



---

## REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

Esta es una revista de la Unión Iberoamericana de Sociedades de Física

### COMITÉ EDITORIAL

**Sociedad Boliviana de Física**

**Lic. Alfonso Velarde Chávez**

Email: alfonso.velarde@gmail.com

**Instituto de Investigaciones Físicas**

**Dr. Flavio Ghezzi Moris**

Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo

**Dr. Wilfredo Tavera Llanos**

Email: witaвера@fiumsa.edu.bo

**Carrera de Física**

**Dr. Armando R. Ticona Bustillos**

Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

---

### CONSEJO EDITORIAL

**Dr. Oscar Antonio Rondón**

Institute of Nuclear and Particle Physics

University of Virginia

McCormick Road, Charlottesville, VA 22901

804 924-6787, USA

Email: or@virginia.edu

**Dr. Carlos Navia**

Instituto de Física

Universidade Federal Fluminense

Av. Gen. Milton Tavares de Souza

24210-340, Niterói, RJ-Brasil

Email: gfcnoj@if.uff.br

**Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro**

Instituto de Física

Universidade Federal Fluminense

Av. Gen. Milton Tavares de Souza

24210-340, Niterói, RJ-Brasil

Email: rodrigo\_sobreiro@id.uff.br

**Dr. René Orlando Medrano-Torricos**

Departamento de Física

Universidade Federal de São Paulo

Rua São Nicolau, 210

09913030 - Diadema, SP - Brasil

URL da Homepage: <http://www.unifesp.br/campus/dia/>

**Juan Cesar Flores, PhD**

Instituto de Alta Investigación

Universidad de Tarapaca

Arica - Chile

Email: cflores@uta.cl

**Dr. Manuel Eleuterio Rodrigues**

Universidade Federal do Pará

FACET - Abaetetuba

Rua Manoel de Abreu S/N, Mutirão

68440000 - Abaetetuba, PA - Brasil

URL da Homepage: <http://ufpa.br/cubt/>

---

ISSN 1562-3823



# Revista Boliviana de Física

PUBLICACIÓN DE  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FÍSICAS  
CARRERA DE FÍSICA  
UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS  
Y  
SOCIEDAD BOLIVIANA DE FÍSICA

NÚMERO 39  
DICIEMBRE DE 2021  
<https://doi.org/10.53287/fjgr2250wm50z>

## **Revista Boliviana de Física**

**ISSN 1562-3823**

**Indexada en: SciELO, Latindex, Periódica**

<http://www.scielo.org.bo>

<http://www.latindex.unam.mx>

Publicación del Instituto de Investigaciones Físicas, la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés y de la Sociedad Boliviana de Física.  
Casilla 8635, La Paz, Bolivia.

*Diseño:* A. Ticona

*Dirección:* Carrera de Física, Campus Universitario, Calle 27, Cota Cota, La Paz.

Tel: (591 2) 2792999; FAX: (591 2) 2792622.

*Portada:* Atractor obtenido en osciloscopio, donde se muestra el espacio de fases  $V_{C1}$  vs.  $V_{RL}$ .

*Formato*  $\LaTeX 2_{\epsilon}$ . *Tipo de fuente utilizada:* newcentury

*Impreso por:* **Imprenta Antofagasta**

*Dirección:* Canónigo Ayllón No. 524. Tel. (591 2) 2493609.

## CONTENIDO

EDITORIAL	<i>Editor</i>	1
-----------	---------------	---

### A. ARTÍCULOS

ESTUDIO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE LA RIQUEZA DINÁMICA DEL CIRCUITO DE HARTLEY <i>Abdias Sergio Callejas-Icuña, Aurelio Alejandro Suxo-Coro &amp; Gonzalo Marcelo Ramírez-Ávila</i>		3
--	--	---

ACOPLAMIENTO DE LA ELECTRODINÁMICA DE MAXWELL- CHERN-SIMONS A UN CAMPO GRAVITACIONAL EN PRESENCIA DE UN MEDIO ÓPTICO NO DISPERSIVO EN 2+1 DIMENSIONES <i>Mirko Landivar</i>		10
--	--	----

DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA EN UNA RED DE ENLACE FUERTE BAJO UN POTENCIAL COULOMBIANO <i>Javier Alejandro Velasco Villarroel &amp; Diego Sanjinés Castedo</i>		17
---	--	----

### D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

LA OLIMPIADA BOLVIANA DE FÍSICA Y LA OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA COMO PROGRAMA DE INCENTIVO AL ESTUDIO DE LA FÍSICA EN BOLIVIA <i>Roy Bustos et al.</i>		25
---	--	----

# EDITORIAL

Aunque los efectos de la pandemia de la CoVid han amainado, las actividades académicas aún no retomaron su cauce normal y esto quizás constituye un obstáculo para la participación más activa de los estudiantes en los diferentes proyectos de investigación. Sin embargo, a pesar de lo señalado anteriormente, las actividades de investigación siguen su curso con el entusiasmo tanto de docentes-investigadores como de estudiantes del pregrado y posgrado de la Carrera de Física de la UMSA. Es así que tenemos a bien presentar el número 39 de la Revista Boliviana de Física (RBF).

Esta entrega de la RBF, consta de tres artículos científicos sometidos a proceso riguroso de arbitraje internacional como es norma de esta publicación. Investigadores y estudiantes del pregrado y posgrado del área de Física Teórica del Instituto de Investigaciones Físicas (IIF) de la UMSA contribuyen con estos trabajos, en tanto que el proyecto de interacción social Olimpiada Boliviana de Física y Olimpiada Boliviana de Astronomía y Astrofísica contribuyen con datos y logros importantes de este proyecto a lo largo de 24 versiones de estos eventos.

El artículo de apertura de este número constituye un análisis detallado y completo del circuito electrónico de Hartley, cuya riqueza dinámica es puesta de manifiesto por Callejas-Icuña *et al.* (2021) quienes muestran aspectos experimentales, teóricos y numéricos de este sistema, donde se puede destacar entre otras cosas la construcción de un medidor de impedancias que fue esencial para la caracterización dinámica del circuito desde una perspectiva experimental. Un gran número de integraciones, respaldan numéricamente a las mediciones experimentales obtenidas.

Un artículo muy interesante por su contenido y por la particularidad de que el autor es un joven y brillante estudiante de la Carrera de Física de la UMSA constituye la segunda contribución arbitrada debida a Landivar (2021) y que trata sobre el acoplamiento de la teoría electromagnética de Maxwell-Chern-Simmons a un campo gravitacional de manera de generalizar el cumplimiento de la ecuación de Klein-Gordon en un espacio-tiempo arbitrario y teniendo un medio óptico. Posteriormente el autor analiza las consecuencias de dicha generalización en un espacio-tiempo plano y otro de la familia de de Sitter.

El tercer artículo arbitrado es debido a Velasco Villarroel & Sanjinés Castedo (2021), quienes estudian desde una perspectiva cuántica, la dinámica de una partícula cargada moviéndose en una red unidimensional por el mecanismo de hopping debido a los efectos de un campo coulombiano y de otra partícula cargada que se considera como una impureza. Para su análisis, utilizan el método pseudo-espectral adaptado a un hamiltoniano de enlace fuerte con interacciones a primeros vecinos. Los autores también realizaron el análisis de este sistema utilizando la aproximación semiclásica, encontrando una similitud razonablemente buena con los resultados cuánticos. Sin embargo, los autores distinguen una dinámica “lejana” de otra “cercana” que están en relación con la distancia entre la partícula cargada y la impureza, teniendo asociadas la inhomogeneidad y la cuasi-homogeneidad del campo coulombiano en las respectivas regiones.

Finalmente, en la sección de enseñanza de la física, Bustos *et al.* (2021) presentan una reseña histórica de las Olimpiada Boliviana de Física y de la de Astronomía y Astrofísica, resaltando la labor educativa y el impacto logrado en el mejoramiento de la enseñanza de la física. Se resalta también que este proyecto obtuvo el primer puesto en la categoría de Interacción Social en la 1ra. Feria Virtual de Investigación, Innovación e Interacción Social (INVESTIGA UMSA 2020), organizada por el Departamento de Investigación, Postgrado e Interacción Social (DIPGIS, UMSA).

Esperamos que puedan disfrutar del contenido de este ejemplar de la RBF y que el mismo pueda motivar al lector en la profundización de los trabajos expuestos a través de estas páginas. También invitamos a la comunidad científica a enviar sus trabajos para ser publicados en la RBF.

## REFERENCIAS

- Callejas-Icuña, A.S., Suco-Coro, A.A., & Ramírez-Ávila, G.M. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **39**, 3.
- Landivar, M. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **39**, 10.
- Velasco Villarroel, J.A., & Sanjinés Castedo, D. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **39**, 17.
- Bustos, E.R.O.E., Mamani, C.E., & Sanjinés, C.D., *et al.* (2021), *Revista Boliviana de Física*, **39**, 25.

# EDITORIAL

Although the effects of the CoVid pandemic have subsided, academic activities have not yet resumed their normal course and this perhaps constitutes an obstacle for a more active participation of students in the different research projects. However, in spite of the above, research activities continue with the enthusiasm of both teachers-researchers and undergraduate and graduate students. Thus, we are pleased to present the 39th issue of the Bolivian Journal of Physics (RBF).

This issue of the RBF consists of three scientific articles submitted to a rigorous process of international arbitration as is the norm of this publication. Researchers, undergraduate and graduate students of the Theoretical Physics area of the Physics Research Institute (IIF) of UMSA contribute with these papers, while the social interaction project Bolivian Physics Olympiad and Bolivian Astronomy and Astrophysics Olympiad contribute with data and important achievements of this project throughout 24 versions of these events.

The opening article of this issue is a detailed and complete analysis of Hartley's electronic circuit, whose dynamic richness is shown by Callejas-Icuña *et al.* (2021). The experimental, theoretical and numerical aspects of this system are described, where we can highlight among other things the construction of an impedance meter that was essential for the dynamic characterization of the circuit from an experimental perspective. A large number of integrations numerically support the experimental measurements obtained.

The second refereed contribution is a very interesting article for its content and spotlights the work of Landivar (2021) a young and brilliant physics student at UMSA. The article deals with the coupling of the Maxwell-Chern-Simmons' electromagnetic theory to a gravitational field in order to generalize the fulfillment of the Klein-Gordon equation in an arbitrary space-time and in the presence of an optical medium. Subsequently, the author analyzes the consequences of this generalization in a flat space-time and additionally in the Sitter family.

The third refereed article is of Velasco Villarroel & Sanjinés Castedo (2021), who study from a quantum perspective, the dynamics of a charged particle moving in a one-dimensional lattice by the hopping mechanism due to the effects of a Coulombic field and another charged particle which is considered as an impurity. For their analysis, they use the pseudo-spectral method adapted to a strong-bond Hamiltonian with first-neighbor interactions. The authors also performed the analysis of this system using the semi classical approximation, finding reasonably good similarity with the quantum results. Furthermore, the authors distinguish a "far" dynamics from a "near" dynamics which are related to the distance between the charged particle and the impurity, having associated inhomogeneity and quasi-homogeneity of the Coulombic field in the respective regions.

Finally, in the physics education section, Bustos *et al.* (2021) present a historical review of the Bolivian Physics Olympiad and the Astronomy and Astrophysics Olympiad highlighting the educational work and the impact achieved by the Olympiad project in the improvement of physics education. It is worthy of mention that this project won first place in the category of Social Interaction in the 1st Virtual Fair of Research, Innovation and Social Interaction (INVESTIGA UMSA 2020), organized by the Department of Research, Postgraduate and Social Interaction (DIPGIS, UMSA).

We hope that you enjoy the contents of this issue of the RBF and that it may motivate the reader to further explore the work presented in these pages. We also invite the scientific community to send their papers for publication in the RBF.

## REFERENCIAS

- Callejas-Icuña, A.S., Suco-Coro, A.A., & Ramírez-Ávila, G.M. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **39**, 3.  
Landivar, M. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **39**, 10.  
Velasco Villarroel, J.A., & Sanjinés Castedo, D. (2021), *Revista Boliviana de Física*, **39**, 17.  
Bustos, E.R.O.E., Mamani, C.E., & Sanjinés, C.D., *et al.* (2021), *Revista Boliviana de Física*, **39**, 25.

## ESTUDIO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE LA RIQUEZA DINÁMICA DEL CIRCUITO DE HARTLEY THEORETICAL-EXPERIMENTAL STUDY OF THE DYNAMIC RICHNESS OF THE HARTLEY CIRCUIT

ABDIAS SERGIO CALLEJAS-ICUÑA<sup>†</sup> [1], AURELIO ALEJANDRO SUXO-CORO<sup>‡</sup> [2], & GONZALO MARCELO RAMÍREZ-ÁVILA<sup>\*</sup> [3]

<sup>\*</sup>Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés  
Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635  
La Paz - Bolivia

(Recibido 2 de septiembre de 2021; aceptado 5 de noviembre de 2021)

<https://doi.org/10.53287/vwod1447mn68w>

### RESUMEN

Estudiamos el comportamiento dinámico de una de las variantes del circuito de Hartley tanto desde el punto de vista numérico como experimental. Primero, observamos la transición del comportamiento regular al caótico considerando como parámetros de control ya sea a los valores de una de las resistencias o uno de los inductores. Se obtuvieron experimentalmente los espacios de fase de los circuitos para diferentes valores de los parámetros de control. Utilizando software especializado para circuitos electrónicos, se corroboraron los resultados experimentales. Finalmente, caracterizamos el comportamiento dinámico del circuito asociándolo a un sistema dinámico. Integrando las ecuaciones del sistema dinámico, se obtuvieron los espacios de fase, diagramas de bifurcación y exponentes de Lyapunov. Los espacios de fase nos permitieron tener una visión cualitativa del comportamiento dinámico (regular o caótico) al observar la forma de los atractores obtenidos; en tanto que mediante los diagramas de bifurcación se visualizó la evolución en la transición de comportamiento regular a caótico o viceversa; además, de poderse observar también la ruta al caos a través de una cascada de desdoblamientos de período. Finalmente, el máximo exponente de Lyapunov nos permitió determinar cuantitativamente el comportamiento caótico o regular del sistema. Se encontró nuevamente una buena concordancia con nuestros resultados experimentales.

