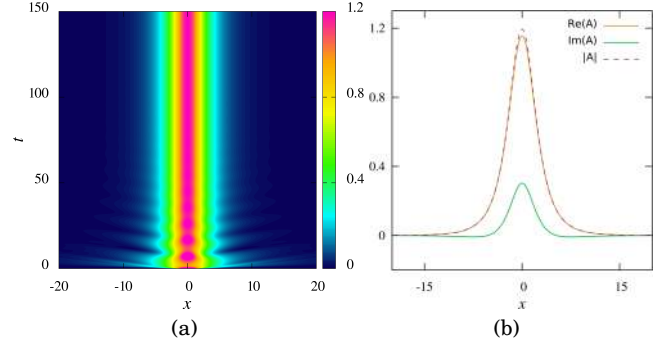


FIG. 1.— Diagrama espacio-temporal del módulo de la amplitud $|A|$ de un solitón disipativo estacionario y el perfil en un instante t de la parte real e imaginaria de su amplitud A , dado para los parámetros $\gamma = 0.4$ y $\nu = -0.26$.

nuevos. Estos cambios cualitativos al cruzar ciertas fronteras se denominan *bifurcaciones*, donde su aparición a menudo viene acompañada de una inestabilidad.

El estudio cerca de las bifurcaciones es de especial interés, ya que permite describir genéricamente sistemas con más de un estado de equilibrio, y por otra parte muestra una rica dinámica del sistema ya que en esta región puede observarse una variedad de comportamientos y diferentes tipos de transiciones.

Las ecuaciones no lineales que describen estructuras localizadas y formación de patrones en su mayoría no pueden ser resueltas analíticamente. Sin embargo, cerca de una bifurcación es posible encontrar una descripción más simplificada de las soluciones localizadas y extendidas en términos de solamente su amplitud, esto mediante la llamada *ecuación de amplitud*. Esta describe las modulaciones lentas en el espacio y tiempo de la dinámica del sistema, por lo cual representa una aproximación del sistema en estudio, que, sin embargo, conserva lo esencial del mismo. De esta forma, brinda una comprensión del comportamiento general de la formación de patrones y estructuras localizadas que se presentan en numerosos sistemas físicos.

La ecuación de amplitud más general es la *ecuación compleja de Ginzburg-Landau* (CGLE), empleada para modelar diversos fenómenos físicos. Entre éstos, transiciones de fase de segundo orden, superconductividad y cuerdas en teoría de campos. Provee además una descripción universal simplificada de los fenómenos asociados a estructuras localizadas y extendidas en sistemas débilmente disipativos extendidos espacialmente Aranson and Kramer (2002). Tiene diferentes tipos de soluciones incluyendo solitones, frentes de onda y patrones regulares entre otros, dependiendo de los parámetros del sistema.

Hasta la fecha se ha estudiado la CGLE Cúbica-Quíntica, dada de la forma:

$$\partial_T A = c_1 \partial_X^2 A + c_2 A - c_3 A |A|^2 + c_4 A |A|^4,$$

donde A es una función compleja del espacio y el tiempo que representa una amplitud de variación lenta y los coeficientes son números complejos que

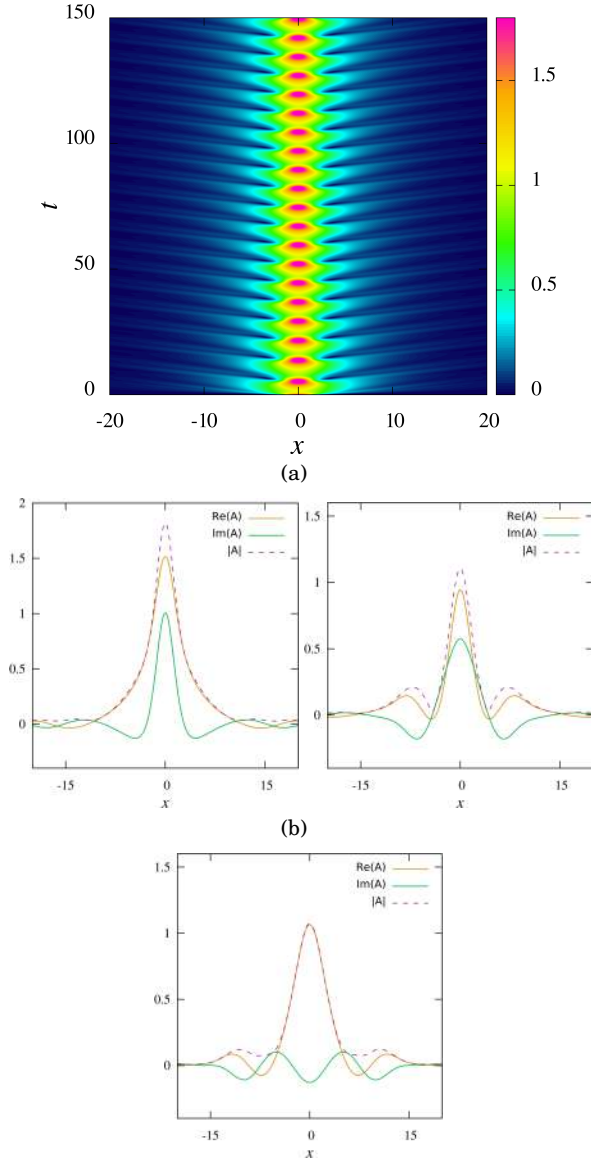


FIG. 2.— a) Diagrama espacio-temporal de $|A|$ de un *breather* disipativo dado para los parámetros $\gamma = 0.6$ y $\nu = -0.36$. b) Perfil de la parte real e imaginaria de la amplitud A del *breather* en diferentes instantes de tiempo.

dan cuenta de la disipación y de las interacciones no lineales que están relacionados con los parámetros del sistema subyacente.

Debe tomarse en cuenta que esta ecuación es válida bajo condiciones de una débil disipación y solamente en las cercanías de una inestabilidad de un estado homogéneo principal, es decir, cerca de una bifurcación.

2.3. Ecuación de Sine-Gordon amortiguada y paramétricamente forzada (SGP)

La ecuación de Sine-Gordon (SG) es una ecuación diferencial parcial no lineal hiperbólica, usualmente empleada para describir fenómenos físicos en la aproximación unidimensional, en su mayoría en el área de la física del estado sólido, por ejemplo para la propagación de flujos magnéticos en las uniones de Josephson. Está dada por $\phi_{XX} - \phi_{TT} = \text{sen}\phi$. Una de

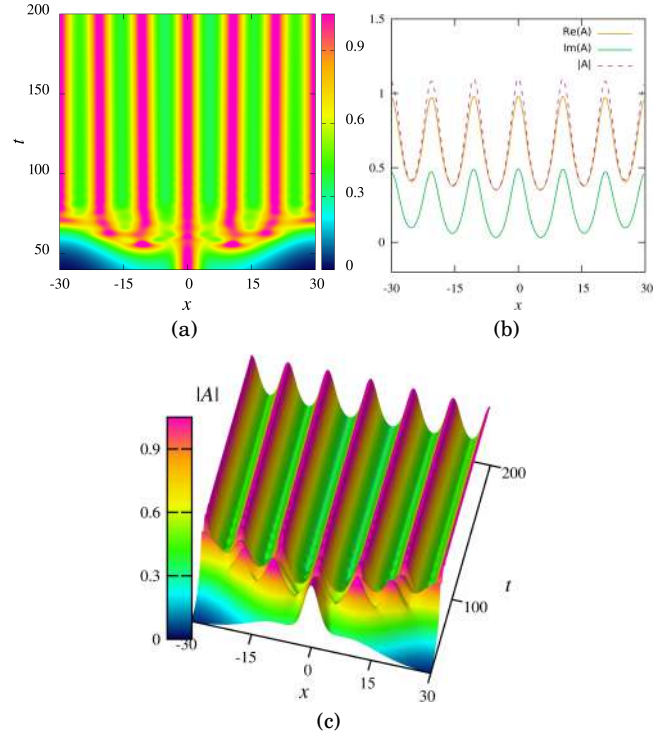


FIG. 3.— Diagrama espacio-temporal de $|A|$ de un patrón estacionario con forma de onda dado para $\gamma = 0.5$ y $\nu = -0.18$.

sus principales características es que soporta soluciones localizadas tipo solitones, donde las más simples pueden ser de dos tipos, *kinks* y *breathers*.

La solución *kink* describe una excitación localizada estática o dinámica, que conecta dos estados estables de equilibrio cercanos, mientras que la solución *breather* es considerada como un estado ligado dinámico de un *kink* y un *antikink*, que representan un estado oscilatorio no lineal que puede ser igualmente estacionario o móvil.

Una forma de interpretar dichas soluciones es mediante el modelo mecánico simple de una cadena infinita de péndulos acoplados a una distancia infinitesimal (caso continuo del modelo de Frenkel-Kontorova), donde un *kink* es considerado como una rotación en ϕ de 2π mientras x va de $-\infty$ a $+\infty$ y un *antikink* en cambio representa una rotación negativa.

Consideramos ahora el caso en el que el sistema descrito por la ecuación SG se encuentra bajo la influencia de fuerzas disipativas y campos externos, particularmente bajo un campo externo periódico en el tiempo de modo que se compensen las pérdidas disipativas y el sistema presente algún comportamiento estacionario. Por tanto, derivamos a la ecuación de Sine-Gordon perturbada con forzamiento paramétrico y disipación de energía (SGP), la cual según el modelo mecánico describe una cadena amortiguada de péndulos acoplados por resortes, cuyo soporte oscila verticalmente, y está dada por:

$$\partial_T^2 \theta = -(w_0^2 + \gamma_0 \text{sen}(wT)) \text{sen}\theta - \mu_0 \partial_T \theta + \partial_X^2 \theta, \quad (1)$$

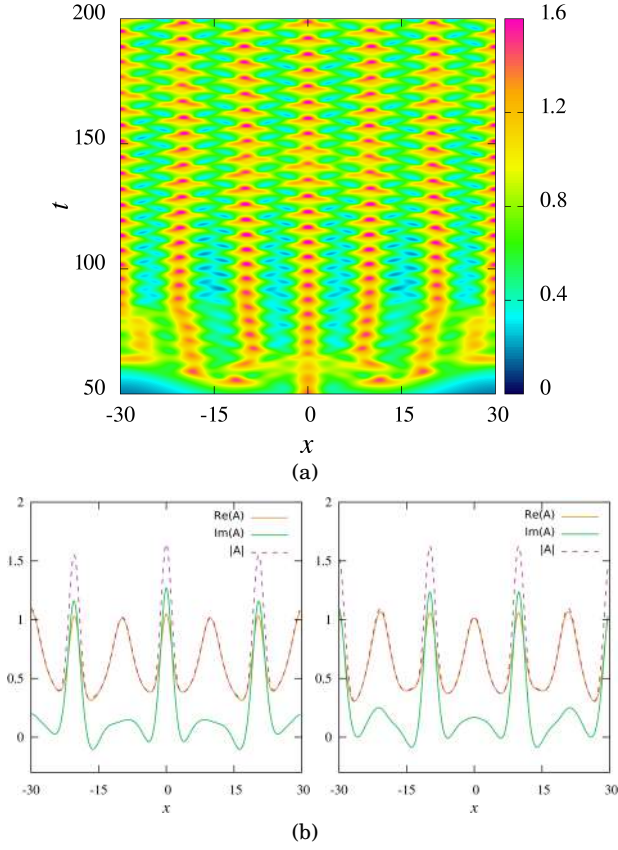


FIG. 4.— a) Diagrama espacio-temporal de $|A|$ para un patrón oscilatorio periódico espacialmente dado en $\gamma = 0.6$ y $\nu = -0.26$ y b) perfil de la parte real e imaginaria de la amplitud A en dos instantes de tiempo distintos.

donde $\theta = \theta(X, T)$ es el ángulo del péndulo con la vertical en la posición X en un instante T , w_0 es la frecuencia natural de los péndulos (en el caso idealizado $w_0^2 = g/l$), γ_0 es la amplitud del forzamiento (relacionado al desplazamiento vertical del soporte a mediante $\gamma = aw^2/l$), w es la frecuencia del forzamiento y μ_0 representa la disipación de energía. Esta ecuación aparece en varios sistemas físicos importantes, por ejemplo en los sistemas magnéticos donde se presenta como una ecuación de movimiento efectiva para el vector de magnetización Urzagasti *et al.* (2013); Zharnitsky *et al.* (1998), o en las uniones de Josephson largas, cuya inductancia varía en el espacio Guarcello *et al.* (2015); Grønbech-Jensen *et al.* (1991).

