

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 38

NOVIEMBRE 2021 • LA PAZ - BOLIVIA



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA - UMSA

SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

Esta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Lic. Alfonso Velarde Chávez
Email: alfonso.velarde@gmail.com

Instituto de Investigaciones Físicas

Dr. Flavio Ghezzi Moris
Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo
Dr. Wilfredo Tavera Llanos
Email: witavera@fiumsa.edu.bo

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos
Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

CONSEJO EDITORIAL

Dr. Oscar Antonio Rondón

Institute of Nuclear and Particle Physics
University of Virginia
McCormick Road, Charlottesville, VA 22901
804 924-6787, USA
Email: or@virginia.edu

Dr. Carlos Navia

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense
Av. Gen. Milton Tavares de Souza
24210-340, Niterói, RJ-Brasil
Email: gfcnoj@if.uff.br

Dra. Maria Elizabeth Zucolotto

Departamento de Geología y Paleontología
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Av. Carlos Chagas Filho
21949-900, Rio de Janeiro, RJ, Brazil
Email: meteoritos@mn.ufrj.br

Dr. Pedro Paulo de Mello Venezuela

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense
Av. Gen. Milton Tavares de Souza
24210-346, Niterói, RJ-Brasil
Email: pedrovenezuela@id.uff.br

Juan Cesar Flores, PhD

Instituto de Alta Investigación
Universidad de Tarapaca
Arica - Chile
Email: cflores@uta.cl

ISSN 1562-3823



Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS
CARRERA DE FÍSICA
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
Y
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 38
NOVIEMBRE DE 2021
<https://doi.org/10.53287/dxhb9197ec33d>

Revista Boliviana de Física

ISSN 1562-3823

Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica

<http://www.scielo.org.bo>

<http://www.latindex.unam.mx>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

Diseño: A. Ticona

Dirección: Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.
Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

Portada: Planetario “Max Schreier” Calle Federico Suazo #1976, La Paz, Bolivia.

Formato $\text{L}^{\text{T}}\text{E}^{\text{X}}2_{\epsilon}$. *Tipo de fuente utilizada:* newcentury

Impreso por: **Imprenta Antofagasta**

Dirección: Canónigo Ayllón No. 524. Tel. (591 2) 2493609.

CONTENIDO

EDITORIAL *Editor* 1

A. ARTÍCULOS

CASOS DE LOCALIZACIÓN DINÁMICA EXACTA BAJO LA APROXIMACIÓN SEMICLÁSICA
Edson Anghelo Garcia Foronda, Diego Sanjinés Castedo & Evaristo Mamani Carlo 3

¿TIENEN EL MISMO ORIGEN LOS METEORITOS METÁLICOS ENCONTRADOS EN BOLIVIA? *Gonzalo Pereira* 10

EFFECTIVE HAMILTONIAN FOR A TIGHT-BINDING SQUARE LATTICE AND ITS RELATION TO A TWO-MESH LC CIRCUIT WITH DISCRETE CHARGE
Evaristo Mamani C., Marcelo Calcina-Nogales & Diego Sanjinés Castedo 15

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE LA TENSIÓN SUPERFICIAL DE DISOLUCIONES DE AGUA DESTILADA CON DIFERENTES COMPUESTOS EN TIEMPOS DE PANDEMIA
Willy Daniel Ayala Cabrera, Eddy Cristian Zabala Arias & Natalia Estefania Farel 27

EDITORIAL

Sin duda, los efectos de la pandemia se han sentido fuertemente en el ámbito académico y científico; sin embargo, a pesar de esta difícil situación, el esfuerzo de docentes, investigadores y estudiantes ha permitido reducir las consecuencias nocivas de este hecho. Merced a ese esfuerzo es que ve la luz el número 38 de la Revista Boliviana de Física (RBF).

Esta entrega de la RBF, consta de tres artículos científicos sometidos a proceso riguroso de arbitraje internacional como es norma de esta publicación. Investigadores del área de Física Teórica del Instituto de Investigaciones Físicas (IIF) de la UMSA contribuye con dos trabajos, en tanto que el Planetario Max Schreier con uno. Por otra parte, un grupo de entusiastas estudiantes de la Carrera de Física de la UMSA, contribuye con un artículo de enseñanza de la física.

La apertura de este número 38 de la RBF tiene al artículo de García Foronda *et al.* (2021) quienes estudian el fenómeno de Localización Dinámica Exacta (LDE) en una partícula cargada que se desplaza en una red unidimensional de enlace fuerte; habiendo los autores determinado los parámetros de los campos eléctricos que inducen el régimen LDE.

El segundo artículo científico con arbitraje corresponde a Pereira (2021), investigador del Planetario Max Schreier y especialista en meteoritos, quien responde con base en una clasificación química a la pregunta de si los meteoritos Bolivia y Pooposo tienen o no el mismo origen.

Cierra la sección de artículos científicos arbitrados, una otra contribución en inglés del área de Física Teórica del IIF, donde Mamani *et al.* (2021) profundizan sus estudios previos Mamani *et al.* (2017, 2018) sobre la denominada ingeniería de interacciones y en esta oportunidad, analizan cómo estas se relacionan con un circuito LC.

Finalmente, en la sección de enseñanza de la física, Ayala Cabrera *et al.* (2021), estudiantes muy motivados de pregrado de la Carrera de Física de la UMSA, hacen sus primeras armas en publicación, mostrándonos sus experiencias de construir dispositivos simples para el estudio de la tensión superficial; iniciativa motivada por la falta de acceso a los laboratorios en tiempos de pandemia.

Esperamos que el contenido de este ejemplar de la RBF sea de su agrado y pueda motivar al lector en la profundización de los trabajos expuestos a través de estas páginas. También invitamos a la comunidad científica a enviar sus trabajos para ser publicados en la RBF.

REFERENCIAS

- García Foronda E.A., Sanjinés Castedo D. & Mamani Carlo E. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **38**, 3.
- Pereira G. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **38**, 10.
- Mamani Carlo E., Calcina-Nogales M., & Sanjinés Castedo D. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **38**, 15.
- Mamani E., Calcina-Nogales M., & Sanjinés D. (2017), *International Journal of Modern Physics B*, **31**, 1750116.
- Mamani E., Calcina-Nogales M., & Sanjinés D. (2018), *Revista Mexicana de Física*, **64**, 456.
- Ayala Cabrera W.D., Zabala Arias E.C., & Farel Hervas N.E. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **38**, 27.

EDITORIAL

Undoubtedly, the effects of the pandemic have been strongly felt in the academic and scientific community. Despite this difficult context, the efforts of teachers, researchers and students have reduced the negative impact of the pandemic and it is thanks to these efforts that the 38th issue of the Bolivian Journal of Physics (RBF) has been published.

This issue of the RBF, contains three scientific articles submitted to a rigorous international refereed process as is the norm for this publication. Researchers from the Theoretical Physics area of the Instituto de Investigaciones Físicas (IIF) of UMSA have contributed two articles and the third contribution is from the Max Schreier Planetarium team. Additionally, a group of enthusiastic students from UMSA's Physics Department contribute with an article on physics education.

The opening article is a study of the Exact Dynamic Localization (EDL) phenomenon in a charged particle moving in a one-dimensional strong-bond lattice in which the authors García Foronda *et al.* (2021) determine the parameters of the electric fields that induce the EDL regime.

The second refereed article is by Pereira (2021), researcher at the Max Schreier Planetarium and specialist in meteorites. Pereira, using chemical classification responds to the question of whether or not the Bolivia and Pooposo meteorites have the same origin.

The section of refereed scientific articles closes with another contribution in English from the Theoretical Physics area of the IIF, where Mamani *et al.* (2021) deepen their previous studies Mamani *et al.* (2017, 2018) on the engineering of interactions and analyze how these are related to an LC circuit.

Finally, in the section on physics education, Ayala Cabrera *et al.* (2021), highly motivated undergraduate students of the UMSA Physics Department, share their first publication, showing us their experiences in building simple devices for the study of surface tension; an initiative motivated by the lack of access to laboratories in times of the pandemic.

We hope that the contents of this issue of the RBF will be to your liking and may motivate the further study of the work presented. We also invite the scientific community to submit papers for publication in the RBF.

REFERENCIAS

- García Foronda E.A., Sanjinés Castedo D. & Mamani Carlo E. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **38**, 3.
- Pereira G. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **38**, 10.
- Mamani Carlo E., Calcina-Nogales M., & Sanjinés Castedo D. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **38**, 15.
- Mamani E., Calcina-Nogales M., & Sanjinés D. (2017), *International Journal of Modern Physics B*, **31**, 1750116.
- Mamani E., Calcina-Nogales M., & Sanjinés D. (2018), *Revista Mexicana de Física*, **64**, 456.
- Ayala Cabrera W.D., Zabala Arias E.C., & Farel Hervas N.E. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **38**, 27.

CASOS DE LOCALIZACIÓN DINÁMICA EXACTA BAJO LA APROXIMACIÓN SEMICLÁSICA EXACT DYNAMIC LOCALIZATION CASES IN THE SEMICLASSICAL APPROXIMATION

EDSON ANGHELO GARCIA FORONDA [1], DIEGO SANJINÉS CASTEDO [2][†], & EVARISTO MAMANI CARLO [3]

Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés
Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

(Recibido 20 de agosto de 2021; aceptado 25 de octubre de 2021)

<https://doi.org/10.53287/bddo8515af16g>

RESUMEN

En este trabajo se aplica los resultados de la aproximación semiclásica y la promediación temporal en una red unidimensional descrita por un Hamiltoniano de enlace fuerte con interacciones de largo alcance a todos los vecinos. La partícula cargada se mueve en esta red en presencia de un campo eléctrico externo homogéneo rápidamente oscilante. Dicha aplicación semiclásica corresponde al teorema de Dignam y de Sterke referido al fenómeno de “localización dinámica exacta” (LDE) y deducido con el formalismo cuántico por esos autores. Para ilustrar la validez de LDE se eligió en este trabajo varios campos eléctricos externos. Los resultados indican que los formalismos semiclásico y cuántico son equivalentes y conducen a las mismas condiciones para LDE.

Descriptor: Método de enlace fuerte — modelo semiclásico — efectos de localización.

Código(s) PACS: 31.15.aq, 03.65.Sq, 72.15.Rn

ABSTRACT

In this work we apply results from the semiclassical method and time-average techniques to a one-dimensional lattice described by a tight-binding Hamiltonian with long-range interactions to all neighbours. The charged particle moves in the lattice in the presence of an external homogeneous and rapidly oscillating electric field. Such a semiclassical application corresponds to the Dignam and de Sterke theorem referred to as the phenomenon of “exact dynamic localization” (EDL). This theorem has been deduced within the quantum formalism by the authors. To illustrate the validity of EDL, several external electric fields were chosen in this work. The results indicate that the semiclassical and the quantum formalism are equivalent and yield the same conditions for EDL.

Subject headings: Tight-binding method — semiclassical model — localization effects.

1. INTRODUCCIÓN

El fenómeno de localización dinámica en redes de enlace fuerte fue descrito por primera vez en el trabajo pionero de Dunlap y Kenkre (Dunlap 1986), donde se definió como *localización dinámica* el régimen en el que una partícula cargada (por ejemplo, un electrón) oscila en un intervalo acotado de la red por efecto de un campo eléctrico externo periódico en el tiempo. Dicho régimen se deduce de la condición de que el desplazamiento cuadrático medio esté acotado en el estado cuántico del electrón en la red. Dunlap y Kenkre se refirieron a la extensión de su resultado para interacciones de largo alcance a fin de mostrar que en este caso se pierde la condición de localización dinámica para los parámetros correspondientes al caso de interacciones

a primeros vecinos; sin embargo, Dunlap y Kenkre estimaron que si las interacciones de largo alcance son pequeñas comparadas con las de primeros vecinos, entonces la condición de localización dinámica podría mantenerse aún de manera aproximada.

En 2002 Dignam y de Sterke (Dignam 2002) mostraron que dicha estimación para una localización dinámica *aproximada* no puede ser válida aún cuando el elemento de *hopping* de la interacción a segundos vecinos sea un décimo del elemento correspondiente a primeros vecinos, poniendo en evidencia la necesidad de calcular la forma general que debería tener un campo eléctrico externo para que haya localización dinámica considerando todas las interacciones en una red de enlace fuerte. A este nuevo régimen de localización dinámica se lo denominó “localización dinámica exacta” (LDE). De manera interesante, se encontró que la aplicación del modelo semiclásico y de la promediación temporal para campos rápidamente oscilantes

[1]<https://orcid.org/0000-0002-3601-5752>

[2]<https://orcid.org/0000-0001-6832-9513>

[3]<https://orcid.org/0000-0002-3484-8582>

[†]diegosanjinescastedo@gmail.com

(Mamani 2017, 2018, 2020) produce en estos casos los mismos resultados de Dunlap y Kenkre, Dignam y de Sterke, y otros, obtenidos con el formalismo cuántico.

Este trabajo se divide en dos partes independientes entre sí: (i) En la Sección 2 se deduce la función hamiltoniana efectiva H_{ef} bajo la aproximación semiclásica; luego, H_{ef} se usa en la Sección 3 para justificar por argumentos de plausibilidad la equivalencia entre los esquemas semiclásico y cuántico para describir el régimen de LDE. (ii) En la sección 4 se calcula explícitamente la expresión $G_0(n) = 0$ para la condición de LDE correspondiente a 5 casos de campos eléctricos caracterizados por sus frecuencias e intensidades; los resultados de esta sección no son una consecuencia o aplicación de la Sección 2 pues $G_0(n) = 0$ se puede deducir semiclásicamente o cuánticamente.

2. DEDUCCIÓN SEMICLÁSICA DEL HAMILTONIANO EFECTIVO

En este trabajo se considera el caso de una partícula con masa m y la carga eléctrica del electrón $-e$, que se propaga por el mecanismo de *hopping* en una red unidimensional de enlace fuerte con constante de red a y elementos de *hopping* A_n que determinan la interacción entre la partícula y un ion separados por una distancia na . Sobre la partícula actúa un campo eléctrico externo oscilante $f(\omega t)$ con promedio temporal nulo en un periodo. La función hamiltoniana (o Hamiltoniano) que describe este sistema físico es:

$$H(x, k; t) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nk) + xf(\omega t), \quad (1)$$

donde se supuso valores unitarios para: a , m , e , y \hbar (unidades naturales). La aplicación del método semiclásico consiste de la formulación hamiltoniana expresada por medio de las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial k}, \quad \dot{k} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (2)$$

Las ecuaciones de movimiento para las variables dinámicas x y k se obtienen de (2):

$$\dot{x} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin(nk), \quad (3)$$

$$\dot{k} = -f(\omega t). \quad (4)$$

Utilizaremos la transformación canónica $k(t) = k'(t) - g(t)$ donde $g(t) \equiv \int^t dt' f(\omega t')$ en (3) y (4) tal que:

$$\dot{x} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin[n(k' - g)], \quad (5)$$

$$\dot{k}' = 0. \quad (6)$$

Para este sistema de ecuaciones se propone las soluciones:

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t) + \xi(\tau), \\ k'(t) &= K(t) + \eta(\tau), \end{aligned} \quad (7)$$

donde $X(t)$ y $K(t)$ son referidas como “coordenadas lentas” y $\xi(\tau)$ y $\eta(\tau)$ son referidas como “coordenadas rápidas”. Asimismo t y $\tau \equiv \omega t$ serán referidos como “tiempo rápido” y “tiempo lento”, respectivamente. Las derivadas temporales de las variables dinámicas (7) son:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{X}(t) + \omega \frac{d\xi}{d\tau}, \\ \dot{k}'(t) &= \dot{K}(t) + \omega \frac{d\eta}{d\tau}; \end{aligned} \quad (8)$$

reemplazando (7) y (8) en (5) y (6) se obtiene:

$$\dot{X}(t) + \omega \frac{d\xi}{d\tau} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin[n(K + \eta - g)], \quad (9)$$

$$\dot{K}(t) + \omega \frac{d\eta}{d\tau} = 0. \quad (10)$$

Utilizaremos la definición usual para el promedio temporal: $\langle \dots \rangle = (1/T) \int_0^T dt(\dots)$, donde T es el período y (\dots) es la función a promediar. Suponemos que las coordenadas rápidas tienen un promedio nulo en un período T del campo oscilante $f(\omega t)$, mientras que las coordenadas lentas varían muy poco en ese periodo:

$$\begin{aligned} \langle \xi(\tau) \rangle &= 0, & \langle \eta(\tau) \rangle &= 0, \\ \langle X(t) \rangle &= X(t), & \langle K(t) \rangle &= K(t). \end{aligned}$$

Calculando el promedio temporal del sistema de ecuaciones (9) y (10) con las consideraciones ya mostradas, se obtiene:

$$\dot{X} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \langle \sin[n(K + \eta - g)] \rangle, \quad (11)$$

$$\dot{K} = 0. \quad (12)$$

Así, (11) y (12) es el sistema de ecuaciones de movimiento “efectivas” para las coordenadas lentas. Por otro lado, restando (11) de (9) y (12) de (10) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \{ \sin[n(K + \eta - g)] \\ &\quad - \langle \sin[n(K + \eta - g)] \rangle \}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{\eta} = 0, \quad (14)$$

de donde (13) y (14) es el sistema de ecuaciones de movimiento “efectivas” para las coordenadas rápidas. La única solución consistente cuando $\xi(t)$ y $\eta(t)$ se desarrollan en series hasta ω^{-2} es $\eta = 0$. Así, las ecuaciones efectivas de movimiento (11) y (12) quedan como:

$$\dot{X} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \langle \sin[n(K - g)] \rangle, \quad (15)$$

$$\dot{K} = 0. \quad (16)$$

Para encontrar un Hamiltoniano efectivo $H(X, K)$ se integra las ecuaciones (15) y (16) usando:

$$\sin[n(K - g)] = \frac{1}{2i} [e^{inK} e^{-ing} - e^{-inK} e^{ing}]. \quad (17)$$

Ya que la función $g(t)$ es periódica, entonces se puede expresar como:

$$F(\tau) \equiv e^{ing} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_s(n) e^{is\tau}, \quad (18)$$

donde:

$$G_s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \exp \left[-is\tau + i\frac{n}{\omega} \int^{\tau} d\tau' f(\tau') \right]. \quad (19)$$

Así, (18) se escribe como

$$e^{-ing} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_s^*(n) e^{-ist} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_{-s}^*(n) e^{ist}, \quad (20)$$

de tal forma que (17) queda en la forma:

$$\text{sen}[n(K-g)] = \frac{e^{is\tau}}{2i} \sum_{s=-\infty}^{\infty} [e^{inK} G_{-s}^*(n) - e^{-inK} G_s(n)], \quad (21)$$

cuyo promedio temporal es:

$$\langle \text{sen}[n(K-g)] \rangle = \frac{\langle e^{is\tau} \rangle}{2i} \sum_{s=-\infty}^{\infty} [e^{inK} G_{-s}^*(n) - e^{-inK} G_s(n)]. \quad (22)$$

Utilizamos

$$\langle e^{i(n\pm m)\tau} \rangle = \delta_{n,\mp m}, \quad (23)$$

así que (22) queda como:

$$\begin{aligned} \langle \text{sen}[n(K-g)] \rangle &= \frac{1}{2i} [e^{inK} G_0^*(n) - e^{-inK} G_0(n)] \\ &= \text{Im} [G_0^* e^{inK}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Reemplazando (24) en (15) se obtiene las ecuaciones “efectivas” de movimiento para \dot{X} y \dot{K} :

$$\dot{X} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \text{Im} [G_0^* e^{inK}], \quad (25)$$

$$\dot{K} = 0. \quad (26)$$

A partir de estas ecuaciones se calculará el Hamiltoniano “efectivo” $H(X, K)$ en el que ya no aparece explícitamente el tiempo t , como consecuencia del proceso de promediación temporal en un período $2\pi/\omega$ del campo eléctrico externo rápidamente oscilante con promedio temporal nulo.

El Hamiltoniano efectivo $H(X, K) \equiv H_{ef}$ debe satisfacer las ecuaciones de Hamilton en las variables X y K según:

$$\dot{X} = \frac{\partial H_{ef}}{\partial K}, \quad \dot{K} = -\frac{\partial H_{ef}}{\partial X}; \quad (27)$$

luego, \dot{K} se integra en X :

$$H_{ef} = - \int \dot{K} dX + C(K) = C(K), \quad (28)$$

donde se usó (26). Por otra parte, de $\dot{X} = \partial H_{ef}/\partial K$ y (25) se tiene:

$$C(K) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{Re} [G_0^*(n) e^{inK}], \quad (29)$$

así la expresión para el Hamiltoniano efectivo queda como:

$$H_{ef} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{Re} [G_0^*(n) e^{inK}], \quad (30)$$

En el trabajo de Mamani *et al.* (Mamani 2020) se demuestra que si el Hamiltoniano $H(x, k; t)$ en (1) contiene un potencial estático arbitrario $V(x)$, el Hamiltoniano efectivo correspondiente contiene los siguientes términos adicionales:

$$\begin{aligned} H_{ef} &= -2 \sum_n A_n \text{Re} [G_0^*(n) e^{inK}] \\ &\quad - V''(X) \text{Re} [\mathcal{O}(\omega^{-2})] + V(X), \end{aligned} \quad (31)$$

donde

$$\mathcal{O}(\omega^{-2}) \equiv \frac{2}{\omega^2} \sum_{n,m,s} \frac{nm}{s^2} A_n A_m G_{-s}(n) G_s(m) e^{-i(n+m)K} \quad (32)$$

($s \neq 0$) para una red simétrica con $A_{-n} = A_n$.

3. CONDICIÓN DE LDE

Los términos $G_0(n)$ reparametrizan las interacciones del electrón con todos los iones de la red. Estos términos se pueden manipular controlando la intensidad f_0 y la frecuencia ω del campo eléctrico externo (ingeniería de interacciones); ésto es lo que se hace en la Sección 4 para varios tipos de campos eléctricos. La condición $G_0(n) = 0$ para cualquier valor de n constituye el régimen de *localización dinámica exacta* (LDE) de acuerdo al siguiente criterio: en el formalismo cuántico el estado del electrón representado por la función de onda $\psi(x, t)$ debe cumplir la condición $\psi(x, T) = \psi(x, 0)$ bajo el efecto de un campo eléctrico periódico $f(\tau)$, lo que equivale a un operador de evolución igual a la unidad, $\exp(i \int_0^T dt \hat{H}(t)/\hbar) = 1$, o bien, $\int_0^T dt \hat{H}(t) = 0$.