*Descriptor:* Simulaciones numéricas de sistemas caóticos — Dinámica no lineal y caos — Circuitos electrónicos.

Código(s) PACS: 05.45.Pq — 05.45.-a — 84.30.-r

### ABSTRACT

We study the dynamic behavior of a variant of Hartley's circuit from numerical and experimental viewpoints. First, we observed the transition from regular to chaotic behavior considering as parameter controls either the values of resistors or inductors. We experimentally obtained the phase space of the circuits for different values of the parameter control and using specialized software for electronic circuits, we corroborated the experimental results. Finally, we characterized the circuit's dynamical behavior with a related dynamical system determining phase spaces, bifurcation diagrams, and Lyapunov exponents. The phase spaces enabled us to have a qualitative insight into the dynamical behavior (regular or chaotic) when observing the shape of the related attractors. The bifurcation diagrams indicated how the dynamics evolve from regular to chaotic behavior or vice versa. Moreover, we observed the bifurcation cascade of doubling periods in the route to chaos. The largest Lyapunov exponent permitted us to eventually determine the chaotic or regular behavior of the system quantitatively, once more finding a good agreement with our experimental results.

*Subject headings:* Numerical simulations of chaotic systems — Nonlinear dynamics and chaos — Electronic circuits.

### 1. INTRODUCCIÓN

Existe una variedad de circuitos electrónicos especializados para el estudio y comprensión de diferentes compor-

tamientos dinámicos como ser el circuito de Chua o el circuito adaptado para el modelo de Rössler. Se han obtenido numerosos resultados teóricos y experimentales del comportamiento caótico con base en transistores como los estudiados por Semenov *et.al.* (2020) y Behzad & Hamdipour (2021).

El circuito de Hartley fue ideado y descrito en 1915 y en su diseño original utilizaba un tubo al vacío; actualmente, se utilizan transistores. Hartley fue reconocido con la medalla de honor del Instituto de Ingenieros de Radio por este trabajo

[1]<https://orcid.org/0000-0003-4080-281X>

[2]<https://orcid.org/0000-0003-1414-3830>

[3]<https://orcid.org/0000-0003-4522-9012>

<sup>†</sup>Email: [acallejasi@fcpn.edu.bo](mailto:acallejasi@fcpn.edu.bo)

<sup>‡</sup>Email: [asuxoc@fcpn.edu.bo](mailto:asuxoc@fcpn.edu.bo)

<sup>\*</sup>Email: [mravila@fiums.edu.bo](mailto:mravila@fiums.edu.bo)

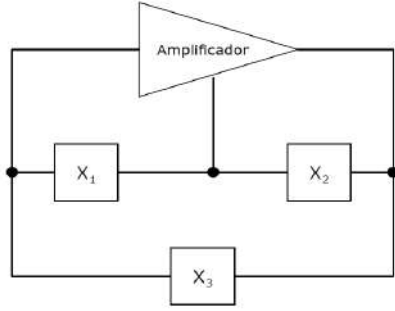


FIG. 1.— Esquema del circuito oscilador donde  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  son elementos reactivos.

y su aporte a la teoría de la información. Los osciladores de Colpitts y de Hartley son circuitos muy conocidos y tienen un uso práctico en sistemas de telecomunicaciones; ambos circuitos presentan evidencia de comportamiento caótico como lo describen Kvarda (2002) para el oscilador de Hartley y Kennedy (1994) para el oscilador de Colpitts. Lo anterior significa que no solamente circuitos electrónicos diseñados específicamente pueden ser generadores de caos, sino también otros circuitos sin ese diseño específico.

Existen varias versiones del circuito de Hartley, pero teniendo todas ellas en común que están constituidas por dos partes: la primera jugando un rol amplificador que puede estar conformada por un transistor bipolar, un transistor de efecto de campo (FET) o un amplificador operacional; en tanto que la segunda, asociada a la resonancia por medio de un circuito tanque LC como lo señalan Malvino & Bates (2007). Estos circuitos también conocidos como osciladores de “tres puntos”, tienen esta denominación debido a su configuración; ya que se forman a partir de conectar las tres terminales del bucle LC a los tres electrodos del transistor como se ve en la Fig. 1. Siendo  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  los elementos reactivos que pueden ser capacitores o inductores. Los circuitos de Colpitts y de Hartley son muy similares, siendo la diferencia más importante que el primero es un oscilador capacitivo de tres puntos con la configuración  $X_1$ ,  $X_2$  capacitores y  $X_3$  inductor; en tanto el de Hartley es un oscilador inductivo con  $X_1$ ,  $X_2$  inductores y  $X_3$  capacitor.

Para el estudio del caos se requiere de al menos dos ecuaciones no autónomas o tres ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden. Para el primer caso el circuito debe contar con dos elementos reactivos y una fuente dependiente del tiempo; mientras que para el segundo se deben tener tres elementos reactivos que es el caso del circuito de Hartley, como lo indica Hasler (1987).

Este trabajo se divide en tres partes; en la primera se muestra las ecuaciones que modelan el comportamiento del circuito de Hartley, en la segunda se realiza un estudio del comportamiento dinámico haciendo uso de las herramientas de la dinámica no lineal; específicamente, diagramas de bifurcación y exponentes de Lyapunov. La tercera describe los resultados experimentales obtenidos. Finalmente, se dan las conclusiones y perspectivas de este trabajo.

## 2. CIRCUITO DE HARTLEY

En este trabajo se estudia la versión del circuito de Hartley dada por Kvarda (2002); la cual consiste en un transistor bipolar  $Q_1$ , dos inductores  $L_1$  y  $L_2$  cada uno en serie con una resistencia  $R_{L1}$  y  $R_{L2}$  respectivamente, un resistor lineal

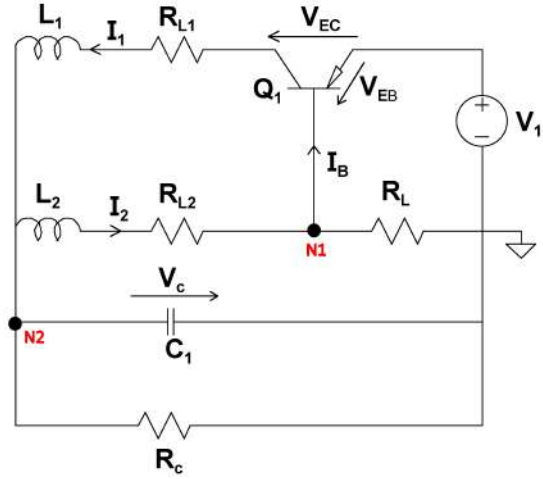


FIG. 2.— Esquema del circuito de Hartley donde N1 y N2 son los nodos 1 y 2, puntos que se analizan en el experimento.

$R_L$  y un capacitor lineal en paralelo con una resistencia  $R_C$ , como se muestra en la Fig. 2. Las ecuaciones que gobiernan el sistema se muestran a continuación:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_C}{dt} = I_1 - I_2 - \frac{V_C}{R_C} \\ L_1 \frac{dI_1}{dt} = V_1 + V_{EC} - V_C - I_1 R_{L1} \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} = V_C + I_2 R_{L2} - (I_2 - I_B) R_L \end{cases} \quad (1)$$

$$V_{EB} = V_1 - (I_2 - I_B) R_L \quad (2)$$

$$I_B = \begin{cases} 0 & \text{si } V_{EB} \leq V_{TH} \\ -\left(\frac{V_{EB} - V_{TH}}{R_{0N}}\right) & \text{si } V_{EB} > V_{TH} \end{cases} \quad (3)$$

$$V_{EC} = \begin{cases} -k(V_{EB} - V_{TH}) & \text{si } V_{EB} \leq V_{TH} \\ V_{EC0} & \text{si } V_{EB} > V_{TH} \end{cases} \quad (4)$$

Las Ecs. (1) y (2) son obtenidas aplicando las leyes de Kirchhoff, en tanto las Ecs. (3) y (4) son las que modelan el comportamiento del transistor PNP 2N3906; donde  $I_B$  es la corriente de base,  $V_{EC}$  es el voltaje del emisor-colector,  $V_{TH}$  es el voltaje umbral del transistor,  $V_{EB}$  es el voltaje entre el emisor y la base,  $V_{EC0}$  es el voltaje restante en el transistor abierto y  $k$  es la pendiente de conmutación que se define como una relación entre  $|\Delta V_{EC}|$  y  $|\Delta V_{EB}|$ .

Los parámetros del circuito donde se evidenció comportamiento caótico son:  $V_1 = 3.75$  V,  $R_{L1} = 1.5$   $\Omega$ ,  $R_{L2} = 1.5$   $\Omega$ ,  $L_1 = 100$   $\mu$ H,  $L_2 = 100$   $\mu$ H,  $C_1 = 22$  nF,  $R_C = 95.5$   $\Omega$ ,  $R_L = 76$   $\Omega$ ,  $B_F = 180$ ,  $k = 900$ ,  $V_{TH} = 0.75$  V,  $V_{EC0} = 0.2$  V y  $R_{0N} = 100$   $\Omega$ .

## 3. MODELO

Las variables de estado (magnitudes dinámicas) son: el voltaje del capacitor  $V_C$ , las corrientes del circuito  $I_1$  e  $I_2$ ; estas se pueden normalizar respecto a  $V_{TH}$ ,  $I_0$  y  $\tau_0$ , donde  $I_0 = \frac{V_{TH}}{R_0}$ ,  $R_0 = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{C_1}}$  y  $\tau_0 = \sqrt{(L_1 + L_2)C_1}$  de esta forma introducimos las variables de estado adimensionales:  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  tal que  $V_C = V_{TH} \cdot x_1$ ,  $I_1 = I_0 \cdot x_2$ ,  $I_2 = I_0 \cdot x_3$  y  $t = \tau_0 \cdot \tau$  así la Ec. (1) queda como:

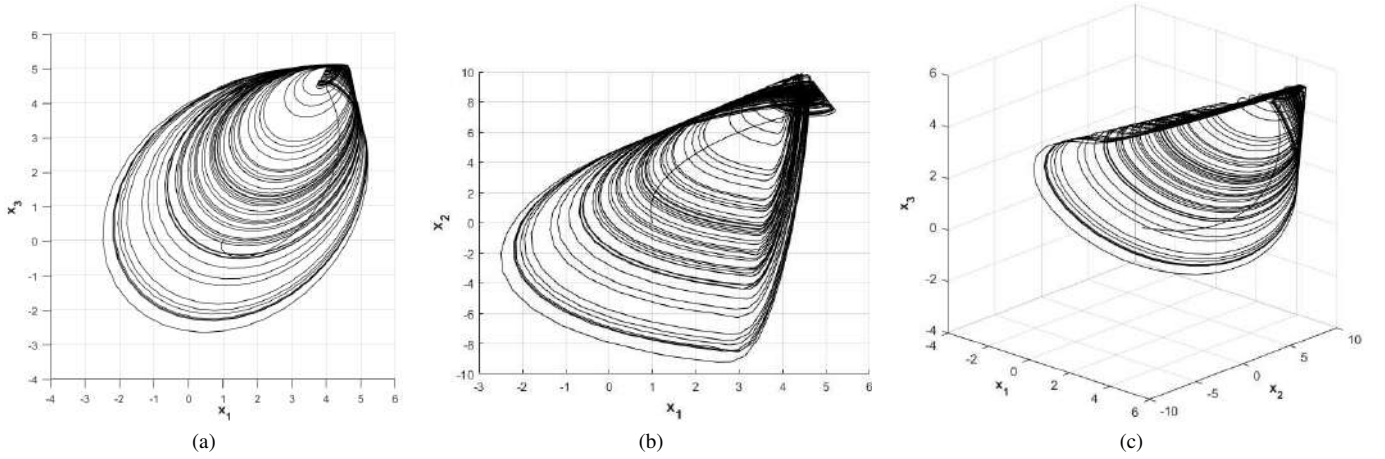


FIG. 3.— Atractor extraño obtenido utilizando las condiciones iniciales (2, -0.02, 0) visto en el plano (a)  $(x_1-x_3)$ , (b)  $(x_1-x_2)$  y (c) espacio de fases completo con valores de los parámetros:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0.998$ ,  $b_1 = 10$ ,  $b_2 = 2.666$ ,  $b_3 = 2$ ,  $b_4 = 0.0315$ ,  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = 4.7511$  y  $d_3 = 600$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_3) - a_2x_1 \\ \dot{x}_2 = b_1 - b_2F_1(x_3) - b_3x_1 - b_4x_2, \\ \dot{x}_3 = d_1x_1 - d_2x_3 - d_3F_2(x_3) \end{cases} \quad (5)$$

donde  $a_1 = \frac{\tau_0 I_0}{V_{TH} C_1}$ ,  $a_2 = \frac{\tau_0}{C_1 R_C}$ ,  $b_1 = \frac{\tau_0 V_1}{L_1 I_0}$ ,  $b_2 = \frac{\tau_0}{L_1 I_0}$ ,  $b_3 = \frac{\tau_0 V_{TH}}{I_0 L_1}$ ,  $b_4 = \frac{\tau_0 R_{L1}}{L_1}$ ,  $d_1 = \frac{\tau_0 V_{TH}}{I_0 L_2}$ ,  $d_2 = \frac{\tau_0 (R_{L2} + R_L)}{L_2}$  y  $d_3 = \frac{\tau_0 R_L}{I_0 L_2}$ .

Se resuelven las Ecs. (2)–(4) para que  $V_{EC}$  e  $I_B$  estén en función de las variables adimensionales. Por tanto quedarían respectivamente de la siguiente forma:

$$F_1(x_3) = \begin{cases} k(V_{TH} - V_1 + I_0 R_L x_3) & \text{si } V_m \leq x_3 \\ V_{EC0} & \text{si } V_m > x_3 \end{cases}, \quad (6)$$

$$F_2(x_3) = \begin{cases} 0 & \text{si } V_m \leq x_3 \\ \frac{-V_1 + I_0 x_3 R_L + V_{TH}}{R_{0N} + R_L} & \text{si } V_m > x_3 \end{cases}, \quad (7)$$

donde  $V_m = \frac{V_1 - V_{TH}}{I_0 R_L}$ .