Por otro lado, se sabe que en el límite cuando la amplitud del forzamiento y el término de amortiguamiento (inyección y disipación) son pequeños, es decir $\gamma_0 \sim \mu_0 \ll 1$, y considerando el caso de la resonancia paramétrica, la ecuación (1) expandida hasta el término cúbico puede reducirse a la ecuación de Schrödinger no lineal forzada paraméricamente y disipativa (PDDNLS de sus siglas en inglés), para la cual se conoce su diagrama de bifurcación cerca a la inestabilidad subarmónica Coulet *et al.* (1994), e igualmente es capaz de generar estructuras localizadas y patrones Trulsen and Dysthe (1996);

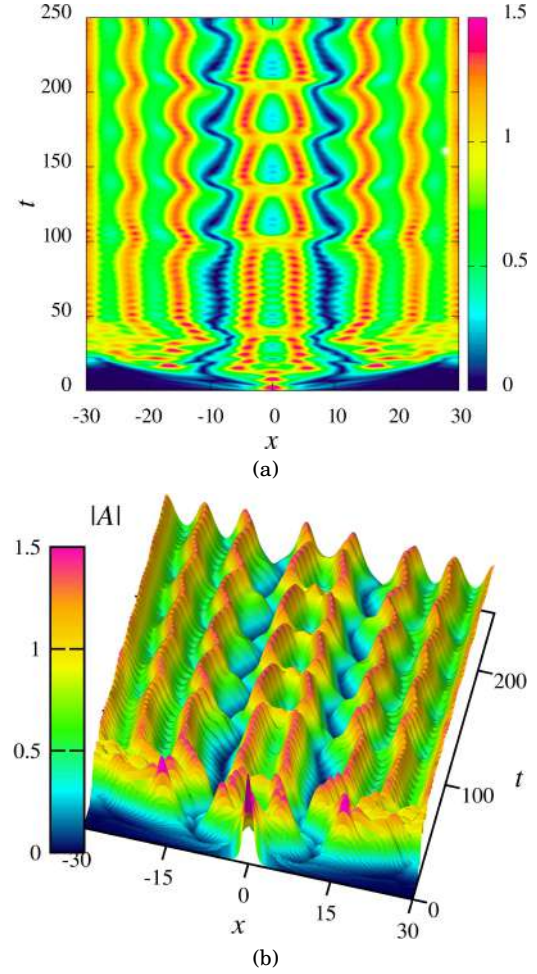


FIG. 5.— Diagrama espacio-temporal de $|A|$ de una estructura localizada en medio de un patrón periódico dado para $\gamma = 0.8$ y $\nu = -0.21$

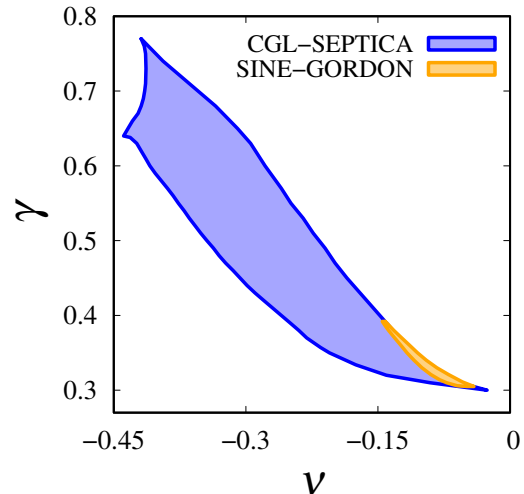
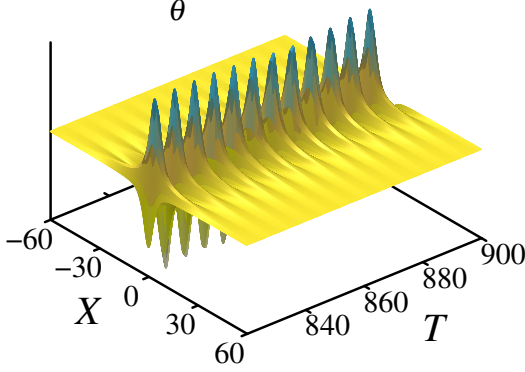
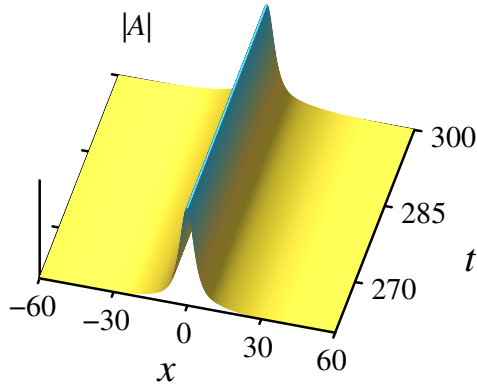


FIG. 6.— Diagramas de fase de estructuras localizadas (solitones) obtenidas con las ecuaciones de sine-Gordon perturbada (SGP) y con la ecuación CGL-Séptica.



(a)



(b)

FIG. 7.— Solitones obtenidas con las ecuaciones de (a) sine-Gordon perturbada (SGP) y con (b) la ecuación CGL-Séptica para los valores de parámetros $\mu = 0.15$, $\nu = -0.116$ y $\gamma = 0.356$.

Barashenkov *et al.* (2011).

3. MODELO

La ecuación de Sine-Gordon amortiguada y paraméricamente forzada (SGP) dada por (1) describe la clase de sistemas no-lineales de nuestro interés, que son capaces de exhibir estructuras tanto

localizadas como extendidas. Nos referimos a sistemas no-lineales unidimensionales extendidos espacialmente con inyección y disipación de energía.

Nótese que cuando los términos de forzamiento y amortiguamiento son iguales a cero ($\mu_0 = \gamma_0 = 0$), la ecuación (1) describe un sistema conservativo con simetría temporal reduciéndose a la ecuación de Sine-Gordon, de modo que la presencia de inyección y disipación de energía en el sistema provocan que el mismo presente una dinámica espacio-temporal compleja no trivial, al mantenerlo alejado del equilibrio y volviéndolo un sistema cuasi-reversible.

Para poder describir las estructuras localizadas y extendidas que exhibe este sistema de una manera unificada y más simplificada, realizamos una aproximación del mismo mediante un método perturbativo por medio de la CGLE Séptica asociada, considerando al sistema débilmente disipativo.

Primeramente partimos de la ecuación de movimiento dada por la ecuación (1) con el término no lineal ($\text{sen}\theta$) desarrollado en series de Taylor hasta el séptimo orden, es decir, hacemos $\text{sen}\theta = \theta - \theta^3/6 + \theta^5/120 - \theta^7/5040$, y además el término $\gamma_0 \text{sen}(wT)$ es expresado en su forma exponencial. A continuación, se desarrolla la variable espacio temporal en torno a su estado de equilibrio estable $\theta(X, T) = 0$. Entonces, por ser la ecuación (1) un tipo de ecuación de onda, suponemos como Ansatz de solución el siguiente:

$$\theta(X, T) = A(x, t)e^{-iw_0T} + c.c.. \quad (2)$$

Debido a la presencia de los términos no lineales en el sistema, la amplitud $A(x, t)$ de la precedente ecuación es una función compleja de las variables lentas definidas como $x = bX$ y $t = cT$ (donde b y c son constantes adimensionales de escalamiento), la cual representa la envolvente de la oscilación uniforme y *c.c.* se refiere a su complejo conjugado.

Entonces, para obtener la ecuación de amplitud asociada, sustituimos dicho Ansatz en la ecuación (1) y para que la descripción sea válida nos enfocamos particularmente en la región de resonancia paramétrica, es decir, $w = 2w_0 + \nu$ donde ν es el parámetro de sintonización, que nos indica cuán alejada está la frecuencia de forzamiento de la resonancia paramétrica.

Tras realizar varios cálculos en los cuales fue posible desprestigiar los términos de ordenes superiores, los términos conjugados y además el término $(\partial_t^2 A)^2$ suponiendo que $\partial_t A \sim \epsilon A$ con $\epsilon \ll 1$, y por otro lado, realizando el cambio de variable $A = Ae^{-ivT/2}$ con tal de simplificar los términos exponenciales, se obtuvo de esta forma la ecuación de amplitud CGLE Cúbica-Quíntica-Quíntica-Séptica asociada a la ecuación SGP y dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \partial_t A = & (\mu + 2i)\partial_x^2 A + \left[-2\mu + i \left(2\nu + \frac{1}{2}\nu\mu^2 + \mu^2 \right) \right] A + \left(\frac{1}{2}A|A|^2 - \frac{1}{12}A|A|^4 + \frac{1}{144}A|A|^6 \right) (\mu + 2i) \\ & + \left(-\frac{1}{2}\bar{A} - \frac{1}{12}A^3 + \frac{1}{4}\bar{A}|A|^2 + \frac{1}{48}A^3|A|^2 - \frac{1}{24}\bar{A}|A|^4 - \frac{1}{480}A^3|A|^4 + \frac{1}{288}\bar{A}|A|^6 \right) (-2 + i\mu)\gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

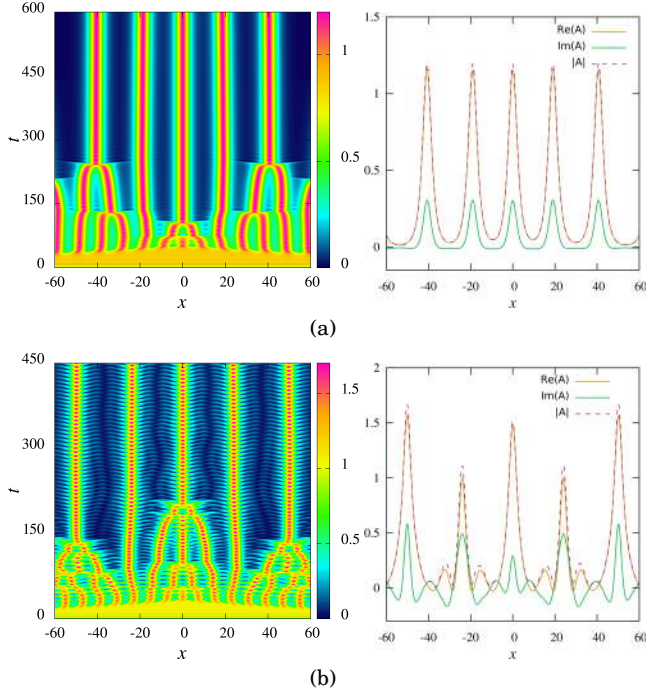


FIG. 8.— Diagrama espacio-temporal de $|A|$ y el respectivo perfil de la parte real e imaginaria de la amplitud en un instante t para a) solitones extendidos espacialmente cuando $\gamma = 0.4$ y $\nu = -0.26$ y b) patrón de *breathers* cuando $\gamma = 0.6$ y $\nu = -0.36$. Ambas estructuras correspondientes a los mismos parámetros de los diagramas en las Figuras 1 y 2 pero con condición inicial de un estado homogéneo con amplitud distinta de cero más una leve perturbación.

donde $\mu = \mu_0/w_0$, $\nu = \nu_0/w_0$ y $\gamma = \gamma_0/w_0^2$, de modo que la ecuación precedente queda descrita en función de tres parámetros μ , γ y ν proporcionales a la disipación, al forzamiento y al parámetro de sintonización, respectivamente. Por otra parte, las constantes de escalamiento toman los siguientes valores $b = w_0$ y $c = w_0^3/(\mu_0^2 + 4w_0^2)$.