Si en lugar del operador Hamiltoniano dependiente del tiempo $\hat{H}(t)$, éste se sustituye por un Hamiltoniano efectivo independiente del tiempo \hat{H}_{ef} , entonces la condición de LDE es $\hat{H}_{ef} = 0$, lo que se demuestra por medio de la teoría de Floquet (Goldman 2014). Aunque dicho Hamiltoniano efectivo se puede calcular cuánticamente, ya sea de manera exacta (Kunold 2019) o de manera aproximada (Rahav 2003), Mamani *et al.* (Mamani 2020) encontraron que el cálculo semiclásico de la función $H_{ef} = 0$ conduce *exactamente* a la misma condición de LDE reportada por Dignam y de Sterke (Dignam 2002). La razón de esta coincidencia aún no está dilucidada y se propone en este trabajo como una perspectiva interesante (cf. sección 5), sin embargo, una parte de esa razón puede ser que la deducción de un Hamiltoniano efectivo H_{ef} (sea cuántico o semiclásico) debe ser consistente con la aproximación de desarrollar en series las soluciones de (13) y (14) para $\xi(t)$ y $\eta(t)$ hasta $O(\omega^{-2})$, como condición para la validez de $G_0(n)$ en (19). Dicho de otra manera: $G_0(n) = 0$ es la condición para LDE válida para cualquier rango de frecuencias, tal como la deducen Dignam y de Sterke (Dignam 2002);

en particular, para altas frecuencias $G_0(n)$ se puede deducir por el método semiclásico tal como se muestra en este trabajo.

La relevancia del resultado semiclásico expresado por el Hamiltoniano efectivo (32) es que éste contiene el término de la energía cinética $\sum_n A_n \text{Re}[G_0^*(n)e^{inK}]$ reparametrizado por el factor $G_0(n)$, más el término $V''(X)\mathcal{O}(\omega^{-2})$ correspondiente a un potencial estático arbitrario $V(X)$. Cuando $G_0(n) = 0$ y el potencial es lineal, el término de energía cinética se anula y el Hamiltoniano efectivo es $H_{ef} = V(X)$, lo que sólo se puede interpretar físicamente como un régimen de LDE para las coordenadas “lentas” $X(t)$ y $K(t)$. Esto lo verificamos cuánticamente (durante la elaboración de este artículo) para el Hamiltoniano (1) al que añadió un potencial estático lineal; la integración numérica de la ecuación de Schrödinger se realizó usando una extensión del método pseudoespectral adaptado a un Hamiltoniano de enlace fuerte[?]. En ambos casos, el indicador de LDE es el valor acotado en el tiempo del desplazamiento cuadrático medio $\langle x^2 \rangle$, consistente con la definición original de *localización dinámica* que hicieron Dunlap y Kenkre (Dunlap 1986).

De hecho, en la definición de LDE, Dignam y de Sterke (Dignam 2002) sólo consideran los campos eléctricos externos puramente AC (sin componente DC) tales que $\langle f(\omega t) \rangle = 0$ en (1). Para incorporar el caso simple de un campo DC tal que la energía potencial sea $V(x, t) = xf(\omega t) + \alpha x$, invocamos la técnica usada por Sandoval-Santana *et al.* (Kunold 2019) para calcular el Hamiltoniano efectivo exacto \hat{H}_{ef} correspondiente a la función $H(x, k; t)$ en (1); en este caso el término de energía cinética de \hat{H}_{ef} se reparametriza por un factor que tiende a $J_0(f_0/\omega)$ cuando $\omega \rightarrow \infty$, con f_0 igual a la amplitud del campo eléctrico $f(\omega t)$ en (1). Por otra parte, el cálculo aproximado de \hat{H}_{ef} hasta ω^{-2} para valores de $\omega \rightarrow \infty$ se puede realizar por el método de Rahav *et al.* (Rahav 2003), pero el término de energía cinética de \hat{H}_{ef} es $\hat{p}^2/2m$, así que lo que se reparametriza es el potencial efectivo V_{ef} ; un cálculo de \hat{H}_{ef} para una energía cinética de enlace fuerte de la forma $-2A \cos(a\hat{p})$ se realizó en Calcina *et al.* (Calcina 2020) para el caso de un circuito LC de dos mallas con carga discreta. En todos los casos referidos, los cálculos cuánticos de \hat{H}_{ef} conducen a expresiones analíticas muy complejas que no contienen a las variables dinámicas “lentas” $X(t)$ y $K(t)$. Así, tal parece que la expresión para la función H_{ef} en (31) deducida en este trabajo por el método semiclásico y las técnicas de promediación temporal usadas por Rahav *et al.*, adaptadas a un Hamiltoniano de enlace fuerte, conducen a una expresión suficientemente simple como para dilucidar el fenómeno de LDE en vista de la cancelación del término de energía cinética en (31) cuando $G_0(n) = 0$.

A continuación nos referimos a las propiedades del campo eléctrico $f(\tau)$ cuando se satisface la condición $G_0(n) = 0$ para LDE: (i) $f(\tau)$ no puede ser cero, es decir, $f(\tau)$ debe ser discontinua en los valores de τ para los que $f(\tau)$ cambia de signo. (ii) El área debajo de la curva

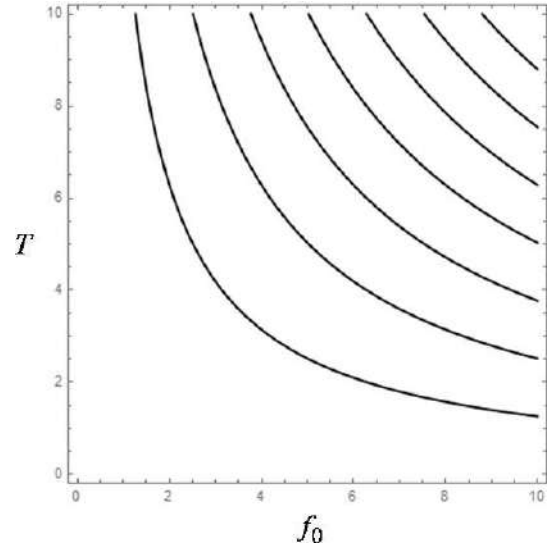


FIG. 1.— Valores de la intensidad f_0 y del período $T = 2\pi/\omega$ de la onda rectangular para los que se cumple $G_0(n) = 0$. Se muestra las curvas que corresponden a valores enteros positivos pares de f_0/ω (en orden creciente de izquierda a derecha).

entre discontinuidades de $f(\tau)$ debe ser un múltiplo entero de $2\pi\hbar/ed = 2\pi$. (iii) El promedio temporal de $f(\tau)$ en un período T debe ser cero. El cumplimiento de estas condiciones para LDE será referido en adelante como “teorema de Dignam y de Sterke” (TDS). Para los campos eléctricos relativamente simples caracterizados sólo por los parámetros físicos f_0 y ω , se podría tratar de expresar la condición $G_0(n) = 0$ en (19) como un problema inverso para despejar los valores de esos parámetros, pero éste puede ser un problema muy complicado. En la siguiente sección se estudiará los casos específicos de 5 campos eléctricos a fin de determinar los valores de f_0 y ω para los que se verifica la condición de LDE.

4. CASOS DE CAMPOS ELÉCTRICOS

4.1. Onda rectangular

Consideremos el siguiente modelo para el campo eléctrico $f(\omega t \equiv \tau)$ del tipo onda rectangular:

$$f(\tau) = \begin{cases} f_0 & |\tau| < \pi/2 \\ -f_0 & |\tau| \geq \pi/2 \end{cases}, \quad (33)$$

donde f_0 es la intensidad del campo. En este caso la expresión para $G_0(n)$, con n entero, es:

$$G_0(n) = \frac{\text{sen}(\pi n f_0/\omega)}{\pi n f_0/\omega}. \quad (34)$$

Las soluciones de $G_0(n) = 0$ corresponden a valores enteros positivos pares de f_0/ω . En la Figura 1 se muestra los valores de f_0 y el período T para los cuales $G_0(n) = 0$. Por lo tanto, el campo eléctrico tipo onda rectangular produce LDE, de acuerdo al TDS.

4.2. Onda triangular simétrica

A continuación consideremos el caso del campo eléctrico tipo onda triangular simétrica definido por:

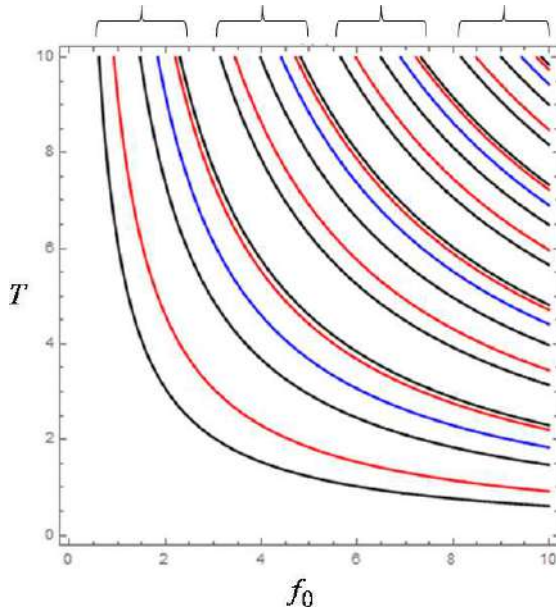


FIG. 2.— Valores de la intensidad f_0 y del período T de la onda triangular simétrica para los que se cumple $G_0(n) = 0$. La posición de cada línea (de izquierda a derecha) en cada grupo indicado por las llaves corresponde a los sgtes. valores de n : 4ta. línea ($n = 1$), 2da. y 5ta. líneas ($n = 2$), 1ra., 3ra. y 6ta. líneas ($n = 3$).

$$f(\tau) = \begin{cases} f_0 + 2f_0\tau/\pi, & -\pi < \tau < 0 \\ f_0 - 2f_0\tau/\pi, & 0 < \tau < \pi \end{cases}, \quad (35)$$

donde f_0 es la intensidad del campo. La evaluación de $G_0(n)$ en (19) es:

$$\begin{aligned} G_0(n) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 d\tau \exp \left[\frac{in}{\omega} \left(f_0\tau + \frac{f_0\tau^2}{\pi} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\pi} d\tau \exp \left[\frac{in}{\omega} \left(f_0\tau - \frac{f_0\tau^2}{\pi} \right) \right] \right] \\ &= \sqrt{\frac{2\omega}{nf_0}} \left[\cos \left(\frac{nf_0\pi}{4\omega} \right) \mathcal{C} \left(\sqrt{\frac{nf_0}{2\omega}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{S} \left(\sqrt{\frac{nf_0}{2\omega}} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{nf_0\pi}{4\omega} \right) \right]; \end{aligned} \quad (36)$$

$\mathcal{C}(x) = \int_0^x dt \cos(t^2)$ y $\mathcal{S}(x) = \int_0^x dt \operatorname{sen}(t^2)$ son las integrales de Fresnel.

Para que un campo produzca LDE, las soluciones de $G_0(n) = 0$ deben ser iguales para todo valor de n . En la Figura 2 se muestra los valores de la intensidad f_0 y el período T para $n = 1, 2, 3$. Podemos ver que dichos valores son diferentes para cada n . Por lo tanto, el campo eléctrico tipo onda triangular simétrica no produce LDE, de acuerdo al TDS.

4.3. Onda diente de sierra

A continuación consideremos el caso del campo eléctrico tipo onda diente de sierra definido por:

$$f(\tau) = \frac{f_0\tau}{\omega}, \quad -\pi < \tau < \pi, \quad (37)$$

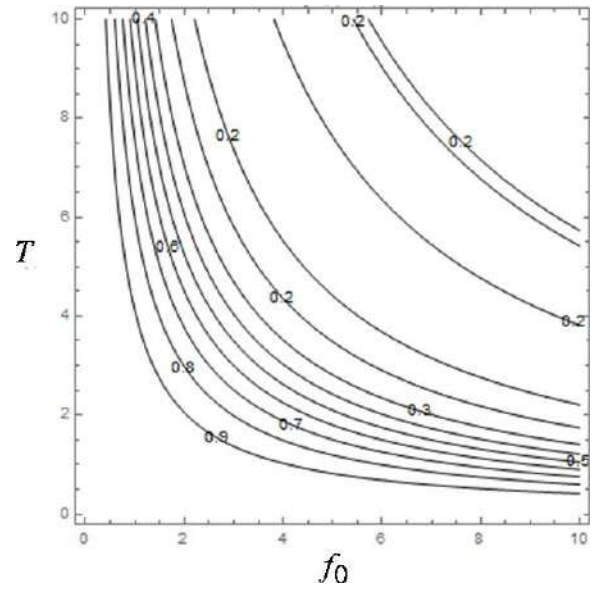


FIG. 3.— Valores de las curvas de nivel de $\operatorname{Re}[G_0(1)]$ para la onda diente de sierra, en función de sus parámetros de intensidad f_0 y período T .

(este campo tiene simetría temporal impar respecto a $\tau = 0$). La evaluación de $G_0(n)$ en (19) es:

$$\begin{aligned} G_0(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \exp \left(\frac{in}{\omega} \frac{f_0\tau^2}{2\pi} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{nf_0}} \left[\mathcal{C} \left(\sqrt{\frac{nf_0}{\omega}} \right) + i\mathcal{S} \left(\sqrt{\frac{nf_0}{\omega}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

En las Figuras 3 y 4 se muestra los gráficos de $\operatorname{Re}[G_0(n) = 0]$ y $\operatorname{Im}[G_0(n) = 0]$ respectivamente (para $n = 1$), en función de los parámetros físicos f_0 y T . Como se puede ver, la tendencia de estas figuras sugiere que no existen combinaciones de dichos parámetros para los que se cumpla $G_0(1) = 0$. Por lo tanto, el campo eléctrico tipo onda diente de sierra no produce LDE, de nuevo de acuerdo al TDS.

4.4. Onda cosenoidal desplazada

A continuación consideremos el caso del campo eléctrico tipo onda $\cos(\tau + \phi)$ expresado como:

$$f(\tau) = f_0 \operatorname{sen}(\tau) + f_1 \cos(\tau) \quad (39)$$

(este campo no tiene simetría temporal definida respecto a $\tau = 0$). La evaluación de $G_0(n)$ en (19) es:

$$\begin{aligned} G_0(n) &= \frac{1}{2\pi} \exp \left(\frac{inf_1}{\omega} \right) \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\tau \exp \left[\frac{in}{\omega} \sqrt{f_0^2 + f_1^2} \operatorname{sen} \left(\tau - \tan^{-1} \left(\frac{f_1}{f_0} \right) \right) \right] \\ &= \exp \left(\frac{inf_1}{\omega} \right) J_0 \left(\frac{n}{\omega} \sqrt{f_0^2 + f_1^2} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

donde J_0 es la función de Bessel de primera clase y de orden entero cero. En este caso se tuvo que elegir un valor

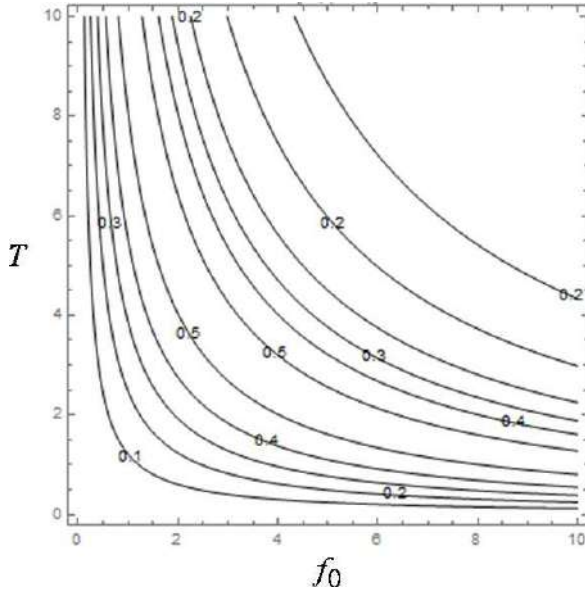


FIG. 4.— Valores de las curvas de nivel de $\text{Im}[G_0(1)] = 0$ para la onda diente de sierra, en función de sus parámetros de intensidad f_0 y período T .

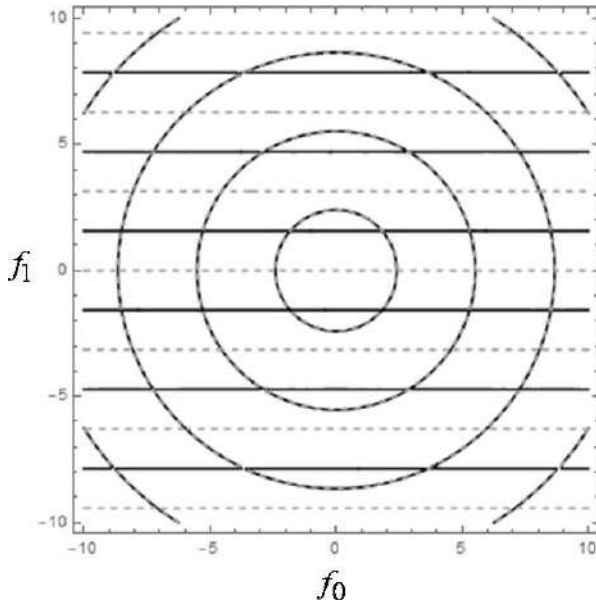


FIG. 5.— Valores de los parámetros f_0 y f_1 en (40) de la onda cosenoidal desplazada para los que se cumple: $\text{Re}[G_0(1)] = 0$ (intersecciones de las líneas horizontales sólidas con las circunferencias) y $\text{Im}[G_0(1)] = 0$ (intersecciones de las líneas horizontales segmentadas con las circunferencias).

unitario de ω en unidades de f_1 a fin de obtener el resultado analítico de (8), de lo contrario dicha expresión para $G_0(n)$ sólo se hubiera podido evaluar numéricamente. De esta forma, las intensidades f_0 y f_1 son los nuevos parámetros físicos de control. En la Figura 5 se muestran los valores de los parámetros f_0 y f_1 en (40) para los que se cumple: $\text{Re}[G_0(1)] = 0$ (intesecciones de las líneas horizontales sólidas con las circunferencias) y $\text{Im}[G_0(1)] = 0$ (intesecciones de las líneas horizontales segmentadas con las circunferencias). Como se ve, no

existen combinaciones posibles de f_0 y f_1 para los que $G_0(1) = 0$, de donde se concluye que para este campo eléctrico no se obtiene LDE, lo que está de acuerdo al TDS, ya que este campo no contiene discontinuidades.

4.5. Serie alternada de deltas de Dirac

A continuación consideremos el campo eléctrico tipo serie alternada de deltas de Dirac dado por la deltoide expresada como:

$$f(\tau) = \begin{cases} -f_0 - \alpha, & -\pi - \delta < \tau < -\pi + \delta \\ \alpha, & -\pi + \delta < \tau < -\pi/2 \\ -\alpha, & -\pi/2 < \tau < -\delta \\ f_0, & -\delta < \tau < \delta \\ -\alpha, & \delta < \tau < \pi/2 \\ \alpha, & \pi/2 < \tau < \pi - \delta \\ -f_0 - \alpha, & \pi - \delta < \tau < \pi + \delta \end{cases}, \quad (41)$$

donde los parámetros de intensidad f_0 y ancho δ tenderán a infinito y a cero respectivamente, para obtener la serie de deltas de Dirac. El desplazamiento dado por el parámetro $\alpha \neq 0$ tiene como propósito que $f(\tau)$ no sea cero, permitiendo de este modo la aplicación del TDS. Además, la forma particular de haber definido dicho desplazamiento en (41) se justifica a fin de que el promedio temporal de $f(\tau)$ en un período sea cero: $\langle f(\tau) \rangle_T = 0$, tal como lo requiere dicho teorema. Para este caso, la evaluación de $G_0(n)$ en (19) es:

$$\begin{aligned} 2\pi G_0(n) &= \int_{-\pi-\delta}^{-\pi+\delta} d\tau e^{-in(f_0+\alpha)\tau/\omega} \\ &+ \int_{-\pi+\delta}^{-\pi/2} d\tau e^{in\alpha\tau/\omega} + \int_{-\pi/2}^{-\delta} d\tau e^{-in\alpha\tau/\omega} \\ &+ \int_{-\delta}^{\delta} d\tau e^{in f_0 \tau/\omega} + \int_{\delta}^{\pi/2} d\tau e^{-in\alpha\tau/\omega} \\ &+ \int_{\pi/2}^{\pi-\delta} d\tau e^{in\alpha\tau/\omega} + \int_{\pi-\delta}^{\pi+\delta} d\tau e^{-in(f_0+\alpha)\tau/\omega} \quad (42) \\ &= \frac{2\omega}{n} \left\{ \frac{1}{f_0 + \alpha} \left[\text{sen} \left(\frac{n}{\omega} (f_0 + \alpha) (\pi + \delta) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{sen} \left(\frac{n}{\omega} (f_0 + \alpha) (\pi - \delta) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{f_0} \text{sen} \left(\frac{n}{\omega} f_0 \delta \right) - \frac{1}{\alpha} \text{sen} \left(\frac{n}{\omega} \alpha \delta \right) \right\}. \end{aligned}$$

Llevando f_0 y δ a sus respectivos límites para formar la delta de Dirac, se obtiene $G_0(n) = 0$ para todos los valores de n y de ω (independientemente del valor de $\alpha \neq 0$), de donde se concluye que la serie alternada de deltas de Dirac *siempre* produce LDE. Este resultado es muy interesante pues estrictamente la serie de deltas de Dirac no podría ser considerada en el trabajo de Dignam y de Sterke debido a que no satisface el TDS, a menos que sea modelada por la deltoide $f(\tau)$ en (41).

5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo se calculó los parámetros físicos de los campos eléctricos externos que inducen el régimen

de localización dinámica exacta (LDE) en una partícula cargada propágandose en una red unidimensional de enlace fuerte. La ecuación $G_0(n) = 0$ en (19) que permite deducir los valores de dichos parámetros se obtuvo a partir de las ecuaciones semiclásicas de movimiento (2). Por simplicidad, en este trabajo se muestra la deducción que corresponde al caso de un campo eléctrico AC en (1) con promedio temporal nulo (en un período), $\langle f(\omega t) \rangle = 0$, y potencial estático $V(x)$ asimismo nulo. La generalización a los casos $\langle f(\omega t) \rangle \neq 0$ y $V(x)$ arbitrario se indica en las ecs. (31) y (32) aplicando las mismas técnicas de la Sección 2; el detalle específico de este cálculo se publicará próximamente.

El concepto de LDE se definió en el trabajo de Dignam y de Sterke (Dignam 2002) para un operador Hamiltoniano dependiente del tiempo, mientras que en la formulación semiclásica de este trabajo se deduce una función hamiltoniana efectiva independiente del tiempo cuyo valor debe ser cero a fin de inducir el régimen de LDE. Esta condición es la que permite obtener una expresión para $G_0(n) = 0$ y que resulta ser la misma que se obtiene en el formalismo cuántico del referido trabajo. Esta coincidencia seguramente se puede deducir de relaciones conceptuales más profundas asociadas al teorema de aceleración aplicado a redes de enlace fuerte (ver, por

ejemplo, el texto de Kittel (1987)). Éste es un tema que se propone como una perspectiva interesante de investigación para ser explorada en otro trabajo más amplio.