Los diagramas de bifurcación son una herramienta fundamental para el estudio de comportamientos dinámicos; estos se obtienen a partir de la resolución numérica del sistema de ecuaciones. Estos diagramas muestran el comportamiento global del sistema cuando se varía uno de los parámetros, lo que modifica las variables de estado. El tiempo de integración debe ser lo suficientemente largo para garantizar que se ha superado el transitorio. Los exponentes de Lyapunov que se utilizan para cuantificar la tasa de divergencia o convergencia de dos soluciones que difieren en sus condiciones iniciales por una perturbación infinitesimal, constituyen también otra herramienta de análisis. El espectro de Lyapunov contiene un número de exponentes de Lyapunov igual a la dimensión del espacio de fases. El máximo exponente de Lyapunov (MEL) determina el comportamiento del sistema dinámico. Si el MEL es positivo, el comportamiento es caótico, en tanto que si es negativo, el comportamiento es regular. En flujos, el máximo exponente de Lyapunov (MEL) se define excluyendo el exponente de Lyapunov correspondiente a la dirección de la trayectoria. En esta dirección el exponente siempre es nulo, lo que impide que el MEL tome

valores negativos. Para el cálculo del MEL se utiliza la matriz jacobiana.

$$\begin{pmatrix} -a_2 & a_1 & -a_1 \\ -b_3 & -b_4 & -b_2 F_1'(x_3) \\ d_1 & 0 & -d_2 - d_3 F_2'(x_3) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

donde  $F_1'(x_3)$  y  $F_2'(x_3)$  son las derivadas de las funciones por partes:

$$F_1'(x_3) = \begin{cases} k I_0 R_L & \text{si } V_m < x_3 \\ 0 & \text{si } V_m > x_3 \end{cases}, \quad (9)$$

$$F_2'(x_3) = \begin{cases} 0 & \text{si } V_m < x_3 \\ \frac{I_0 R_L}{R_{0N} + R_L} & \text{si } V_m > x_3 \end{cases}. \quad (10)$$

## 4. RESULTADOS

### 4.1. Integración Numérica

Con las Ecs. (5)–(7) se pudo verificar el comportamiento caótico reportado por Kvarda (2002). El atractor extraño fue encontrado a partir de la integración numérica utilizando el método de Runge-Kutta 4 y 5, con condiciones iniciales (2, -0.02, 0). El atractor obtenido se muestra en la Fig. 3.

Igualmente, integrando el sistema descrito por las Ecs. (5) se obtuvieron los diagramas de bifurcación mostrando la dinámica de la variable  $x_1$  cuando los parámetros de control son  $R_L$  en el rango  $[0, 300] \Omega$  (Fig. 4(a)) y  $L_1$  en el intervalo  $[55, 120] \mu H$  (Fig. 5(a)). También se obtuvieron los MELs en el mismos rangos, como se muestran en las Figs. 4(b) y 5(b).

Para la obtención de los diagramas de bifurcación, el tiempo de integración numérica fue de 7000, con un transitorio de 6950, un paso de 0.01 y 15000 valores del parámetro de control, haciendo un total de  $1.05 \times 10^{10}$  cálculos para la Fig. 4(a); en tanto que para la Fig. 5(a) el paso fue de 0.05 y el número de valores para el parámetro de control de 1625 dando un total de  $2.275 \times 10^8$  cálculos. Lo anterior muestra que se requiere una capacidad computacional elevada.

Para encontrar el MEL en ambos casos el tiempo de integración numérica fue de 2500 para cada valor del exponente de Lyapunov, con un paso de 0.01. Para la construcción de cada diagrama solo se almacena el ultimo valor. Es importante recalcar que a pesar de tener los tiempos de integración

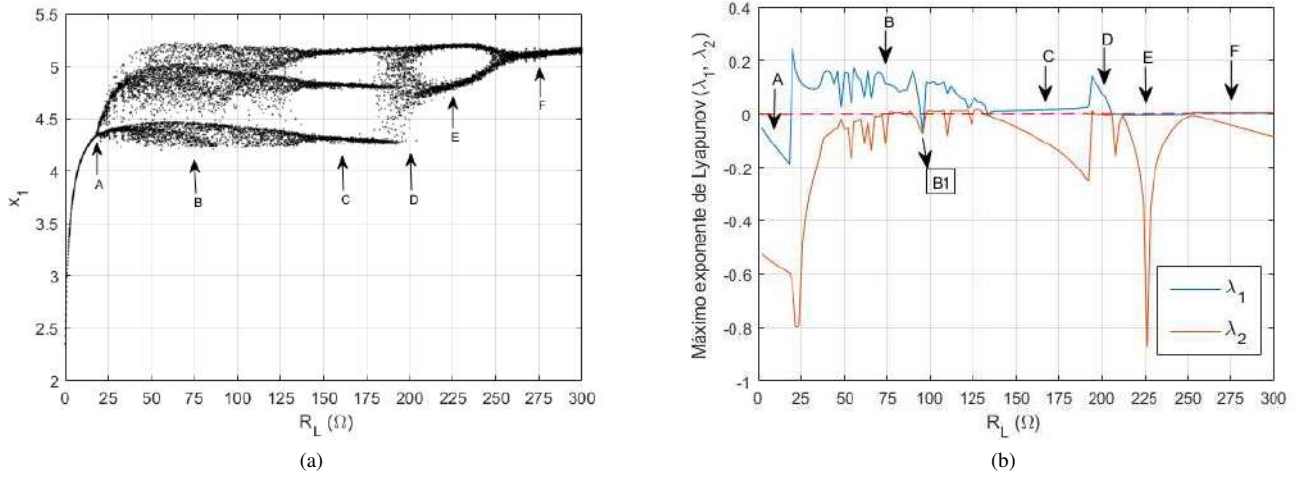


FIG. 4.— Caracterización dinámica en función del parámetro de control  $R_L$ . (a) Diagrama de bifurcación mostrando la dinámica de la variable de estado  $x_1$ . (b) Máximo exponente de Lyapunov del sistema, obtenidos con los parámetros mencionados en la Fig.3.

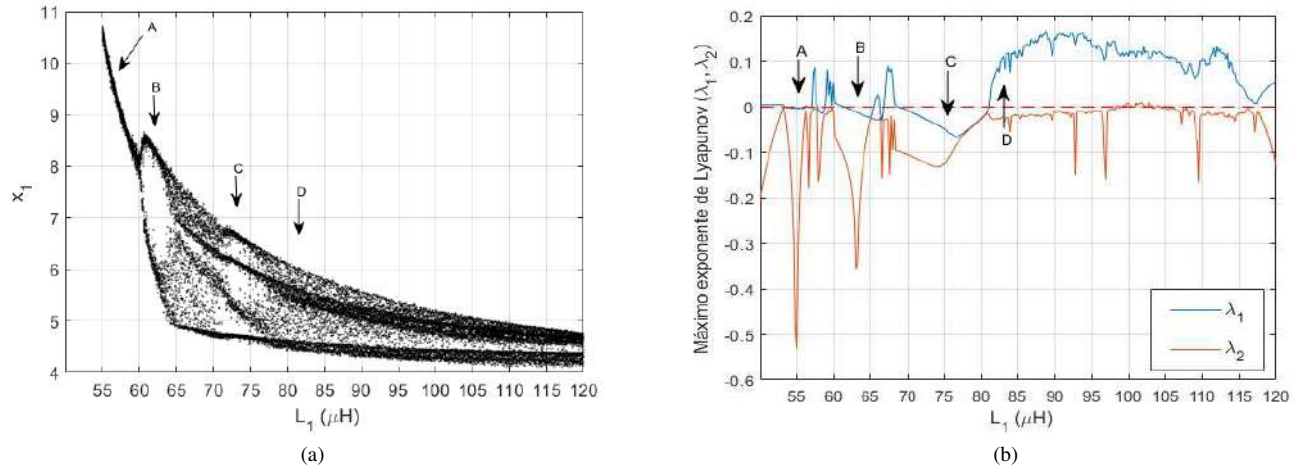


FIG. 5.— Caracterización dinámica en función del parámetro de control  $L_1$ . (a) Diagrama de bifurcación mostrando la dinámica de la variable de estado  $x_1$ . (b) Máximo exponente de Lyapunov del sistema, obtenidos con los parámetros mencionados en la Fig.3.

mencionados, estos resultan ser cortos para tener una buena resolución de los diagramas de bifurcación y de los MELs.

En el diagrama de bifurcación de la Fig. 4(a) se observa que a medida que aumentamos el parámetro de control  $R_L$  surgen nuevas ramas de comportamiento estable; así, a partir de la región (A) se observa desdoblamiento de periodo hasta entrar en una región caótica definida por la región oscura en (B) ya que se tiene una cascada infinita de duplicaciones de periodo. En la región (C) podemos observar tres ramas estables que indican ciclo de periodo 3 (salida de la ventana caótica). La región (D) muestra otra vez un comportamiento caótico, mientras que en (E) se tiene periodo dos; finalmente, un comportamiento regular en (F).

La constatación del comportamiento dinámico del sistema se verificó con el cálculo de los MELs. En la Fig. 4(b) las flechas indican las mismas regiones del diagrama de bifurcación, el comportamiento regular y caótico se puede evidenciar ya que el MEL es positivo en regiones caóticas como (B) y (D), negativo en regiones regulares como (A), (C), (E) y (F). La región indicada por (B1) tiene valores negativos del MEL y por lo tanto un comportamiento regular, este caso no

es posible distinguirlo en el diagrama de bifurcación, pero si se pudo observar en el experimento.

En el diagrama de bifurcación correspondiente al parámetro de control  $L_1$  (ver Fig. 5(a)) se observa comportamiento regular en la región (A), desdoblamiento de periodo en (B), un desdoblamiento de periodo 4 en (C), una región caótica en (D) manteniendo fija la resistencia  $R_L$  en  $76 \Omega$ . En el diagrama del MEL mostrado en la Fig. 5(b) las flechas indican las mismas regiones que en el diagrama de bifurcación, donde se pueden distinguir regiones con exponente es negativo como en (A), (B) y (C); además de una región (D) con MEL es positivo.

#### 4.2. Implementación experimental

Se armó el circuito de Hartley en un protoboard según el esquema de la Fig. 2 con valores de los componentes dados en la Tabla 1, los cuales fueron obtenidos utilizando un multímetro digital LCR-T4 y un LC-Meter de Rice (2020), que se construyó para medir la inductancia y capacitancia

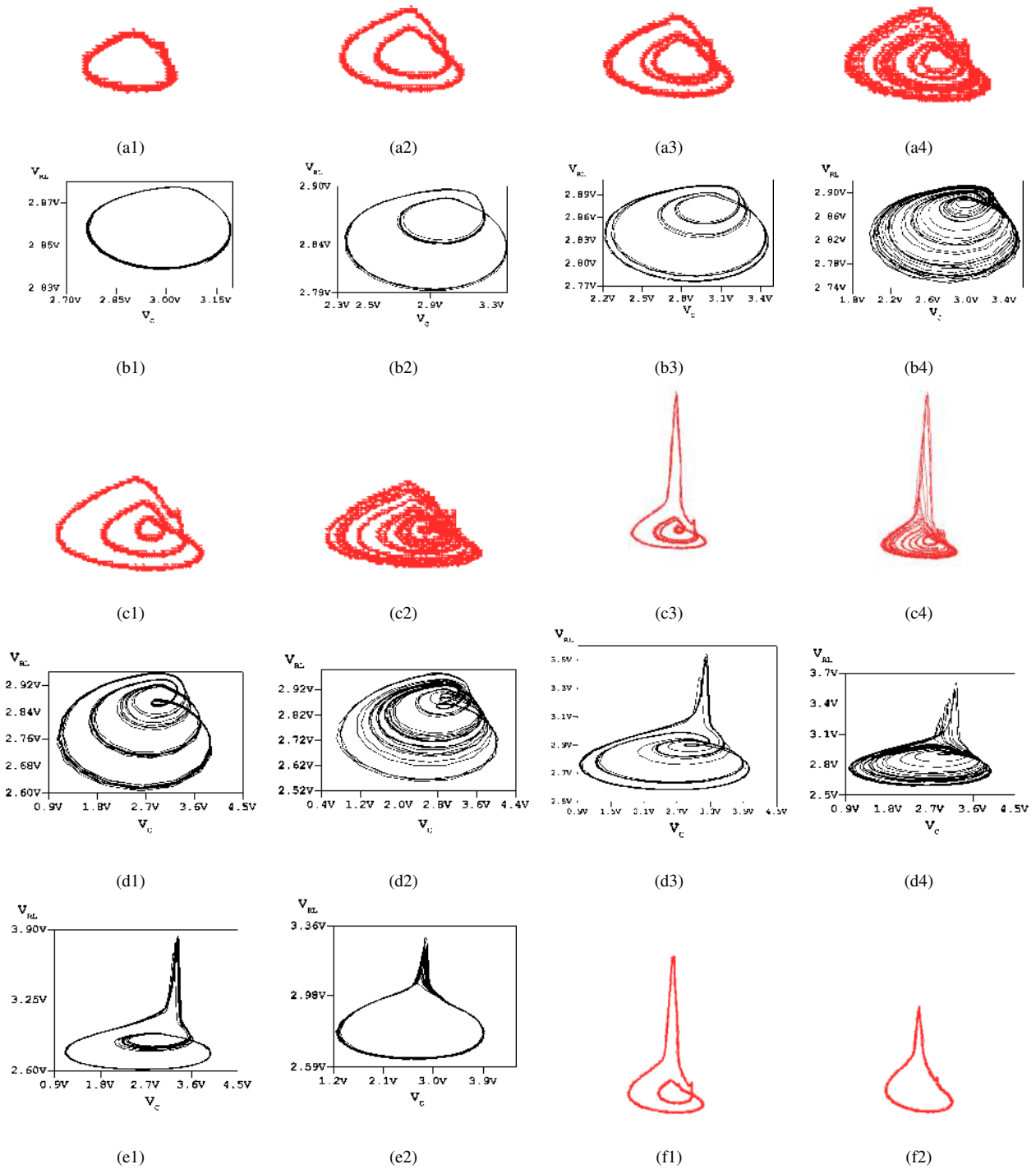


FIG. 6.— Los gráficos rojos (a1-a4), (c1-c4) y (f1-f2) son imágenes procesadas de capturas del osciloscopio, estas muestran las trayectorias en el espacio de fases de  $V_{C1}$  vs.  $V_{RL}$  con parámetro de control  $R_L$ , las gráficas en negro (b1-b4), (d1-d4) y (e1-e2) muestran el comportamiento de las mismas regiones obtenidas por simulación en LTspice, descartando datos del transitorio, de 2.0 ms de simulación solo se almacenó datos a partir de 1.8 ms.

con precisión elevada. Por otra parte se utilizó un osciloscopio Unit UTD2072CEXII de dos canales con ancho de banda de 70 Mhz y 1 GS/s de muestreo, además de una fuente variable de [1.5, 7.5] V construida a partir de el circuito integrado LM317.