Esta ecuación gobierna la evolución temporal de la envolvente de las oscilaciones (A) y nos permite describir soluciones localizadas y formación de patrones en un sistema descrito por (1).

Nótese además que la ecuación de amplitud presenta simetría de reflexión, esto significa que es invariable ante transformaciones de la forma $A \rightarrow -A$.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

4.1. Soluciones analíticas

Se buscaron soluciones estacionarias de tipo solitón para la ecuación de amplitud (3), por tanto introduciendo la representación polar de $A(x, t)$ se propuso el siguiente Ansatz de solución:

$$A(x) = B \operatorname{sech}(kx)e^{i\phi}, \quad (4)$$

el cual describe una de las soluciones conocidas de un *solitón disipativo estacionario* Miles (1984); Barashenkov *et al.* (1991); Conte and Musette (1993), tal que presenta una fase ϕ constante y una amplitud que es función solamente del espacio, donde B y k son constantes, es decir, que la amplitud y ancho

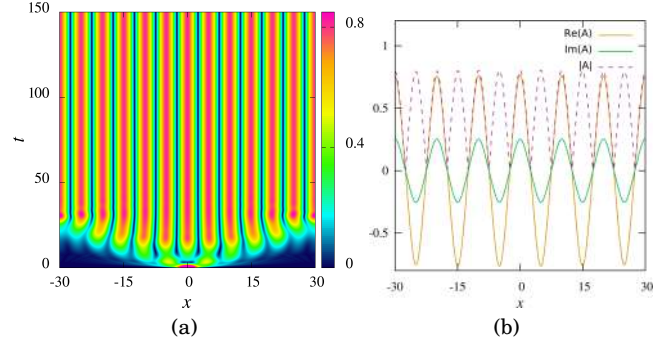


FIG. 9.— Diagrama espacio-temporal de $|A|$ de un patrón extendido y el perfil de la parte real e imaginaria del mismo cuando $\gamma = 0.5$ y $\nu = 0.29$

de la solución de este tipo dependen solamente de los parámetros de la ecuación.

Entonces, introducimos el Ansatz (4) en nuestra ecuación de amplitud (3) permitiéndonos hacer $\partial_t A = 0$. A continuación, escribiendo la amplitud en la forma $A = u + iv$, separamos en la ecuación la parte real de la parte imaginaria para así poder obtener un sistema de ecuaciones, el cual nos permitirá determinar los valores de las constantes B , k y ϕ en función de los parámetros del sistema.

Realizando varios cálculos según lo especificado, se obtuvieron los siguientes resultados:

$$B^2 = 4k^2; \frac{12k^2}{2\gamma + 3}; \frac{-12k^2}{2\gamma - 3} \quad (5)$$

$$k^2 = -\nu \pm \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 - (2\mu + \nu\mu)^2} \quad (6)$$

$$\cos(2\phi) = \frac{\mu(2 + \nu)}{\gamma} \quad (7)$$

De modo que las soluciones están restringidas en el espacio de parámetros de la siguiente manera: $\gamma^2 \geq (2\mu + \nu\mu)^2$ y $-1 \leq \mu(2 + \nu)/\gamma \leq 1$.

Sin embargo, se halló que estas soluciones exactas de la forma de secante hiperbólica existen solamente para ciertos valores de γ , (a los que se los llamó valores “exóticos” de γ) dados por: $\gamma = \pm 5/4; \pm 4/3$

Finalmente, mediante simulaciones numéricas se encontró que estas soluciones analíticas existentes, solamente para los cuatro valores de γ exóticos mencionados, son inestables, es decir, decaen rápidamente. Esto implica que la ecuación CGL Séptica asociada a la ecuación SGP no presenta soluciones analíticas localizadas estables.

4.2. Soluciones numéricas

Se obtuvieron mediante simulaciones numéricas, valores de los coeficientes μ , γ y ν para los cuales existen soluciones estables localizadas y extendidas espacialmente con comportamientos dinámicos estacionarios y oscilatorios.

Para llevar a cabo las simulaciones de la ecuación de amplitud (3) y poder hallar soluciones numéricas para la misma, se empleó el método de Runge-Kutta (RK) de quinto orden con monitoreo del error de truncamiento local para la integración de la parte tem-

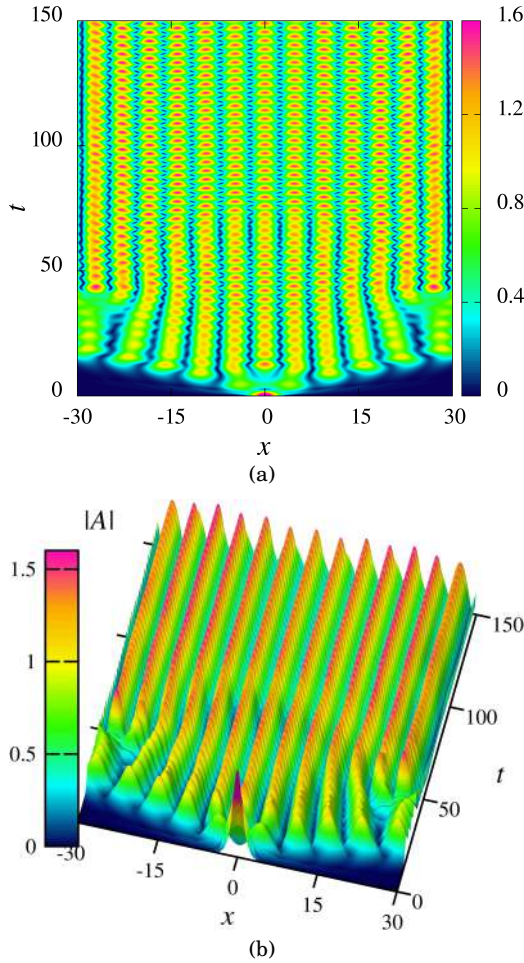


FIG. 10.— Diagrama espacio-temporal de $|A|$ para un patrón extendido estable con oscilación temporal dado para $\gamma = 0.75$ y $\nu = 0.19$

poral, con un máximo de tolerancia de 10^{-5} ; y el método de diferencias finitas de sexto orden para la integración de la parte espacial tomando como la longitud del sistema unidimensional $L = 60$ con $N = 1500$ puntos de la red lineal, implicando una discretización de 0.04.

El programa numérico descrito fue verificado en el artículo Urzagasti *et al.* (2014).

La condición inicial utilizada en las simulaciones, fue la de un solitón con perfil de secante hiperbólica con su centro situado en la posición $x = 0$, añadiendo una pequeña perturbación inicial al mismo para asegurar la estabilidad de las soluciones a encontrarse.

Como se considera un caso de disipación normal, mantenemos fijo el valor del parámetro de disipación μ , por lo que el estudio se concentra principalmente en el plano (γ, ν) al que denominaremos el diagrama de fase.

Prosiguiendo, se ponen ciertas limitaciones a los valores de los coeficientes, primeramente al considerar el sistema débilmente disipativo, el término de amortiguación dado por μ debe tomar valores pequeños. Luego, μ y γ deben ser positivos (de acuerdo a la ecuación de amplitud (3)) debido a que

representan la disipación e inyección de energía y debe existir un balance entre ambos, de este modo existe además un valor umbral para γ a partir del cual la aplicación de energía ya es suficiente para poder compensar las pérdidas por disipación. Este valor umbral γ_u es hallado mediante simulaciones numéricas para un dado μ , donde, en el caso de $\mu = 0.15$ se encontró que $\gamma_u = 0.38$ tal que, para valores inferiores a éste, el sistema es incapaz de soportar una solución estable distinta a la solución trivial ($A = 0$). Para el parámetro ν no se dan mayores restricciones que considerarlo pequeño.

En los resultados mostrados a continuación, el valor del parámetro de disipación considerado es $\mu = 0.15$, mientras que los valores de los parámetros γ y ν que componen el diagrama de fase varían de acuerdo a las restricciones impuestas. De este modo, tras la realización de numerosas simulaciones de la ecuación de amplitud, modulando los parámetros γ y ν , se ha logrado identificar las regiones existentes dentro del diagrama de fase, en las cuales el sistema presenta diferentes tipos de soluciones estables no triviales, Entre éstas se encontraron soluciones del tipo de estructura localizada y estructura extendida espacialmente, con comportamientos estacionarios y oscilatorios en ambos casos.

Las soluciones localizadas identificadas son de dos tipos, la primera es la denominada *solitón disipativo estacionario estándar* (solitón estándar) con forma de un pulso estable que persiste en el tiempo, tal como se puede apreciar en la Figura 1, la cual muestra el diagrama espacio-temporal del módulo de la amplitud ($|A|$) del solitón sobre el estado homogéneo $A = 0$ y el perfil en un instante t de la parte real e imaginaria de su amplitud A , al tomar como valores de los parámetros $\gamma = 0.4$ y $\nu = -0.26$, que pertenecen al régimen estacionario hallado cuando $\mu = 0.15$. Esta solución presenta amplitud y ancho constantes por lo que también se lo considera como un solitón estático.

Al incrementar los valores de γ y ν , se encontró el segundo tipo de estructura localizada estable llamada *breather disipativo* el cual está representado en la Figura 2, en la cual para los valores de $\gamma = 0.6$ y $\nu = -0.36$ puede observarse claramente que representa un estado localizado espacialmente con oscilación compleja, donde su amplitud y ancho varían con el tiempo de forma periódica. Nótese que el objeto presenta pérdidas radiativas en forma de ondas que se propagan lateralmente hasta desaparecer.

Por otra parte se logró observar que tanto la amplitud como frecuencia de oscilación del *breather* dependen de los parámetros.