Específicamente, en este trabajo se dedujeron los parámetros físicos ya referidos correspondientes a 5 campos eléctricos. Para algunos campos la condición $G_0(n) = 0$ conduce a expresiones analíticas de las que se deducen los valores de esos parámetros y en otros casos esos valores se deben calcular numéricamente. De manera interesante, en este trabajo se encontró que el campo eléctrico del tipo serie alternada de deltas de Dirac siempre conduce a LDE, independientemente de su intensidad y período, caso que no puede tratarse bajo el formalismo cuántico de Dignam y de Sterke (Dignam 2002). Sin embargo, el único ejemplo novedoso expuesto por esos autores coincide en sus aspectos esenciales con el resultado de este trabajo para la referida serie alternada de deltas, de lo que se puede concluir que en el ejemplo de Dignam y de Sterke sólo es relevante la naturaleza singular (valores instantáneos infinitos) del campo eléctrico externo y no así los detalles de su forma particular para valores finitos.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Calcina-Nogales M., Sanjinés D. & Mamani E. 2020, (*preprint*).
 Dunlap D. H. & Kenkre V. M. 1986, *Phys. Rev. B* **34**, 3625-3633.
 Dignam M. M. y Martijn de Sterke C. 2002, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 046806.
 Goldman N. & Dalibard J. 2014 *Phys. Rev. X* **68**, 031027.
 Kittel C., *Quantum Theory of Solids* (John Wiley and Sons, New York).
 Mamani E., Calcina-Nogales M. & Sanjinés D. 2017, *International Journal of Modern Physics B* **31**, 1750116.
 Mamani E., Calcina-Nogales M. & Sanjinés D. 2018, *Revista Mexicana de Física* **64**, 456-463.
 Mamani E., Sanjinés D. & Calcina-Nogales M. 2020, (*preprint*).
 Rahav S., Gilary I. & Fishman S. 2003, *Phys. Rev. A* **68**, 013820.
 Sandoval-Santana J. C., Ibarra-Sierra V. G., Cardoso J. L., Kunold A., Román-Taboada P. & Naumis G. 2019, *Ann. Phys.*, **531**, 1900035.
 Sanjines D. & Gallinar J.-P. 1999, *J. Phys.:Cond. Matter* **11**, 3729-3742.

¿TIENEN EL MISMO ORIGEN LOS METEORITOS METÁLICOS ENCONTRADOS EN BOLIVIA? DO THE METALLIC METEORITES FOUND IN BOLIVIA HAVE THE SAME ORIGIN?

GONZALO PEREIRA [1][†]

Planetario “Max Schreier”
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Universidad Mayor de San Andrés
Casilla de Correos 3164
La Paz - Bolivia

(Recibido 10 de agosto de 2021; aceptado 9 de noviembre de 2021)
<https://doi.org/10.53287/eohr3986hv72b>

RESUMEN

En el proceso de reconstruir la historia de los meteoritos relacionados a nuestro país, encontramos que los dos únicos meteoritos metálicos catalogados como “*Encontrados en Bolivia*” son los meteoritos: Bolivia y Pooposo. Ambos, clasificados dentro del grupo de los meteoritos metálicos MG IAB. Ambos tienen una historia similar: fueron seriamente dañados antes de llegar a las manos correctas y, en la comercialización de ambos, hay un religioso como intermediario. A la luz de esas posibles coincidencias, algunos expertos recomendaron realizar un estudio comparativo de ambos meteoritos ya que podrían ser parte de un mismo objeto. En este artículo se analizan los datos de la abundancia de elementos químicos de ambos meteoritos, obtenidos a partir de diferentes análisis realizados en todos los meteoritos metálicos conocidos a través de métodos como: Análisis de Activación de Neutrones Radioquímicos (*Radiochemical Neutron Activation Analysis* (RNAA)) y de Análisis Instrumental de Activación de Neutrones (*Instrumental Neutron Activation Analysis* (INAA)). Estos datos han sido publicados por diferentes investigadores como: Buchwald (1975a); Scott (1978); Kracher et al. (1980); Wasson & Kallemeyn (2002), entre otros. Nuestro propósito fue determinar si ambos especímenes son parte de un objeto más grande que se fracturó antes de entrar en contacto con la superficie del altiplano orureño o simplemente son dos meteoritos metálicos independientes.

Descriptores: Meteoritos – meteoros — meteoritos y tektitas — geoquímica.

Código(s) PACS: 91.67.gn, 96.30.Za, 91.67.-y

ABSTRACT

While reconstructing the history of meteorites related to Bolivia, we found that the only two metallic meteorites classified as “Found in Bolivia” are the Bolivia and Pooposo meteorites. They are classified within the group of MG IAB iron meteorites and have a similar history. Both were seriously mishandled before reaching the hands of meteorite experts and were commercialized by a priest. In light of these possible matches, some experts have recommended a comparative study of both meteorites to ascertain if they could be part of the same object. In this paper we analyze the data of abundant chemical elements found in both meteorites. The data was obtained from different analyses carried out on all known iron meteorites through methods such as: Radiochemical Neutron Activation Analysis (RNAA) and Instrumental Neutron Activation Analysis (INAA). These data have been published by different researchers: Buchwald (1975a); Scott (1978); Kracher et al. (1980); Wasson & Kallemeyn (2002). Our objective has been to determine if both specimens are part of a larger object that impacted on the surface of the Oruro plateau or if they are simply two independent iron meteorites.

Subject headings: Meteorites – meteors — meteorites and tektites — geochemistry.

1. INTRODUCCIÓN

De los cinco meteoritos autenticados que, se asume, fueron encontrados en suelo boliviano, dos de ellos son meteoritos metálicos. Nos referimos a los meteoritos que llevan los nombres de Bolivia y Pooposo, ambos están clasificados como metálicos por

^[1]<https://orcid.org/0000-0002-9510-7454>

[†]Email: gpereira@umsa.bo.

sus componentes principales, hierro (Fe) y níquel (Ni). La contundente presencia de esos metales da a los meteoritos metálicos ciertas características que los diferencian de las rocas terrestres comunes (masa, consistencia metálica). Por lo que, aunque no son muy abundantes, son fácilmente reconocibles a diferencia de otros tipos de meteoritos. Además de ser más resistentes al pasar por la atmósfera y en consecuencia tienen mayor probabilidad de llegar al suelo casi intactos.

Poco se sabe acerca de la historia de estos meteoritos. Desde ya, el nombre de Bolivia para uno de ellos nos sugiere la incertidumbre que se tiene acerca de su origen. Esto porque la regla que se sigue para dar un nombre a los meteoritos es el de bautizarlos con el nombre de la población más próxima al lugar donde se lo encontró, obviamente el nombre Bolivia no es de una población, sino de todo un país. En cuanto al nombre del otro meteorito, aunque no suena muy bien, nos proporciona una idea del lugar de donde fue recogido, Pooposo, es decir cerca de la población de Poopo, Departamento de Oruro, Bolivia.

1.1. *El meteorito Bolivia*

El meteorito Bolivia se hizo muy conocido durante los últimos años ya que un fragmento de éste fue repatriado, gracias a los buenos oficios realizados por el coleccionista norteamericano Blaine Reed.

A continuación, transcribimos todo lo que sabemos de este meteorito, según Buchwald (1975a); Vol. 2, pp. 335-337): Originalmente se encontraba en la colección privada de minerales de F. A. Canfield, en Dover, Nueva Jersey, EEUU. En 1926 la colección pasa a manos del Museo Nacional de Historia Natural de los EEUU, incluido el meteorito Bolivia que, en ese entonces tenía una masa de 21.25 kg. La única información que hace referencia a su origen es el fragmento de una antigua carta de Canfield, de la cual la primera página, junto a la fecha, está desaparecida. De lo rescatado sólo se puede leer lo siguiente:

“Un amigo me ha dado una masa de hierro meteorítico que pesa 47 libras y nunca ha sido cortado. Se lo encontró hace 30 años en Bolivia y fue comprado por un religioso, que pensando que era plata pagó 600\$ en oro por él”

Actualmente el meteorito Bolivia está distribuido en las siguientes colecciones: Washington (Museo Smithsoniano: 20.6 kg), Londres (Museo Británico: 105 g), Tempe (Universidad de Arizona: 88.4 g) y Bolivia (Universidad Mayor de San Andrés: 7.6 g).

Lo más característico de este meteorito es: a) el fuerte grado de corrosión terrestre, que ha dejado profundas huellas en su superficie e incluso ha llegado a penetrar unos 5 cm por debajo de su superficie. y b) el hecho de haber sufrido una recristalización, es decir, el meteorito Bolivia tuvo un pronunciado recalentamiento a 550 ó 600° C – esto se deduce por el hecho que, cuando un meteorito metálico es

calentado a esas temperaturas, la taenita – aleación Ni-Fe muy rica en níquel, cambia de fase. Esto es, elimina níquel en forma de partículas.

La duda que aún queda es saber si ese recalentamiento fue producto de un evento cósmico, cuando vagaba por el espacio exterior, o el recalentamiento fue producido de manera artificial por un antiguo propietario del meteorito. Desde ya, existen indicios para ambos escenarios: la presencia de finas partículas de Ni, que permean toda la fase de recristalización, indica un rápido incremento de temperatura a partir de un incremento lento, tal como se esperaría en el espacio exterior donde impera un ambiente que proporciona el tiempo para la difusión y corrección de la concentración de Ni de acuerdo con el diagrama de equilibrio. Por otro lado, se puede evidenciar una reacción a alta temperatura en las zonas corroídas del meteorito. Si, como se asume, la corrosión se produjo en la Tierra, entonces el recalentamiento también se produjo en la Tierra.

1.2. *El meteorito Pooposo*

Según Buchwald (1975b), Vol. 3, p. 989. De acuerdo con la correspondencia del Museo Británico, este espécimen fue obtenido en 1910 por el comerciante en minerales J. Böhm de un misionero que lo había comprado en el “*Estado de Pooposo*”, Bolivia. Evidentemente Böhm vendió la masa principal al Museo de Viena, mientras que un fragmento fue comprado por el Museo Británico.

En la actualidad el meteorito Pooposo está distribuido en las siguientes colecciones: Viena (Museo de Historia Natural: ~12 kg), Londres (Museo Británico: 26 g)

El Pooposo también está erosionado y muestra, en un lado, severas deformaciones debido aparentemente a la aplicación de herramientas con el propósito de partir el espécimen. La superficie fracturada es muy irregular y hasta hoy, no se sabe dónde está la otra parte de la masa.

2. CLASIFICACIÓN DE LOS METEORITOS METÁLICOS

Los meteoritos metálicos se clasifican de dos maneras, la más común y antigua es la que se basa en sus características cristalinas, fácilmente distinguibles cuando se pule una superficie y se expone en ácido. La variedad estructural que se puede apreciar luego de ese proceso depende de la cantidad de níquel y resulta en tres subdivisiones: Hexaedritos (con un 4 – 6% de Ni), Octaedritos (con un 6 – 12% de Ni) y Ataxitas (> 12% de Ni) (Wittke & Bunch 2008). Debido a que tanto el meteorito Bolivia como el Pooposo tienen un contenido de 6.8% y 6.9% de Ni, respectivamente, puede considerarse que ambos clasifican como meteoritos metálicos octaedritos.

La otra forma de clasificar a los meteoritos metálicos es por vía química. Esta clasificación es relativamente nueva y mucho más precisa ya que depende de instrumentación sofisticada. Fundamentalmente, consiste en determinar la abundancia de trazas de elementos conocidos como Elementos Altamente Siderófilos (HSE, por su sigla en inglés),

TABLA 1
ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LOS METEORITOS BOLIVIA Y POOPOSO.

Nombre	Lugar	Grupo	Tipo	Kamacita	Coord. Geog.	Masa (TKW)
Bolivia		IAB	Og	2.7±0.5 mm		21.25 kg
Pooposo	Oruro, Bo	IAB	Og	2.6±0.6 mm	66°50'W: 18°20'S	~12 kg

Fuente: Buchwald (1975a), p.989 y 335-337.

como Ga, Ge, Ir, etc. La presencia de esos elementos, así como la cantidad en la que se presentan, definirá un grupo químico. En el caso de los meteoritos metálicos, se reconocen cuatro grandes grupos. Tres de ellos (IIAB, IIIAB, e IVA), se formaron a partir de la cristalización de un magma que se fue enfriando lentamente; por eso también se los designa como grupos magmáticos Wasson & Kallemeyn (2002). El cuarto grupo grande de meteoritos metálicos – el IAB – tendría un origen diferente al de los grupos magmáticos puesto que los meteoritos de este grupo se caracterizan por el hecho de no haber llegado a un estado total de derretimiento, por lo que no es material magmático. Existen varias hipótesis que explican el origen de los IAB; de todas ellas, nos inclinamos por la hipótesis que concluye que este tipo de meteoritos se habría formado por impactos que provocaron la fundición parcial del material. Tanto los meteoritos Bolivia como el Pooposo no son magmáticos, es decir, pertenecen al gran grupo de meteoritos metálicos IAB.

En años recientes, se ha planteado otro tipo de clasificación para los meteoritos metálicos IAB (Wasson & Kallemeyn 2002). Esta nueva clasificación consiste en tomar como referente el elemento Au en lugar del Ni. Su principal ventaja es que el rango de Au total es mucho mayor, pero las incertidumbres relativas son mucho más bajas que las del Ni. Al trazar los datos nuevos se obtienen seis conjuntos de campos de acuerdo con su contenido en Au. Al conjunto más grande, que incluye a la mayoría de los meteoritos IAB, en el que están comprendidos los meteoritos Bolivia y Pooposo, se llama el Grupo Principal IAB (MG IAB, por su sigla en inglés). A los cinco conjuntos restantes se los denomina “subgrupos” del complejo IAB.

En la actualidad se asume que los principales valores límite para que un meteorito sea clasificado como IAB son: Au > 1.3 µg/g, As > 10 µg/g, Co > 3.9 mg/g, Sb > 180 ng/g.

Por último, otra característica que permite obtener información adicional para la clasificación de un meteorito metálico es la presencia de silicatos, estos pueden presentarse en forma de granos ordinarios > 2 mm ó como material fino y disperso, ambos son característicos en los meteoritos pertenecientes al grupo IAB, en el que los meteoritos Bolivia y Pooposo no son la excepción.

En síntesis, hemos visto que tanto estructural como químicamente los meteoritos metálicos supuestamente recogidos en suelo boliviano, pertenecen al mismo grupo de octaedritos, por su contenido similar de Ni. Mientras que, desde la clasificación química, ambos pertenecen al grupo IAB por la composición

similar de elementos altamente siderófilos y la presencia de silicatos.

Ese hecho, además de ser los dos únicos meteoritos metálicos encontrados en territorio boliviano, y ambos con una historia más o menos similar (la presencia de un religioso en su comercialización y la violenta manipulación de ambos meteoritos), ha llevado a plantear a que probablemente ambos meteoritos, el Bolivia y el Pooposo podrían estar conectados (Buchwald (1975a) p.335 y 989). Aunque Kracher et al. (1980), desechan esa posibilidad.

En el presente trabajo nos proponemos intentar esclarecer si están o no emparejados, a partir de un análisis de las cualidades estructurales y químicas de ambos meteoritos.

3. METEORITOS EMPAREJADOS

Wasson & de Bon (1998) define como emparejados (*pairing*) a un conjunto de meteoritos que están catalogados como especímenes diferentes, pero, a través de un estudio detallado se muestran como parte de una misma caída. Hey (1966) utiliza la palabra “emparejados” en un sentido menos restrictivo para indicar a los meteoritos que posiblemente son fragmentos de una misma caída. En tanto que Benoit et al. (2000) definen a los meteoritos emparejados a los fragmentos de una simple caída de meteorito que fueron separados durante el paso por la atmósfera o durante su historia terrestre.

Determinar si dos o más meteoritos están emparejados no es una tarea muy fácil puesto que los meteoritos clasificados dentro un grupo son muy similares en composición estructural y química. La determinación se puede complicar mucho más aún cuando uno de los especímenes pudo haber sido transfigurado por acción humana, perdiendo así parte de sus cualidades estructurales y químicas. Sin embargo, gracias al avance de las técnicas en química analítica, hoy se puede analizar meteoritos con un mayor rango de parámetros, como ser la presencia de elementos altamente siderófilos entre otros y que pueden utilizarse para su respectiva clasificación y determinación de si los meteoritos están emparejados.

4. MÉTODOS DE ANÁLISIS DE EMPAREJAMIENTO ENTRE METEORITOS

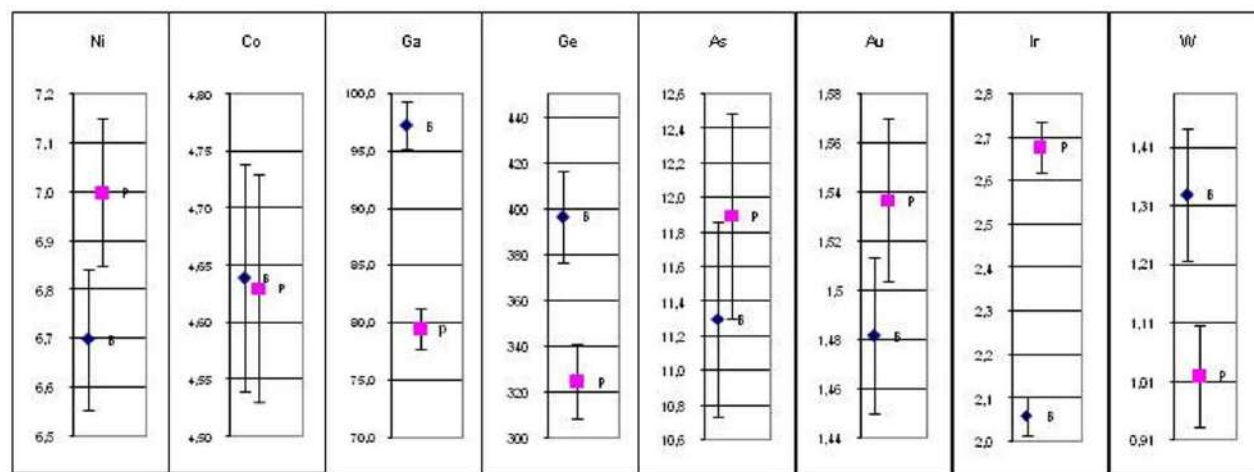
4.1. Análisis estructural de los meteoritos

La forma más tradicional, aunque no muy sencilla para determinar si los meteoritos metálicos podrían estar emparejados es a través de la comparación del ancho de la banda de los cristales de kamacita (aleación de hierro y un poco de níquel), que junto a la taenita (la misma aleación sólo que

TABLA 2
COMPOSICIÓN QUÍMICA Y ABUNDANCIA DE LOS METEORITOS BOLIVIA Y POOPOSO.

Meteorito	Cr ($\mu\text{g/g}$)	Co (mg/g)	Ni (mg/g)	Cu ($\mu\text{g/g}$)	Ga ($\mu\text{g/g}$)	Ge ($\mu\text{g/g}$)	As ($\mu\text{g/g}$)	Sb (ng/g)	W ($\mu\text{g/g}$)	Re (ng/g)	Ir ($\mu\text{g/g}$)	Pt ($\mu\text{g/g}$)	Au ($\mu\text{g/g}$)
Bolivia	21	4.64	67.0	157	97.3	397	11.3	294	1.33	226	2.06	8.1	1.482
Pooposo	44	4.63	70.0	196	79.6	325	11.9	328	1.02	246	2.68		1.537

Fuente: Wasson & Kallemeyn (2002), p.2448.



mucho más rica en níquel), forman la composición mineral más abundante en los meteoritos metálicos. Debido a que la interposición de las láminas de kamacita y taenita tiene un ordenamiento especial en forma de un octaedro, a este tipo de meteoritos se los ha llamado octaedritas u octaédricos que, como ya lo dijimos, pertenecen tanto el meteorito Bolivia como el Pooposo. Las octaedritas están divididas en varios subgrupos cuya clasificación está basada en el ancho de las láminas de kamacita, que generalmente van desde los 50 mm de ancho a menos de 0.02 mm. Si dos meteoritos, que se sospecha pueden estar emparejados, tienen más o menos el mismo ancho de las láminas de kamacita, es muy probable que estén emparejados.

Sin embargo, este método presenta algunos problemas que, en muchos casos, son insalvables. Nos referimos a la alteración que pueden sufrir los meteoritos metálicos muy antiguos, es decir, que estuvieron expuestos a alteraciones medioambientales de nuestro planeta durante mucho tiempo. Otra alteración que pueden sufrir es por efecto de la manipulación humana, como exponer al meteorito a altas temperaturas, como es el caso del meteorito Bolivia.

4.2. Composición química de los meteoritos

La composición química de los meteoritos se puede determinar usando fluorescencia de rayos X, absorción atómica, análisis de activación de neutrones, así como también a través de los métodos clásicos de la química o por cálculos a partir de datos modales y puntos de composiciones. La elección del método que nos permita determinar la composición química de

un meteorito dependerá de la cantidad y calidad de las muestras y de los instrumentos disponibles. Las técnicas más modernas de análisis son las que se realizan por activación de neutrones ya que se puede determinar con gran precisión elementos, fundamentalmente: Ga, Ge e Ir que, junto al Ni proveen la base para la clasificación en grupos químicos, además de la determinación de trazas de otros elementos cuya composición puede ayudar a realizar análisis de emparejamiento entre meteoritos.

Existen otros parámetros que pueden permitir realizar estudios de emparejamiento entre meteoritos. A saber, edad, tiempo de exposición a rayos cósmicos, tiempo de llegada a la Tierra, presencia de anomalías isotópicas Maki et al. (1993). Sin embargo todas esas técnicas de análisis no son fáciles de realizar y tampoco se las ha hecho para todos los meteoritos.

El presente trabajo se realiza sobre la base de un análisis estadístico de la abundancia de elementos a partir de los datos obtenidos por Wasson & Kallemeyn (2002), como resultado del análisis por activación de neutrones de meteoritos metálicos, incluidos Bolivia y Pooposo, ver Tabla 2.

5. RESULTADOS

Realizamos un primer acercamiento comparando el ancho de las bandas de kamacita de los meteoritos Bolivia y Pooposo de 2.7 ± 0.5 mm y 2.6 ± 0.6 mm respectivamente (Buchwald 1975a). Podemos observar que difieren muy poco: el contraste en el ancho de las bandas de kamacita es tan pequeño que sus valores pueden graficarse en un solo punto.

Por último, vamos a realizar una comparación de

la abundancia de los elementos de los dos meteoritos presentados en la Tabla 1. Para ello, vamos a tomar la estimación relativa del 95% como límite de confianza de los datos de la lista (Wasson & Kallemeyn 2002) siendo: 1.5 a 3% para el Co, Ni, Ga, Ir, y Au; 4 a 6% para As y Ge; 7 a 10% para W (valores > 0.3 ($\mu\text{g/g}$), Sb (> 200 ng/g) y Re (> 50 ng/g). En la Fig. 1, nótese que no se toma en cuenta los elementos que están cerca del límite de confianza (Sb y Re), así como Pt, puesto que no existe medida de ese elemento en el meteorito Pooposo.