En la Fig. 6, se visualizan los resultados experimentales y de simulaciones en LTspice. Se realizó la variación del parámetro  $R_L$ , para lo que se utilizó una resistencia variable de 500  $\Omega$ . Por otra parte los canales 1 y 2 del osciloscopio

se conectaron a los nodos N1 y N2 respectivamente, como se mostró en la Fig.2; esto para tener lecturas del voltaje en el capacitor  $V_C$  y en la resistencia  $V_{RL}$ . Se obtuvieron diferentes tipos de comportamiento basados en las regiones del diagrama de bifurcación de la Fig.4(a), lo que se describe en la Tabla 2. Cabe señalar que debido a la incertidumbre de los valores utilizados, no se encontró el comportamiento en los valores precisos que se indican en el diagrama de bifurcación; sin embargo, se observó el comportamiento cualita-

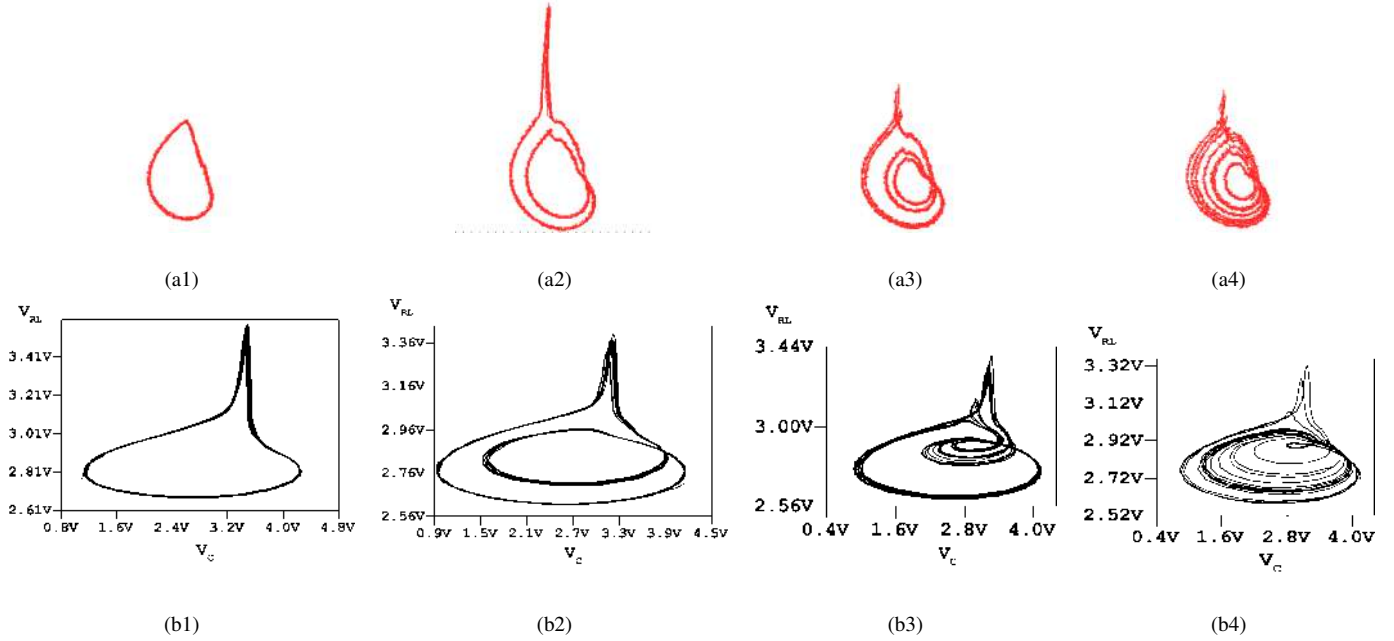


FIG. 7.— Los gráficos rojos (a1-a4), son imágenes procesadas de capturas del osciloscopio, estas muestran las trayectorias en el espacio de fases de  $V_{C1}$  vs.  $V_{RL}$  con parámetro de control  $L_1$ , las gráficas en negro (b1-b4) muestran el comportamiento de las mismas regiones obtenidas por simulación en LTspice, descartando datos del transitorio, de 2.0 ms de simulación solo se almacenó datos a partir de 1.8 ms.

TABLA 1  
COMPONENTES UTILIZADOS Y SUS VALORES

Componentes	Valor
$R_L$	$(101.30 \pm 0.01) \Omega$
$R_{L1}$	$(1.61 \pm 0.01) \Omega$
$R_{L2}$	$(1.68 \pm 0.01) \Omega$
$R_C$	$(98.60 \pm 0.01) \Omega$
$L_1$	$(96.97 \pm 0.01) \mu\text{H}$
$L_2$	$(99.16 \pm 0.01) \mu\text{H}$
$C_1$	$(21.48 \pm 0.01) \text{nF}$
$V_1$	$(3.75 \pm 0.01) \text{V}$
Transistor PNP 2n3906	

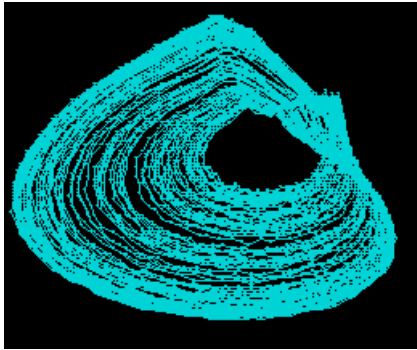


FIG. 8.— Atractor obtenido en osciloscopio, donde se muestra el espacio de fases  $V_{C1}$  vs.  $V_{RL}$  con valores de la Tabla 1.

tivo del mismo. En las simulaciones se utilizaron los mismos valores que reportó Kvarda (2002). El tiempo de simulación fue de 2.0 ms y solo se almacenaron datos desde 1.8 ms para todas las gráficas mostradas; esto para salir del régimen transitorio.

La región B1 mostrada en el diagrama de exponentes de Lyapunov Fig.4(b), es verificada experimentalmente en la

Fig.6(c1), teniendo un ciclo de periodo 3.

Se realizó la variación del parámetro  $L_1$  (ver Fig.7), para lo que se construyeron inductores con valores aproximados de  $50 \mu\text{H}$ ,  $80 \mu\text{H}$  y  $100 \mu\text{H}$  con resistencia interna de  $0.2 \Omega$ . Sin embargo para un mejor estudio en la transición de estados, se construyó un inductor variable que tiene un rango de  $[50, 100] \mu\text{H}$  con resistencia interna de  $1.7 \Omega$ . Se observó que con estos valores de resistencia interna el funcionamiento del circuito no se ve afectado. La verificación del comportamiento dinámico respecto al inductor  $L_1$  es descrito en la Tabla 3. La resistencia  $R_L$  se fija en  $162.4 \Omega$ , ya que con este valor se pudieron observar cambios en el comportamiento al variar el valor de la inductancia; esta falta de precisión puede ser debida a la resistencia interna del inductor variable, a la resistencia interna de la fuente de voltaje o a la incertidumbre de los componentes utilizados. Lo anterior puede afectar también a la precisión cuando se verifican los diferentes diagramas; ya que en el análisis numérico y las simulaciones en LTspice, los factores como las resistencias internas así como también su capacitancia parásita no está considerada. En la Fig. 8 se muestra el atractor extraño obtenido con los valores indicados en la Tabla 1.

## 5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se trabajó con las ecuaciones normalizadas y se realizó el estudio y clasificación del comportamiento dinámico del circuito de Hartley variando los parámetros  $R_L$  y  $L_1$ . Se observó la ruta al caos a través del desdoblamiento de periodos tanto en simulaciones como experimentalmente; encontrándose una buena correspondencia cualitativa con los diferentes diagramas de bifurcación. Se pudo constatar que los MELs constituyen una herramienta muy útil que puede respaldar lo que se observa en los diagramas de bifurcación. Los diagramas de bifurcación muestran el comportamiento del circuito cuando se varía un parámetro de control. Una mejor resolución está ligada al aumento del tiempo de in-

TABLA 2  
TRANSICIÓN DE COMPORTAMIENTO SEGÚN LOS VALORES EXPERIMENTALES DE ACUERDO CON LOS DIAGRAMAS DE BIFURCACIÓN Y EL MEL PARA  $R_L$

Resistencia $R_L$ ( $\Omega$ ) ( $\pm 0.01$ )	Gráfica Fig. 6	Tipo de comportamiento	Región del diagrama de bifurcación y MEL, Fig.4(a) y (b)
65.20	a1	Comportamiento regular	A
75.80	a2	Desdoblamiento de periodo	A
88.01	a3	Ciclo de periodo 4	A
90.00	a4	Caótico	B
94.80	c1	Ciclo de periodo 3	B1
95.30	c2	Caótico	B
142.90	c3	Ciclo de periodo 3	C
144.50	c4	Caótico	D
152.20	f1	Ciclo de periodo 2	E
180.70	f2	Ciclo límite	F

TABLA 3  
TRANSICIÓN DE COMPORTAMIENTO SEGÚN LOS VALORES EXPERIMENTALES DE ACUERDO CON LOS DIAGRAMAS DE BIFURCACIÓN Y EL MEL PARA  $L_1$

Inductancia $L_1$ ( $\mu$ H) ( $\pm 0.01$ )	Gráfica Fig. 7	Tipo de comportamiento	Región del diagrama de bifurcación y MEL Fig.5(a) y (b)
51.31	a1	Ciclo límite	A
62.24	a2	Desdoblamiento de periodo	B
79.13	a3	Ciclo de periodo 4	C
87.36	a4	Caótico	D

tegración. La potencia computacional exigida para esto es grande por lo que se suele paralelizar los procesos y utilizar clusters. La resistencia interna de los diferentes componentes es también un aspecto importante a la hora de realizar el experimento. El uso de simuladores de circuitos tales como LT-spice es muy práctico para el estudio de comportamientos dinámicos en un circuito. Se entiende que muchos circuitos comunes pueden ser generadores de caos y estos comportamientos se pueden determinar realizando este tipo de estudios. El éxito de este trabajo en la determinación de los comportamientos dinámicos en el circuito de Hartley fue fruto del exhaustivo trabajo experimental. Lo anterior abre la posibilidad de continuar con la investigación del circuito de Hartley de dos componentes como el expuesto por Tchitnga *et.al.*

(2012), además del desafío en la descripción experimental de la aniquilación de las estructuras denominadas “camarones” que fue obtenida numéricamente por Ramírez-Ávila, Kurths & Gallas (2021). Finalmente se pretende profundizar en el análisis numérico de este sistema.

### AGRADECIMIENTOS

A.S.C.I. agradece al Dr. Hugo Rivera como también al Dr. Wilfredo Tavera por sus críticas y observaciones en el desarrollo del trabajo. Así mismo los autores agradecen a los árbitros por sus comentarios los mismos que coadyuvaron a su mejora.

### Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

### REFERENCIAS

Kvarda, P. 2002, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**, 2229.  
 Semenov, A., Havrilov, D., Volovik, A., Baraban, S., Savvitskiy, A. & Zvi-ahin, O. 2020, *IEEE 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering*, 25.  
 Behzad, F. & Hamdipour, M. 2021, *Pramana - Journal of Physics*, **95**, 2.  
 Kennedy, M.P. 1994, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, **41**, 11.  
 Malvino, A. & Bates, D. 2007, *Principios de electrónica*, (Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España).  
 Hasler, M.J. 1987, *Proceedings of the IEEE*, **75**, 1009.  
 Matsumoto, T. 1984, *IEEE Transactions on Circuits Systems*, **31**, 1055.  
 Govorukhin, V., 2004, “Calculation Lyapunov Exponents for ODE”, Website: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4628-calculation-lyapunov-exponents-for-ode>. Acceso: 5.5.2022.  
 Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. & Vastano, J. A. 1985, *Physica D*, **16**, pp. 285-317.  
 Rice, P. 2020, *Phil Rice’s Homepage*, “LC-Meter”, Website: <https://sites.google.com/site/vk3bhr/home?authuser=0>. Acceso: 6.12.2021.  
 Fortuna, L., Frasca, M. & Xibilia, M. G. 2009, *Chua’s circuit implementations: yesterday, today and tomorrow* (Singapore: World Scientific Publishing).  
 Freire, J.G. & Gallas, J.A.C. 2014, *Chaos, Solitons & Fractals*, **59**, 129.  
 Tchitnga, R., Bertrand F. H., Nana B., Louodop Fotso, P. H. & Woafu, P. 2012, *Chaos, Solitons & Fractals*, **45**, 306.  
 Ramírez-Ávila, G.M., Kurths, J. & Gallas, J.A.C. 2021, *Chaos*, **31**, 101102.

ACOPLAMIENTO DE LA ELECTRODINÁMICA DE MAXWELL-CHERN-SIMONS A UN CAMPO GRAVITACIONAL EN PRESENCIA DE UN MEDIO ÓPTICO NO DISPERSIVO EN 2+1 DIMENSIONES  
COUPLING OF THE MAXWELL-CHERN-SIMONS ELECTRODYNAMICS WITH A GRAVITATIONAL FIELD IN THE PRESENCE OF A NON-DISPERSIVE OPTICAL MEDIUM IN 2+1 DIMENSIONS

MIRKO LANDIVAR\* [1]

Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés  
Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635  
La Paz - Bolivia

(Recibido 22 de septiembre de 2021; aceptado 12 de noviembre de 2021)  
<https://doi.org/10.53287/quitt4741ow61q>

RESUMEN

Se estudia la teoría de Maxwell-Chern-Simons con un acoplamiento con un campo gravitacional en el vacío y en presencia de un medio óptico simple que permea una región considerablemente grande del espacio, a través de la introducción de la métrica óptica de Gordon. Se escribe la acción de la teoría en un espacio-tiempo general, se obtienen las ecuaciones de campo, y se hallan generalizaciones de la ecuación de Klein-Gordon para cada caso. Luego se exploran los casos de espacio-tiempos maximalmente simétricos, donde se obtienen ecuaciones de onda masiva para el tensor de campo electromagnético. Un resultado peculiar es que en los espacio-tiempos de de Sitter en presencia de un medio óptico, la parte eléctrica del tensor de campo exhibe una masa diferente de la masa de la parte magnética.