En ambos regímenes, de solitones estáticos y oscilatorios, al encontrarse en el límite superior del parámetro γ (o equivalente al límite inferior de ν), la estructura se torna inestable y a continuación emergen estructuras extendidas estables, también denominadas patrones extendidos, con variados comportamientos, entre éstos estacionarios, oscilatorios e incluso probablemente caóticos. En la Figura 3 se observa el diagrama espacio-temporal cuando $\gamma = 0.4$ y $\nu = -0.11$ correspondiente a una estructura

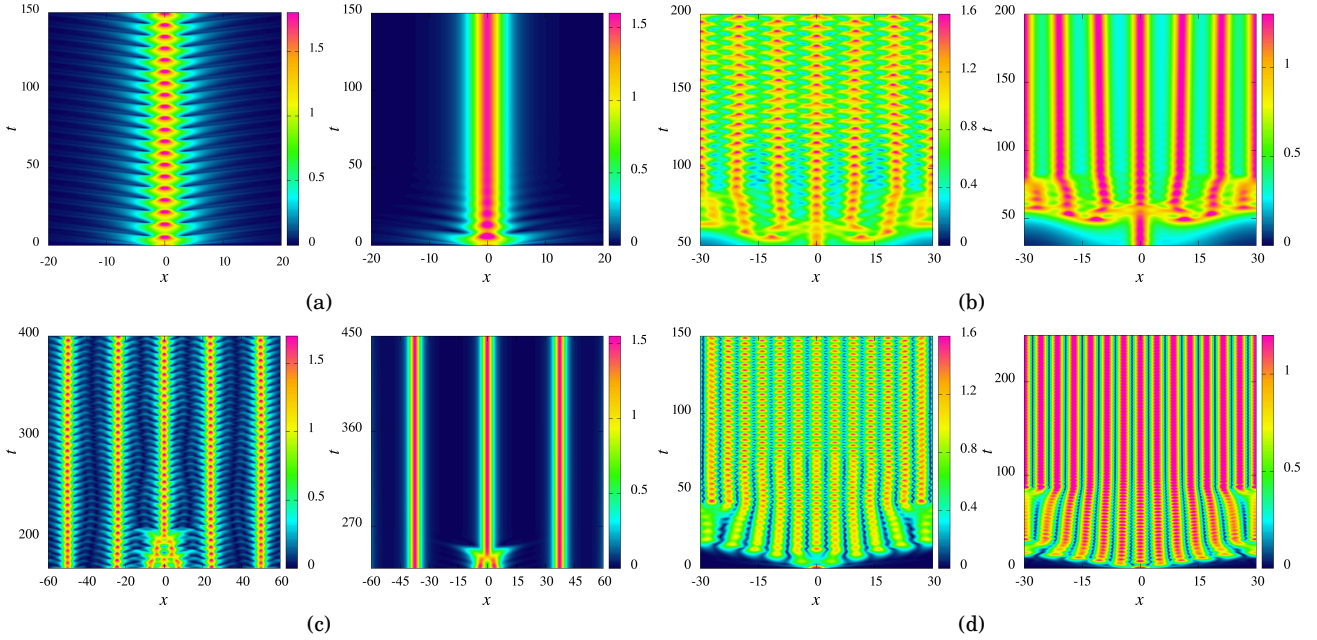


FIG. 11.— Comparación de las estructuras exhibidas por la ecuación de amplitud CGL Séptica (izquierda) y por la ecuación de amplitud CGL Cúbica-Quíntica-Séptica (derecha) para los mismos valores de parámetros. a) $\gamma = 0.6$ y $\nu = -0.36$, b) $\gamma = 0.6$ y $\nu = -0.26$, c) $\gamma = 0.6$ y $\nu = -0.36$ (con condición inicial de estado homogéneo de A finita) d) $\gamma = 0.75$ y $\nu = 0.19$.

extendida estacionaria con forma de onda espacialmente desarrollada.

Luego, en la Figura 4 se muestra la evolución temporal de un patrón estable periódico en el espacio, pero a diferencia del mostrado en la Figura 3 éste presenta un comportamiento oscilatorio dado para valores de los parámetros suficientemente más grandes, en este caso para $\gamma = 0.6$ y $\nu = -0.25$.

En la Figura 5 puede apreciarse otro tipo de patrón extendido estable cuando los valores de los parámetros son $\gamma = 0.8$ y $\nu = -0.21$, el cual puede considerarse como dos *breathers* ligados localizados espacialmente, los cuales se encuentran en un estado de fusión y separación continuamente en el tiempo. A su vez, ellos están rodeados de patrones periódicos en el espacio e igualmente oscilatorios.

A fin de comparar los resultados del modelo de la CGLE Cúbica-Quíntica-Séptica (o simplemente CGL-Séptica) con los del modelo original descrito por la ecuación sine-Gordon perturbada (SGP), Ec. (1), se han generado los diagramas de fase $\gamma - \nu$ donde se encuentran numéricamente solitones persistentes. Para ello, adicionalmente se ha resuelto la ecuación SGP directamente. Estos diagramas se muestran en la Figura 6. Como se muestra en esta Figura, la región correspondiente a la CGL-Séptica es considerablemente mayor que la correspondiente a la SGP. Una otra diferencia es que la SGP no presenta soluciones tipo *breather*, las cuales aparecen en la parte superior del diagrama de la CGL-Séptica. Sin embargo, es de resaltar que las dos regiones se superponen en la parte inferior, para valores pequeños de γ y de $-\nu$. Por otro lado, cabe mencionar que a la derecha de los diagramas, para menores valores de $|\nu|$, se tienen los patrones extendidos arriba men-

cionados; a la izquierda de los diagramas, para mayores valores de $-\nu$, se tienen solo soluciones nulas. Para grandes valores de γ , por arriba de $\gamma \sim 0.65$, se tienen patrones extendidos de oscilación compleja.

Mas aún, a fin de comparar los comportamientos espacio-temporales en los modelos dados por la SGP y la CGL-Séptica, se muestran en la Figura 7 los diagramas espacio-temporales de los solitones correspondientes a los parámetros comunes de valores $\mu = 0.15$, $\nu = -0.116$ y $\gamma = 0.356$. Como se puede apreciar en esta Figura, la solución de la SGP muestra las oscilaciones monótonas propias de la integración directa, mientras que la solución de la CGL-Séptica carece de esas oscilaciones pues han sido apartadas de dicha ecuación, ya que ella estudia solo el comportamiento de la envolvente de la solución de la SGP.

Adicionalmente, se analizó la ecuación en la región donde presenta soluciones localizadas, pero desde un estado inicial de patrón extendido periódico espacialmente; para esto, usando una condición inicial de un estado homogéneo espacialmente de amplitud constante distinta de cero ($|A| = 0.5$) con una perturbación inicial tal que surge dicho patrón. Se graficó la evolución temporal del módulo de la amplitud $|A|$ para los mismos valores de los parámetros correspondientes a las Figuras 1 y 2, es decir, correspondientes al solitón estándar y al *breather*, respectivamente, obteniéndose así patrones extendidos de comportamiento estacionario y oscilatorio complejo como se muestra en la Figura 8(a) cuando $\gamma = 0.4$ y $\nu = -0.26$ y en la Figura 8(b) cuando $\gamma = 0.6$ y $\nu = -0.36$.

El estado homogéneo perturbado se transforma en numerosas estructuras localizadas, ya sea solitones o *breathers* disipativos, que van interactuando

entre sí, fusionándose por pares hasta estar suficientemente separados unos de otros y alcanzar finalmente un estado estacionario evolucionando paralelamente, esto es, formando un patrón extendido periódico. Puede observarse que tras las variadas interacciones entre las estructuras localizadas, con la presencia de emisión de radiación lateral, éstas mantienen su carácter, en este caso el de solitón disipativo estacionario (Fig. 8(a)) y el de *breather* disipativo (Fig. 8(b)). Estos comportamientos permiten apreciar la coexistencia entre dos diferentes estados estables del sistema, de modo que el estado final depende fuertemente de las condiciones iniciales.

Es posible decir que un solitón disipativo surge como un resultado de la coexistencia entre el estado homogéneo estable y el estado de patrón periódico espacialmente que emerge en el área de la inestabilidad paramétrica que presenta el sistema.

Nótese que las estructuras descritas anteriormente aparecen para valores negativos del parámetro ν . Por otro lado, cuando dicho parámetro toma valores positivos, surgen patrones extendidos estables periódicos espacialmente. Por ejemplo, cuando $\gamma = 0.5$ y $\nu = 0.29$ aparece un patrón estacionario periódico en el espacio como se muestra en la Figura 9 correspondiente al diagrama espacio-temporal de dicho patrón. Este estado puede ser entendido en el sistema como una onda estacionaria espacialmente, en torno a su estado homogéneo de $A = 0$. A continuación, al incrementarse el valor de γ dichos patrones se vuelven oscilatorios en el tiempo como puede observarse en la Figura 10, la cual es obtenida para $\gamma = 0.75$ y $\nu = 0.19$.

En esta región, a partir de las simulaciones realizadas se observa que a medida que se incrementa el forzamiento externo γ , la amplitud de las estructuras aumenta mientras que su ancho disminuye.

Tómese en cuenta que las estructuras extendidas descritas anteriormente presentan un periodo de relajación, diferente para cada caso, hacia un estado de equilibrio estable, de manera que en alguna de las Figuras anteriores se muestra la evolución temporal cuando están ya cerca de alcanzar dicho estado de equilibrio estable.

Como segundo estudio, en el presente trabajo se realizaron simulaciones de la ecuación de amplitud CGL Cúbica-Quíntica asociada a la ecuación SGP. Esta última corresponde a la ecuación (3) cuando los términos correspondientes al séptimo orden, no al séptimo grado, no son considerados.

Entonces, resolviendo numéricamente, tomando valores de γ y ν que se encuentren dentro de los intervalos para los cuales la ecuación de amplitud CGL Séptica exhibe estructuras estables localizadas y extendidas, y manteniendo fijo $\mu = 0.15$, se observó que para los valores de los parámetros correspondientes al solitón estacionario mostrado en la Figura 1 y al *breather* de la Figura 2, es decir, para $\gamma = 0.4$ y $\nu =$

-0.26 y para $\gamma = 0.6$ y $\nu = -0.36$, respectivamente, que la ecuación CGL Cúbica-Quíntica si presenta solitones disipativos estacionarios, observándose la misma estructura de la Figura 11(d), sin embargo, ya no exhibe estados localizados de oscilación compleja como el *breather*, en su lugar mantiene un estado de solitón disipativo estacionario como muestra la Figura 11(a), aunque con la amplitud y ancho del *breather*.

Más aún, la ecuación CGL Cúbica-Quíntica no presenta ningún tipo de estructura oscilatoria tanto localizada como extendida espacialmente (al menos en las regiones analizadas cerca de la bifurcación), como se puede apreciar en la Figura 11. Se observa que las estructuras con comportamiento dinámico oscilatorio, soluciones de la ecuación CGL Séptica (Figuras 2, 3, 8(b) y 10) ya no están presentes en la ecuación CGL Cúbica-Quíntica, sino se muestran como estados estacionarios estáticos.

5. CONCLUSIONES

Se ha obtenido en primer lugar la ecuación de amplitud CGL Cúbica-Quíntica-Séptica asociada a la ecuación de sine-Gordon amortiguada y forzada paraméricamente mediante un análisis perturbativo cerca de la región de resonancia paramétrica, para la cual no se han encontrado soluciones analíticas estables de tipo secante hiperbólica.

Por otra parte, se han realizado simulaciones numéricas de la ecuación de amplitud para condiciones de disipación pequeña constante encontrándose por un lado, soluciones localizadas en forma de solitones disipativos estacionarios y de *breathers* disipativos, y por otro lado estructuras extendidas periódicas espacialmente con comportamientos estacionarios y oscilatorios, éstas para distintas regiones del espacio de parámetros (γ, ν) .

Por último, mediante una comparación entre las estructuras localizadas y extendidas de la ecuación de amplitud CGL Séptica y de la misma pero desarrollada hasta el quinto orden, se mostró una dinámica nueva del sistema subyacente exhibida solamente por la CGL Séptica asociada a la SGP, correspondiente a los estados oscilatorios (*breathers*) ya sean localizados en el espacio o en una configuración de patrón periódico espacialmente.

Finalmente, se ha realizado la comparación del modelo de la ecuación CGL Cúbica-Quíntica-Séptica con el modelo original de la ecuación de sine-Gordon amortiguada y forzada a través de sus correspondientes diagramas de fase (γ, ν) de solitones, encontrando que éstos se superponen en la región de valores bajos de γ y de $|\nu|$.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

J. Cuevas-Maraver, P. Kevrekidis, and F. Williams, *The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-energy Physics*, Vol. 10 (Springer, 2014).

O. M. Braun and Y. Kivshar, *The Frenkel-Kontorova model: concepts, methods, and applications* (Springer Science & Business Media, 2013).