6. CONCLUSIÓN

A pesar que en apariencia física y morfológica los dos meteoritos metálicos parecen ser parte de una misma caída: ambos pertenecen al mismo grupo IAB de meteoritos metálicos, ambos son octaedritos, ambos tienen similar ancho de láminas de kamacita

(2.7 ± 0.5 mm para el Bolivia y 2.6 ± 0.6 mm para el Pooposo). Así como cierta similitud en su historia sobre la Tierra: ambos fueron incorrectamente manipulados (el meteorito Bolivia recalentado a 500 – 600 °C, el meteorito Pooposo maltratado por herramientas para fraccionarlo), ambos meteoritos tuvieron como intermediario comercial a un religioso.

En este trabajo se ha prestado más atención a la clasificación química de ambos meteoritos y no así a sus características físicas y morfológicas. En este caso nuestro análisis sirve para negar la sospecha de Buchwald (1975a), que ambos meteoritos estarían emparejados y corroborar lo afirmado por Kracher et al. (1980), que ambos meteoritos no tendrían relación alguna.

Conflicto de intereses

El autor declara que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Benoit P. H., Sears D. W. G., Akridge J. M. C., Bland P. A., Berry F. J. & Pillinger C. T. 2000, *Meteoritical & Planetary Science* **35**, 393.
- Buchwald B. F. 1975a, *Handbook of Iron Meteorites*, Vol. 2 (University of California Press; Los Ángeles).
- . 1975b, *Handbook of Iron Meteorites*, Vol. 3 (University of California Press; Los Ángeles).
- Hey M. H. 1966, *Catalogue of Meteorites* 3rd Ed (British Museum (Natural History), Londres).
- Kracher A., Willis J. & Wasson J. T. 1980, *Geochimica et Cosmochimica Acta* **44**, 773.
- Maki H. R., Brooks R., Ryan D. E., Holzbecher J. & Reeves R. D. 1993, *Geochemical Journal* **27**, 163.
- Scott E. R. D. 1978, *Geochimica et Cosmochimica Acta* **42**, 124s.
- Wasson J. T. & de Bon C. C. 1998, *Meteoritics & Planetary Science* **33**, 175.
- Wasson J. T. & Kallemeyn G. W. 2002, *Geochimica et Cosmochimica Acta* **66**, 2445.
- Wittke J. H. & Bunch T. E. 2008, *Meteorites: Mysteries and Secrets Revealed* (Northern Arizona University; Arizona)

EFFECTIVE HAMILTONIAN FOR A TIGHT-BINDING SQUARE LATTICE AND ITS RELATION TO A TWO-MESH LC CIRCUIT WITH DISCRETE CHARGE

HAMILTONIANO EFECTIVO DE UNA RED CUADRADA DE ENLACE FUERTE Y SU RELACIÓN CON UN CIRCUITO LC DE DOS MALLAS CON CARGA DISCRETA

EVARISTO MAMANI C. [1], MARCELO CALCINA-NOGALES [2], & DIEGO SANJINÉS CASTEDO [3] †

Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés
Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia

(Recibido 2 de septiembre de 2021; aceptado 18 de noviembre de 2021)
<https://doi.org/10.53287/qqjb7795ot66r>

RESUMEN

En este trabajo consideramos una función hamiltoniana de enlace fuerte extendida a primeros y segundos vecinos para una partícula cargada que se transporta por saltos (*hopping*) en una red cuadrada en presencia de un campo estático arbitrario y un campo uniforme rápidamente oscilante con frecuencia ω . La aplicación del método semiclásico y el método de Kapitza de promediación temporal hasta $O(\omega^{-2})$ conduce a una función hamiltoniana efectiva (independiente del tiempo) con elementos de salto que dependen de los parámetros de los campos externos. Controlando dichos parámetros podemos manipular las interacciones de tal forma de emular un sistema físico diferente, en este caso, un circuito LC de dos mallas con carga discreta.

Descriptores: Método de enlace fuerte — modelo semiclásico — sistemas mesoscópicos.

Código(s) PACS: 31.15.aq, 03.65.Sq, 73.23.-b

ABSTRACT

We consider an extended tight-binding Hamiltonian function comprising nearest and next-to-nearest neighbor interactions for a charged particle hopping in a square lattice in the presence of a static arbitrary field and a rapidly oscillating uniform field with frequency ω . The application of the semiclassical method and the Kapitza's method for time-averaging up to $O(\omega^{-2})$ yields an effective (time independent) Hamiltonian function with long range hopping elements that depend on the parameters of the external fields. By controlling these parameters we can engineer the interactions in such a way as to emulate a different physical system, namely, a two-mesh LC circuit with discrete charge.

Subject headings: Tight-binding method — semiclassical model — mesoscopic systems.

1. INTRODUCTION

The study of effective Hamiltonians in solid state physics, derived with time-averaging procedures (originally due to P. L. Kapitza for the study of the inverted pendulum Kapitza (1965); Landau (1985) applied to tight-binding lattices, has recently acquired interest given the feasibility of managing (engineering) the hopping elements when the lattice is subject to external and rapidly oscillating driving fields. Some of the effects relevant for transport phenomena include, for example: dynamic localization, coherent control of tunneling, metal-insulator transitions, atomic motion in atom traps, effective next-to-nearest neighbor interactions and effective Bloch oscillation (Dunlap 1986; Rahav 2003; Bandy-

opadhyay 2008; Itin 2014, 2015; Mamani 2017). The idea of using an *extended* tight-binding Hamiltonian with a kinetic energy of the form $2 \sum_n A_n \cos(nak)$ can be traced back to the work of Dunlap and Kenkre, (Dunlap 1986) where their results concerning dynamic localization are extended to long-range interactions in a 1D lattice with hopping elements A_n and lattice constant a . The case where all the interactions are considered led to the new concept of *exact* dynamic localization in the presence of an AC electric field (Dignam 2002). Such a concept of “band engineering” with long-range interactions has been also investigated (theoretically and experimentally¹ in optical lattices; Longhi

¹ Many of the current theoretical models do not take into account some real physical effects (for simplicity), such as interband transitions, dispersion of the hopping particle by thermal collisions and phononic interactions, loss of crystal periodicity, etc., due which the particle's wavepacket usually decoheres rapidly and the observation

[1]<https://orcid.org/0000-0002-3484-8582>

[2]<https://orcid.org/0000-0002-7926-8215>

[3]<https://orcid.org/0000-0001-6832-9513>

† diegosanjinescastedo@gmail.com

(2010); Madison et al. (1998) reported the first observation of dynamical suppression of the band due to an external AC field in an optical lattice whereby the bandwidth shrinks to zero and the Bloch states become localized when the field amplitude meets a condition that was also derived in Mamani *et al.* (Mamani 2017) using the semiclassical method.² More recent investigations in layered graphene systems show that the effects derived from an extended tight-binding Hamiltonian can be considered as improvements to the usual nearest neighbor model results (Reich 2002; Kundu 2011; Wright 2009; Kadirko 2013).

In this work we use an extended tight-binding Hamiltonian where the long-range interactions correspond to a *bidimensional* system, namely, an square lattice; then, we set about establishing a formal equivalence between that lattice and a two-mesh LC circuit with discrete charge by means of deriving and comparing their corresponding effective Hamiltonians (the case of a 1D lattice and its relation to the single-mesh LC circuit with discrete charge has been already studied by Mamani *et al.* (Mamani 2018). We show that such an equivalence is possible by managing the parameters of the driving oscillating field (with frequency ω) acting upon the square lattice such that the nearest neighbor interactions become effectively suppressed leaving the remanent next-to-nearest neighbor (2nd neighbor) interactions as the dominant ones at order ω^0 plus the 3rd neighbor interactions at order ω^{-2} . The theoretical framework for the study of quantum circuits with discrete charge is referred to Chen and Li (1996) wherein the fundamental commutator $[\hat{q}, \hat{\phi}] = i\hbar$ is defined: nq_e are the discrete eigenvalues of the electric charge operator \hat{q} (n is an integer and q_e is the elementary electronic charge), the flux operator $\hat{\phi} = -i\hbar\partial/\partial q$ is the conjugate of \hat{q} and the substitution $\hat{\phi} \rightarrow (2\hbar/q_e)\text{sen}(q_e\hat{\phi}/2\hbar)$ takes into account the discrete nature of the electric charge (Flores 2005; Calcina-Nogales 2013; Flores 2002). The physical phenomena associated to these kind of systems have been reported: persistent currents, Bloch oscillations in quantum circuits, Coulomb blockade, current magnification, voltage and current engineering (Chen and Li 1996; Flores 2005, 2002; Chen 2005; Calcina-Nogales 2020), etc. These cases demonstrate the feasibility of modeling the physics of mesoscopic devices within the conceptual framework referred to above.

Although the one-dimensional and the square tight-binding lattices do not exist as such (to our knowledge), it seems that the reported discrete-charge mesoscopic systems would be soon technically feasible, thus, permitting the possibility of testing the predictions de-

-for example- of Bloch oscillations is restricted to a few complete periods (c.f.: Lyssenko et al. (1997); Madison et al. (1998)). In the absence of such effects, the wavepacket's width may oscillate and eventually be restored to its initial value, as shown, e. g., by Dignam and de Sterke in the exact dynamic localization effect (Dignam 2002).

² A concise and pedagogical justification of the semiclassical method for a general periodic potential can be found, for example, in Ch. 12 of Ashcroft and Mermin (1976)

duced from comparing both systems. In this sense, the semiclassical method together with the time-averaging techniques provide an easier and more straightforward way of deriving an effective Hamiltonian, as we could in fact verify in the derivation of the quantum effective Hamiltonian of the two-mesh LC circuit (Calcina-Nogales 2020). Besides, the semiclassical method also provides a bifurcation condition already studied in the one-dimensional lattice (Mamani 2018) and suggested in the two-dimensional case (in this work) that could be useful for predicting the transition between different electronic dynamical regimes.

The organization of our work is the following: in Section 2 we derive the effective Hamiltonian for a square lattice using the time-averaging technique and extending the procedures we have already used for the one-dimensional lattice (Mamani 2017); in Section 3 we apply the results of the previous section to the managing of the effective Hamiltonian hopping elements so as to emulate case of the two-mesh LC circuit with discrete charge; finally, in Section 4 we present the most important concluding remarks and point out some directions for future research.

2. DERIVATION OF THE EFFECTIVE HAMILTONIAN FOR THE SQUARE LATTICE

Consider the extended tight-binding Hamiltonian function with nearest-neighbor and next-to-nearest neighbor interactions for an independent test particle with charge q_e (i.e., we do not consider any possible interaction with like particles whatsoever neither the particle affects the distribution of the external electric fields acting upon it) which hops in a square lattice with cells of side a under the action of external electric fields,

$$H(x, y, k_x, k_y; t) = -2A \cos(ak_x) - 2B \cos(ak_y) - 2C \cos(ak_x) \cos(ak_y) + q_e \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(\omega t) + V(\mathbf{r}). \quad (1)$$

The tight-binding band in the Hamiltonian (1) has the standard form $-\sum_{m,n} \gamma_{m,n} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{m,n})$ where $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ and $\mathbf{R}_{m,n} = a(m, n)$; the hopping elements are $A = \gamma_{0,\pm 1} = \gamma_{\pm 1,0}$ for the nearest neighbors and $C = \gamma_{\pm 1,\pm 1} = \gamma_{\pm 1,\mp 1}$ for the next-to-nearest neighbors. In the following derivation, and in order to deal with a more compact notation, we take unitary numerical values for the lattice constant a and for the physical constants q_e, \hbar . $V(\mathbf{r})$ is an external arbitrary static potential energy at $\mathbf{r} = (x, y)$ and $\mathbf{f}(\omega t) = (f_x, f_y)$ is the rapidly oscillating external driving field with frequency $\omega \gg 1/T$, where T is the particle's characteristic period of oscillation in the absence of the driving field. Without loss of generality and for the sake of simplicity, we will suppose that the external electric field $\mathbf{f}(\omega t)$ is an even function of t .

Although the quantum Hamiltonian corresponding to (1) with $V(\mathbf{r}) = 0$ has the spatial divergent potential $\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(\omega t)$, the problem of finding its eigenfunctions has been already widely treated in terms of the vector potential representation (Houston 1940; Krieger 1986; Kittel 1987; Rossi 1997) whereby the electric field is $\mathbf{f}(\omega t) = \partial \mathbf{g} / \partial t$, such that the momentum operator is shifted as $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{g}$ within the kinetic energy operator. As a conse-

quence, the “acceleration theorem” $\partial \mathbf{k} / \partial t = \mathbf{f}(\omega t)$ is derived strictly quantum-mechanically in agreement with the semiclassical approach considered in our work.³ For the case of $V(\mathbf{r}) \neq 0$ in (1), the gauge substitution $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g} + \nabla V(\mathbf{r})t$ is made and the resulting acceleration theorem becomes $\partial \mathbf{k} / \partial t = \mathbf{f}(\omega t) - \nabla V(\mathbf{r})$.

We use now the Hamilton’s equations which yield the time derivatives of the position and the momentum:

$$\dot{x} = H_{k_x} = 2A \sin k_x + 2C \sin k_x \cos k_y, \quad (2)$$

$$\dot{y} = H_{k_y} = 2B \sin k_y + 2C \sin k_y \cos k_x, \quad (3)$$

$$-\dot{k}_x = H_x = f_x(\omega t) + V_x, \quad (4)$$

$$-\dot{k}_y = H_y = f_y(\omega t) + V_y; \quad (5)$$

we set the notation $V_x, V_y, V_{xx}, V_{yy}, V_{xy} = V_{yx}$ and $H_{k_x}, H_{k_y}, H_x, H_y$ for the derivatives of $V(\mathbf{r})$ and $H(\mathbf{r}, \mathbf{k}; t)$ respectively; this notation will apply only to the Hamiltonian and potential energy functions hereafter. It will be convenient also to use the generic symbol z for either of the coordinates x, y where a simplified expression could be written. Let us now apply the canonical transformations between the momenta: $(z, k_z) \rightarrow (z, k'_z)$ given by $k'_z \equiv k_z + g_z$, whereby the “displaced momentum” k'_z is defined along with the time integral of the external field, $g_z \equiv \int^t f_z(\omega t') dt'$; this is the realization of the vector potential representation that yielded $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{g}$ as projected onto the square lattice and which was already referred to. The substitution of these transformations in (2)-(5) yields:

$$\dot{x} = 2A \sin(k'_x - g_x) + 2C \sin(k'_x - g_x) \cos(k'_y - g_y), \quad (6)$$

$$\dot{y} = 2B \sin(k'_y - g_y) + 2C \cos(k'_x - g_x) \sin(k'_y - g_y), \quad (7)$$

$$\dot{k}'_x = -V_x, \quad (8)$$

$$\dot{k}'_y = -V_y. \quad (9)$$

Due to the action of the combined static and oscillating fields, $-\nabla V(x, y)$ and $\mathbf{f}(\omega t)$, the particle will move with small oscillations around a slow varying trajectory. Thus, we introduce the “slow” $Z(t), K_z(t)$ coordinates and the “fast” $\xi_z(\tau), \eta_z(\tau)$ coordinates in the direct and reciprocal spaces respectively; the fast coordinates are considered perturbations of the slow coordinates:

$$z(t) = Z(t) + \xi_z(\tau), \quad k'_z(t) = K_z(t) + \eta_z(\tau), \quad (10)$$

where $\tau \equiv \omega t$ is such that the time-average of $\xi_z(\tau), \eta_z(\tau)$, vanish in the time interval with period $T = 2\pi/\omega$ while $Z(t), K_z(t)$, remain almost constant in the same interval, i.e., $\langle \xi_z \rangle = \langle \eta_z \rangle = 0$, and $\langle Z \rangle = Z(t), \langle K_z \rangle = K_z(t)$. We have used the definition of the time-average as $\langle \cdot \rangle = (1/T) \int_0^T (\cdot) dt$.

³ In this sense, the semiclassical method provides *exact* results that coincide with the quantum ones, as we could verify in the above mentioned references and also in Dignam and de Sterke, (Dignam 2002) wherein a study of *exact* dynamical localization is carried on (we have work in progress in this direction).

The set of transformations

$$(x, y, k_x, k_y) \rightarrow (x, y, k'_x, k'_y) \rightarrow (X, Y, K_x, K_y) \quad (11)$$

is canonical since the structure of Hamilton’s equations is preserved (Landau 1985):

$$\begin{aligned} \dot{z} &= H_{k'_z}(x, y, k'_x, k'_y; t), \quad \dot{k}'_z = -H_z(x, y, k'_x, k'_y; t), \\ \dot{Z} &= H_{K_z}(X, Y, K_x, K_y), \quad \dot{K}_z = -H_Z(X, Y, K_x, K_y); \end{aligned} \quad (12)$$

this is so as a consequence of the invariance of the Poisson brackets: $[k_z, z] = [k'_z, z] = [K_z, Z] = 1$ which yields $H(x, y, k'_x, k'_y; t) = H(x, y, k_x, k_y; t) + \partial F(x, y, k'_x, k'_y; t) / \partial t$ for some generating function $F(x, y, k'_x, k'_y; t)$ that can be readily calculated, and the time-averaging which gets us from $H(x, y, k'_x, k'_y; t)$ to $H(X, Y, K_x, K_y)$. The resulting shift of the time dependence from the $\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(\tau)$ term in $H(x, y, k_x, k_y; t)$ into the arguments of the kinetic energy operators in $H(x, y, k'_x, k'_y; t)$ is not only a convenient transformation (in order to get time-averages efficiently) but it is also a necessary one to render $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ as a “good quantum number” (Kittel 1987). Now, $H(X, Y, K_x, K_y) \equiv H^{eff}$ is the form of the effective Hamiltonian that, as a result of the Hamilton’s equations, represents a constant of motion and whose explicit construction will be possible giving the resulting Eq.(18) at the end of this section. In this work we will restrict the potential energy to the quadratic form of the position coordinates $V(x, y) = c_1 x^2 + c_2 y^2 + c_3 xy$ since it is this kind of function that yields the correct physical interpretation for H^{eff} as a tight-binding Hamiltonian (the physical realization of such $V(x, y)$ onto the square lattice plane would be achieved –in principle– by placing the plane inside a dielectric cylinder shell with an specific surface charge distribution); otherwise, if $V(x, y)$ had the form of a higher degree polynomial function, H^{eff} could still be a valid Hamiltonian but not with the form of a tight-binding one (Mamani 2017).

By replacing the time-derivatives of the terms in (12) into the system (6)-(9) we obtain the system (B1)-(B4) in Appendix B wherein we applied the time-average techniques that yield the system for the effective dynamical coordinates:

$$\begin{aligned}
(1/2)\dot{X} &= \tilde{A} \text{sen } K_x + 2\tilde{M} \text{sen } 2K_x \\
&+ \tilde{C} \text{sen } K_x \cos K_y + \tilde{D} \cos K_x \text{sen } K_y \\
&+ \tilde{E} \text{sen } K_x \cos 2K_y + \tilde{F} \cos K_x \text{sen } 2K_y \\
&+ 2\tilde{G} \text{sen } 2K_x \cos K_y + 2\tilde{H} \cos 2K_x \text{sen } K_y \\
&+ 2\tilde{J} \text{sen } 2K_x \cos 2K_y + 2\tilde{K} \cos 2K_x \text{sen } 2K_y, \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1/2)\dot{Y} &= \tilde{B} \text{sen } K_y + 2\tilde{N} \text{sen } 2K_y \\
&+ \tilde{C} \cos K_x \text{sen } K_y + \tilde{D} \text{sen } K_x \cos K_y \\
&+ 2\tilde{E} \cos K_x \text{sen } 2K_y + 2\tilde{F} \text{sen } K_x \cos 2K_y \\
&+ \tilde{G} \cos 2K_x \text{sen } K_y + \tilde{H} \text{sen } 2K_x \cos K_y \\
&+ 2\tilde{J} \cos 2K_x \text{sen } 2K_y + 2\tilde{K} \text{sen } 2K_x \cos 2K_y, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\dot{K}_x = -V_X, \quad (15)$$

$$\dot{K}_y = -V_Y; \quad (16)$$

the list of the “tilde” symbols used in (13) and (14) is defined in the Appendix A.

We now set up about constructing the effective Hamiltonian $H^{eff} \equiv H(X, Y, K_x, K_y)$ from the system (13)-(16). The Hamilton equations in the space of the effective coordinates Z , K_z must be satisfied:

$$\dot{Z} = H_{K_z}^{eff}, \quad \dot{K}_z = -H_Z^{eff}; \quad (17)$$

the expression for \dot{Z} in (17) is substituted from (13), (14) and combined together with (15), (16) to give

$$\begin{aligned}
H^{eff} &= \\
&- 2\tilde{A} \cos K_x - 2\tilde{B} \cos K_y - 2\tilde{M} \cos 2K_x - 2\tilde{N} \cos 2K_y \\
&- (\tilde{C} + \tilde{D}) \cos(K_x + K_y) - (\tilde{C} - \tilde{D}) \cos(K_x - K_y) \\
&- (\tilde{E} + \tilde{F}) \cos(K_x + 2K_y) - (\tilde{E} - \tilde{F}) \cos(K_x - 2K_y) \\
&- (\tilde{G} + \tilde{H}) \cos(2K_x + K_y) - (\tilde{G} - \tilde{H}) \cos(2K_x - K_y) \\
&- (\tilde{J} + \tilde{K}) \cos(2K_x + 2K_y) - (\tilde{J} - \tilde{K}) \cos(2K_x - 2K_y) \\
&+ V(X, Y) + \Omega, \quad (18)
\end{aligned}$$

where Ω is a constant term independent of the dynamical coordinates Z , K_z . It is now clear that the “tilde” symbols referred to in (13) and (14) constitute the effective hopping elements characteristic of the effective tight-binding Hamiltonian H^{eff} in (18).

As a first crosscheck calculation of (18) we can test it for the case of the null electric field $\mathbf{f} = 0$ and a linear static potential $V(X, Y) = \alpha X + \beta Y$ (dropping the constant term Ω):

$$\begin{aligned}
H^{eff} &= -2\tilde{A} \cos K_x - 2\tilde{B} \cos K_y \\
&- (\tilde{C} + \tilde{D}) \cos(K_x + K_y) - (\tilde{C} - \tilde{D}) \cos(K_x - K_y) \\
&+ \alpha X + \beta Y, \\
&= -2A F_{x0} \cos K_x - 2B F_{y0} \cos K_y \\
&- C F_{xm} F_{-ym} \cos(K_x + K_y) - C F_{xm} F_{ym} \cos(K_x - K_y) \\
&+ \alpha X + \beta Y, \\
&= -2A \cos K_x - 2B \cos K_y - 2C \cos K_x \cos K_y + \alpha X + \beta Y. \quad (19)
\end{aligned}$$

By using Hamilton’s equations $\dot{Z} = H_{K_z}^{eff}$, $\dot{K}_z = -H_Z^{eff}$ in (17) for $Z = X, Y$, we obtain

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= -2A \text{sen } \alpha t - 2C \text{sen } \alpha t \cos \beta t, \\
\dot{Y} &= -2B \text{sen } \beta t - 2C \cos \alpha t \text{sen } \beta t, \quad (20)
\end{aligned}$$

which describe, as expected, a 2D Bloch oscillation with period $T = 2p\pi/\alpha$ ($p = \min(n, m)$) for the rational quotient $\alpha/\beta = n/m$.