*Descriptor:* Teoría clásica de campos — Electromagnetismo clásico, ecuaciones de Maxwell — Otras teorías clásicas especiales de campo.

Código(s) PACS: 03.50.-z — 03.50.De — 03.50.Kk

ABSTRACT

We study the Maxwell-Chern-Simons theory coupling it to a gravitational field in a vacuum and under the presence of a simple optical medium that permeates a considerably large region of space, by means of the introduction of the Gordon optical metric. We describe the action of the theory, derive the field equations, and obtain generalizations of the Klein-Gordon equation for each case. Then we explore the cases of maximally symmetric space time, where we obtain massive wave equations for the electromagnetic field tensor. A particularly interesting result is that in the de Sitter family of space time, under the presence of the optical medium, the electric part of the field tensor has a mass greater than the mass of the magnetic part.

*Subject headings:* Classical field theory — Classical electromagnetism, Maxwell equations — Other special classical field theories.

1. INTRODUCCIÓN

La electrodinámica clásica, descrita por las ecuaciones de Maxwell, puede generalizarse al caso de un espacio-tiempo curvo al aplicarse una prescripción de acoplamiento mínimo (Misner *et al* (2017)). Las ecuaciones de campo pueden obtenerse a partir de un principio variacional aplicado a la acción

$$S[A_\mu] = \int_M d^{D+1}x \sqrt{|g|} \left( -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \right), \quad (1)$$

resultando en las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas,

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (2)$$

donde  $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  es el tensor de campo, definido a partir de la 1-forma  $A = A_\alpha dx^\alpha \in \Gamma T^*M$ , la cual puede verse como una sección del haz de fibras cotangente de la variedad espacio-temporal  $M$ ,  $g$  es el tensor métrico de signatura  $(+, -, \dots, -)$  que estará determinado por las ecuaciones de campo de Einstein, aunque más adelante supondremos que está dado, y que la presencia del campo eléctrico no perturba significativamente al campo gravitacional; y  $J$  es el vector de densidad de corriente asociado a posibles fuentes del campo electromagnético. Por otro lado, de la definición de  $F$ , se tiene la siguiente identidad

$$\nabla_\alpha F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\alpha\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\alpha} = 0, \quad (3)$$

[1]<https://orcid.org/0000-0001-8249-1146>

\*mlandivarg@fcpn.edu.bo

que recibe el nombre de identidad de Bianchi de la teoría, y reproduce las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas. Esta identidad puede escribirse igualmente reemplazando las derivadas covariantes por derivadas parciales, debido a la propiedad de simetría de la conexión de Christoffel con que se ha equipado a la variedad diferencial  $M$ , y la antisimetría del tensor de campo.

Sin embargo, la acción (1) es sólo una de las muchas posibilidades de combinar al campo  $A$  y derivadas de sus componentes en una forma invariante bajo transformaciones generales de coordenadas y bajo transformaciones de calibre. Por ejemplo, uno podría introducir cualquier término con funciones de la forma  $f(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$ , y seguiría conservando la invariancia frente a transformaciones generales de coordenadas y frente a transformaciones de calibre. Entonces, uno debe buscar alguna motivación extra para introducir términos a la acción y obtener *variantes* de la teoría.

Una motivación interesante, al menos desde el punto de vista matemático, es la de tener términos que al integrarse en la acción resulten en *invariantes topológicos*, y se les suele llamar términos topológicos. Estos términos no dependen explícitamente de la métrica de fondo, de modo que homeomorfismos aplicados a la variedad de espacio-tiempo, a nivel de su estructura topológica solamente, dejan invariantes a estos términos. O, en otras palabras, basta que el mapa de transformación sea un homeomorfismo entre espacios topológicos para dejar invariantes a estos términos, y no se necesita un requerimiento mayor en el mapa de transformación, sólo exigencias a nivel de la topología de la variedad.

Un ejemplo de corrección a la acción mediante un término topológico fue dada por Deser *et al.* (1982) introduciendo en la acción un término de Chern-Simons, escribiendo la siguiente lagrangiana para el caso de un campo de calibre abeliano

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G &= \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{CS}} \\ &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha\end{aligned}\quad (4)$$

donde consideraron un espacio-tiempo plano de 2+1 dimensiones. Asimismo, hallaron que esta teoría describe fotones masivos, debido a que el tensor campo  $F_{\mu\nu}$  obedece a una ecuación de Klein-Gordon

$$(\square + \lambda^2)F_{\mu\nu} = 0. \quad (5)$$

donde  $\square = \partial^\alpha\partial_\alpha$  es el d'Alembertiano. La relación de dispersión asociada a (5) es  $\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = \lambda^2$ , de donde se interpreta que el valor absoluto de la constante de acoplamiento  $\lambda$  de Chern-Simons es la masa del campo electromagnético. Podemos decir entonces que el término topológico dota de masa al campo. Otra característica importante de los términos topológicos es que, al no depender de la métrica de fondo, no contribuyen al tensor de energía-momento total que es fuente del campo gravitacional a través de las ecuaciones de Einstein. Debe mencionarse también que

una motivación fenomenológica para el estudio de teorías de calibre en 2+1 dimensiones puede encontrarse en su conexión con el comportamiento a altas temperaturas de modelos en 3+1 dimensiones (ver, por ejemplo, Weinberg (1978))

En este trabajo pretendemos generalizar la ecuación (5) al caso de la presencia de un campo gravitacional general, y estudiar el caso particular de un espacio-tiempo de la familia de de Sitter, el cual involucra la constante cosmológica  $\Lambda$ . Asimismo, también se estudiará, sobre un espacio-tiempo general, esta misma electrodinámica en presencia de un medio óptico simple (i.e.: localmente homogéneo, isotrópico y lineal), empleando la llamada *métrica óptica*, introducida por Gordon (1923), la cual es útil en la formulación covariante de la electrodinámica en medios, llamada electrodinámica de Minkowski (véase, por ejemplo, Novello y Bittencourt (2012)). Se acoplará el término de Chern-Simons a la métrica óptica mediante contracciones, dejando el carácter de invariante topológico de este término sólo como un límite, pero preservando la invariancia de calibre.

Este artículo está organizado como sigue: en la sección 2 mostraremos el acoplamiento de la lagrangiana (4) a un campo gravitacional, y mostraremos la generalización de la ecuación (5), luego supondremos que el espacio-tiempo es maximalmente simétrico (i.e. algún espacio tiempo de la familia de de Sitter o el espacio-tiempo de Minkowski), y veremos los efectos del campo gravitacional sobre la masa del campo electromagnético mediante la generalización de la ecuación de Klein-Gordon. Luego, en la sección 3, introduciremos la presencia de un medio simple, y buscaremos una nueva generalización de la ecuación de Klein-Gordon en el espacio-tiempo maximalmente simétrico, obteniendo nuevos efectos sobre la masa de las componentes eléctrica y magnética del tensor  $F$ . En particular, encontraremos que las masas del campo eléctrico y magnético son diferentes. Exploraremos valores críticos de las masas de los campos en función del valor de la constante de acoplamiento de Chern-Simons y de la constante cosmológica. Finalmente, damos algunas conclusiones, comentarios y perspectivas.

## 2. ACOMPLAMIENTO CON UN CAMPO GRAVITACIONAL

La aplicación de la prescripción de acoplamiento mínimo a la lagrangiana de Maxwell-Chern-Simons (4) resulta en la acción

$$S = \int_M d^3x \sqrt{|g|} \left( -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{4\sqrt{|g|}}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha \right) \quad (6)$$

Aquí, es evidente que el término de CS es un invariante topológico debido a que el jacobiano se cancela, y no hay dependencia explícita de la métrica. Note que la invariancia bajo transformaciones generales de coordenadas queda asegurada debido a que  $(1/\sqrt{|g|})\varepsilon^{\mu\nu\alpha}$  son las componentes de un tensor

auténtico, a pesar de la apariencia, dado que  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha}$  es el símbolo de Levi-Civita, que es una densidad tensorial de primer orden. Las componentes del anterior tensor con índices bajos son  $\sqrt{|g|}\varepsilon_{\mu\nu\alpha}$ .

Las ecuaciones de Euler-Lagrange resultantes son

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2\sqrt{|g|}}\varepsilon^{\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = 0, \quad (7)$$

y la identidad de Bianchi (3) aun vale porque solo depende de la forma de la definición de  $F$ .

Si aplicamos  $\nabla^\alpha$  a la identidad de Bianchi (3), tenemos

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha F_{\mu\nu} - \nabla_\alpha \nabla_\mu F_\nu^\alpha + \nabla_\alpha \nabla_\nu F_\mu^\alpha = 0 \quad (8)$$

donde hemos usado la condición de metricidad  $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$  y la antisimetría de  $F$ . Ahora, las derivadas covariantes en general no conmutan, sino que

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\nu] F_\mu^\alpha = R^\alpha_{\sigma\alpha\nu} F_\mu^\sigma + R_\mu^\sigma{}_{\alpha\nu} F_\sigma^\alpha \quad (9)$$

Donde  $R^\alpha_{\sigma\alpha\nu}$  es el tensor de curvatura de Riemann. Además usando la identidad

$$R_{\mu\alpha\nu\sigma} + R_{\mu\sigma\alpha\nu} + R_{\mu\nu\sigma\alpha} = 0,$$

la ecuación (8) se escribe

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha \nabla_\alpha F_{\mu\nu} &= \nabla_\mu \nabla_\alpha F_\nu^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\alpha F_\mu^\alpha \\ &\quad + R^\sigma{}_\mu F_{\sigma\nu} - R^\sigma{}_\nu F_{\sigma\mu} \\ &\quad + R_{\mu\nu\sigma\alpha} F^{\alpha\sigma} \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $R^\sigma{}_\mu$  es el tensor de Ricci. Ahora, de la ecuación de campo (8),

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha \nabla_\alpha F_{\mu\nu} &= \frac{\lambda}{2\sqrt{|g|}} \left( -\nabla_\mu \varepsilon_{\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \nabla_\nu \varepsilon_{\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ &\quad + R^\sigma{}_\mu F_{\sigma\nu} - R^\sigma{}_\nu F_{\sigma\mu} \\ &\quad + R_{\mu\nu\sigma\alpha} F^{\alpha\sigma} \end{aligned} \quad (11)$$

Aquí es conveniente definir el dual del tensor de campo como  $\star F^\mu = \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\varepsilon^{\mu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ , de donde también

es posible escribir  $F_{\mu\nu} = \sqrt{|g|}\varepsilon_{\mu\nu\alpha}(\star F^\alpha)$ . Multiplicando a la ecuación (7) por  $\varepsilon_{\nu\alpha\beta}$ , se obtiene

$$\nabla_\mu (\star F_\nu) - \nabla_\nu (\star F_\mu) = \lambda F_{\mu\nu}. \quad (12)$$

Luego, al introducir (12) en (11) el resultado es

$$\begin{aligned} (\nabla^\alpha \nabla_\alpha + \lambda^2) F_{\mu\nu} &= R^\sigma{}_\mu F_{\sigma\nu} - R^\sigma{}_\nu F_{\sigma\mu} \\ &\quad + R_{\mu\nu\sigma\alpha} F^{\alpha\sigma} \end{aligned} \quad (13)$$

de donde vemos que, para un espacio tiempo plano, se recupera la ecuación (5). Evidentemente, la ecuación (13) es la generalización de la ecuación de Klein-Gordon que Deser *et al.* (1982) hallaron en su trabajo.

### 2.1. En un espacio maximalmente simétrico

Se sabe que para un espacio-tiempo de dimensión  $D + 1$  de simetría máxima (i.e. uno que tiene  $(D + 2)(D + 1)/2$  vectores Killing independientes, que son los generadores de isometrías, es decir, difeomorfismos que preservan la métrica), la curvatura escalar

es una constante. Solo hay tres espacio-tiempos de esa naturaleza: El espacio-tiempo de Minkowski, con curvatura escalar nula, y las dos familias de espacio-tiempos de de Sitter, uno con  $R > 0$  (de Sitter) y el otro con  $R < 0$  (anti de Sitter). Tomemos el caso de algún espacio-tiempo de la familia de de Sitter en 2+1 dimensiones, en el cual el tensor de curvatura Riemann se escribe (véase Misner *et al.* (2017))

$$R_{\mu\nu\alpha\sigma} = \frac{R}{6}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\alpha}), \quad (14)$$

de donde resulta que el tensor de Ricci es

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{3}g_{\mu\nu} \quad (15)$$

con lo que, de la ecuación de campo de Einstein con constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (16)$$

se tiene que la curvatura escalar es  $R = 6\Lambda$ .

La métrica puede escribirse en cierto sistema de coordenadas  $(t, r, \phi)$  mediante el elemento de línea

$$ds^2 = (1 - \Lambda r^2)dt^2 - \frac{1}{1 - \Lambda r^2}dr^2 - r^2d\phi^2. \quad (17)$$

Con los resultados de las ecuaciones (14) y (15), y la curvatura escalar en términos de la constante cosmológica, la ecuación (13) se reduce a

$$(\nabla^\alpha \nabla_\alpha + \lambda^2 - 2\Lambda) F_{\mu\nu} = 0 \quad (18)$$

de donde es manifiesto el efecto de la constante cosmológica sobre la masa del campo electromagnético en esta teoría, siempre que  $\lambda^2 \geq 2\Lambda$ . La masa del campo entonces está dada por  $m(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - 2\Lambda}$ . En la figura 1 se muestra la dependencia de la masa con la constante de acoplamiento de Chern-Simons para valores representativos de la constante cosmológica.