- A. Barone and G. Paterno, (1982).
- D. Gulevich and F. Kusmartsev, *Physical Review Letters* **97**, 017004 (2006).
- E. Feldtkeller, *Physica Status Solidi (b)* **27**, 161 (1968).
- F. Nabarro, Dover Publications Inc., New York **264** (1987).
- H. Leblond, H. Triki, and D. Mihalache, *Rom. Rep. Phys* **65**, 925 (2013).
- D. Mihalache, *Rom. J. Phys* **57**, 352 (2012).
- V. G. Ivancevic and T. T. Ivancevic, arXiv preprint arXiv:1305.0613 (2013).
- P. Coullet, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **12**, 2445 (2002).
- P. Coullet, T. Frisch, and G. Sonnino, *Physical Review E* **49**, 2087 (1994).
- A. Ankiewicz and N. Akhmediev, *Dissipative Solitons: From Optics to Biology and Medicine* (Springer, 2008).
- O. Descalzi, M. G. Clerc, S. Residori, and G. Assanto, *Localized states in physics: solitons and patterns* (Springer Science & Business Media, 2011).
- A. H. Eschenfelder, *Magnetic bubble technology*, Vol. 14 (Springer Science & Business Media, 2012).
- W. S. Edwards and S. Fauve, *Journal of Fluid Mechanics* **278**, 123 (1994).
- P. B. Umbanhowar, F. Melo, H. L. Swinney, *et al.*, *Nature* **382**, 793 (1996).
- M. Van Hecke, P. Hohenberg, and W. Van Saarloos, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics VIII*, 245 (1994).
- M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Reviews of Modern Physics* **65**, 851 (1993).
- I. S. Aranson and L. Kramer, *Reviews of Modern Physics* **74**, 99 (2002).
- N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Dissipative Solitons*, 1.
- M. Remoissenet, *Waves called solitons: concepts and experiments* (Springer Science & Business Media, 2013).
- L. M. Pismen, *Patterns and interfaces in dissipative dynamics* (Springer Science & Business Media, 2006).
- G. Nicolis, I. Prigogine, *et al.*, *Self-organization in nonequilibrium systems*, Vol. 191977 (Wiley, New York, 1977).
- L. Landau and E. Lifshitz, "Classical mechanics," (1960).
- E. Knobloch, *Nonlinearity* **21**, T45 (2008).
- M. G. Clerc, S. Coulibaly, and D. Laroze, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **19**, 3525 (2009).
- D. Urzagasti, D. Laroze, M. Clerc, and H. Pleiner, *EPL (Europhysics Letters)* **104**, 40001 (2013).
- V. Zharnitsky, I. Mitkov, and M. Levi, *Physical Review B* **57**, 5033 (1998).
- C. Guarcello, K. Fedorov, D. Valenti, B. Spagnolo, and A. Ustinov, arXiv preprint arXiv:1501.04037 (2015).
- N. Grønbech-Jensen, P. Lomdahl, and M. Samuelsen, *Physics Letters A* **154**, 14 (1991).
- K. Trulsen and K. B. Dysthe, *Wave Motion* **24**, 281 (1996).
- I. Barashenkov, E. Zemlyanaya, and T. Van Heerden, *Physical Review E* **83**, 056609 (2011).
- J. W. Miles, *Journal of Fluid Mechanics* **148**, 451 (1984).
- I. Barashenkov, M. Bogdan, and V. Korobov, *EPL (Europhysics Letters)* **15**, 113 (1991).
- R. Conte and M. Musette, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **69**, 1 (1993).
- D. Urzagasti, D. Laroze, and H. Pleiner, *The European Physical Journal Special Topics* **223**, 141 (2014)

HAMILTONIANO COVARIANTE PARA LA PARTÍCULA CARGADA A COVARIANT HAMILTONIAN FOR A CHARGED PARTICLE

V. M. PEÑAFIEL[†] & LEONCIO GÓMEZ[‡]

Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés
 Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635
 La Paz - Bolivia

RESUMEN

Se hace un análisis detallado del problema de una partícula cargada en un campo electromagnético, probando que es posible preservar la covariancia manifiesta en un tratamiento canónico riguroso bajo la teoría de Dirac para el formalismo hamiltoniano asociado a lagrangianas singulares.

Descriptores: Formalismo Hamiltoniano y Lagrangiano — mecánica cuántica y relatividad especial — formalismo canónico.

Código(s) PACS: 11.10.Ef, 03.00.00, 04.20.Fy

ABSTRACT

A detailed analysis of the problem of a charged particle in an electromagnetic field was carried out. It was proven that it is possible to preserve the manifest covariance in a rigorous canonical treatment under the Dirac theory for the Hamiltonian formalism associated to singular Lagrangians.

Subject headings: Lagrangian and Hamiltonian approach — quantum mechanics and special relativity — canonical formalism.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de obtener el hamiltoniano y las ecuaciones de movimiento canónicas cuando la función lagrangiana es singular (su hessiana tiene determinante cero) no es trivial, pero la teoría al respecto está completa y es muy conocida (ver, por ejemplo, Sudarshan & Mukunda (1974)). En los casos relevantes, las complicaciones aparecen casi siempre al momento de encontrar, procesar y garantizar la estabilidad de las restricciones (especialmente las subsidiarias y auxiliares). Quizá eso explica el que, por ejemplo, un hamiltoniano manifiestamente covariante para la partícula relativista cargada, urgida por fuerzas electromagnéticas, tenga que ser introducida, a veces, completamente ad hoc (Jackson (1998)). El presente es un tratamiento completo de ese problema en forma manifiestamente covariante y siguiendo una línea rigurosa de razonamiento en el marco de la teoría de Dirac al efecto (Dirac (1964)).

Previamente, una manera expedita de obtener información acerca de la estructura general de la dinámica relativista consiste en considerar una transformación general de coordenadas ($\{x\} \leftrightarrow \{\xi\}$) en el espacio de Minkowski $M = \mathbb{R}^{1,3}$ dotado de una métrica $\eta_{\mu\nu}$ con asignatura $(1, -1, -1, -1)$:

$$\xi^\mu = \xi^\mu(x, s) \quad . \quad (1)$$

Derivándola sucesivamente respecto del parámetro s , se obtiene

$$\dot{\xi}^\mu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial s} = J_\nu^\mu \dot{x}^\nu + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial s}$$

y

$$\ddot{\xi}^\mu = J_\nu^\mu \ddot{x}^\nu + \frac{\partial J_\nu^\mu}{\partial x^\rho} \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu + 2 \frac{\partial J_\nu^\mu}{\partial s} \dot{x}^\nu + \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial s^2}$$

con la matriz jacobiana definida según

$$J_\nu^\mu \equiv \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \quad .$$

Supongamos que el sistema $\{x\}$ es inercial mientras $\{\xi\}$ (no inercial) sigue a la partícula en su movimiento, de modo que $\ddot{\xi}^\mu = 0$, y se contrae entonces con el jacobiano inverso \bar{J} para hacer uso de $\bar{J}^\mu_\rho J_\nu^\rho = \delta^\mu_\nu$; el resultado es una definición puramente funcional de las aceleraciones:

[†]Email: vmiguel@fiums.edu.bo.

[‡]Email: leongomez@gmail.com.

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho - f^\mu_\nu \dot{x}^\nu - b^\mu \quad (2a)$$

donde

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} \equiv \bar{J}^\mu_\eta \frac{\partial J^\eta_\rho}{\partial x^\nu}; \quad f^\mu_\nu \equiv \bar{J}^\mu_\eta \frac{\partial J^\eta_\nu}{\partial s}; \quad b^\mu \equiv \bar{J}^\mu_\eta \frac{\partial^2 \xi^\eta}{\partial s^2} \quad (2b)$$

La ecuación (2) implica la existencia, en principio, de fuerzas tensoriales ($\Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$), vectoriales ($f^\mu_\nu \dot{x}^\nu$) y escalares (b^μ) en las velocidades.

Si, eventualmente, se tiene $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0$ y $b^\mu = 0$, el remanente de (2a) es

$$\ddot{x}_\mu = f_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$$

y sugiere -formalmente- la ocurrencia de fuerzas del tipo electromagnético (si fuera posible reemplazarla con una expresión físicamente tensorial y proporcional a las tetra velocidades).

2. FORMALISMO LAGRANGIANO

En efecto, para el caso que aquí interesa, existe una lagrangiana invariante bajo recalibración (homogénea de primer orden en las velocidades) que es, obviamente, la de la partícula libre (Peñafiel N. & Rafanelli (1982)) con acoplamiento electromagnético

$$L = m_0 \sqrt{\dot{x}_\nu \dot{x}^\nu} + \tau A_\nu \dot{x}^\nu \quad (3)$$

siendo τ una constante característica de la partícula y A_μ el tetrapotencial electromagnético. Para L con el tratamiento usual, siendo $L(\alpha \dot{x}) = \alpha L(\dot{x})$, se llega a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m_0 \dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\nu \dot{x}^\nu}} + \tau A_\mu \equiv P_\mu$$

que es la definición del momento canónico (ahora diferente del momento lineal p_μ); además,

$$W^\nu_\mu = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}^\mu} = \frac{m_0}{\sqrt{\dot{x}_\rho \dot{x}^\rho}} \left[\delta^\nu_\mu - \frac{\dot{x}^\nu \dot{x}_\mu}{\dot{x}_\rho \dot{x}^\rho} \right]$$

y permite escribir las ecuaciones de movimiento en la forma tensorial:

$$W^\nu_\mu \ddot{x}_\nu = \alpha_\mu(x, \dot{x})$$

con

$$\alpha_\mu = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{\partial^2 L}{\partial x_\nu \partial \dot{x}^\mu} \dot{x}_\nu = \tau \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \dot{x}^\nu - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \dot{x}^\nu \right) .$$

Se verifica de inmediato que $W^\nu_\mu \dot{x}^\mu = 0$, esto es, que la tetravelocidad constituye un autovector nulo de la hessiana, confirmando su singularidad. Ahora, puesto que

$$W^\nu_\mu \ddot{x}_\nu = \tau \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) \dot{x}^\nu ,$$

la restricción canónica debiera provenir de $\alpha_\mu \dot{x}^\mu = 0$, pero la expresión se anula idénticamente

$$\alpha_\mu \dot{x}^\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu \equiv 0 ;$$

esto implica que no hay restricción canónica y, consecuentemente a la invariancia de calibre, es posible introducir una restricción auxiliar (subsidiaria) que, para este caso, coincide formalmente con la restricción primaria porque corresponde a la elección de la longitud de línea mundo como parámetro independiente:

$$\gamma \equiv \dot{x}_\nu \dot{x}^\nu - 1 = 0 .$$

Por tanto, la ecuación de movimiento faltante como consecuencia de la singularidad de la hessiana (de rango 3) es,

$$\dot{\gamma} = 2\ddot{x}_\nu \dot{x}^\nu = 0$$

la cual conduce a la reducción

$$W^\nu_\mu \ddot{x}_\nu = m_0 \ddot{x}_\mu$$

esto es, W actúa ahora como un verdadero proyector (en el espacio de las tetra aceleraciones); entonces, las ecuaciones de movimiento devienen

$$\ddot{x}_\mu = \frac{\tau}{m_0} F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu , \quad (4a)$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad (4b)$$

y $F_{\mu\nu}$ coincide, desde luego, con la definición tetradiimensional del tensor de Maxwell.