3. INTERACTIONS ENGINEERING AND RELATION TO AN LC CIRCUIT

With the explicit form of the effective Hamiltonian H^{eff} in (18) in terms of the Fourier components f_{zn} of the electric field *via* (B31), we may ask now which components will yield specific values of the effective hopping elements in H^{eff} that determine thus the transport properties of the particle in a square lattice when acted upon by the external fields. This is the “interactions engineering” scheme considered in this paper, particularly, as an extension of the one-dimensional case investigated by Mamani *et al.* (Mamani 2017). For the purpose of illustrating such interactions engineering, we choose as a case study the emulation of an LC circuit with discrete charge that has an effective Hamiltonian of the form (as we will see later in this section)

$$\begin{aligned}
H_{LC} &= -2\tilde{C} \cos K_x \cos K_y - 2\tilde{M} \cos 2K_x - 2\tilde{N} \cos 2K_y \\
&+ V(X, Y), \quad (21)
\end{aligned}$$

where the static potential is the quadratic form $V(X, Y) \propto X^2 + Y^2 + (X - Y)^2$ such that its second derivatives are $V_{XX} = V_{YY} = -2V_{XY}$. In this case, and for the square lattice with $A = B$, the effective hopping elements become (Appendix A):

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= AF_{x0} - ACV_{XX}(F_{xp}F_{xm}F_{y(m+p)}/m^2)\epsilon^2, \\
\tilde{B} &= BF_{y0} - ACV_{XX}(F_{xp}F_{xm}F_{y(-m+p)}/m^2)\epsilon^2, \\
\tilde{C} &= (C/2)(F_{xm}F_{-ym} + F_{xm}F_{ym}) \\
&\quad - A^2V_{XX}(F_{-xm}F_{ym}/m^2 - F_{xm}F_{ym}/m^2)\epsilon^2, \\
\tilde{D} &= (C/2)(F_{xm}F_{-ym} - F_{xm}F_{ym}) \\
&\quad - A^2V_{XX}(F_{-xm}F_{ym}/m^2 + F_{xm}F_{ym}/m^2)\epsilon^2, \\
\tilde{E} &= -\tilde{F} = ACV_{XX}(F_{xp}F_{ym}F_{y(-m+p)}/m^2)\epsilon^2, \\
\tilde{G} &= -\tilde{H} = ACV_{XX}(F_{xp}F_{xm}F_{y(m+p)}/m^2)\epsilon^2, \\
\tilde{J} &= -\tilde{K} = (C^2/2)V_{XX}(F_{xp}F_{xq}F_{y(m+p)}F_{y(-m+q)}/m^2)\epsilon^2, \\
\tilde{M} &= (A^2/2)V_{XX}(F_{xm}F_{-xm}/m^2)\epsilon^2, \\
\tilde{N} &= (A^2/2)V_{XX}(F_{ym}F_{-ym}/m^2)\epsilon^2; \tag{22}
\end{aligned}$$

sums are performed on the terms with the repeated indices m , p , q and the variable m . Since our perturbative calculations were performed consistently up to second order in $\epsilon \equiv 1/\omega$, the effective hopping elements in (22) can be expressed as combinations of the zeroth (dominant) and 2nd order terms: $\tilde{A} = \tilde{A}^{(0)} + \tilde{A}^{(2)}$, $\tilde{B} = \tilde{B}^{(0)} + \tilde{B}^{(2)}$, $\tilde{C} = \tilde{C}^{(0)} + \tilde{C}^{(2)}$, $\tilde{D} = \tilde{D}^{(0)} + \tilde{D}^{(2)}$, $\tilde{E} = \tilde{E}^{(2)}$, $\tilde{G} = \tilde{G}^{(2)}$, $\tilde{J} = \tilde{J}^{(2)}$, $\tilde{M} = \tilde{M}^{(2)}$, $\tilde{N} = \tilde{N}^{(2)}$.

Now, the F_{zm} terms in (22) depend on the specific oscillating electric field $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$ through its Fourier components. For the purpose sought in this work, we find that those components should be

$$\begin{aligned}
f_x(\omega t) &= 2f_{x1} \cos(\omega t) + 2f_{x2} \cos(2\omega t), \\
f_y(\omega t) &= 2f_{y1} \cos(\omega t) + 2f_{y2} \cos(2\omega t). \tag{23}
\end{aligned}$$

Then, the expression for F_{zm} in (B31) readily becomes

$$F_{zm} = \sum_p J_{m-2p}(2f_{z1})J_p(f_{z2}); \tag{24}$$

notice the property $F_{(-z)m} = F_{z(-m)} \equiv F_{-zm}$. In order to solve the infinite sum in (24) and verify its convergence, we use the integral representation for $J_n(z)$:

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta. \tag{25}$$

Replacing this $J_n(z)$ in F_{zm} and using $\sum_p \exp[ip(C + \phi)] = \pi \delta(C + \phi)$ (for $0 < \phi < \pi$) we obtain

$$F_{zm} = \frac{i^{-m}}{\pi} \int_0^\pi e^{2if_{z1} \cos \theta} \cos[m\theta + f_{z2} \sin(2\theta)] d\theta. \tag{26}$$

Now, we set $f_{x2} = f_{y1} = 0$ in (23) as the condition to find the required form of H_{LC} ($\tilde{D}^{(0)} = 0$ in this case) with the parameters f_{x1} , f_{y2} such that:

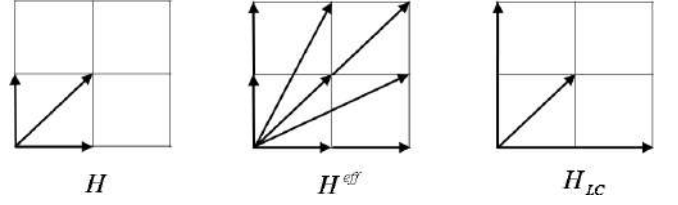


FIG. 1.— Representations of the interactions in the square lattice (from left to right): the time-dependent Hamiltonian H in (1), the effective Hamiltonian H^{eff} in (18), the Hamiltonian H_{LC} in (29) obtained by choosing specific values of the external fields (interactions engineering).

$$\tilde{A}^{(0)} = 0 \rightarrow F_{x0} = 0 \rightarrow J_0(2f_{x1}) = 0,$$

$$\tilde{B}^{(0)} = 0 \rightarrow F_{y0} = 0 \rightarrow \int_0^\pi \cos[f_{y2} \sin(2\theta)] d\theta = 0; \tag{27}$$

then, we chose from the set of solutions $\{f_{x1}, f_{y2}\}$ of (27) those which satisfy the condition that $\tilde{A}^{(2)}$, $\tilde{B}^{(2)}$, \tilde{E} , \tilde{G} , \tilde{J} should be negligible as compared to \tilde{M} and \tilde{N} . One way of doing this is to calculate the euclidian norm

$$\Delta(f_{x1}, f_{y2}) \equiv \sqrt{(\tilde{A}^{(2)})^2 + (\tilde{B}^{(2)})^2 + (\tilde{E})^2 + (\tilde{G})^2 + (\tilde{J})^2} \tag{28}$$

such that $\Delta/\tilde{M} + \Delta/\tilde{N}$ attains a minimum value for negative values of \tilde{C} , \tilde{M} , \tilde{N} . Thus, with this condition and those of (27) fulfilled, the effective Hamiltonian in (18) becomes

$$\begin{aligned}
H^{eff} &= \\
& - 2\tilde{A}^{(2)} \cos K_x - 2\tilde{B}^{(2)} \cos K_y - 2\tilde{M} \cos 2K_x - 2\tilde{N} \cos 2K_y \\
& - (\tilde{C} + \tilde{D}^{(2)}) \cos(K_x + K_y) - (\tilde{C} - \tilde{D}^{(2)}) \cos(K_x - K_y) \\
& - 2\tilde{E} \cos(K_x - 2K_y) - 2\tilde{G} \cos(2K_x - K_y) \\
& - 2\tilde{J} \cos(2K_x - 2K_y) + V(X, Y) \\
& \cong -2\tilde{C}^{(0)} \cos K_x \cos K_y - 2\tilde{M} \cos 2K_x - 2\tilde{N} \cos 2K_y \\
& \quad + V(X, Y), \tag{29}
\end{aligned}$$

thus attaining the required approximation $H_{LC} \cong H^{eff}$. Fig. 1 shows a schematic representation of the interactions in the square lattice (from left to right): the time-dependent Hamiltonian H in (1) is transformed into the effective Hamiltonian in H^{eff} (18) (with all the reparametrized and induced interactions) by the action of the external oscillating and static fields and, finally, by choosing specific values of the those fields (“interactions engineering”), the Hamiltonian H_{LC} in (29) is obtained.

The numerical results found from (27) and (28) within the interval $0 < f_{x1}, f_{y2} < 100$ (with physical units restored) are

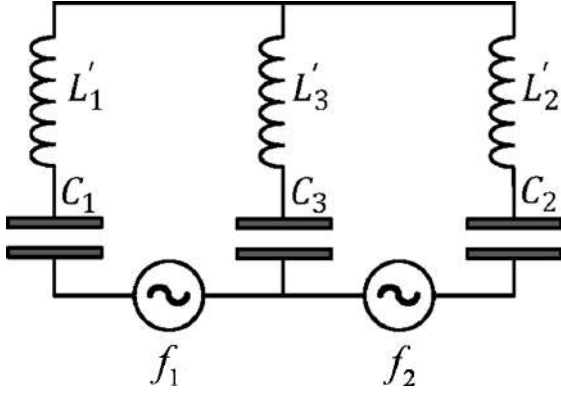


FIG. 2.— Two-mesh LC circuit.

$$\begin{aligned}
(q_e a / \hbar \omega) \{f_{x1}, f_{y2}\} &= \{16.887, 5.519\}, \\
C^{-1} \tilde{C}^{(0)} &= -0.060, \\
[V_{XX} A^2 a^2 / (\hbar \omega)^2]^{-1} \tilde{M} &= -0.021, \\
[V_{XX} A^2 a^2 / (\hbar \omega)^2]^{-1} \tilde{N} &= -0.028, \\
[V_{XX} A C a^2 / (\hbar \omega)^2]^{-1} \tilde{A}^{(2)} &= 0.002, \\
[V_{XX} A C a^2 / (\hbar \omega)^2]^{-1} \tilde{B}^{(2)} &= -0.002, \\
[V_{XX} A C a^2 / (\hbar \omega)^2]^{-1} \tilde{E} &= 0.001, \\
[V_{XX} A C a^2 / (\hbar \omega)^2]^{-1} \tilde{G} &= 0.002, \\
[V_{XX} C^2 a^2 / (\hbar \omega)^2]^{-1} \tilde{J} &= 0.005, \\
\Delta / \tilde{M} + \Delta / \tilde{N} &= 0.440. \tag{30}
\end{aligned}$$

We expect that $V_{XX} A^2 a^2 / (\hbar \omega)^2$ has an upper bound in order to have consistent results, i.e., $\tilde{C}^{(0)}$ dominant with respect to \tilde{M} and \tilde{N} . This is of course the case when $\omega \rightarrow \infty$ but, as we will see at the end of this section, ω must also have an upper bound if an analogy between the square lattice and the LC circuit is to be achieved. We think that values of the physical parameters can be found that meet reasonably such a requirement.

We now set up about describing the LC circuit depicted in Fig. 2. Following the construction of the quantum Hamiltonian operator for a two-ring system (Flores 2002), we can construct the Hamiltonian function of a two-mesh LC circuit with discrete charge q_e as

$$\begin{aligned}
H(q_1, q_2, \phi_1, \phi_2, q_e; t) &= \\
&\frac{2\hbar^2}{L_1 q_e^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\phi_1 q_e}{2\hbar} \right) + \frac{2\hbar^2}{L_2 q_e^2} \text{sen}^2 \left(\frac{\phi_2 q_e}{2\hbar} \right) \\
&+ \frac{2\hbar^2}{L_3 q_e^2} \text{sen} \left(\frac{\phi_1 q_e}{2\hbar} \right) \text{sen} \left(\frac{\phi_2 q_e}{2\hbar} \right) \\
&+ \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{2C_3} + q_1 f_1(\omega' t) + q_2 f_2(\omega' t), \tag{31}
\end{aligned}$$

which follows from the replacement of the magnetic flux as $\phi_i \rightarrow (2\hbar/q_e) \text{sen}(q_e \phi_i / 2\hbar)$ in the corresponding continuous-charge Hamiltonian function

Square lattice	Two-mesh LC circuit
$a = 100 \text{ \AA}$	$q_e \cong 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
$\omega = 10^{12} \text{ Hz}$	$\omega' = 1.934 \times 10^{13} \text{ Hz}$
$f_{x1} = 1.055 \times 10^6 \text{ V/m}$ $f_{y2} = 0.345 \times 10^6 \text{ V/m}$	$f_1 = 6.249 \times 10^{-3} \text{ V}$ $f_2 = 0$
$V_{XX} = 2 \times 10^{-6} \text{ J/m}^2$	$C_1 = C_2 = C_3$ $= 2.56 \times 10^{-16} \text{ F}$
$A, C = 10^{-3} \text{ eV}$ $\tilde{C}^{(0)} = -0.060A$ $\tilde{M} = -0.021A$ $\tilde{N} = -0.028A$	$L'_1 = L'_2 \cong 0.4L'_3$ $L'_3 = 9.766 \times 10^{-8} \text{ H}$

TABLE 1

NUMERICAL VALUES OF THE PHYSICAL PARAMETERS. THE VALUES OF a, ω, A, C WERE CHOSEN SO AS TO RESEMBLE TYPICAL VALUES IN A GAAS-TYPE SEMICONDUCTOR SUPERLATTICE; $f_2 = 0$ WAS SUGGESTED SO AS TO FACILITATE THE CALCULATIONS. THE OTHER VALUES RESULT FROM COMPARING THE TERMS AND ARGUMENTS OF THE EFFECTIVE HAMILTONIANS (33) AND (21), AND FROM THE CORRESPONDING ALGEBRAIC AND NUMERICAL MANIPULATIONS.

$$\begin{aligned}
H(q_1, q_2, \phi_1, \phi_2; t) &= \\
&\frac{\phi_1^2}{2L_1} + \frac{\phi_2^2}{2L_2} + \frac{\phi_1 \phi_2}{2L_3} + \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{2C_3} \\
&+ q_1 f_1(\omega' t) + q_2 f_2(\omega' t), \tag{32}
\end{aligned}$$

where we have defined: $1/L_1 \equiv (L'_2 + L'_3)/\Upsilon$, $1/L_2 \equiv (L'_1 + L'_3)/\Upsilon$ and $1/L_3 \equiv 2L'_3/\Upsilon$, with $\Upsilon \equiv (1/2) \sum_{i \neq j} L'_i L'_j$; as can be readily checked the flux ϕ_i remains invariant in the limit $q_e \rightarrow 0$ yielding, as required, $H(q_1, q_2, \phi_1, \phi_2, q_e; t) \rightarrow H(q_1, q_2, \phi_1, \phi_2; t)$. In this case, the term $\phi_1 \phi_2 / (2L_3)$ in (32) is derived from the energy term $(1/2) L'_3 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2$ according to the Kirchhoff's laws. The mutual inductance terms corresponding to this circuit are $\phi_1 \phi_2 / M_{12}$, $\phi_1 \phi_3 / M_{13}$ and $\phi_2 \phi_3 / M_{23}$ but we have not considered them in (32) since we did not specify the form of the couplings among L'_1 , L'_2 and L'_3 . In fact, the ‘‘mesoscopic’’ character of this circuit lies upon the discrete nature and small quantity (about 10) of the elementary electric charges being allocated in the capacitors and not necessarily upon the small size of the circuit which would imply couplings among the inductors.⁴

Following the standard quantum time-average techniques (Rahav 2003; Calcina-Nogales 2020) and setting the canonical transformations $\phi_1 = \Phi_1 + \pi \hbar / q_e$ and $\phi_2 = \Phi_2 + \pi \hbar / q_e$, we obtain from (32) the effective Hamiltonian function⁵

⁴ Interestingly, the phenomenon of current magnification referred to by Flores and Utreras (Flores 2002) for two coupled inductances would also occur in the two-mesh circuit with three inductances studied in our work; progress is being carried on by us in that direction.

⁵ The resulting Hamiltonian operator corresponds to the Hamilto-

$$\begin{aligned}
H(Q_1, Q_2, \Phi_1, \Phi_2) = & \\
& \frac{\hbar^2}{\bar{L}_1 q_e^2} \cos\left(\frac{\Phi_1 q_e}{\hbar}\right) + \frac{\hbar^2}{\bar{L}_2 q_e^2} \cos\left(\frac{\Phi_2 q_e}{\hbar}\right) \\
& + \frac{2\hbar^2}{\bar{L}_3 q_e^2} \cos\left(\frac{\Phi_1 q_e}{2\hbar}\right) \cos\left(\frac{\Phi_2 q_e}{2\hbar}\right) \\
& + \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} + \frac{(Q_1 - Q_2)^2}{2C_3}, \tag{33}
\end{aligned}$$

where, for the case of the AC source voltages $f_1(\omega't) = 2f_1 \cos(\omega't)$ and $f_2(\omega't) = 2f_2 \cos(2\omega't)$, we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\bar{L}_1} &\equiv \frac{1}{L_1} J_0\left(\frac{2f_1 q_e}{\hbar\omega'}\right), \\
\frac{1}{\bar{L}_2} &\equiv \frac{1}{L_2} J_0\left(\frac{f_2 q_e}{\hbar\omega'}\right), \\
\frac{1}{\bar{L}_3} &\equiv \frac{1}{L_3} \sum_n J_{2n}\left(\frac{f_1 q_e}{\hbar\omega'}\right) J_n\left(\frac{f_2 q_e}{2\hbar\omega'}\right). \tag{34}
\end{aligned}$$

By comparing the terms and arguments of $H(Q_1, Q_2, \Phi_1, \Phi_2)$ in (33) with those of $H_{LC}(X, Y, K_x, K_y)$ in (21) we can verify, as expected, that the required form of H_{LC} is attained for static potential energies $V(Q_1, Q_2)$ and $V(X, Y)$ whose second derivatives are related as $V_{Q_1 Q_1}/V_{XX} = V_{Q_2 Q_2}/V_{YY} = V_{Q_1 Q_2}/V_{XY} = (a/q_e)^2$. Specifically, by choosing equal capacitances in (33), we should have that $V_{XX} = 2(q_e/a)^2/C_1$.

From the numerical values of f_{x1} , f_{y2} , \widetilde{M} , \widetilde{N} and $\widetilde{C} \cong \widetilde{C}^{(0)}$ found in (30), we may now express the equivalence among the coefficients of $H(Q_1, Q_2, \Phi_1, \Phi_2)$ and $H_{LC}(X, Y, K_x, K_y)$ in the compact notation that comprises the three equations

$$\frac{1}{\bar{L}_1} : \frac{1}{\bar{L}_2} : \frac{2}{\bar{L}_3} = \widetilde{M} : \widetilde{N} : \widetilde{C}, \tag{35}$$

whence the the source voltage amplitudes f_1 , f_2 and the inductances can be found. We may take $L'_1 = L'_2$ for simplicity, thus, from $1/\bar{L}_1 : 1/\bar{L}_2 = \widetilde{M} : \widetilde{N}$ in (35), we have that $J_0(q_e f_2/\hbar\omega')/J_0(2q_e f_1/\hbar\omega') \cong 4/3$ which is satisfied for an infinite set of solutions, for example, $(q_e/\hbar\omega')f_1 = 0.517$ and $(q_e/\hbar\omega')f_2 = 0$ (although $f_2 = 0$ was so chosen just to facilitate the calculations, such a value still deserves a further physical interpretation). For these values, and by setting $-2\widetilde{M} = (\hbar/q_e)^2/\bar{L}_1$, $-2\widetilde{C}^{(0)} = 2(\hbar/q_e)^2/\bar{L}_3$ in the Hamiltonians (21), (33), respectively, we find

$$\begin{aligned}
\frac{L'_1}{L'_3} &\cong 1.4 \left(\frac{q_e}{\hbar}\right)^2 \frac{A^2/C}{C_1\omega^2} - 1, \\
\frac{L'_1(L'_1 + 2L'_3)}{L'_3} &\cong 25 \left(\frac{\hbar}{q_e}\right)^2 \frac{1}{C}. \tag{36}
\end{aligned}$$

nian function obtained with the semiclassical scheme, as was already done in the case of the single-mesh LC circuit (Mamani 2018).

As we can see, the term $(q_e/\hbar)^2(A^2/C)/(C_1\omega^2)$ has to have a lower bound to yield positive inductances; such a bound will be determined by the characteristics of the square lattice which, in this work, can be thought of as a 2D semiconductor superlattice of the GaAs type (and whose 1D version was where Bloch oscillations were first observed). Thus, we may take as typical values:

$$\begin{aligned}
A, C &\sim 1 \text{ meV}, \\
a &\sim 100 \text{ \AA}, \\
f_{x1}, f_{y2} &\sim \hbar\omega/(aq_e) \sim 10^5 \text{ V/m}. \tag{37}
\end{aligned}$$

From the latter we have an estimation of $\omega \sim 10^{12}$ Hz. Since $V_{XX}(Aa/\hbar\omega)^2 = (Aq_e/\hbar)^2/(C_1\omega^2) \sim 10^{-22}$ J should hold in (30), we have then the estimation of $C_1 \sim 10^{-16}$ F. With these values, we have therefore from (36) that $L'_1 \cong 0.4L'_3$ and $L'_3 \sim 10^{-7}$ H. Finally, an estimation of the sources frequency ω' can be made by assuming that a maximum of just few electrons is to be allotted in a (small) mesoscopic capacitor, which is other way for interpreting the meaning of ‘‘discrete charge’’ LC circuit. We may take then $Q_{1,max} = 10q_e$, which, together with $C_1 = Q_{1,max}/f_1$ and $f_1 \sim \hbar\omega'/q_e$, yields $f_1 \sim 10^{-2}$ V and $\omega' \sim 10^{13}$ Hz. More precise values for the results of our numerical simulations and from comparing the terms and arguments of the effective Hamiltonians (33) and (21) are summarized in Table 1.