Para el caso particular en que  $\lambda^2 = 2\Lambda$ , tenemos que la ecuación (18) se reduce a una ecuación de onda sin masa,

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha F_{\mu\nu} = 0. \quad (19)$$

Desde el punto de vista dinámico para este caso, donde en algún sistema de coordenadas  $x^\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$  se elige  $x^0 = t$  como la coordenadas temporal y  $x^i$  como las coordenadas temporales, la ecuación (19) tendrá soluciones de onda en este espacio-tiempo con la restricción de que los perfiles iniciales sean soluciones del problema

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{\sqrt{|g|}}\varepsilon^{\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = 0 \quad (20)$$

con  $\nu = 0$ , que sería el análogo a la Ley de Gauss, más la identidad de Bianchi con índices espaciales, que sería la Ley de Gauss para el campo magnético; todo esto con condiciones de frontera apropiadas.

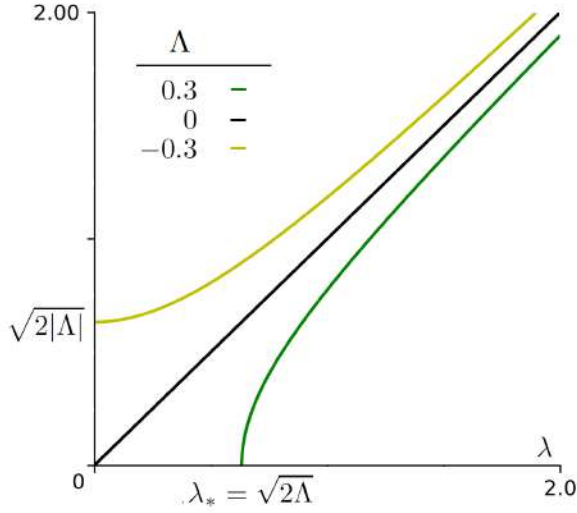


FIG. 1.— Masa del tensor de campo en función del valor de la constante de acoplamiento de Chern-Simons  $\lambda$ , para  $\Lambda > 0$ ,  $\Lambda < 0$  y  $\Lambda = 0$ . Note que en el caso de constante cosmológica negativa, no existen valores de la constante de Chern-Simons tales que la masa del campo sea nula, mientras que en el caso de constante cosmológica positiva, existe un valor de  $\lambda$  tal que la masa del campo es nula, el cual es  $\lambda_* = \sqrt{2\Lambda}$

### 3. PRESENCIA DE UN MEDIO SIMPLE

Supongamos que en cierta región de un espacio-tiempo plano de  $D + 1$  dimensiones existe un medio óptico simple, es decir, localmente homogéneo, isotrópico y lineal. ¿Cómo se describe la electrodinámica en una forma manifiestamente covariante? La respuesta está en la introducción de la métrica de Gordon (1923) (véase también Thompson (2018)), que se define por

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa u_\mu u_\nu \quad (21)$$

donde  $\eta$  es la métrica de Minkowski,  $\kappa$  es una constante que depende de los parámetros ópticos del medio en la forma  $\kappa = \varepsilon\mu - 1$ , y  $u_\mu$  es la 3-velocidad del medio, de modo que en el sistema de referencia inercial en reposo respecto del medio, las componentes de  $u$  son  $u_\mu = (1, 0, \dots, 0)$ . Definimos entonces la acción del campo electromagnético en presencia de un medio simple (en un espacio-tiempo plano)

$$S = \int_M d^{D+1}x \left( -\frac{1}{4} H^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \right), \quad (22)$$

donde se definió al tensor auxiliar

$$H = \frac{1}{\mu} \hat{\eta}^{\mu\rho} \hat{\eta}^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} \partial_\mu \otimes \partial_\nu \in \Gamma T_0^2 M \quad (23)$$

que es análogo a los campos vectoriales auxiliares  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{H}$  de la electrodinámica en medios en 3+1 dimensiones. Note el uso de la métrica óptica en esta definición. Por otro lado, la corriente  $J^\mu$  corresponde solo a las llamadas *corrientes libres*, y no así a la corriente ligada, producida en los componentes de medio por su interacción con el campo electromagnético.

Las ecuaciones de campo son

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = J^\nu \quad (24)$$

más la identidad de Bianchi (3) por la forma de la definición de  $F$ . Por ejemplo, en el caso de cuatro dimensiones, en el sistema de referencia co-móvil al medio (i.e. en reposo respecto del mismo) la ecuación (24) se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (26)$$

mientras que las leyes de Àmpere y Gauss del campo magnético, que provienen de la identidad de Bianchi (3), tienen la misma forma que en el caso de la ausencia de un medio,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (27)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (28)$$

#### 3.1. Medio simple en un campo gravitacional y adición de un término de pseudo-Chern-Simons

La extensión de la acción (22) para la electrodinámica en un medio al caso de un espacio-tiempo curvo se logra aplicando nuevamente la prescripción de acoplamiento mínimo, sustituyendo la métrica de Minkowski por una métrica general  $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ . El resultado es

$$S = \int_M d^{D+1}x \sqrt{|g|} \left( -\frac{1}{4} H^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \right), \quad (29)$$

Esta prescripción transforma a la métrica óptica como sigue

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \kappa u^\mu u^\nu \quad (30)$$

donde supondremos que la dinámica del vector de velocidad  $u^\mu$  está dada por  $\nabla_\nu u^\mu = 0$  y se supone que es tipo-tiempo ( $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1$ ), de modo que el medio puede interpretarse como una nube de polvo, o fluido incoherente. Para el caso de dimensión 2+1, añadamos el siguiente término a la acción

$$\frac{\lambda}{4\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} H_{\mu\nu} \hat{g}_\alpha^\beta A_\beta = \frac{\lambda}{4\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \hat{g}_\mu^\rho \hat{g}_\nu^\sigma \hat{g}_\alpha^\beta F_{\rho\sigma} A_\beta \quad (31)$$

Aquí  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha}$  denota el símbolo de Levi-Civita. A pesar de la apariencia, este término ya no es un invariante topológico, debido a que el tensor  $\hat{g}_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta + \kappa u^\beta u_\alpha$  necesita inevitablemente de la métrica para tener un índice arriba y el otro abajo, dado que  $u^\mu$  se definió *naturalmente* como un vector, y no como una 1-forma. Desde el punto de vista de las derivadas funcionales, tenemos que

$$\frac{\delta \hat{g}_\beta^\alpha}{\delta g_{\rho\sigma}} = \kappa \delta_\beta^\sigma u^\alpha u^\rho \quad (32)$$

mientras que, si (31) fuese un auténtico término topológico, su derivada funcional respecto de la métrica debería ser nula, dado que tales términos

no contribuyen al tensor energía-momento que eventualmente perturbaría al campo gravitacional. Sin embargo, es evidente que para  $\kappa = 0$ , se recupera la invariancia topológica, con lo que podemos decir que tal carácter es un límite de la teoría más general descrita por la acción

$$S = \int_M d^3x \sqrt{|g|} \left( -\frac{1}{4} H^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{4\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} H_{\mu\nu} \hat{g}_\alpha^\beta A_\beta \right) \quad (33)$$

También, la invariancia de calibre del segundo término queda asegurada por la identidad de Bianchi y la antisimetría del tensor  $F$ .

Las ecuaciones de campo resultantes de la acción (33) son

$$\nabla_\mu H^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2\sqrt{|g|}} \hat{g}_\mu^\nu \varepsilon^{\mu\rho\sigma} H_{\rho\sigma} = 0 \quad (34)$$

A este nuevo término introducido en la acción, dado en (31), le llamamos de *pseudo-Chern-Simons*, o *pseudo-topológico*, ya que tiene al término original de Chern-Simons como un límite, siendo  $\kappa$  una suerte de parámetro de control, y su introducción se ve motivada en el hecho de que es uno de los posibles acoplamientos no-triviales de un término auténticamente topológico a la métrica, valiéndonos de un vector característico del sistema, que es la 3-velocidad del medio óptico; además de los propios resultados que se mostrarán en lo que sigue, tocante a los efectos que este término tiene sobre las excitaciones masivas del campo electromagnético. Fenomenológicamente, como se señaló anteriormente, la conexión entre las teorías vectoriales de calibre en 2+1 dimensiones con límites de altas temperaturas en modelos en 3+1 dimensiones son una motivación para considerar esta modificación de la electrodinámica.

Otra vez, vale la identidad de Bianchi (3). Note que se ha supuesto implícitamente que el medio ocupa una región muy grande del espacio, de modo que los términos de frontera de las integraciones por partes pueden despreciarse.

Para obtener una nueva generalización de la ecuación de Klein-Gordon, procedemos de manera análoga a la mostrada en la anterior sección. Tomamos la identidad de Bianchi y esta vez aplicamos el operador diferencial

$$\hat{\nabla}^\alpha := \hat{g}^{\alpha\rho} \nabla_\rho \quad (35)$$

de modo que tenemos

$$\hat{\nabla}^\alpha \nabla_\alpha F_{\mu\nu} - \hat{\nabla}_\alpha \nabla_\mu F_\nu^\alpha + \hat{\nabla}_\alpha \nabla_\nu F_\mu^\alpha = 0 \quad (36)$$

Pero ahora los conmutadores se escriben

$$[\hat{\nabla}^\alpha, \nabla_\nu] F_{\alpha\mu} = \hat{g}^{\alpha\rho} (R_{\alpha\rho\nu}^\sigma F_{\sigma\mu} + R_{\mu\rho\nu}^\sigma F_{\alpha\sigma}) \quad (37)$$

Por otro lado, el tensor inverso de la métrica óptica puede hallarse fácilmente, y el resultado es

$$(\hat{g}^{-1})^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{\kappa+1} u^\mu u^\nu \quad (38)$$

que llamaremos *óptica métrica inversa*. Entonces  $\hat{g}_{\mu\alpha} (\hat{g}^{-1})^{\alpha\nu} = 1$ . Al contraer (34) con la métrica óptica inversa, obtenemos,

$$\hat{\nabla}^\alpha F_{\alpha\rho} + \frac{\lambda\mu}{2\sqrt{|g|}} g_{\rho\gamma} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta} = 0 \quad (39)$$

Ahora, definiendo otro dual  $\star H^\mu = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\rho\sigma} H_{\rho\sigma}$ , nuevamente de (34), puede probarse en forma similar a (12), que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\star H_\nu) - \nabla_\nu (\star H_\mu) &= \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \hat{g}^\rho_\gamma \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} H_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\lambda}{2\mu} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} \hat{g}^\rho_\sigma \hat{g}^\sigma_\alpha \hat{g}^\alpha_\beta F_{\epsilon\delta}, \end{aligned} \quad (40)$$

y puede probarse que el lado derecho es igual a

$$= \frac{\lambda}{\mu} (F_{\mu\nu} + \kappa \tilde{F}_{\mu\nu}) \quad (41)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\rho} u^\rho u_\nu - F_{\nu\rho} u^\rho u_\mu \\ &+ \sqrt{|g|} \varepsilon_{\mu\nu\rho} u^\rho \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\sigma\alpha\beta} u_\sigma F_{\alpha\beta} \\ &= F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (42)$$

donde la última igualdad puede obtenerse usando el sistema de coordenadas co-móvil al medio, donde  $u^\mu = (1, 0, 0)$ . De modo que (40) se escribe

$$\nabla_\mu (\star H_\nu) - \nabla_\nu (\star H_\mu) = \frac{\lambda}{\mu} (1 + \kappa) F_{\mu\nu} \quad (43)$$

Luego, al sustituir las derivadas cruzadas de (36) usando el conmutador (37), sustituyendo los términos que tengan divergencias del tensor  $F$  con la ecuación (39), usando nuevamente la definición del dual y sustituyendo el resultado de (43), el resultado final para la generalización de la ecuación de Klein-Gordon en un espacio-tiempo arbitrario en presencia de un medio óptico es

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \hat{\nabla}^\alpha \nabla_\alpha + (1 + \kappa) \lambda^2 \right) F_{\mu\nu} \\ &+ \hat{g}^{\alpha\rho} R_{\rho\mu\nu}^\sigma F_{\sigma\alpha} \\ &+ \hat{g}^{\alpha\rho} (R_{\alpha\sigma\rho\nu} F_\mu^\sigma - R_{\alpha\sigma\rho\mu} F_\nu^\sigma) \end{aligned} \quad (44)$$

A continuación exploraremos las consecuencias de la ecuación (44) en los casos de espacio-tiempos maximalmente simétricos.

### 3.1.1. Espacio-tiempo plano

Dado que en un espacio-tiempo plano la curvatura es nula, podemos escoger coordenadas cartesianas globales, de modo que (44) se escribe

$$(\hat{\eta}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta + (1 + \kappa) \lambda^2) F_{\mu\nu} = 0. \quad (45)$$

Es sugerente la analogía con la ecuación (5). Una solución de (45) es

$$F_{\mu\nu}(x) = C_{\mu\nu} e^{iq_\rho x^\rho} \quad (46)$$

donde  $C_{\mu\nu}$  es un tensor constante y  $q_\rho$  es un 3-vector de onda a determinar. Introduciendo esta expresión en la ecuación (45), se obtiene la siguiente relación de dispersión

$$\hat{\eta}^{\mu\nu} q_\mu q_\nu = (1 + \kappa)\lambda^2. \quad (47)$$

de donde podemos concluir que, como en el caso del trabajo de Deser *et al.* (1982), las excitaciones del campo son masivas, pero ahora el valor de la masa del campo es directamente proporcional al valor de las constantes ópticas del medio a través de  $\kappa = \mu\varepsilon - 1 = n^2 - 1 > -1$ , donde  $n$  es el índice de refracción en reposo del medio óptico. Por otro lado, en el caso en que  $\lambda = 0$ , se tiene que la propagación del campo, en lugar de ser a través de geodésicas nulas en el espacio-tiempo de fondo, tiene lugar en geodésicas nulas de una nueva geometría Riemanniana efectiva descrita por  $\hat{\eta}^{\mu\nu}$ , como afirman Novello y Bittencourt (2012). De donde, en este nuevo caso, la propagación es a través de geodésicas tipo tiempo, como se esperaría en el caso de partículas masivas, pero ahora en una nueva estructura causal determinada por la métrica óptica.