3. FORMALISMO HAMILTONIANO

Es fácil comprobar que la expresión $p_\mu \dot{x}^\mu - L$, para la lagrangiana propuesta (3), se anula idénticamente (el hamiltoniano ordinario no existe). Consecuentemente, el formalismo hamiltoniano para este caso es, como en el de la partícula libre, resultado de una restricción primaria (el método de Dirac requiere que la función hamiltoniana sea una combinación lineal de las restricciones primarias); entonces, usando la que proviene de la definición del momento p_μ ,

$$\varphi \equiv p_\mu p^\mu - m_0^2 \approx 0 \quad (5)$$

y siendo

$$p_\mu = P_\mu - \tau A_\mu$$

la función hamiltoniana, $H = u\varphi$, queda

$$H = u[(P_\mu - \tau A_\mu)(P^\mu - \tau A^\mu) - m_0^2] . \quad (6)$$

Efectuando los corchetes usuales de las variables canónicas con el hamiltoniano, las ecuaciones de movimiento resultan

$$\dot{x}^\mu = \{x^\mu, H\} = 2u(P^\mu - \tau A^\mu) \quad (7a)$$

$$\dot{P}_\mu = \{P_\mu, H\} = 2u\tau \frac{\partial A_\rho}{\partial x^\mu} (P^\rho - \tau A^\rho) \quad (7b)$$

Ahora, el requisito de estabilidad de la restricción se satisface idénticamente debido a que la derivación respecto del parámetro independiente se obtiene mediante el corchete de Poisson de ella con el hamiltoniano, esto es:

$$\dot{\varphi} = \{\varphi, H\} = u\{\varphi, \varphi\} \equiv 0 \quad .$$

El coeficiente u debe ser determinado mediante la elección del calibre; puesto que se está en libertad de elegir la restricción auxiliar que lo determinará, una posibilidad muy general sería $\int p_\mu dx^\mu - us \approx 0$, pero ésta no es manejable; como en el caso lagrangiano, sin embargo, la opción inmediata

$$\gamma \equiv \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu - 1 \approx 0$$

significa, por supuesto, que es el arco, s , el que funcionará como parámetro dinámico independiente. Sustituyendo \dot{x}_μ de (4a), se obtiene

$$4u^2 p_\mu p^\mu = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2\sqrt{p_\mu p^\mu}} \quad .$$

De ahí, como $p_\mu p^\mu \approx m_0^2$, se puede tomar $u = 1/2m_0$ y escribir ahora la restricción auxiliar en la forma $\gamma \equiv p^2 - m_0^2 \approx 0$, formalmente igual a φ , por lo cual la estabilidad se satisface de inmediato. Nótese que φ y γ no son idénticas, sin embargo, porque φ es cierta aun si $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu \neq 1$. En adelante, las igualdades

“débiles” (\approx) pueden ser substituidas por igualdades “fuertes” ($=$) y

$$H = \frac{1}{2m_0} (P_\mu - \tau A_\mu) (P^\mu - \tau A^\mu) - \frac{m_0}{2} \quad .$$

Las ecuaciones (canónicas) de movimiento son, finalmente,

$$\dot{x}^\mu = \frac{1}{m_0} (P^\mu - \tau A^\mu) \quad (8a)$$

$$\dot{P}_\mu = \frac{\tau}{m_0} \partial_\mu A_\rho (P^\rho - \tau A^\rho) \quad (8b)$$

4. CONCLUSIONES

Las ecuaciones de movimiento (8) son, por supuesto, las mismas que (4), lo cual se comprueba fácilmente derivando (8a) y usando (8b) para eliminar \dot{P}_μ .

La fuerza de Minkowski

$$K_\mu = \tau F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad (9)$$

queda, así, expresada en términos del tensor de Maxwell el cual, por supuesto, es el mismo que aparece en las leyes de Maxwell manifestamente covariantes para el campo electromagnético.

Otros enfoques, que desembocan en las mismas ecuaciones de movimiento, prefieren tratar con lagrangianas regulares, sacrificando la invariancia de calibre (Lemos (2007)).

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Dirac, P. 1964, Lectures on Quantum Mechanics (Yeshiva University)
- Jackson, J. 1998, Classical Electrodynamics Third Edition 3rd Edition (Wiley)
- Lemos, N. A. 2007, Mecánica Analítica - 2A. ED. (Livraria da Física)
- Peñafiel N., V. M. & Rafanelli, K. 1982, Il Nuovo Cimento B (1971-1996), 72, 157
- Sudarshan, E. & Mukunda, N. 1974, Classical Dynamics: A Modern Perspective (Wiley)

ESTUDIO DEL MÉTODO MONTE CARLO EN SIMULACIONES
PARA LA ESTIMACIÓN DEL VALOR DE π
STUDY OF THE MONTE CARLO METHOD IN SIMULATIONS FOR
THE ESTIMATION OF THE π VALUE

J. C. VARGAS[†] & CARLOS ANDRÉS CRUZ-CARPIO[‡]
Carrera de Física, Universidad Mayor de San Andrés
Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

RESUMEN

En este artículo se presenta los resultados de tres metodologías diferentes en las que se aplicó una simulación Monte Carlo para estimar el valor de π : el método de comparación de áreas, el método propuesto por Buffon y la extensión de Laplace al método de Buffon. Se estudió con detalle el resultado no determinista de las simulaciones y se demostró que cumplen con los teoremas fundamentales de la probabilidad. Los tres casos se desarrollaron en un lenguaje de programación de alto nivel: Python, junto con la librería Numpy que le otorga una performance optimizada.

Descriptores: Educación — métodos Monte Carlo — simulaciones.

Código(s) PACS: 01.40.-d, 02.70.-c, 05.10.Ln

ABSTRACT

This article presents the result of three different methodologies that estimate the π value using the Monte Carlo's simulation: the comparative area's method, the method proposed by Buffon and the Laplace's extension. The three cases were developed in Python – a high level language and Numpy library which give it an optimized performance. The non-deterministic result of the simulations was studied in detail and it was shown that they comply with the fundamental theorems of probability.

Subject headings: Education — Monte Carlo methods — simulations.

1. INTRODUCCIÓN

El método de Monte Carlo tiene un génesis moderno en el trabajo pionero de Stan Ulam y John Von Neumann. Luego de la segunda Guerra Mundial aplicaron distintos métodos de Monte Carlo en simulaciones para el desarrollo de armas termonucleares. Desde entonces y por más de 50 años que se aplicaron estos desarrollos en la investigación y perfeccionamiento de distintos métodos que modelan el transporte de neutrones y radiación gamma con bastante éxito experimental como menciona Bielajew (2001).

Hoy resulta una alegre ironía que ningún producto que haya aplicado la metodología Monte Carlo en su desarrollo, se haya empleado en conflicto alguno. Más aún los científicos han explotado el uso de simulaciones Monte Carlo para obtener un beneficio público positivo aplicándola en salud. Por ejemplo, los planeamientos de dosis en radioterapia dependen actualmente en algún grado de cálculos obtenidos mediante simulaciones que emplean Monte Carlo.

El método de Monte Carlo es un método de resolución numérica donde se modelan las relaciones e interacciones de distintos objetos y su entorno, mediante la generación aleatoria de estas interacciones. Mientras mayor sea la repetición de pruebas se obtiene un resultado que va convergiendo a un valor con mayor precisión. Es por el recurso de la aleatoriedad que obtiene el nombre Monte Carlo, pues se inspira en la región del Principado de Mónaco donde se encuentran el casino Monte Carlo.

Un método Monte Carlo se puede definir de la siguiente forma:

“Los métodos Monte Carlo son aquéllos en los que las propiedades de las distribuciones de las variables aleatorias son investigadas mediante la simulación de números aleatorios. Estos métodos, dejando a un lado el origen de los datos, son similares a los métodos estadísticos habituales en los cuales las muestras aleatorias se utilizan para realizar inferencias acerca de las poblaciones origen. Generalmente, en su aplicación estadística se utiliza un modelo para simular un fenómeno que contiene algún componente aleatorio. En los métodos Monte Carlo, por otro lado, el objeto de la investigación es un mod-

[†]jcrespo+rbf@fiumsa.edu.bo

[‡]ccruz@fiumsa.edu.bo

elo en sí mismo, y se utilizan sucesos aleatorios o pseudoaleatorios para estudiarlo".Gentle (2006)

El método cobra una especial relevancia las últimas décadas debido a que se produjeron sustanciales y significativos avances respecto a la potencia de los procesadores y las distintas arquitecturas informáticas. Es ampliamente usado en problemas donde obtener un resultado analítico no es posible, o en problemas que contienen demasiada complejidad (como es el caso de la ecuación de transporte de Boltzmann para partículas sin carga).Bielajew (2001)

2. MARCO TEÓRICO

El estudio matemático formal del azar se remonta hace bastantes siglos. En 1654 motivados por dos problemas propuestos por Antoine Gombaud (le Chevalier de Méré), basados en las observaciones de los juegos de azar de la época, es que se reúnen a resolver el desafío matemático personalidades como Pascal, Cardano y Fermat entre otros dando inicio a la teoría clásica de la probabilidad. Es en este periodo que distintos matemáticos advierten la relación de la teoría combinatoria y la incipiente teoría de la probabilidad.

Un matemático que realiza un interesante aporte en este aspecto es Leibniz, el cual luego de realizar la disertación titulada Dissertatio de Arte combinatoria, encuentra particular interés por 'la certidumbre'.

La probabilidad para Leibniz es un criterio objetivo de verdad. Es una lógica de lo contingente (que puede suceder o no) que se contrapone a la lógica de lo necesario. Permitiendo a la probabilidad alcanzar la verdad. El interés de Leibniz por los juegos iba más allá de la teoría de la probabilidad, sus aplicaciones podrían aplicarse al Arte de Inventar y subsecuentemente a la construcción de las características universales, temas que le parecían de mayor interés que a otros autores.Charles (1993)

2.1. Experimentación y la teoría de probabilidad

En 1777, el naturalista francés, el conde de Buffon (1707 – 1788) propuso el primer experimento que utilizaba un método de Monte Carlo, pues dependía de un hecho completamente aleatorio: la caída de una aguja luego de lanzarla. Las agujas son lanzadas aleatoriamente en un piso con un patrón de rayas separadas una cierta distancia. Buffon considero que los centros están uniformemente distribuidos en un piso infinito. Las agujas no ruedan a las aberturas como lo harían en la vida real, ni estas interactúan entre sí. Además, el ángulo respecto a la horizontal es considerado distribuido uniforme entre 0 y $\pi/2$.

El resultado al que se llegó relaciona la probabilidad de cruzar una de las rayas con la distancia de separación, la longitud de la aguja y el valor de π . Esta se expresa en la Ec.1.

$$P = \frac{2l}{d\pi} \quad (1)$$

Se conoce como la extensión de Laplace al prob-

lema de Buffon cuando se considera tanto líneas verticales como horizontales. Se llama Buffon-Laplace aunque Buffon, quien resolvió este problema anteriormente contenía un error que más tarde en 1812 fue corregido por Laplace expresándose en la Ec. 2.

$$P = \frac{2l(a+b)}{ab\pi} \quad (2)$$

De esta propuesta, se pretende obtener el valor de π . La probabilidad se obtiene empíricamente al realizar el experimento un número grande de veces y contar cada caso.

Este problema histórico fue estudiado en ese entonces como una curiosidad poco práctica, debido a que obtener un resultado preciso requería un número grande de repeticiones.

Durante el siglo XX, con el advenimiento de las nuevas tecnologías es que el método de Monte Carlo vuelve a cobrar relevancia pues permite un número grande de repeticiones sin complicación. Sin embargo el manejo teórico de la matemática involucrada es bastante conocido, se realiza una breve revisión.

2.2. Teorema de los Grandes Números

Sea X_1, \dots, X_n una sucesión de variables aleatorias, diremos que la sucesión de X_n converge en probabilidad a X (que es otra variable aleatoria), si solo si para todo $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (P[(X_n - X) > \varepsilon] = 0) \quad (3)$$

Siendo conocida esta expresión como criterio de convergencia débil.

Tomamos la variable aleatoria de interés, el promedio: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum X_i$

Aplicando el operador lineal Esperanza:

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) \quad (4)$$

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum E(X_i) \quad (5)$$

Si consideramos que la sucesión de variables X_i son independientes e idénticamente distribuidas, la Esperanza para cada variable es la media μ .

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} * n\mu \quad (6)$$

$$E(\bar{X}_n) = \mu \quad (7)$$

Esta relación nos muestra que el valor esperado del promedio de una muestra tiende al valor medio.