We may now validate the consistency of the semiclassical model invoked in our work: the value of the frequency $\omega = 10^{12}$ Hz corresponds to an external field wavelength $\lambda \sim 10^{-3}$ m, while the lattice constant is $a = 100$ \AA. The quantum wavepacket size can be taken from Mamani *et al.* (Mamani 2017), where the semiclassical method has proved to be consistent with the formal quantum approach for a wavepacket initial width $\Delta x = 10a$. We have therefore that $\lambda \gg \Delta x \gg a$, as required for the validity of the semiclassical method (see, for example Ashcroft and Mermin (1976)), and which in turn implies that the intensity of the external electric field $|\mathbf{f}| \sim 10^6$ V/m is low enough for a single-band tight-binding model Hamiltonian to hold.

By solving numerically the system of equations (17) for $X(t)$, $Y(t)$, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, with the values reported in Table 1, we may relate the electronic dynamics in both equivalent systems, the square lattice and the two-mesh LC circuit. Since we have managed the electric fields and the voltage sources in the former and latter systems, respectively, so as to have $H_{LC}(X, Y, K_x, K_y) \cong H_{LC}(Q_1, Q_2, \Phi_1, \Phi_2)$, then their common energies are 0.218 meV, corresponding to the initial values $X(0) = Y(0) = 0.02a$ of the effective position coordinates. We observe in Fig. 3(a(1)) a predominately diagonal oscillating motion –although not a simple one– of the particle’s position about the origin of the effective position XY plane of the square lattice, which corresponds also to a predominately symmetric distribution of oscillating charges in the two-mesh LC circuit, as seen in Fig. 3(b(1)), in accordance with the diagram for H_{LC} in Fig. 1, where the diagonal hopping element is the dominant

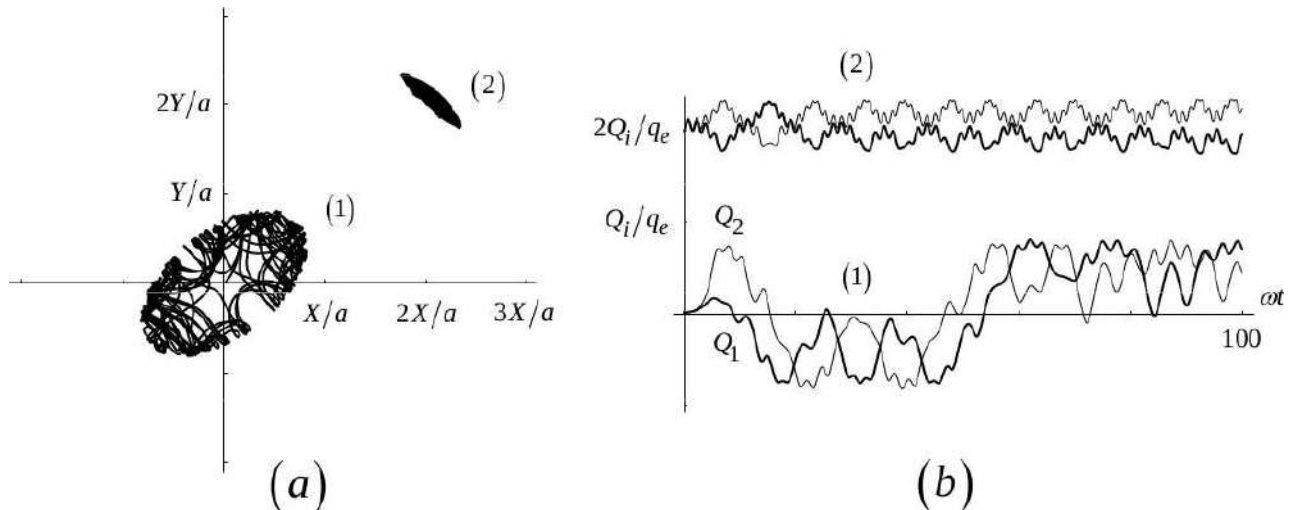


FIG. 3.— Cases of electronic motion in: (a) the effective position XY plane, and (b) the two-mesh LC circuit. In case (a) the displacements are measured in units of the lattice constant $a = 100 \text{ \AA}$; in case (b) the capacitors' electric charges are measured in units of the electron's charge q_e , the time is measured in units of the frequency inverse $1/\omega = 10^{-12} \text{ s}$. Cases (1) and (2) in both (a) and (b) correspond to oscillations with zero and positive time-averages, respectively. Cases (1) and (2) in (b) resemble very much the AC and DC regimes, respectively, deduced in the one-mesh LC circuit (Mamani 2018) as a consequence of a bifurcation condition.

one. Such a behavior, however, may change abruptly—as a function of the total energy, for example—giving rise to a DC regime or a suppression of the mesh currents, as it does in the one-dimensional case of the one-mesh LC circuit (Mamani 2018), where we have showed that a bifurcation condition on the $\dot{Q} - Q$ phase diagram can be associated to such an abrupt change. Figs. 3(a(2)) and 3(b(2)) show position and charge oscillations with positive time-averages corresponding to an energy of 2.707 meV, contrasting with those of Figs. 3(a(1)) and 3(b(1)). The extension of the one-dimensional bifurcation condition to the two-dimensional case of the two-mesh circuit and its relation to the particle's propagation in the square lattice is an interesting issue worth to be treated elsewhere.

4. CONCLUSIONS

We have established the formal equivalence between two physical systems by means of the interactions engineering scheme developed in this paper. Those systems are: (i) a square lattice wherein a tight-binding electron propagates under the combined action of an external high-frequency and homogeneous electric field and a quadratic static potential, and (ii) a two-mesh LC circuit with discrete charge. Such formal equivalence is attained by describing both systems by effective Hamiltonian functions having the same form and whose parameters can be numerically calculated when the Hamiltonian terms are correspondingly compared among them; for deriving such effective Hamiltonians we have used perturbative expansions up to ω^{-2} when $\omega \rightarrow \infty$. Interestingly, we have found that the sought equivalence between the square lattice and the LC circuit is achieved when we choose specific values of the oscillating electric field acting upon the lattice so that the 1st neighbor interactions ($\tilde{A}^{(0)}$, $\tilde{B}^{(0)}$, order ω^0) are suppressed and the remaining 2nd neighbor interactions ($\tilde{C}^{(0)}$, order ω^0)

and 3rd neighbor interactions (\tilde{M} , \tilde{N} , order ω^{-2}) become comparable (see Table 1).

We now suggest some interesting issues that could be worth exploring further: (a) In a previous work we have investigated the relation between a single-mesh LC circuit (with discrete charge) and a charged particle hopping in a one-dimensional lattice (Mamani 2018); in the present work we have extended such an analogy to a two-mesh LC circuit and a square lattice. Thus, it seems natural to inquire whether the extension to a three-mesh LC circuit and a cubic lattice would be valid, mainly, because the one-dimensional and the square lattices do not exist as such (to our knowledge), but the three dimensional cubic lattice does exist (although not with the superlattice parameters specified in Table 1). (b) Another natural extension of our work would be considering a rectangular lattice where, for example, the sides have an incommensurate ratio of $\sqrt{3}$. In fact, this latter case would be the best suited for simulating the dynamics of a hopping electron in graphene. (c) Finally, and motivated by the results in Fig. 3(a) for the square lattice, we may suggest that the “AC regime” would indicate a quantum regime where the electronic probability densities corresponding to neighbor lattice sites overlap, which indicates in turn a higher electric conductivity, as compared to the “DC regime”. Thus, a higher and a lower conducting regimes could be separated by a semiclassical bifurcation condition.

APÉNDICE

A. DEFINITIONS OF THE EFFECTIVE HOPPING ELEMENTS

The “tilde” symbols used in (13) and (14) that constitute the effective hopping elements of H^{eff} in (18) are defined as:

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= AF_{x0} + \frac{1}{2}BC [(\Gamma_{11}^{01} - \Gamma_{11}^{11}) V_{XY} - (\Gamma_{11}^{01} + \Gamma_{11}^{11}) V_{YY}] \epsilon^2, \\
\tilde{B} &= BF_{y0} + \frac{1}{2}AC [(\Gamma_{10}^{10} - \Gamma_{10}^{11}) V_{XY} - (\Gamma_{10}^{10} + \Gamma_{10}^{11}) V_{XX}] \epsilon^2, \\
\tilde{C} &= \frac{1}{2}C(\Gamma_0 + \Gamma_1) + ABV_{XY} (\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{01}^1) \epsilon^2, \\
\tilde{D} &= \frac{1}{2}C(\Gamma_0 - \Gamma_1) + ABV_{XY} (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{01}^1) \epsilon^2, \\
\tilde{E} &= \frac{1}{2}BC [(\Gamma_{11}^{00} - \Gamma_{11}^{10}) V_{XY} + (\Gamma_{11}^{00} + \Gamma_{11}^{10}) V_{YY}] \epsilon^2, \\
\tilde{F} &= \frac{1}{2}BC [(\Gamma_{11}^{00} + \Gamma_{11}^{10}) V_{XY} + (\Gamma_{11}^{00} - \Gamma_{11}^{10}) V_{YY}] \epsilon^2, \\
\tilde{G} &= \frac{1}{2}AC [(\Gamma_{00}^{00} + \Gamma_{00}^{10}) V_{XX} + (\Gamma_{00}^{00} - \Gamma_{00}^{10}) V_{XY}] \epsilon^2, \\
\tilde{H} &= \frac{1}{2}AC [(\Gamma_{00}^{00} - \Gamma_{00}^{10}) V_{XX} + (\Gamma_{00}^{00} + \Gamma_{00}^{10}) V_{XY}] \epsilon^2, \\
\tilde{J} &= \frac{1}{8}C^2 [(\Gamma_0^{00} + \Gamma_1^{01}) (V_{XX} + V_{YY}) + 2(\Gamma_0^{00} - \Gamma_1^{01}) V_{XY}] \epsilon^2, \\
\tilde{K} &= \frac{1}{8}C^2 [(\Gamma_0^{00} - \Gamma_1^{01}) (V_{XX} + V_{YY}) + 2(\Gamma_0^{00} + \Gamma_1^{01}) V_{XY}] \epsilon^2, \\
\tilde{M} &= \frac{1}{4} [(2A^2\Gamma_{00}^0 + C^2\Gamma_0^{01}) V_{XX} - C^2\Gamma_0^{01} V_{YY}] \epsilon^2, \\
\tilde{N} &= \frac{1}{4} [(2B^2\Gamma_{11}^0 + C^2\Gamma_0^{10}) V_{YY} - C^2\Gamma_0^{10} V_{XX}] \epsilon^2.
\end{aligned}$$

The definitions of the “ Γ ” symbols used above are:

$ \begin{aligned} \Gamma_0 &= F_{xm}F_{-ym} \\ \Gamma_1 &= F_{xm}F_{ym} \\ \Gamma_{00}^0 &= F_{xm}F_{-xm}/m^2 \\ \Gamma_{00}^1 &= F_{xm}F_{xm}/m^2 \\ \Gamma_{01}^0 &= F_{ym}F_{-xm}/m^2 \\ \Gamma_{01}^1 &= F_{ym}F_{xm}/m^2 \\ \Gamma_{10}^0 &= F_{xm}F_{-ym}/m^2 \\ \Gamma_{10}^1 &= F_{xm}F_{ym}/m^2 \\ \Gamma_{11}^0 &= F_{ym}F_{-ym}/m^2 \\ \Gamma_{11}^1 &= F_{ym}F_{ym}/m^2 \\ \Gamma_{00}^{00} &= F_{xp}F_{xq}F_{y(m-p)}F_{-y(m+q)}/m^2 \\ \Gamma_{00}^{01} &= F_{xp}F_{xq}F_{y(m-p)}F_{y(m+q)}/m^2 \\ \Gamma_{00}^{10} &= F_{xp}F_{xq}F_{y(m-p)}F_{y(-m+q)}/m^2 \\ \Gamma_{00}^{11} &= F_{xp}F_{xq}F_{y(m-p)}F_{y(m-q)}/m^2 \\ \Gamma_{01}^{00} &= F_{xp}F_{xq}F_{y(m+p)}F_{y(m-q)}/m^2 \\ \Gamma_{01}^{01} &= F_{xp}F_{xq}F_{y(m+p)}F_{y(-m+q)}/m^2 \\ \Gamma_{01}^{10} &= F_{xp}F_{xq}F_{y(m+p)}F_{y(m+q)}/m^2 \\ \Gamma_{01}^{11} &= F_{xp}F_{xq}F_{y(m+p)}F_{-y(m+q)}/m^2 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} \Gamma_{00}^{00} &= F_{xp}F_{-xm}F_{y(m-p)}/m^2 \\ \Gamma_{00}^{01} &= F_{xp}F_{xm}F_{y(m-p)}/m^2 \\ \Gamma_{00}^{10} &= F_{xp}F_{xm}F_{y(m+p)}/m^2 \\ \Gamma_{00}^{11} &= F_{xp}F_{-xm}F_{y(m+p)}/m^2 \\ \Gamma_{01}^{00} &= F_{xp}F_{-ym}F_{y(m-p)}/m^2 \\ \Gamma_{01}^{01} &= F_{xp}F_{ym}F_{y(m-p)}/m^2 \\ \Gamma_{01}^{10} &= F_{xp}F_{ym}F_{y(m+p)}/m^2 \\ \Gamma_{01}^{11} &= F_{xp}F_{-ym}F_{y(m+p)}/m^2 \\ \Gamma_{10}^{00} &= F_{xp}F_{xm}F_{-y(m+p)}/m^2 \\ \Gamma_{10}^{01} &= F_{xp}F_{xm}F_{y(m+p)}/m^2 \\ \Gamma_{10}^{10} &= F_{xp}F_{xm}F_{y(-m+p)}/m^2 \\ \Gamma_{10}^{11} &= F_{xp}F_{xm}F_{y(m-p)}/m^2 \\ \Gamma_{11}^{00} &= F_{xp}F_{ym}F_{-y(m+p)}/m^2 \\ \Gamma_{11}^{01} &= F_{xp}F_{ym}F_{y(m+p)}/m^2 \\ \Gamma_{11}^{10} &= F_{xp}F_{ym}F_{y(-m+p)}/m^2 \\ \Gamma_{11}^{11} &= F_{xp}F_{ym}F_{y(m-p)}/m^2 \end{aligned} $
---	--

Sums are performed on the terms with the repeated indices m , p , q and the variable m .

B. TIME-AVERAGE DERIVATION OF THE EFFECTIVE DYNAMICAL COORDINATES

In this Appendix we apply the time-average techniques that yield the system for the effective dynamical

coordinates (13)-(16). This is done by replacing the time-derivatives of the terms in (10) into the system (6)-(9) yielding:

$$\dot{X} + \omega \frac{d\xi_x}{d\tau} = 2A \text{sen } \alpha_x + 2C \text{sen } \alpha_x \cos \alpha_y, \quad (\text{B1})$$

$$\dot{Y} + \omega \frac{d\xi_y}{d\tau} = 2B \text{sen } \alpha_y + 2C \cos \alpha_x \text{sen } \alpha_y, \quad (\text{B2})$$

$$\dot{K}_x + \omega \frac{d\eta_x}{d\tau} = -V_x(\gamma_x, \gamma_y), \quad (\text{B3})$$

$$\dot{K}_y + \omega \frac{d\eta_y}{d\tau} = -V_y(\gamma_x, \gamma_y), \quad (\text{B4})$$

where we have defined $\alpha_z \equiv K_z + \eta_z - g_z$, $\gamma_z \equiv Z + \xi_z$. We will use later $\alpha_z^0 \equiv K_z + \eta_{z0} - g_z$ which results from

evaluating α_z for $\epsilon = 0$, and $\alpha_z^{00} \equiv K_z - g_z$ which results from evaluating α_z^0 for $\eta_{z0} = 0$. The application of the time-average properties to the system (B1)-(B4) yields:

$$\dot{X} = 2A \langle \text{sen } \alpha_x \rangle + 2C \langle \text{sen } \alpha_x \cos \alpha_y \rangle, \quad (\text{B5})$$

$$\dot{Y} = 2B \langle \text{sen } \alpha_y \rangle + 2C \langle \cos \alpha_x \text{sen } \alpha_y \rangle, \quad (\text{B6})$$

$$\dot{K}_x = -\langle V_x(\gamma_x, \gamma_y) \rangle, \quad (\text{B7})$$

$$\dot{K}_y = -\langle V_y(\gamma_x, \gamma_y) \rangle. \quad (\text{B8})$$

Combining (B5)-(B8) and (B1)-(B4) one obtains a system for the fast coordinates:

$$\omega \frac{d\xi_x}{d\tau} = 2A (\text{sen } \alpha_x - \langle \text{sen } \alpha_x \rangle) + 2C (\text{sen } \alpha_x \cos \alpha_y - \langle \text{sen } \alpha_x \cos \alpha_y \rangle), \quad (\text{B9})$$

$$\omega \frac{d\xi_y}{d\tau} = 2B (\text{sen } \alpha_y - \langle \text{sen } \alpha_y \rangle) + 2C (\cos \alpha_x \text{sen } \alpha_y - \langle \cos \alpha_x \text{sen } \alpha_y \rangle), \quad (\text{B10})$$

$$\omega \frac{d\eta_x}{d\tau} = -V_x(\gamma_x, \gamma_y) + \langle V_x(\gamma_x, \gamma_y) \rangle, \quad (\text{B11})$$

$$\omega \frac{d\eta_y}{d\tau} = -V_y(\gamma_x, \gamma_y) + \langle V_y(\gamma_x, \gamma_y) \rangle. \quad (\text{B12})$$

The solutions of (B9)-(B12) are to be substituted in (B5)-(B8) in order to have a system of differential equations for the slow coordinates Z , K_z . To achieve that, and since the frequency ω is large, we expand the fast

coordinates ξ_z , η_z as power series of the small parameter $\epsilon \equiv t/\tau = 1/\omega$ up to the order of ϵ^2 with coefficients ξ_{zi} , η_{zi} . The substitution of these series in two of the trigonometric functions and in the derivatives V_x , V_y in (B5)-(B8) leads to

$$\text{sen } \alpha_x = \text{sen } \alpha_x^0 + \epsilon \eta_{x1} \cos \alpha_x^0 + (\eta_{x2} \cos \alpha_x^0 - (1/2)\eta_{x1}^2 \text{sen } \alpha_x^0) \epsilon^2, \quad (\text{B13})$$

$$\text{sen } \alpha_y = \text{sen } \alpha_y^0 + \epsilon \eta_{y1} \cos \alpha_y^0 + (\eta_{y2} \cos \alpha_y^0 - (1/2)\eta_{y1}^2 \text{sen } \alpha_y^0) \epsilon^2, \quad (\text{B14})$$

$$V_x(\gamma_x, \gamma_y) = V_X^0 + (\xi_{x1} V_{XX}^0 + \xi_{y1} V_{XY}^0) \epsilon + (\xi_{x2} V_{XX}^0 + \xi_{y2} V_{XY}^0) \epsilon^2, \quad (\text{B15})$$

$$V_y(\gamma_x, \gamma_y) = V_Y^0 + (\xi_{x1} V_{XY}^0 + \xi_{y1} V_{YY}^0) \epsilon + (\xi_{x2} V_{XY}^0 + \xi_{y2} V_{YY}^0) \epsilon^2, \quad (\text{B16})$$

where $\gamma_{z0} \equiv Z + \xi_{z0}$; the superscript "0" in the derivatives of the potential energy means that its argument is γ_{z0} and the absence of a superscript means that the argument is Z . Substituting (B13)-(B16) in (B9)-(B12), and comparing the terms in the same powers of ϵ , one

obtains:

(i) For ϵ^0 ,

$$\frac{d\xi_{x0}}{d\tau} = \frac{d\eta_{x0}}{d\tau} = \frac{d\xi_{y0}}{d\tau} = \frac{d\eta_{y0}}{d\tau} = 0. \quad (\text{B17})$$

(ii) For ϵ^1 ,

$$\frac{d\xi_{x1}}{d\tau} = 2A (\text{sen } \alpha_x^{00} - \langle \text{sen } \alpha_x^{00} \rangle) + 2C (\text{sen } \alpha_x^{00} \cos \alpha_y^{00} - \langle \text{sen } \alpha_x^{00} \cos \alpha_y^{00} \rangle), \quad (\text{B18})$$

$$\frac{d\xi_{y1}}{d\tau} = 2B (\text{sen } \alpha_y^{00} - \langle \text{sen } \alpha_y^{00} \rangle) + 2C (\cos \alpha_x^{00} \text{sen } \alpha_y^{00} - \langle \cos \alpha_x^{00} \text{sen } \alpha_y^{00} \rangle), \quad (\text{B19})$$

$$\frac{d\eta_{y1}}{d\tau} = \frac{d\eta_{x1}}{d\tau} = 0. \quad (\text{B20})$$

(iii) For ϵ^2 ,

$$\frac{d\eta_{x2}}{d\tau} = -\xi_{x1} V_{XX} - \xi_{y1} V_{XY}, \quad (\text{B21})$$

$$\frac{d\eta_{y2}}{d\tau} = -\xi_{x1} V_{XY} - \xi_{y1} V_{YY}; \quad (\text{B22})$$

$$\frac{d\xi_{y2}}{d\tau} = \frac{d\xi_{x2}}{d\tau} = 0. \quad (\text{B23})$$

The convenient solutions for (B17), (B20) and (B23) are chosen as $\xi_{x0} = \eta_{x0} = \xi_{y0} = \eta_{y0} = 0$, $\eta_{z1} = 0$ and $\xi_{z2} = 0$, respectively. The resulting right-hand side of the system (B5)-(B8) stands now as:

$$\dot{X} = 2A \langle \text{sen } \alpha_x^{00} \rangle + 2C \langle \text{sen } \alpha_x^{00} \cos \alpha_y^{00} \rangle + 2 (A \langle \eta_{x2} \cos \alpha_x^{00} \rangle + C \langle \eta_{x2} \cos \alpha_x^{00} \cos \alpha_y^{00} \rangle - C \langle \eta_{y2} \text{sen } \alpha_x^{00} \text{sen } \alpha_y^{00} \rangle) \epsilon^2, \quad (\text{B24})$$

$$\dot{Y} = 2B \langle \text{sen } \alpha_y^{00} \rangle + 2C \langle \cos \alpha_x^{00} \text{sen } \alpha_y^{00} \rangle + 2 (B \langle \eta_{y2} \cos \alpha_y^{00} \rangle + C \langle \eta_{y2} \cos \alpha_x^{00} \cos \alpha_y^{00} \rangle - C \langle \eta_{x2} \text{sen } \alpha_x^{00} \text{sen } \alpha_y^{00} \rangle) \epsilon^2, \quad (\text{B25})$$

$$\dot{K}_x = -V_X, \quad (\text{B26})$$

$$\dot{K}_y = -V_Y, \quad (\text{B27})$$

where α_z^{00} depends on K_z and on the external fields, while η_{z2} is to be found by solving (B18), (B19), (B21) and (B22). The result will be the sought system of differential equations for the slow coordinates Z , K_z whose solution will permit us to deduce the effective Hamiltonian function $H(X, Y, K_x, K_y)$.