### 3.1.2. En un espacio-tiempo de la familia de de Sitter

Tomemos nuevamente el caso del espacio tiempo descrito por la curvatura escalar constante  $R = 6\Lambda$ . Procediendo de manera similar como en la sección 2.1, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \hat{\nabla}^\alpha \nabla_\alpha + (1 + \kappa)\lambda^2 \right) F_{\mu\nu} \\ &\quad - 2\Lambda(1 + \kappa)F_{\mu\nu} \\ &\quad + 2\Lambda\kappa(F_{\mu\alpha}u^\alpha u_\nu - F_{\nu\alpha}u^\alpha u_\mu) \end{aligned} \quad (48)$$

Ahora, invocando el resultado de la ecuación (42), y definiendo el campo magnético asociado al tensor de campo  $F_{\mu\nu}$

$$B = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\sigma\alpha\beta} u_\sigma F_{\alpha\beta} \quad (49)$$

y también el campo eléctrico,

$$E_\mu = F_{\mu\rho}u^\rho \quad (50)$$

se tiene de (48) que

$$\left( \hat{\nabla}^\alpha \nabla_\alpha + (1 + \kappa)(\lambda^2 - 2\Lambda) \right) B(x) = 0 \quad (51)$$

y

$$\left( \hat{\nabla}^\alpha \nabla_\alpha + (1 + \kappa)\lambda^2 - 2\Lambda \right) E_\mu(x) = 0 \quad (52)$$

Si llamamos  $m_E(\lambda) = \sqrt{\lambda^2(1 + \kappa) - 2\Lambda}$  al término masivo para el campo eléctrico, y  $m_B(\lambda) = \sqrt{(1 + \kappa)(\lambda^2 - 2\Lambda)}$  al del campo magnético, las ecuaciones (51) y (52) se escriben

$$\left( \hat{\nabla}^\alpha \nabla_\alpha + m_B^2 \right) B(x) = 0, \quad (53)$$

$$\left( \hat{\nabla}^\alpha \nabla_\alpha + m_E^2 \right) E_\mu(x) = 0. \quad (54)$$

Es claro que existe una asimetría en el valor de las masas. Evidentemente, para un valor negativo

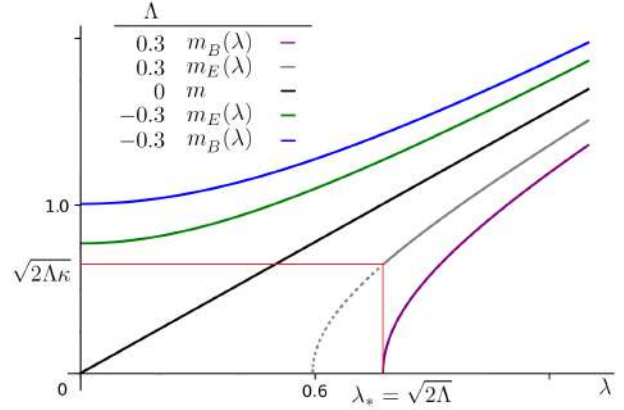


FIG. 2.— Masas de los campos eléctrico y magnético, en función del valor de la constante de acoplamiento de Chern-Simons, para  $\kappa = 0.7$ . Para  $\Lambda < 0$ , la masa del campo magnético es mayor que la del campo eléctrico. Para  $\Lambda = 0$  (i.e. espacio-tiempo plano), las masas son iguales. Para  $\Lambda > 0$ , la masa del campo eléctrico es mayor que la del campo magnético, con un límite inferior en  $\lambda = \lambda_* = \sqrt{2\Lambda}$ , donde la masa del campo magnético es nula, y la masa del campo eléctrico es igual a  $m_E(\lambda_*) = \sqrt{2\kappa\Lambda}$ . Obviamente, para  $-1 < \kappa < 0$ , los papeles de las masas se invierten.

de la constante cosmológica y para  $k > 0$ , la masa del campo magnético es mayor que la masa del campo eléctrico, y en este régimen, todos los valores de la constante de acoplamiento  $\lambda$  de Chern-Simons están permitidos; mientras que, para un valor positivo de la constante cosmológica, la constante de acoplamiento se restringe a  $\lambda^2 \geq 2\Lambda$ , y aquí tendremos que la masa del campo eléctrico será mayor que la del campo magnético (ver Figura 2). Esos resultados sugieren una asimetría fundamental entre las partes eléctrica y magnética del tensor de campo, la cual se manifiesta no solo en el carácter tensorial de ambas partes en dimensiones diferentes a 3+1 (en 2+1, que es nuestro caso, el campo eléctrico es un 3-vector, mientras que el campo magnético es un campo escalar), sino que sus *características inerciales* son diferentes también, cuando interactúan con un medio óptico simple no-dispersivo, habiéndose considerado previamente la corrección de pseudo-Chern-Simons. Tal vez podría esperarse que para  $\lambda = 0$  y constante cosmológica negativa, se recupere la simetría de masas; sin embargo, eso no sucede: aún si despreciamos la contribución *pseudo-topológica* (i.e., estudiamos la teoría de Maxwell solamente), encontraremos una asimetría en las masas de las partes eléctrica y magnética, como puede verse en las ordenadas en el origen de las curvas correspondientes a constante cosmológica positiva en la figura 2. A medida que el valor de  $\kappa$  se reduce acercándose a cero, la diferencia de masas se reduce, y cuando  $\kappa = 0$ , se recuperan los resultados de, por ejemplo, la figura 1, o también, la ecuación (48) se reduce a la ecuación (18). Los valores de las masas en este escenario son  $m_E(0) = \sqrt{-2\Lambda}$  y  $m_B(0) = \sqrt{-2\Lambda(1 + \kappa)}$ . De la figura 2, más bien notamos que la presencia del término *pseudo-topológico* atenúa esta diferencia de masas a medida que crece el valor de la constante de acoplamiento  $\lambda$ .

Un límite interesante es aquel en que  $m_B = 0$ , el cual se consigue haciendo  $\lambda^2 = \lambda_*^2 = 2\Lambda$  para  $\Lambda > 0$ . En tal caso, la masa del campo eléctrico es  $m_E(\lambda_*) = \sqrt{2\Lambda\kappa}$ . En este límite, el campo magnético se propaga a través del medio a la velocidad a la que se propagaría un campo electromagnético de Maxwell, mientras que la parte eléctrica sufrirá un retraso debido a su carácter masivo. Ambas partes deben tener perfiles iniciales tales que las ecuaciones no-dinámicas de (34) se satisfacen (i.e.: las que no contienen derivadas temporales de los campos), más la identidad de Bianchi con índices espaciales (otra vez, una ecuación no dinámica).

#### 4. CONCLUSIONES

Escribimos una acción para la electrodinámica de Maxwell-Chern-Simons en 2+1 dimensiones, y obtuvimos una primera generalización de la ecuación de Klein-Gordon para el campo electromagnético (ecuación (13)). Al analizar el límite de un espacio maximalmente simétrico de la familia de de Sitter, se obtuvo una ecuación de onda masiva (ecuación (19)), cuya masa no solo depende de la constante de acoplamiento de Chern-Simons, como en el caso de un espacio-tiempo plano, sino que el valor de masa se ve afectado por la constante cosmológica. Aquí se pudo relacionar a la constante de acoplamiento con la constante cosmológica para obtener un límite no masivo, en el que el campo electromagnético se propaga a la velocidad de la luz, con perfiles iniciales restringidos por las ecuaciones de campo (20) más la parte no dinámica de la identidad de Bianchi.

Luego, se introdujo la presencia de un medio simple, haciendo uso de la métrica óptica de Gordon. Se escribió la acción de esta electrodinámica en un medio simple, introduciendo un término al cual llamamos de pseudo-Chern-Simons, debido a que su carácter de invariante topológico solo se conserva en el límite de vacío; obtuvimos las ecuaciones de campo, y una nueva generalización de la ecuación de Klein-Gordon para el campo electromagnético, con un acople no solo con el tensor de Riemann y contracciones, sino también con la métrica óptica. Aquí exploramos el caso de un espacio tiempo plano, y obtuvimos que los fotones masivos de la teoría se mueven a través de geodésicas tipo tiempo, pero en la geometría riemanniana efectiva de la métrica óptica. Luego exploramos un espacio-tiempo maximalmente simétrico con curvatura escalar diferente de cero, donde obtuvimos que, al separar al tensor de campo en sus componentes eléctrica y magnética,

éstas tienen masas diferentes, las cuales dependen de las constantes ópticas del medio, de la constante de acoplamiento de Chern-Simons, y de la constante cosmológica (ecuaciones (51) y (52)). Sin embargo, notamos que la diferencia de masas no se debe a la presencia del término pseudo-topológico, sino más bien a la presencia del medio óptico en el espacio-tiempo curvo considerado, ya que, como se ve en la figura 2, al hacer nula la constante de acoplamiento para constante cosmológica negativa, aún se tiene tal diferencia de masas, y más bien, al aumentar el valor de la constante de acoplamiento, esta diferencia se atenúa. Luego, sería un error atribuir esta diferencia al término pseudo-topológico. En lugar de eso, la introducción de este término proporciona un mecanismo teórico de atenuación de la diferencia de masas. Luego, la diferencia de masas (o también, la asimetría en las propiedades de propagación) se da en el escenario de un medio óptico teniendo un espacio-tiempo curvo de fondo. Note que son necesarias ambas cosas, ya que, como se vio, en un espacio tiempo plano pero con un medio óptico, no hay tal asimetría de masas, y en un espacio-tiempo curvo maximalmente simétrico pero sin el medio, tampoco existe esta asimetría.

Se señaló también la particular relevancia del límite en el que el campo magnético se propaga sin masa, mientras que el campo eléctrico tiene una masa proporcional al valor de las constantes ópticas del medio y al valor de la constante cosmológica, en el caso en el que esta última tiene un valor positivo.

Como perspectiva, queda el construir el formalismo hamiltoniano de esta teoría, lo cual no solo permitiría analizar la dinámica y los grados de libertad de calibre, sino que a partir de ahí se podría cuantizar la teoría, obteniéndose una teoría cuántica de campos en un espacio tiempo curvo. También, resta el analizar la estructura causal que surge de la métrica óptica y de la diferencia de masas de los componentes del tensor de campo electromagnético. Una perspectiva adicional es la de construir una teoría análoga con campos de calibre no abelianos.

#### AGRADECIMIENTOS

Se agradece a Zui Oporto, Ph.D., por sus invaluable consejos para el desarrollo de este trabajo, y a Valeria Burgoa, por su ayuda con la elaboración de las figuras.

#### Conflicto de intereses

El autor declara que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

#### REFERENCIAS

- Deser, S., Jackiw, R., & Templeton, S. (1982), *Annals of Physics* **140**, 148.
- Gordon, W., (1923) *Annals of Physics* **22**, 421
- Jackson, J. D. (1998). *Classical Electrodynamics Third Edition* (3rd ed.).
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1980). *The Classical Theory of Fields: Volume 2 (Course of Theoretical Physics Series)* (4th ed.). Butterworth-Heinemann.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., & Kaiser, D., I. (2017). *Gravitation*. Princeton University Press.
- Novello, M., & Bittencourt, E. (2012) *Phys. Rev. D* **86**, 124024
- Thompson, T. (2018) *Phys. Rev. D* **97**, 065001
- Weinberg, S. in *Understanding the Fundamental Interactions*, edited by A. Zichichi (Plenum, New York, 1978)

## DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA EN UNA RED DE ENLACE FUERTE BAJO UN POTENCIAL COULOMBIANO

### THE DYNAMICS OF A PARTICLE IN A TIGHT-BINDING LATTICE UNDER A COULOMB POTENTIAL

JAVIER ALEJANDRO VELASCO VILLARROEL [1] & DIEGO SANJINÉS CASTEDO [2]<sup>†</sup>

Instituto de Investigaciones Físicas, Universidad Mayor de San Andrés  
Campus Universitario, c. 27 Cota-Cota, Casilla de Correos 8635  
La Paz - Bolivia

(Recibido 10 de octubre de 2021; aceptado 28 de noviembre de 2021)

<https://doi.org/10.53287/rkvz2772qg20p>

#### RESUMEN

Estudiamos la dinámica de enlace fuerte (*tight-binding*) de una partícula cargada que se mueve por el mecanismo de *hopping* en una red unidimensional, bajo el efecto de un potencial coulombiano debido a otra partícula inmóvil (impureza). La dinámica cuántica de la partícula se estudia por medio del método pseudo-espectral adaptado a un Hamiltoniano de enlace fuerte con interacciones a primeros vecinos; los resultados para los valores esperados de posición y velocidad se comparan con los obtenidos por el método semiclásico invocando al potencial efectivo en la red. Los resultados son notablemente similares cuando la partícula se encuentra lejos de la impureza pues allí el campo coulombiano es aproximadamente uniforme, mientras que cerca de la impureza los resultados difieren debido a la dispersión cuántica del paquete de ondas en presencia de un campo altamente inhomogéneo. Sin embargo, y de manera interesante, los resultados cuánticos y semiclásicos coinciden en el régimen del continuo (relación de dispersión parabólica) debido a la transmisión del paquete de ondas a través de la impureza.

*Descriptor:* Modelo de enlace fuerte – método semiclásico – sistemas excitónicos.

Código(s) PACS: 31.15.aq — 03.65.Sq — 71.35.-y

#### ABSTRACT

We study the tight-binding dynamics of a charged particle by the hopping mechanism in a one - dimensional lattice under the action of a Coulomb potential due to another fixed particle (impurity). The quantum dynamics is studied using the pseudo-spectral method applied to a tight-binding Hamiltonian with nearest neighbors interactions. The resulting expected values for position and velocity are then compared with those deduced by the semi-classical method invoking the effective potential in the lattice. These results are notably similar when the particle is located far from the impurity position since the Coulomb field is approximately uniform, while when near to the impurity the results are different due to the quantum dispersion of the particle's wavepacket under a highly inhomogeneous field. Interestingly, however, the quantum and semiclassical results coincide in the continuous regime (parabolic dispersion relation) due to the transmission of the particle's wavepacket through the impurity.

*Subject headings:* Tight-binding model – semiclassical method – excitonic systems.

#### 1. INTRODUCCIÓN

El problema de Coulomb en una red (unidimensional) se refiere en este trabajo a las características del movimiento de una partícula con carga eléctrica  $q$  en presencia de un campo Coulombiano con energía potencial  $V(x) = -V_0/x$ , provocado por otra partícula (impureza) con carga eléctrica  $Q$  que se encuentra fija en  $x = 0$ . Invocamos el modelo de enlace

fuerte (*tight-binding*) para describir el movimiento de la primera partícula por el mecanismo de *hopping*.