De igual manera con el operador varianza tenemos:

$$V(\bar{X}_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) \quad (8)$$

Con el supuesto de las variables (X_i), son independientes e idénticamente distribuidas, la varianza de la suma, es la suma de las varianzas:

$$V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} \sum V(X_i) \quad (9)$$

Al ser idéntica para todos tenemos:

$$V(X_i) = \sigma^2 \quad (10)$$

$$V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad (11)$$

Con los resultados de la esperanza y varianza del promedio, se puede enunciar el siguiente teorema:

Sea X_n una sucesión de una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida tal que $E(X_i^2) < \infty \forall i, y$:

$$E(X_i) = \mu \quad (12)$$

$$V(X_i) = \sigma^2 \quad (13)$$

Entonces el promedio de la secuencia X_n converge en probabilidad a μ . Es decir que para una población que tiene una media μ , si se toma una muestra y se calcula el promedio muestral, este tiende al valor de μ mientras n tienda a ∞ .

Esto se demuestra al tomar un valor $\varepsilon > 0$, entonces, usando la relación de acotación de Chebichev:

$$0 \leq P[(\overline{X_n} - \mu) > \varepsilon] \leq \frac{E[(\overline{X_n} - \mu)^2]}{\varepsilon^2} \quad (14)$$

$E[(\overline{X_n} - \mu)^2]$ es la varianza del promedio, entonces tenemos la relación:

$$0 \leq P[(\overline{X_n} - \mu) > \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad (15)$$

Mostrando que cuando n tiende a un número grande, la probabilidad se anula y por consecuencia el promedio converge en probabilidad a μ .

2.3. Teorema del Limite Central

Sea X_1, \dots, X_n una sucesión de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas tales que \forall_i tengan el segundo momento finito $E(X_i^2) < \infty$ con una media μ y una varianza σ^2 distinta de cero. Entonces, si n es suficientemente grande, la variable aleatoria promedio:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum X_i \quad (16)$$

Tiene aproximadamente una distribución normal con:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu \quad (17)$$

$$V_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n} \quad (18)$$

El teorema central de la probabilidad tiene una importancia categórica al ser enunciada para una sucesión de variables con cualquier distribución.

3. MODELO DE SIMULACIÓN

3.1. Entorno de desarrollo

Como quedo manifiesto en el anterior punto el método Monte Carlo tiene una precisión proporcional a $\frac{1}{\sqrt{N}}$. En comparación con otros métodos numéricos determinísticos (como por ejemplo el método de trapecios o Simpson para encontrar la integral de una función definida) que tienen un error de aproximación proporcional a $\frac{1}{N^2}$ en el mejor de los casos, los métodos que aplican Monte Carlo (como por ejemplo la integración por Monte Carlo) requieren una cantidad considerable mayor de datos a procesar. Sumado este hecho a la complejidad que puede involucrar el modelamiento de las interacciones aleatorias, es que generalmente se prefiere usar lenguajes de programación de bajo nivel que permitan optimizar el tiempo de cómputo total.

Por ejemplo, es común encontrar desarrollos en C, C++ y Fortran entre otros. Existiendo hoy librerías que facilitan la generación de números pseudoaleatorios y el manejo matemático. Aún con esta ventaja el código necesario para una aplicación final suele ser bastante complicado y extenso. Estos dos criterios identificados se consideraron para la selección del entorno de desarrollo:

1. El tiempo de procesamiento
2. La legibilidad y simplicidad del código

Siendo Python un lenguaje de alto nivel que cumple con el segundo criterio, al incluir la librería Numpy (librería de procesamiento numérico para Python) obtenemos una velocidad de procesamiento comparable a C. Adicionalmente se utilizó una librería para la representación de los datos, Matplotlib. Se detalla todo el código y las dependencias en el repositorio del proyecto:

<https://github.com/CobraPython/montecarlopi>

3.2. Generación de números pseudoaleatorios

Existen distintos métodos para la generación de números aleatorios, sin embargo, la generación de estos en ordenador parte necesariamente desde una semilla (seed) que es un valor concedido por el usuario. Con esta semilla se genera una única serie de números aleatorios, pudiendo ser replicados a partir de esta. Por esta razón es que se denominan números pseudo aleatorios. La librería Numpy utiliza el algoritmo Mersenne Twister (MT19937) escribe Marchand (2019) para la generación de números pseudoaleatorios. Este método particular tiene la cualidad de tener una periodicidad bastante grande en la generación de números: $2^{19937} - 1$ Makoto (1998).

3.3. Métodos de estimación de π

3.3.1. Método Simple para la estimación de π

Se propone estimar el número de π con el siguiente modelo: Consideramos un cuadrado de lado L ,

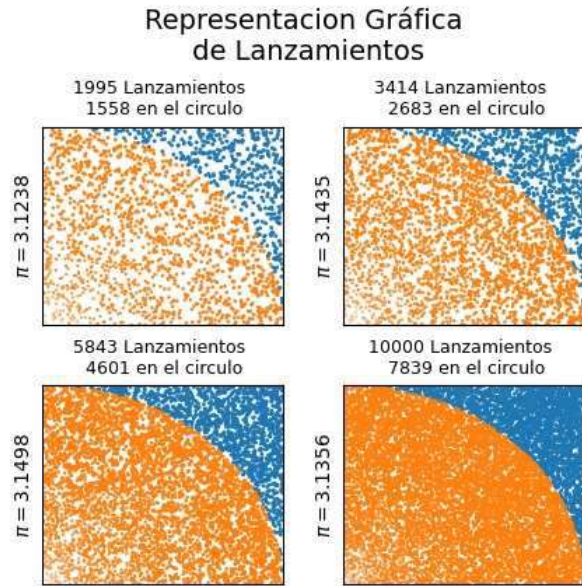


FIG. 1.— Representación gráfica de la estimación de π mediante el lanzamiento aleatorio de puntos. Mientras mayor sea el número de lanzamientos las áreas son más definidas

con una circunferencia en su interior de radio L . La relación de áreas se da en Ec. 19:

$$\frac{A_{\text{circunferencia}}}{A_{\text{cuadrado}}} = \frac{\pi L^2}{L^2} \quad (19)$$

Una forma de calcular esta relación de áreas es lanzar al azar puntos dentro del cuadrado. Estos puntos pueden quedar también dentro de la circunferencia, la relación de áreas quedara expresada por aquellos puntos que estén dentro del círculo sobre el total.

En la Fig. 1 se muestra un ejemplo del experimento propuesto, mostrando un solo cuadrante ya que las áreas son simétricas en cada eje.

Queda bastante ejemplificado que mientras mayor sea el número de puntos, las áreas quedan mejor definidas. Para obtener esta aproximación se necesitan generar los puntos aleatoriamente con una distribución uniforme, es decir, con igual probabilidad de caer dentro y fuera del área del cuarto de circunferencia.

3.4. Método de Buffon para la estimación de π

En el caso de la estimación de π usando la propuesta experimental de Buffon y la extensión de Laplace, tenemos más variables aleatorias a considerar. Puesto que cada aguja cae aleatoriamente con un centro en (X_i, Y_i) , tiene relacionada otra variable aleatoria que corresponde al ángulo de inclinación θ de la aguja. La Fig.2 nos muestra un ejemplo.

Si bien en este caso se recurre a una función trigonométrica para evaluar la inclinación y considerar a las agujas que cruzan la línea, el ordenador usa recursivamente el valor de π para calcular la función coseno, siendo este un error “histórico” ya

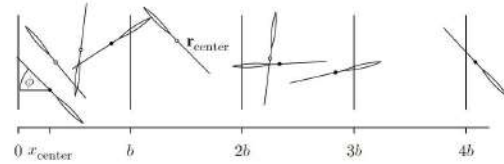


FIG. 2.— Las agujas caen en una posición y ángulo aleatorio. Dependiendo de este ángulo se puede determinar si la aguja cruza una línea. Krauth, Werner (2006)

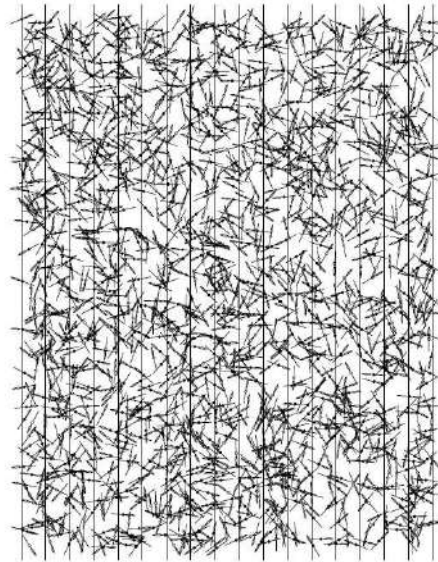


FIG. 3.— Representación gráfica del experimento de Buffon lanzando 2000 agujas. Krauth, Werner (2006)

que recurre al valor de π para calcular al mismo. Por esta razón se usó una corrección geométrica que evita el uso de funciones trigonométricas.

Pasando de requerir generar aleatoriamente un ángulo θ , a generar aleatoriamente desplazamientos $\delta x, \delta y$. En la siguiente figura se muestra una representación gráfica de cómo se realiza la simulación con un número grande de lanzamientos aleatorios con distribución uniforme. Krauth, Werner (2006)

Para esta propuesta del lanzamiento de agujas para la estimación de π , se comparan dos casos:

- Problema Buffon, cuando las agujas cruzan líneas en un solo eje.
- Problema Buffon-Laplace, cuando las agujas cruzan líneas en sentido vertical y horizontal.

En la Fig. 3 se puede ver el resultado del lanzamiento de 2000 agujas de largo a de la misma longitud que la separación de las líneas b , es decir que $a = b$. La probabilidad se calcula en relación a cuantas agujas cruzan una línea sobre el total de agujas.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1. Método simple para la estimación de π

4.1.1. Comprobación del límite central



FIG. 4.— Histograma del método simple para 100 repeticiones de 100000 lanzamientos.



FIG. 6.— Histograma del método simple para 3000 repeticiones de 1000000 lanzamientos. Se aprecia el comportamiento gaussiano, la característica forma de "campana".



FIG. 5.— Histograma del método simple para 3000 repeticiones de 100000 lanzamientos. Se aprecia el comportamiento gaussiano, la característica forma de "campana".

Se consideró el lanzamiento de 10^5 puntos y se repitió 10^2 veces el experimento, el histograma obtenido se muestra en la Fig. 4. Al realizarse 3×10^3 veces el experimento, en la Fig. 5 se nota más claramente que el histograma obtenido tiene un comportamiento gaussiano.

Si se compara con el histograma de la Fig. 6 al realizar 3×10^3 veces el experimento lanzando 10^6 puntos, el comportamiento del histograma es también claramente Gaussiano.

También se puede resaltar que el valor de σ es menor cuando consideramos 10^6 ($\sigma = 0.00162$) en comparación con 10^5 ($\sigma = 0.00473$).

4.1.2. Comprobación del teorema de los grandes números

Se ha estimado el valor de π para distintas cantidades de puntos generados. En la Fig. 7 se muestra la congruencia de π con el valor que tiene la librería Numpy (IEEE 754 double-precision format). Se muestra que mientras mayor es el N tomado para estimar el valor de π , su error absoluto converge a cero.

En la Fig. 8 se muestra que este comportamiento

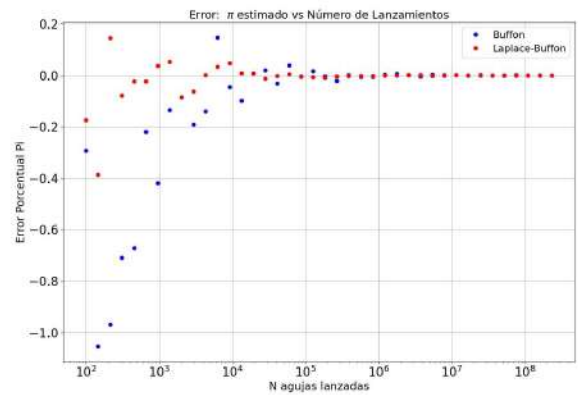


FIG. 7.— Se comparan los errores de ambos métodos (Buffon y Buffon-Laplace). Se observa que los datos de Buffon-Laplace convergen a 0 con un menor N que los datos de Buffon.