Let us express the trigonometric functions in (B24), (B25) in complex form:

$$\text{sen } \alpha_z^{00} = \frac{1}{2i} \sum_n [e^{iK_z} F_{zn} - e^{-iK_z} F_{-zn}] e^{-in\tau}, \quad (\text{B28})$$

$$\cos \alpha_z^{00} = \frac{1}{2} \sum_n [e^{iK_z} F_{zn} + e^{-iK_z} F_{-zn}] e^{-in\tau}, \quad (\text{B29})$$

where we have used the following Fourier expansion given that $g_z(\tau)$ is a periodic real and odd function of t , corresponding to the real and even function $f_z(\tau)$:

$$e^{ig_z} = \sum_n F_{zn} e^{in\tau}. \quad (\text{B30})$$

For the external field $f_z(\omega t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} f_{zn} \cos(n\omega t)$ the coefficients F_{zn} are

$$F_{zm} = \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots} J_{n_1}(2f_{z1}) J_{n_2}(2f_{z2}/2) J_{n_3}(2f_{z3}/3) \dots \delta_{m, n_1+2n_2+3n_3+\dots} \quad (\text{B31})$$

Substituting now (B28), (B29) in (B18), (B19), and

solving these along with (B21), (B22) for η_{z2} we find:

$$\eta_{z2} = \frac{\partial \Lambda}{\partial Z}, \quad (\text{B32})$$

where

$$\begin{aligned}
\Lambda(X, Y) \equiv & \frac{1}{2i} \sum_{n \neq 0} \left\{ 2AV_X (e^{iK_x} F_{xn} - e^{-iK_x} F_{-xn}) + 2BV_Y (e^{iK_y} F_{yn} - e^{-iK_y} F_{-yn}) \right. \\
& + C (V_X + V_Y) \left(e^{i(K_x+K_y)} F_{xm} F_{y(n-m)} - e^{-i(K_x+K_y)} F_{xm} F_{-y(n+m)} \right) \\
& \left. + C (V_X - V_Y) \left(e^{i(K_x-K_y)} F_{xm} F_{y(-n+m)} - e^{-i(K_x-K_y)} F_{xm} F_{y(n+m)} \right) \right\} \frac{e^{-in\tau}}{n^2}; \tag{B33}
\end{aligned}$$

a sum in Λ is performed on the terms with the repeated index m . Substituting now (B32), (B28) and (B29) in (B24) and (B25), and performing the time-average op-

erations with $\langle e^{i(n \pm m)\tau} \rangle = \delta_{n, \mp m}$, we obtain the system for the effective dynamical coordinates X, Y, K_x, K_y given in (13)-(16).

REFERENCIAS

- Ashcroft N. & Mermin N. D. 1976, *Solid State Physics* (Saunders College, Philadelphia).
- Bandyopadhyay M. & Dattagupta S. 2008, *Pramana J. Phys.* **70**, 381.
- Calcina-Nogales M. 2003, *Mod. Phys. Lett. B* **27**, 1350138.
- Calcina-Nogales M., Mamani E. & Sanjinés D. 2020, *preprint*.
- Chen B. & Li Y. Q. 1996, *Phys. Rev. B* **53**, 4027.
- Chen B. 2005, *Phys. Lett. A* **335**, 103.
- Dignam M. M. & de Sterke C. M. 2002, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 4, 046806.
- Dunlap D. H. & Kenkre V. M. 1986, *Phys. Rev. B* **34**, 3625-3633.
- Flores J. C. & Utreras-Díaz C. A. 2002, *Phys. Rev. B* **66**, 153410.
- Flores J. C. & Lazo E. 2005, *IEEE* **4**, 688.
- Houston W. V. 1940, *Phys. Rev.* **57**, 184.
- Itin A. P. & Neishtadt A. 2014, *Phys. Lett. A* **378**, 822.
- Itin A. P. & Katsnelson M. I. 2015, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 075301.
- Kadirko V., Ziegler K. & Kogan E. 2013, *Graphene* **2**, 97.
- Kapitza P. L. 1965, in *Collected Papers of P. L. Kapitza*, edited by ter Haar D. (Pergamon Press, Oxford); Kapitza P. L. 1951, *Zh. Éksp. Teor. Fiz.* **21**, 588.
- Kittel C. 1987, *Quantum Theory of Solids* (John Wiley and Sons, New York).
- Krieger J. B. & Iafate G. J. 1986, *Phys. Rev. B* **33**, 5494.
- Kundu R. 2011, *Mod. Phys. Lett. B* **25**, 163.
- Landau L. D. & Lifschitz E. M. 1985, *Mecánica* (Reverté, Barcelona).
- Longhi S., Dreisow F., Heinrich M., Pertsch T., Tünnermann A., Nolte S. & Szameit A. 2010, *Phys. Rev. A* **82**, 053813.
- Lyssenko V., Valusis G. & Löser F. 1997, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 301.
- Madison K. W., Fischer M. C., Diener R. B., Niu Q. & Raizen M. G. 1998, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 23, 5093.
- Mamani E., Calcina-Nogales M. & Sanjinés D. 2017, *Int. J. Mod. Phys. B* **31**, 1750116.
- Mamani E., Calcina-Nogales M. & Sanjinés D. 2018, *Rev. Mex. Fis.* **64**, 456-463.
- Rahav S., Gilary I. & Fishman S. 2003, *Phys. Rev. A* **68**, 013820.
- Reich S., Maultzsch J., Thomsen C. & Ordejón P. 2002, *Phys. Rev. B* **66**, 035412.
- Rossi F. 1997, *Bloch oscillations and Wannier-Stark localization in semiconductor superlattices* (Theory of transport properties of semiconductor nanostructures, ed. E. Schoell, Chapman and Hall, London).
- Wright A. R., Liu F. & Zhang C. 2009, *Nanotechnology* **20**, No. 40.

ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE LA TENSIÓN SUPERFICIAL DE DISOLUCIONES DE AGUA DESTILADA CON DIFERENTES COMPUESTOS EN TIEMPOS DE PANDEMIA

STUDY OF THE VARIATION OF SURFACE TENSION OF DIFFERENT COMPOUNDS DISSOLVED IN DISTILLED WATER DURING THE COVID PANDEMIC

WILLY DANIEL AYALA CABRERA[1][†], EDDY CRISTIAN ZABALA ARIAS[2][‡], & NATALIA ESTEFANIA FAREL HERVAS[3]^{*}

Carrera de Física, Universidad Mayor de San Andrés
Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635
La Paz - Bolivia
<https://doi.org/10.53287/npqk4918je36n>

RESUMEN

Se desarrolla un estudio de la variación de la tensión superficial del agua destilada provocada por alcohol, sal y saponina en diferentes concentraciones y mezclas. Como consecuencia de las dificultades causadas por la pandemia se elaboró el estudio de manera que sea viable realizarlo en casa; se utiliza el método de Du Nouy a partir de una balanza y un dinamómetro como sistemas de medición. Los dos sistemas de medición fueron construidos con materiales recolectados en el hogar y comprados en librerías o ferreterías. Se observó que, en el caso del alcohol y de la saponina, la tensión superficial disminuye y que en el caso de la sal y de la mezcla de saponina y sal, primero disminuye y luego aumenta. Con el sistema del dinamómetro se observa un error de 11.3 % y se consiguió más precisión con el sistema de la balanza con un error de 1.2%.

Descriptor: Tensión superficial y fenómenos relacionados — polímeros y soluciones poliméricas — experimentos y aparatos de demostración.

Código(s) PACS: 68.03.Cd, 47.57.Ng, 01.50.My

ABSTRACT

A study of the variations in the surface tension of distilled water caused by alcohol, salt and saponin in different concentrations and mixtures is carried out. As a consequence of the difficulties arising from the pandemic, the study was elaborated in such a way as to make it feasible to realise at home. The Du Nouy method was applied, using a balance and a dynamometer as measuring systems, which were assembled with materials collected at home and purchased in book or hardware stores. It was observed that in the case of alcohol and saponin the surface tension decreases and that in the case of salt and a mixture of saponin and salt, it first decreases and then increases. Precise measurements of the systems were obtained with percentage errors of 11.3 % and 1.2 % for the dynamometer and the balance, respectively.

Subject headings: Surface tension and related phenomena — polymers and polymer solutions — demonstration experiments and apparatus.

1. INTRODUCCIÓN.

En los líquidos, la tensión superficial es un fenómeno que se puede visualizar como si en la superficie (entre el líquido y el aire) se encontrase una membrana imaginaria muy fina, causando una fuerza opuesta al movimiento en objetos que la atraviesan. Para poder percibir el fenómeno es necesario pasar un objeto muy lentamente o que el objeto

tenga poca masa. Por ejemplo, la tensión superficial causa que el insecto “Zapatero” pueda desplazarse en la superficie del agua según Diaz (2008).

La tensión superficial es una consecuencia del desequilibrio de las fuerzas intermoleculares en la superficie de los líquidos. La fuerza de cohesión entre las moléculas en la superficie se encuentra en desequilibrio en dirección hacia el interior del líquido, puesto que, las moléculas de aire producen una fuerza casi imperceptible con relación a las del agua, por tanto, el líquido manifestará una oposición al desequilibrio tratando de reducir su superficie, esta oposición está dada como la fuerza de cohesión por unidad de longitud y este valor se llama tensión superficial.

[1]<https://orcid.org/0000-0002-5848-9166>

[2]<https://orcid.org/0000-0002-9070-6554>

[3]<https://orcid.org/0000-0003-1559-9901>

[†]Email: wayalac@fcpn.edu.bo

[‡]Email: ezabalaa@fcpn.edu.bo

^{*}Email: nfarelh@fcpn.edu.bo

Una de las pioneras en el estudio de la tensión superficial más reconocidas es Agnes Luise Wilhermine Pockels (1862-1935). Una científica que, según cuenta el químico industrial López (2015), tuvo dificultades para ser tomada en cuenta y que publicaran su investigación. Fue gracias a una carta de Lord John William Strutt, tercer barón Rayleigh, que la investigación de Pockels recibiera la aceptación de la revista *Nature*, para su posterior publicación en 1891 bajo el título “Surface Tension”. Pockels dedicó la mayor parte de su vida a ser ama de casa por lo que realizó sus sistemas de medición con materiales que se encuentran en el hogar, desarrollando así “La Cubeta de Pockels” para medir la tensión superficial de algunas sustancias como aceites, jabones y detergentes.

En el artículo “La vida científica en plena pandemia por coronavirus” de Martínez-Campos (2020) se menciona que los centros de investigación alrededor del mundo estuvieron cerrados o limitados por un tiempo considerable retrasando su labor. Por esta razón, se toma como motivación el esfuerzo y diligencia manifestado en el trabajo mencionado de Agnes Pockels y partiendo de las propuestas presentadas en una práctica de laboratorio, asignadas en clases virtuales; se desarrollan en este artículo dos sistemas de medición para calcular la tensión superficial, contruidos esencialmente de materiales que se encuentran en el hogar.

El método de du Nouy fue diseñado por Pierre Lecomte du Nouy. Para utilizar este método se construirán dos sistemas de medición con una rosca de cuaderno, una polea y un vaso de plástico; estos se unirán y, con el método mencionado, serán las herramientas utilizadas para calcular la tensión superficial. Para verificar los datos obtenidos, se calculará inicialmente la tensión superficial del agua para comparar con el valor de referencia de 0.074 N/m a 14° C de Pablo (2012).

El objetivo es comprender como varía el comportamiento de la tensión superficial del agua a medida que se vayan aumentando diferentes compuestos, también estudiar los puntos en los que se observan cambios drásticos y que toman un valor constante en un litro. Los compuestos serán alcohol etílico, una mezcla de agua y sal (simulando así agua de mar) y una mezcla de agua y saponina (glucósido proveniente de la quinua que tiene propiedades muy parecidas a las de un jabón). Estos compuestos serán los mencionados tensoactivos.

Se explicará la teoría detrás de la tensión superficial, los valores esperados del agua añadiendo diferentes compuestos tensoactivos y el método por el cual se calculará la tensión superficial a través de dos sistemas de medición basados en un dinamómetro y una balanza.

Adicionalmente se describirá la construcción de los dos sistemas de medición, su calibración y la perspectiva en la enseñanza de la física. Se indicará cómo se realizó el experimento y sus resultados, para analizar las gráficas obtenidas, los valores constantes calculados, y finalmente discutir las

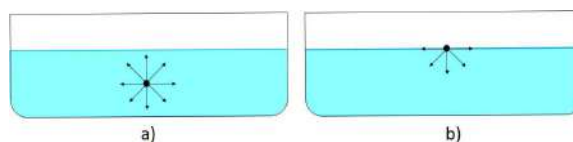


FIG. 1.— a) Equilibrio de fuerzas intermoleculares en todas las direcciones en un punto dentro de un líquido. b) Fuerzas intermoleculares en un punto en la superficie que no se encuentran en equilibrio.

recomendaciones necesarias y las motivaciones futuras.

2. TEORÍA Y RESULTADOS ESPERADOS

En la parte central de un recipiente de vidrio lleno de cualquier líquido, existe un equilibrio entre las fuerzas en todas las direcciones. Es decir, que para cada fuerza hay otra que es paralela y de sentido contrario que se cancelan por tener las mismas magnitudes, Fig. 1 a). El problema se presenta cuando el punto de estudio está justo en la superficie entre el líquido y el aire, Fig. 1 b)

Las fuerzas intermoleculares no se encuentran en equilibrio debido a que las moléculas del aire no provocan fuerzas de cohesión considerables, en consecuencia, se presenta la tensión superficial como una tendencia del líquido a reducir su superficie para buscar el equilibrio. Por esta razón los objetos que pasan de un medio a otro sienten una oposición a su movimiento en un intento del líquido a no aumentar el área de su superficie por la deformación que causa el objeto. La tensión superficial se cuantifica como la fuerza necesaria para romper las fuerzas de cohesión del líquido y dar lugar al aumento de área.

Con la información disponible de las propiedades de los tensoactivos que se utilizarán, se plantean los siguientes comportamientos esperados:

- El alcohol tiene fuerzas de cohesión más débiles que las del agua por lo que, al añadir gradualmente esta sustancia, las fuerzas de cohesión netas disminuirán. Este efecto causara una reducción en el valor de la tensión superficial hasta llegar a un valor constante dada la saturación de la mezcla.
- Si al agua se le aumenta progresivamente una concentración de agua y sal debería presentar un ascenso gradual de su tensión superficial (Zhang & Carloni 2012).
- Se espera que la tensión superficial del agua cuando interactúe con la saponina provoque un comportamiento de descenso de la tensión superficial debido a sus características parecidas al de una sustancia jabonosa (Böttger et al. 2012). La saponina tiene una cierta dificultad para mezclarse con el agua, por ese motivo, se realizará una concentración de agua y saponina por separado para un correcto estudio.
- La sal altera el tiempo de vida media de la espuma que se forma por la interacción entre el agua y la saponina, reduciéndolo (do Canto

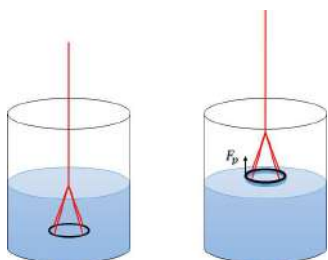


FIG. 2.— Método de Du Nouy con un anillo de metal para calcular la tensión superficial.

et al. 2010). Se espera que al principio la tensión superficial disminuya por la saponina y después de un cierto tiempo la disminución se detenga.

3. METODOLOGÍA.

3.1. Cálculo de la tensión superficial con el método de Du Nouy.

El método de Du Nouy consiste en medir la fuerza que siente un aro de metal al salir de un líquido, Fig. 2, y así calcular el valor de la tensión superficial con la ecuación:

$$\sigma_s = \frac{F_d - F_p}{2l} \quad (1)$$

donde F_d es la magnitud de la fuerza que siente el aro al salir del agua, F_p es la magnitud del peso del aro, l es el perímetro del aro y σ_s es el valor de la tensión superficial. Para que la ecuación 1 no dependa del perímetro, si no del diámetro del se utilizará la siguiente ecuación:

$$l = \pi d. \quad (2)$$

donde no se tomará en cuenta el grosor del aro.

Se reemplaza la ecuación 2 en la ecuación 1 y se obtiene:

$$\sigma_s = \frac{\Delta F}{2\pi d} \quad (3)$$

donde, d es el diámetro del aro.

3.2. Sistema de medición con un dinamómetro

Para calcular la tensión superficial con el primer sistema de medición se iniciará con el cálculo de la constante de elasticidad k de un resorte por medio de la ley de Hooke tomando en cuenta solo un eje de movimiento.

$$F_R = kx. \quad (4)$$

donde F_R es la magnitud de la fuerza que deforma el resorte, k la constante elástica y x es la variación que experimenta su longitud. De donde se despeja de la ecuación 4 la constante elástica k .

$$k = \frac{F_R}{x} \quad (5)$$

La fuerza que deformará al resorte es la del peso de un vaso de plástico con agua, Fig. 3. Por tanto, la ecuación 6 se convierte en:

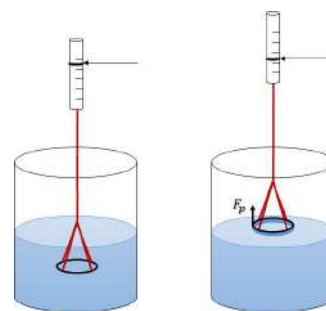


FIG. 3.— Método de Du Nouy con el dinamómetro

$$k = \frac{mg}{x} \quad (6)$$

donde m es la masa del vaso con agua, g la aceleración de la gravedad en La Paz es de 9.775 m/s^2 según Ticona-Bustillos & Ramírez-Ávila (2010).

Una vez hallada la constante k , de la ecuación 4 se despeja x :

$$x = \frac{F_R}{k} \quad (7)$$

donde x es la distancia entre los puntos de referencia para calibrar el dinamómetro la cual se hallará variando la fuerza deformadora y encontrar valores de distancia equivalentes a la fuerza de deformación.

Para este sistema de medición se usará la siguiente variante de la ecuación 3 para hallar la tensión superficial.

$$\sigma_s = \frac{F_d - F_p}{2\pi d} \quad (8)$$

donde F_d es la medición del dinamómetro al momento que sale el aro del agua y F_p es el peso del aro, Fig. 4.

3.3. Sistema de medición con una balanza.

Para construir un sistema de medición basado en una balanza se necesitará de la masa del agua que calcularemos dada la siguiente relación:

$$m = \rho V. \quad (9)$$

donde m es la masa, V el volumen y ρ es la densidad del agua cuyo valor es 1 g/ml . De manera que se obtengan valores de masa y simular una balanza.

Para el segundo sistema de medición se usará la siguiente variante de la ecuación 3:

$$\sigma_s = \frac{\Delta mg}{2\pi d} \quad (10)$$

donde Δm es el cambio de masa en el vaso para que el aro salga del líquido, Fig. 4 y g es la aceleración de gravedad de La Paz.

4. DESCRIPCIÓN EXPERIMENTAL

Para construir los dos sistemas de medición se necesita de una varilla de metal de 40 cm, una hoja blanca, una rosca de plástico de cuaderno tamaño

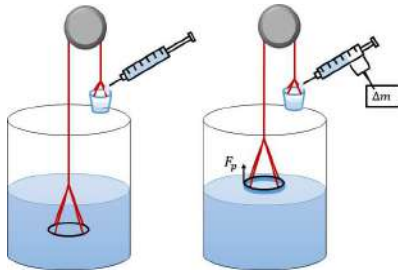


FIG. 4.— Método de Du Nouy con una balanza

carta (resorte), alambre de hierro galvanizado, silicona, cinta adhesiva, alicata, tijeras, estilete, hilo, vasos de plásticos de 2 gramos, una regla de 30 cm (± 0.1 cm), un vernier (± 0.01 cm), dos jeringas (0.1 ml), una polea, y un soporte.

Para la construcción del aro se corta de 70 cm de alambre de hierro y, con ayuda de un objeto circular y un alicata, se moldea el alambre cortado hasta conseguir la forma aproximada de un aro. Ahora, se realizan cuatro agujeros en los vasos de plástico, se ata un hilo en cada agujero y se unen mediante un nudo haciendo coincidir el mismo con el eje central del vaso.

4.1. Construcción del dinamómetro

Se pega con silicona dos hojas blancas alrededor de una varilla metálica y se coloca la rosca de cuaderno cortada en 15 cm (de tal forma que el resorte abrace a la varilla sin tocarla) sujetándola con cinta adhesiva de uno de sus extremos que pasará a ser el extremo superior. Luego, se sujeta la varilla (por el lado correspondiente al extremo superior del resorte) a una altura que permita que el dinamómetro quede suspendido en el aire y con un lápiz se marca en el papel una línea en el extremo inferior del resorte para tener el punto cero de referencia.

Se ata, con un hilo, el nudo del vaso al extremo inferior del resorte. Se procede a variar la masa del vaso añadiendo agua por medio de la jeringa, tomando en cuenta la ecuación 9. Primero se añade una masa de 3 g, para que en conjunto con la masa del vaso tengamos una masa inicial de 5 g y luego se aumenta 5 g progresivamente. En cada aumento de masa se coloca una marca con lápiz sobre el papel a la altura del extremo inferior del resorte y al finalizar se mide con una regla la distancia entre el punto inicial y cada una de las marcas. Se repite el proceso 5 veces y con los datos obtenidos se calcula la constante k por medio de la ecuación 6.

Para tener los puntos de referencia se reemplaza la constante de k en la ecuación 7 y se procede a calcular valores de x variando F_r desde 0.01 N a 3 N subiendo progresivamente 0.01 N, obteniendo la relación entre cuanta distancia de deformación provoca una fuerza de 0.01 N. Con el valor de x se hicieron nuevas marcas borrando las anteriores logrando una precisión del dinamómetro de ± 0.01 N, Fig. 5 a).

Para terminar, se intercambia el vaso de plástico por el aro, de manera que la deformación del resorte nos indique el peso del aro en el aire.

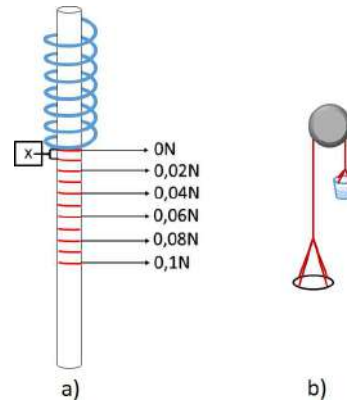


FIG. 5.— a) Calibración del dinamómetro casero. b) Representación de la balanza con un vaso de plástico.

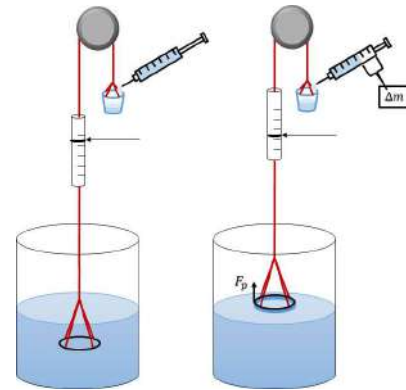


FIG. 6.— Calibración y recomendaciones de la unión de los sistemas

4.2. Construcción de la balanza

Para hacer el sistema se utilizó un vaso de plástico, una jeringa y una polea. Se ata un hilo largo de masa despreciable al vaso y se lo hace pasar por la polea para sujetar el otro extremo al aro, finalmente sujetamos la polea al soporte mediante una nuez, Fig. 5 b).

Con la jeringa se agrega la cantidad de agua necesaria al vaso para que el sistema esté en equilibrio con el aro y queden suspendidos en el aire.

Luego se sumerge el aro en un recipiente con agua. Se aumenta lentamente una cantidad determinada de volumen de agua con la jeringa al vaso de plástico hasta que el aro suba y se separe de la superficie del agua. Con el valor del volumen se calcula la masa a partir de la ecuación 9 logrando una precisión de la balanza de ± 0.1 g.

4.3. Unión de ambos sistemas.

Para unir ambos sistemas de medición se corta una parte del hilo que sostiene el aro del sistema de la balanza, se ata el hilo restante del aro al extremo inferior del resorte del dinamómetro y el hilo que conecta a la polea se ata al extremo superior de la varilla. Para balancear este nuevo sistema se añadirá más agua al vaso de plástico, Fig. 6. Este sistema permite tener dos mediciones simultáneamente.

TABLA 1
DESCRIPCIÓN DE LAS MEZCLAS DE LOS TENSOACTIVOS
REALIZADAS

Mezcla	Descripción
Mezcla 1	200 ml de agua destilada y 7 g de sal (cloruro de sodio)
Mezcla 2	200 ml de agua destilada y 4 g de saponina

4.4. Calibración y recomendaciones del sistema acoplado

Para empezar la calibración del primer sistema de medición se calculó la constante k obteniendo un valor de (3.13 ± 0.02) N/m, seguidamente se calculó la distancia x , encontrando que cada 0.032 cm equivalen a 0.01 N.

Para la calibración de la unión de los dos sistemas se mide el volumen de agua que agregamos en el vaso, que permite el equilibrio entre los dos lados de la polea obteniendo un valor de 51.0 ml.

Se recomienda que cada 10 datos realizados se cambie el agua del vaso. Esto se debe a que las mediciones son muy sensibles, por tanto, una gota de agua que salga del vaso o la jeringa fuera del sistema causa serias variaciones en las mediciones.

La tensión superficial tiene dependencia con la temperatura, las condiciones del medio y las propiedades de cada líquido (Servín 2019). Así que, en la toma de datos se trabajó manteniendo el agua a una temperatura constante de 14 °C comprobando con un termómetro, condiciones del medio iguales en cada prueba y agua destilada.

4.5. Obtención de datos.

Se mide el diámetro del aro con la regla y se obtiene 0.1070 ± 0.0002 m y el peso con el dinamómetro y se obtiene 0.07 ± 0.01 N. Para confirmar este último valor, se mide la masa del aro en la balanza dando 7 g, por tanto, el peso del aro es de aproximadamente 0.07 N.

Se coloca 1 litro de agua destilada en un recipiente de vidrio pyrex. Luego, el aro se sumerge en el agua y se lo suelta hasta que el sistema quede totalmente inmóvil.

Debido a la dificultad de colocar directamente los compuestos para al agua se diluyen con una batidora los tensoactivos como se describe en la Tabla 1 y lograr concentraciones homogéneas y variaciones consistentes de la tensión superficial.

Se añade lentamente agua (mililitro en mililitro) al vaso hasta que el aro salga del recipiente. En ese instante, se toman los datos que dieron el dinamómetro (F_d) y la jeringa (Δm) que se utilizó para colocar el agua. Se repite este proceso 5 veces, obteniendo 5 datos por cada sistema.

Ahora se aumentan los compuestos. Primero se aumenta 5 ml de alcohol en el recipiente y se hace la medición de F_d y (Δm), se repite la operación aumentado 5 ml y así sucesivamente hasta añadir un total de 100 ml, midiendo de la misma forma para cada uno. Este proceso se repite 5 veces, logrando 25 datos por cada sistema para cada aumento progresivo de alcohol.

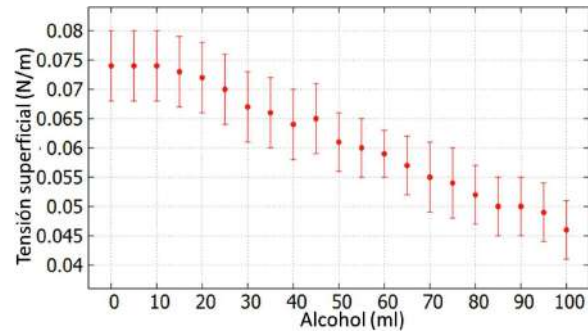


FIG. 7.— Variación la tensión superficial (N/m) a medida que se aumenta alcohol (dinamómetro).

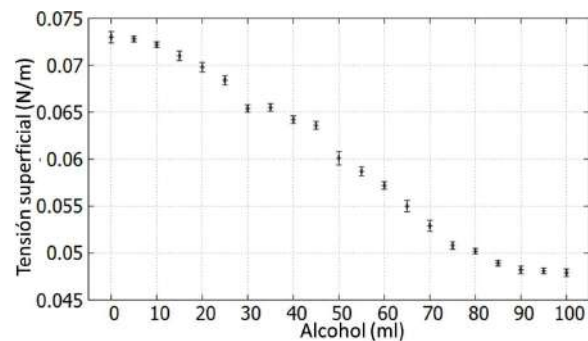


FIG. 8.— Variación de la tensión superficial (N/m) a medida que se aumenta alcohol (Balanza).

Se lava el recipiente de vidrio y se coloca 1 litro de agua destilada. Después, se repite el mismo proceso de medición, solo que ahora aumentado la Mezcla 1 de 10 ml en 10 ml hasta llegar a los 200 ml.

Se le aumenta progresivamente 5 ml de la Mezcla 2 al mismo recipiente con agua y la Mezcla 1, hasta llegar a un total de 80 ml. Se repite el mismo proceso de mediciones.

Se lava el recipiente de vidrio y se coloca 1 litro de agua destilada. Finalmente, se repite el mismo proceso de mediciones aumentando progresivamente 5 ml de un segundo preparado de Mezcla 2 hasta un total de 80 ml.

5. RESULTADOS.

Se calculó la tensión superficial a partir de los datos obtenidos del sistema (F_d y Δm), el diámetro del aro (0.1070 m), el peso del aro (0.07 N) y las ecuaciones 8 y 10.

El primer conjunto de datos corresponde a la tensión superficial del agua y se utilizó para comparar los dos sistemas mostrando la cercanía con el valor de referencia, encontrando como valores (0.074 ± 0.006) N/m para el dinamómetro y (0.0730 ± 0.0006) N/m para la balanza.

El segundo conjunto de datos corresponde al aumento gradual del alcohol. Se puede ver en la figura 7 la tensión superficial calculada a partir del dinamómetro y en la figura 8 la tensión superficial calculada a partir de la balanza, en ambas figuras se observa que la tensión superficial disminuye.

Se encontró que la tensión superficial del agua toma un valor constante cuando se añade entre 90

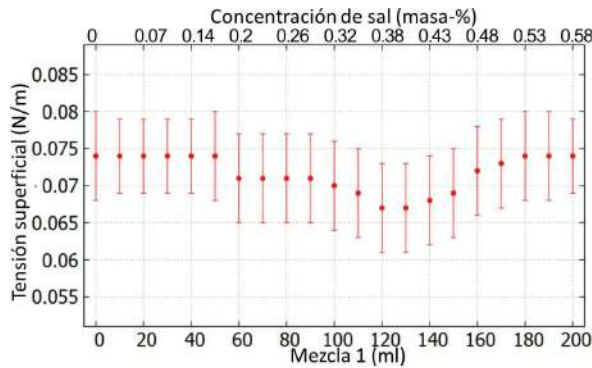


FIG. 9.— Variación de la tensión superficial (N/m) a medida que se aumenta la Mezcla 1 (dinamómetro).

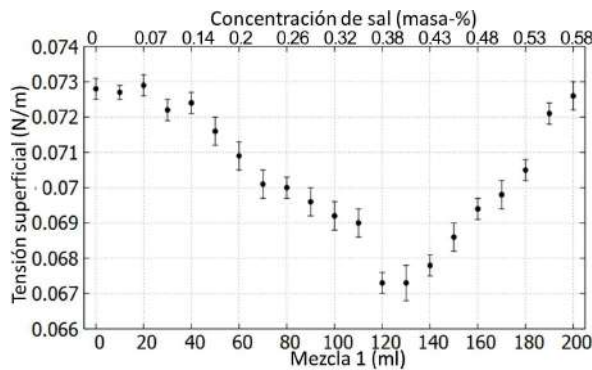


FIG. 10.— Variación de la tensión superficial (N/m) a medida que se aumenta la Mezcla 1 (Balanza).

a 95 ml de alcohol, adquiriendo un valor de 0.046 ± 0.005 N/m según el dinamómetro y 0.0479 ± 0.0004 N/m según la balanza.

El tercer conjunto de datos corresponde al aumento gradual de la Mezcla 1 en el agua. Se puede ver en la Fig. 9 la tensión superficial calculada a partir del dinamómetro y en la Fig. 10, a partir de la balanza, en ambas figuras se observa que la tensión superficial disminuye y luego aumenta hasta un valor similar al inicial.

Se encontró en la Fig. 9 que la tensión superficial del agua cuando se añaden entre 120 y 130 ml, llega a un valor mínimo de 0.067 ± 0.006 N/m, y luego asciende hasta un valor constante de 0.074 ± 0.005 N/m a los 190 ml.

En la Fig. 10 se observa que la tensión superficial del agua, cuando se añaden entre 120 y 130 ml, llega a un valor mínimo de 0.0673 ± 0.0003 N/m, y luego asciende hasta un valor constante de 0.0721 ± 0.0003 N/m a los 190 ml.

El cuarto conjunto de datos corresponde al aumento gradual de la Mezcla 2 al agua con la Mezcla 1, Fig. 11 y 12), en ambas figuras se observa que la tensión superficial disminuye y luego aumenta.

En la Fig. 11 la tensión superficial del agua, cuando se añaden entre 30 y 35 ml, llega a un valor mínimo de 0.059 ± 0.004 N/m, y luego asciende hasta un valor constante de 0.065 ± 0.006 N/m entre los 50 y 55 ml.

Y en la Fig. 14 que la tensión superficial del agua, cuando se añaden entre 30 y 35 ml, llega a un valor

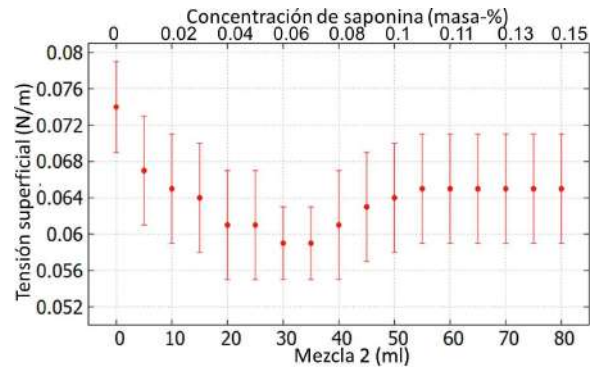


FIG. 11.— Variación de la tensión superficial (N/m) a medida que se aumenta la Mezcla 1 al agua con la Mezcla 2. (dinamómetro).

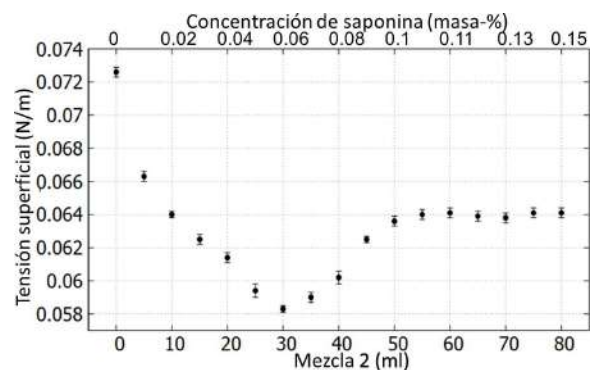


FIG. 12.— Variación de la tensión superficial (N/m) a medida que se aumenta la Mezcla 1 al agua con la Mezcla 2 (Balanza).

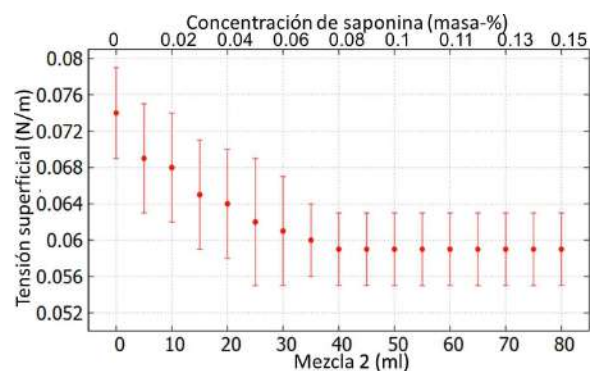


FIG. 13.— Variación de la tensión superficial (N/m) a medida que se aumenta la Mezcla 2 al agua. (dinamómetro).

mínimo de 0.0590 ± 0.0003 N/m, y luego asciende hasta un valor constante de 0.0640 ± 0.0003 N/m entre los 50 y 55 ml.

El quinto conjunto de datos corresponde al aumento gradual de la mezcla de agua con saponina, Fig. 13 y 14), en ambas figuras se observa que la tensión superficial disminuye.

En las Fig. 15 y 16 se tiene que la tensión superficial que la tensión superficial del agua toma un valor constante cuando se añade entre 40 a 45 ml de la Mezcla 2, adquiriendo un valor de 0.059 ± 0.004 N/m según el dinamómetro y 0.0584 ± 0.0003 N/m según la balanza.

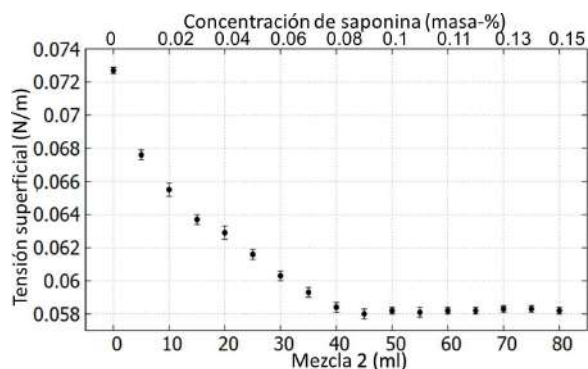


FIG. 14.— Variación de la tensión superficial (N/m) a medida que se aumenta la Mezcla 2 al agua. (Balanza).

6. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Los sistemas de medición construidos mayormente a base de materiales disponibles en casa o en librerías y ferreterías dio lugar a un estudio de la tensión superficial, que muestra un comportamiento claro y preciso.

El error más grande de las mediciones para el dinamómetro de ± 0.007 N/m y para la balanza de ± 0.0007 N/m, reflejando que, a pesar de las dificultades de realizar el estudio, el mismo dio resultados dentro de los errores aceptables a sus limitaciones con porcentajes de 11.3 % y 1.2 %, respectivamente.

Con la motivación de lograr el estudio de la tensión superficial impartida por Pockels, inicialmente se comprobó la eficacia del sistema midiendo la tensión superficial del agua, encontrando una discrepancia no significativa con respecto al valor de referencia. En las siguientes instancias se logró un estudio óptimo de la variación de la tensión superficial a causa de los compuestos observando el siguiente comportamiento:

-El alcohol disminuye el valor de la tensión superficial del agua hasta un valor constante.

-La sal causó que la tensión superficial del agua disminuyera y luego aumentara hasta un valor aproximado al inicial que se mantiene constante.

-La saponina con sal causó que la tensión superficial del agua disminuyera y luego aumentará hasta un valor menor al inicial que se mantiene constante.

-La saponina causó que la tensión superficial del agua disminuyera hasta tomar un valor constante.

Todos los comportamientos muestran una región de estabilización de la tensión superficial aproximándose a valores constantes, esto puede deberse a que el agua llega a un punto de saturación de los compuestos. Posteriormente se puede hacer una investigación más extensa con un mayor volumen de agua y aumentando los compuestos proporcionalmente, de esa forma, comparar con los resultados encontrados en este artículo y analizar si hay alguna dependencia del volumen, también tener una región más grande de estudio de los cambios de la tensión superficial antes que el agua se sature.

La literatura especializada nos dice que la sal provoca un aumento en la tensión superficial, comportamiento que no logramos visualizar en este estudio, sin embargo, la caída de tensión superficial podría ser a causa de una perturbación externa, como la temperatura, razón por la cual la tensión volvió a su valor original una vez que la perturbación cesó o tal vez inicio el aumento esperado de tensión superficial bajo estas nuevas condiciones.

En las Fig. 11 y 12 se observa que la tensión superficial debido a la saponina y a la sal tiene una magnitud de bajada muy parecida a la de las Fig. 13 y 14, correspondientes solo a la saponina, pero entre los 30 a 35 ml empieza a subir, donde, muestra una probable relación en la magnitud de subida con las Fig. 9 y 10, correspondientes solo a la sal; de manera que, inicialmente la saponina provoca la caída, pero después de que un cierto tiempo la sal provoca que la espuma de la saponina se reduzca, comportamiento que se pudo visualizar al realizar el experimento, provocando que la tensión superficial aumente. Efectos del flujo del agua también pueden estar involucrados.

Continuando con las recomendaciones y propuestas para experiencias futuras, se considera que los efectos del movimiento del agua son causantes de variaciones importantes, por lo que se propone reemplazar el recipiente rectangular por uno que tenga una simetría circular y así minimizar los efectos de borde.

Debido a que cualquier cambio brusco en el sistema causa errores en las mediciones, se recomienda tener cuidado con grietas o impurezas en el material de trabajo. También se recomienda que para una buena manipulación del sistema se debe verter el agua de forma lenta, si es posible de gota en gota, ya que su fuerza de caída puede llegar a variar las mediciones en la toma de datos.

Finalmente, los resultados del estudio cumplieron las expectativas con respecto al desarrollo de sistemas de medición que sean replicables o mejorables por estudiantes de física o de ramas afines y así reforzar su experiencia en la parte experimental en tiempos de pandemia, mostrando que con diligencia es posible realizar experimentos de esta magnitud. Además, se anima al lector a probar el mismo experimento con diferentes compuestos, consiguiendo una experiencia más extensa en el ámbito de la tensión superficial.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecemos a Flavio Ghezzi por su apoyo, enseñanza, paciencia en el trayecto de la realización de este artículo y por motivar a los futuros experimentadores, también agradecer a Santiago Herrera Sotomayor por proveer la saponina y el agua destilada, y a Kelly Mora y Cesar Cornejo por los consejos en la edición del artículo.

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

REFERENCIAS

- Böttger S., Hofmann K., & Melzig M. F. 2012, *Bioorganic Medicinal Chemistry* **20**, 2822.
- de Pablo E. J. 2012, *Proyecto Fin de Carrera: Determinación Experimental de Tensión Superficial del Agua en Cámara Micro-Regional* (Universidad Carlos III de Madrid Escuela Politécnica Superior).
- Díaz J. C. 2008, *Simposio de Metrología* **1**, 6.
- do Canto G. S., Treter J., Yang S., Borré G. L. & Ortega M. P. 2010, *Brazilian Journal of Pharmaceutical Sciences* **46**, 237.
- López C. T. 2015, <https://mujeresconciencia.com/2015/02/16/agnes-pockels-la-quimica-fisica-del-agua-de-fregar/>.
- Martínez-Campos M. 2020, <https://ellipse.prbb.org/es/la-vida-cientifica-en-plena-pandemia-por-coronavirus/>.
- Servín V. A. 2019, *Tesis de Grado para obtener el Grado de Maestro en Ciencia y Tecnología en Metrología* (Posgrado Interinstitucional en Ciencia y Tecnología).
- Ticona-Bustillos A. R. & Ramírez-Ávila G. M. 2010, *Revista Boliviana de Física* **17**, 3.
- Zhang C. & Carloni P. 2012, *Journal of Physics: Condensed Matter* **24**, 1.

REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

COMITÉ EDITORIAL

Sociedad Boliviana de Física

Lic. Alfonso Velarde Chávez
Email: alfonso.velarde@gmail.com

Instituto de Investigaciones Físicas

Dr. Flavio Ghezzi Moris
Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo
Dr. Wilfredo Tavera Llanos
Email: witavera@fiumsa.edu.bo

Carrera de Física

Dr. Armando R. Ticona Bustillos
Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

Misión

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica semestralmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

Instrucciones para los autores

La Revista Boliviana de Física recibe trabajos escritos en castellano, inglés o portugués y deben contar con un resumen en castellano y su correspondiente traducción en inglés.

Los autores deberán enviar sus trabajos preferentemente en los formatos $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, *MS Word*, o *sólo texto* (con extensiones *.tex*, *.doc* y *.txt*, respectivamente), ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. Las figuras deberán tener una resolución razonable a fin de que puedan ser vistas con suficiente claridad por el lector.

Los artículos científicos serán revisados por el Comité Editorial y posteriormente por un par de árbitros anónimos quienes dan el veredicto sobre si el artículo es aceptado o no.

La comunicación de los autores con los árbitros se realiza únicamente a través del editor encargado del área.

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

Conflicto de interés: Los autores que envíen artículos para su publicación en la RBF admiten que no tienen conflicto de interés en relación a los trabajos realizados y presentados.

CONTENIDO

EDITORIAL

Editor

A. ARTÍCULOS

CASOS DE LOCALIZACIÓN DINÁMICA EXACTA BAJO LA APROXIMACIÓN SEMICLÁSICA

Edson Anghelo Garcia Foronda, Diego Sanjinés Castedo & Evaristo Mamani Carlo

¿TIENEN EL MISMO ORIGEN LOS METEORITOS METÁLICOS ENCONTRADOS EN BOLIVIA?

Gonzalo Pereira

EFFECTIVE HAMILTONIAN FOR A TIGHT-BINDING SQUARE LATTICE AND ITS RELATION TO A TWO-MESH LC CIRCUIT WITH DISCRETE CHARGE

Evaristo Mamani C., Marcelo Calcina-Nogales & Diego Sanjinés Castedo

B. CONTRIBUCIONES Y REVISIONES

ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE LA TENSIÓN SUPERFICIAL DE DISOLUCIONES DE AGUA DESTILADA CON DIFERENTES COMPUESTOS EN TIEMPOS DE PANDEMIA

Willy Daniel Ayala Cabrera, Eddy Cristian Zabala Arias & Natalia Estefania Farel