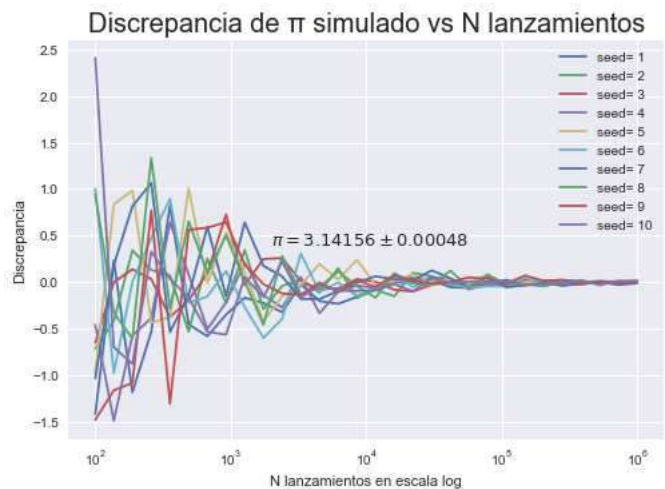


FIG. 8.— Error absoluto del valor de π a medida que N crece. Se observa que independientemente de la semilla representada por colores, el valor converge a 0.

es invariante al variar las semillas en la generación de los números pseudoaleatorios.

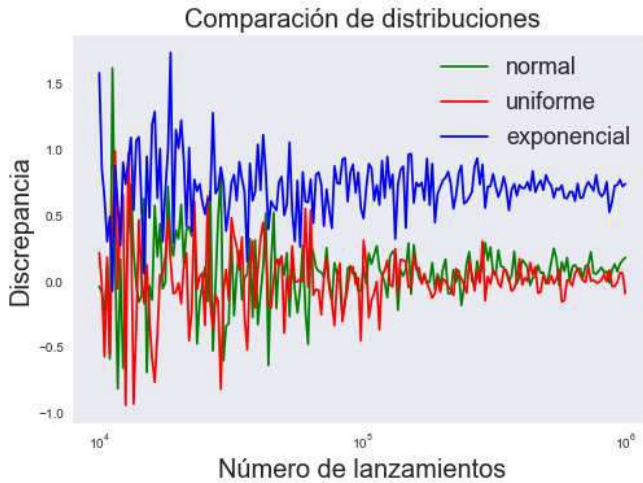


FIG. 9.— En esta gráfica se comparan tres funciones de distribución de probabilidad (pdf) que sigue el generador de números aleatorios. Con los debidos parámetros el valor converge a cero. Sin embargo, se aprecia que independientemente de los parámetros existe un valor de convergencia.

Finalmente, en la Fig. 9 se muestra una comparativa de la discrepancia al estimar el valor de π si consideramos distintas distribuciones de probabilidad en la generación aleatoria de puntos.

Se comparan tres distribuciones:

1. Normal
2. Uniforme
3. Exponencial

Es notable que para las tres distribuciones el valor de la discrepancia del valor estimado de π converge a un valor mientras mayor número de lanzamientos se utilice en la prueba. Al aplicar una distribución normal con $\mu = 0.27$ y $\sigma = 0.5$ el valor estimado de π es cercano que cuando se aplica una distribución uniforme. Al aplicar una distribución exponencial con un parámetro $\lambda = 0.42$, el valor estimado de π converge con un error de más del 0.5. Esto se debe a que los lanzamientos de las agujas tienen mayor probabilidad de caer en cierta posición y ángulo, lo que puede equivaler de manera experimental a por ejemplo que las agujas tengan otra conformación física, como en la siguiente imagen.

Si realizamos los histogramas al estimar el valor de π en un número grande de repeticiones aplicando distintas distribuciones en la generación de puntos y ángulos de las agujas, se demuestra que invariante se tienen un comportamiento Gaussiano en todos los casos. En las Figs. 11 y 10 se muestran los histogramas de las distribuciones normal y exponencial respectivamente.

4.2. Método de Buffon para la estimación de π

4.2.1. Comprobación del teorema del límite central

Se consideró el lanzamiento aleatorio de 2^8 agujas con una distribución uniforme para la posición y ángulo, repitiendo el experimento 200 veces para ambos casos; Buffon y la extensión de Laplace.

π estimado por Monte Carlo con distribución Exponencial: 300 repeticiones del experimento con $1e5$ lanzamientos

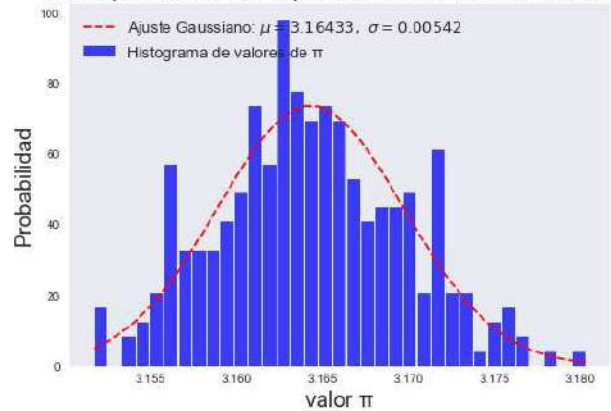


FIG. 10.— Histograma de los datos que siguen una distribución exponencial. Se aprecia el comportamiento gaussiano.

π estimado por Monte Carlo con distribución Normal: 300 repeticiones del experimento con $1e5$ lanzamientos

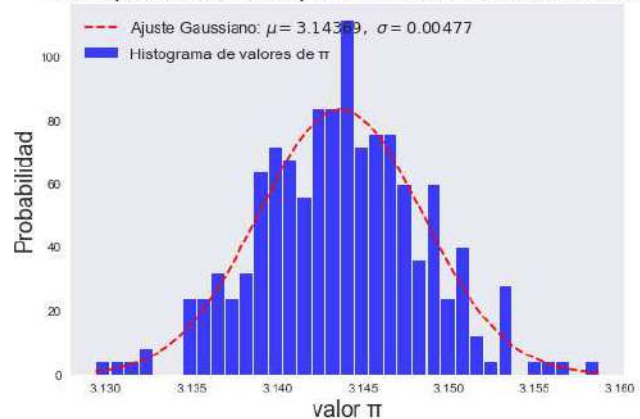


FIG. 11.— Histograma de los datos que siguen una distribución normal. Se aprecia la forma característica de "campana".

Mostrando que el histograma de la Fig. 12 de las estimaciones de π para ambos métodos presenta un comportamiento Gaussiano, demostrando la validez del teorema del límite central.

4.2.2. Comprobación del teorema de los grandes números

En la Fig. 7 se resume el error porcentual al estimar el valor de π vs. el número de lanzamiento de agujas para ambos métodos. El error converge a cero a partir del lanzamiento de 10^6 agujas. También queda evidente que con el método corregido de Laplace el valor estimado de π converge a su valor esperado con un menor número de lanzamiento de agujas casi en un factor de 10 al compararlo con el método original de Buffon.

5. CONCLUSIONES

En esta experiencia se mostraron tres distintos métodos que aplican Monte Carlo para estimar el valor de π : el método simple por comparación de áreas, el método propuesto por Buffon mediante el lanzamiento de agujas y el método de Buffon ampliado por Laplace.

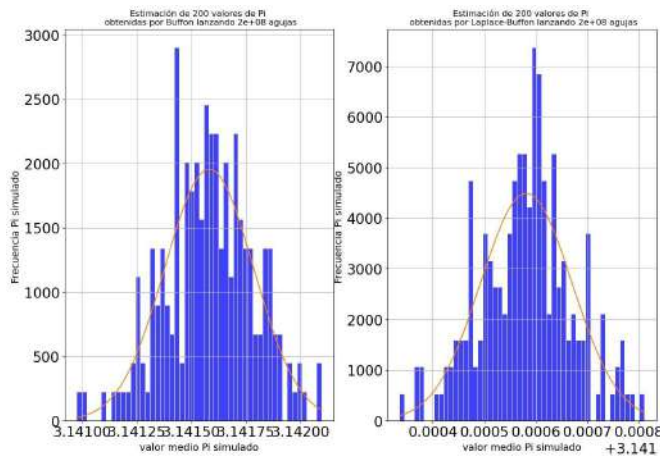


FIG. 12.— Comparación histogramas. A la izquierda siguiendo el método de Buffon y a la derecha Buffon con la corrección de Laplace.

Se demostró que los resultados obtenidos mediante una simulación Monte Carlo tienen un carácter no determinista que cumplen con los teoremas centrales de la teoría de la probabilidad.

Finalmente, se mostró que se puede lograr simulaciones con un alto costo computacional aplicando un lenguaje de alto nivel como Python y la librería Numpy, lo que permite tener un código simple y legible.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Charles M. (1993), Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas **16** 241
- Bielajew A. (2001), Some random thoughts on Monte Carlo electron and photon transport (Springer)
- Gentle J. (2006), Random number generation and Monte Carlo methods (Springer Science & Business Media)
- Krauth, Werner (2006), Statistical mechanics: algorithms and computations (OUP Oxford)
- Matsumoto, Makoto and Nishimura, Takuji (1998), ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS) **1** 3
- Marchand T. (2019), How Does Your Computer Generate Random Numbers? (<https://www.sicara.ai/blog/2019-01-28-how-computer-generate-random-numbers>)

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Lic. Alfonso Velarde Chávez

Email: avelarde@fiumsa.edu.bo

Instituto de Investigaciones Físicas

Dr. Flavio Ghezzi Moris

Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo

Dr. Wilfredo Tavera Llanos

Email: witavera@fiumsa.edu.bo

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos

Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

Misión

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica semestralmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

Instrucciones para los autores

La Revista Boliviana de Física recibe trabajos escritos en castellano, inglés o portugués y deben contar con un resumen en castellano y su correspondiente traducción en inglés.

Los autores deberán enviar sus trabajos preferentemente en los formatos $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, *MS Word*, o *sólo texto* (con extensiones *.tex*, *.doc* y *.txt*, respectivamente), ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. Las figuras deberán tener una resolución razonable a fin de que puedan ser vistas con suficiente claridad por el lector.

Los artículos científicos serán revisados por el Comité Editorial y posteriormente por un par de árbitros anónimos quienes dan el veredicto sobre si el artículo es aceptado o no.

La comunicación de los autores con los árbitros se realiza únicamente a través del editor encargado del área.

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

Conflicto de interés: Los autores que envíen artículos para su publicación en la RBF admiten que no tienen conflicto de interés en relación a los trabajos realizados y presentados.

CONTENIDO

A. ARTÍCULOS

CONDICIONES EXTENDIDAS DE SINCRONIZACIÓN DE DOS
MAPAS LOGÍSTICOS ACOPLADOS

R. O. E. Bustos-Espinoza & G. M. Ramírez-Ávila

ESTRUCTURAS LOCALIZADAS Y EXTENDIDAS DE LA
ECUACIÓN COMPLEJA DE GINZBURG-LANDAU CÚBICA-
QUÍNTICA-SÉPTICA ASOCIADA A LA ECUACIÓN DE SINE-
GORDON PARAMÉTRICAMENTE FORZADA Y CON DISIPACIÓN

Juliana Carrasco-Mejía & Deterlino Urzagasti

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

HAMILTONIANO COVARIANTE PARA LA PARTÍCULA CARGADA

V. M. Peñafiel & Leoncio Gómez

ESTUDIO DEL MÉTODO MONTE CARLO EN SIMULACIONES
PARA LA ESTIMACIÓN DEL VALOR DE π

J. C. Vargas & Carlos Andrés Cruz-Carpio