Este problema es relevante, por ejemplo, en la física de procesos excitónicos en cristales moleculares (Merrifield 1961; Nakijama *et al.* 1980) y en la teoría de muchos cuerpos del excitón de Hubbard fuertemente acoplado (Gallinar 1979; Hubbard 1978). En Gallinar (1984) se calcula el espectro energético usando la técnica de las funciones de Green. Asimismo, en Kvitsinsky (1992) se resuelve de manera exacta el problema cuántico para los estados estacionarios de la partícula en una

<sup>[1]</sup><https://orcid.org/0000-0001-6570-2677>

<sup>[2]</sup><https://orcid.org/0000-0001-6832-9513>

<sup>†</sup>diegosanjinescastedo@gmail.com

red unidimensional, dichas eigenfunciones se expresan en términos de funciones hipergeométricas. En Petrova y Moesner (2016) se amplía el resultado obtenido por Gallinar (1984) y se muestra una solución analítica completa para el espectro de energías en el caso de la red de Bethe. En la mayoría de las aplicaciones referidas en Petrova y Moesner (2016); Burgess (2016); Wang *et al.* (2021) es posible obtener información relevante a partir del espectro energético y la densidad de estados que es importante, entre otros, para la determinación del espectro debido a impurezas, lo que permite comprender cómo modificar la brecha de un material a fin de controlar las propiedades de conducción eléctrica.

Si bien en la mayoría de las referencias citadas se atiende la cuestión de determinar el espectro energético, no encontramos –hasta donde pudimos averiguar– los casos donde se muestre de manera explícita la dinámica de la partícula. Existe riqueza física en el análisis de la evolución temporal del paquete de ondas, que es un problema derivado del estudio de los efectos de una impureza en una red, como en el estudio del excitón, (Merrifield 1961) los antiferromagnetos (Petrova y Moesner 2016) y la localización de Anderson. (Petrova y Moesner 2016) De hecho, en Petrova y Moesner (2016) se menciona que el estudio de la evolución temporal de una partícula en la red de Bethe puede servir como base para estudiar de manera aproximada la dispersión de una partícula en “hielo cuántico”. En el caso del excitón, el tiempo de vida media para la recombinación es del orden de nanosegundos; (Nakijama *et al.* 1980) si el periodo de la oscilación del electrón (considerando que el hueco está fijo) resulta ser menor a dicho tiempo de recombinación, entonces la evolución temporal del estado electrónico es relevante para describir las propiedades de transporte eléctrico pues permite prever un posible escenario experimental para detectar la radiación de dipolo asociada a dicha oscilación.

Nuestro trabajo está organizado de la siguiente forma: en la Sección 2 se desarrolla el formalismo cuántico y la aproximación semiclásica relevantes para esta investigación; en la Sección 3 se presentan dos casos de estudio numéricos correspondientes a la evolución de la partícula en regiones lejanas y cercanas a la impureza; en la sección 4 se desarrolla la aproximación de la dinámica en el régimen del continuo. Finalmente, en la sección 5 se resume las conclusiones más relevantes y algunas posibles orientaciones.

## 2. FORMALISMO CUÁNTICO Y MODELO SEMICLÁSICO

El Hamiltoniano cuántico de enlace fuerte para una partícula con carga eléctrica  $q$  moviéndose en una red con constante reticular  $a$  por el mecanismo de *hopping* y bajo el efecto de un potencial Coulombiano  $V_n = -V_0/|na|$  es

$$\hat{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( A|n\rangle\langle n+1| + A|n+1\rangle\langle n| + V_n|n\rangle\langle n| \right), \quad (1)$$

donde  $A$  es el elemento de salto entre sitios vecinos de la red;  $V_0/(Kq^2) = Q/q$  indica el valor de la carga eléctrica  $Q$  (localizada en  $n = 0$ ) en múltiplos de  $q$ . La solución de la ecuación de Schrödinger  $\hat{H}|\Psi\rangle = i\hbar\partial|\Psi\rangle/\partial t$  en la base de funciones de Wannier es el estado normalizado

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle, \quad (2)$$

tal que  $\langle\Psi|\Psi\rangle = \sum_n |c_n(t)|^2 = 1$ . El centroide del paquete de ondas es  $z(t) = \langle\Psi|x|\Psi\rangle = a \sum_n |c_n(t)|^2 n$  y su velocidad es  $\dot{z} = (z(t+\Delta t) - z(t))/\Delta t$ , donde  $x = an$  se proyectó en el subespacio discreto de la red. La aplicación del método pseudo-espectral en una banda (Sanjines y Gallinar 1999) conduce a la fórmula iterativa para los coeficientes  $c_n(t)$ :

$$c_n(t + \Delta t) = \sum_m c_m(t) i^{m-n} J_{m-n}(2A\Delta t/\hbar) \times \exp\left(-i\Delta t(V_n + V_m)/2\hbar\right). \quad (3)$$

La singularidad debida a  $V_n = -V_0/|na|$  si  $n = 0$  se evita haciendo que  $c_0 = 0$  en (3); esta anulación no representa un peso estadístico significativo en la distribución de probabilidad del paquete, por lo que su evolución subsiguiente queda prácticamente inalterada. La energía correspondiente al estado  $|\Psi\rangle$  es  $\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle \equiv \langle\hat{H}\rangle = \langle\hat{T}\rangle + \langle\hat{V}\rangle$ , donde los valores esperados de las energías cinética y potencial son:

$$\langle\hat{T}\rangle = 2A \sum_n \text{Re}(c_n^* c_{n+1}), \quad (4)$$

$$\langle\hat{V}\rangle = -V_0 \langle 1/x \rangle = -(V_0/a) \sum_n |c_n|^2 (1/n). \quad (5)$$

La energía potencial  $\langle\hat{V}\rangle$  se puede expresar en términos de los momentos estadísticos de una distribución de probabilidad,  $W(t)$  (valor cuadrático medio),  $S(t)$  (sesgo) y  $K(t)$  (curtosis), definidos con respecto al centroide o valor medio del paquete de ondas como:

$$W = \sum_n |c_n|^2 (na - z)^2, \quad (6)$$

$$S = \sum_n |c_n|^2 (na - z)^3, \quad (7)$$

$$K = \sum_n |c_n|^2 (na - z)^4, \quad (8)$$

de tal forma que

$$\langle\hat{H}\rangle = \langle\hat{T}\rangle - \frac{V_0}{z} + E_m, \quad (9)$$

donde

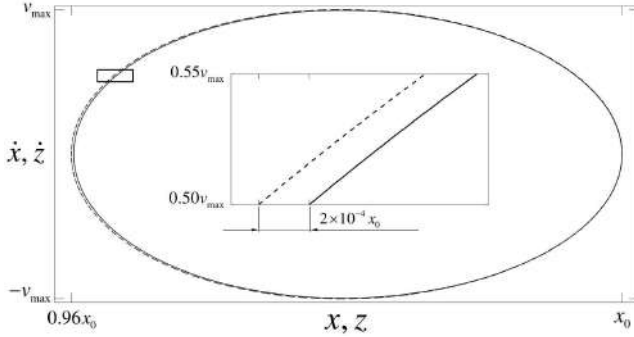


FIG. 1.— Trayectorias cuántica y semiclásica para  $Q/q = 120000$  y  $x_0/a = 2500$ .

$$E_m = V_0 \left( -W/z^3 + S/z^4 - K/z^5 \right) + O \left[ (na - z)^5/z^6 \right] \quad (10)$$

se define como la “energía de los momentos estadísticos”.

A continuación aplicamos el método semiclásico al estudio del problema propuesto en este trabajo. Una justificación concisa y pedagógica de dicho método al caso de un potencial periódico en general se puede encontrar, por ejemplo, en el Cap. 12 de Ashcroft y Mermin (1976).

La evolución de la posición  $x$  y el momentum cristalino  $k$  está dada por las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{x} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial k}, \quad \dot{k} = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (11)$$

donde la energía total  $E$  es igual al valor de la función hamiltoniana  $H(x, k)$  que se construye como

$$H(x, k) = 2A(1 - \cos ak) + V(x), \quad (12)$$

a partir de la estructura de banda  $\epsilon(k) = 2A(1 - \cos ak)$  correspondiente al Hamiltoniano libre  $\hat{H}_0$  en (1) con  $V_n = 0$ , i.e.,  $\hat{H}_0 |k\rangle = \epsilon(k) |k\rangle$ , siendo  $|k\rangle$  los estados de Bloch. Siguiendo a Ashcroft y Mermin (1976) en la descripción semiclásica de la dinámica electrónica, la velocidad  $v(k)$  y la masa efectiva  $m(k)$  están dadas en función a la energía de la banda  $\epsilon(k)$  como

$$v(k) = (1/\hbar) \partial \epsilon(k) / \partial k = (2Aa/\hbar) \sin ak, \quad (13)$$

$$1/m(k) = (1/\hbar^2) \partial^2 \epsilon(k) / \partial k^2 = (2Aa^2/\hbar^2) \cos ak. \quad (14)$$

Así, para la partícula que está inicialmente en reposo,  $v(0) = 0$  y  $m(0) = \hbar^2/(2Aa^2)$ . Luego, se define el potencial efectivo  $V_{ef}(x)$  y la masa efectiva  $m$  en la red por

$$m\ddot{x} = -\partial V_{ef}(x) / \partial x, \quad (15)$$

$$m = \lim_{a \rightarrow 0, A \rightarrow \infty} \frac{\hbar^2}{2a^2 A}, \quad (16)$$

de donde se obtiene (Martínez *et al.* 2014)

$$\frac{\hbar^2}{m} V_{ef}(x) = \frac{1}{2} a^2 V^2(x) - a^2 E V(x). \quad (17)$$

Así, para el caso del potencial coulombiano  $V(x) = -V_0/|x|$  considerado en este trabajo, donde la partícula se encuentra inicialmente en reposo en la posición  $x_0$ , la ec. (15) se puede integrar para obtener la ecuación de la trayectoria en el espacio  $(x, \dot{x})$ :

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left( \frac{V_0}{|x|} - \frac{V_0}{x_0} \right) - \frac{a^2}{\hbar^2} \left( \frac{V_0}{|x|} - \frac{V_0}{x_0} \right)^2}, \quad (18)$$

donde la función par  $\dot{x}(x)$  está definida en el dominio  $(-|x_0|, 0^-) \cup (0^+, |x_0|)$ . Para  $x > 0$  se obtienen los intervalos  $(x_r, x_0)$  para la posición y  $(-v_m, v_m)$  para la velocidad, donde

$$x_r = \frac{x_0 V_0}{4Ax_0 + V_0}, \quad v_m = \frac{\hbar}{ma}. \quad (19)$$

El periodo  $\tau$  de una órbita de la trayectoria en el espacio  $(x, \dot{x})$  se calcula de (18) como

$$\begin{aligned} \tau &= 2 \int_{x_r}^{x_0} \left\{ \frac{2}{m} \left( \frac{V_0}{x} - \frac{V_0}{x_0} \right) - \frac{a^2}{\hbar^2} \left( \frac{V_0}{x} - \frac{V_0}{x_0} \right)^2 \right\}^{-1/2} dx \\ &= \frac{2}{D^2} \left[ \sqrt{(B - Dx_0)^2 + C} \right. \\ &\quad \left. - \log \left( \sqrt{(B - Dx_0)^2 + C} - Dx_0 + B \right) \right] \\ &\quad - \frac{2}{D^2} \left[ \sqrt{(B - Dx_r)^2 + C} \right. \\ &\quad \left. - \log \left( \sqrt{(B - Dx_r)^2 + C} - Dx_r + B \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

con coeficientes  $B, C, D$  que dependen de los parámetros  $a, m, x_0, V_0$ .

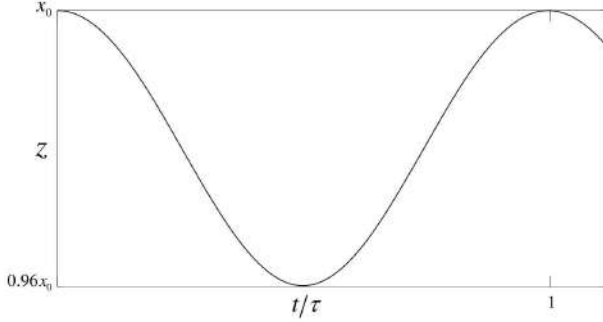
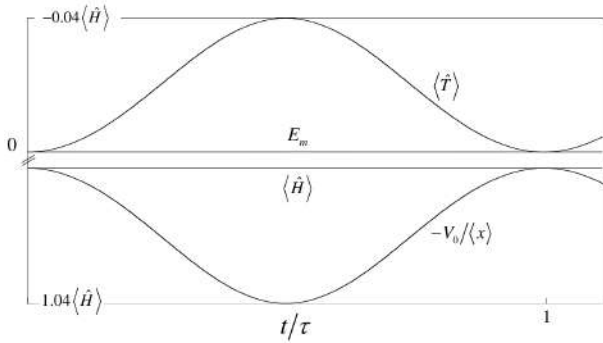
### 3. CASOS DE ESTUDIO

Se muestran a continuación los resultados de dos casos de estudio. El primero se eligió de tal forma que el movimiento de la partícula se realice “lejos” de la impureza comenzando en el sitio  $n = x_0/a = 2500$  y con una relación de cargas  $Q/q = 120000$ . El segundo caso se eligió de tal forma que el movimiento se realice “cerca” de la impureza comenzando en el sitio  $n = x_0/a = 50$  y con una relación de cargas  $Q/q = 100$ . En todos los casos el paquete de ondas inicial es gaussiano:

$$c_n(0) = \left( \frac{2}{\pi b} \right)^{1/4} e^{-(n-n_0)^2/b}. \quad (21)$$

#### 3.1. Caso de la dinámica “lejana”

En la Fig. 1 se muestra las trayectorias superpuestas en los espacios  $(z, \dot{z})$  y  $(x, \dot{x})$ . Puede verse que las trayectorias cuántica y semiclásica prácticamente coinciden. En la Fig. 2 se muestra la gráfica de  $z(t)$ . A fin de cuantificar dicha coincidencia se definen las siguientes cantidades:

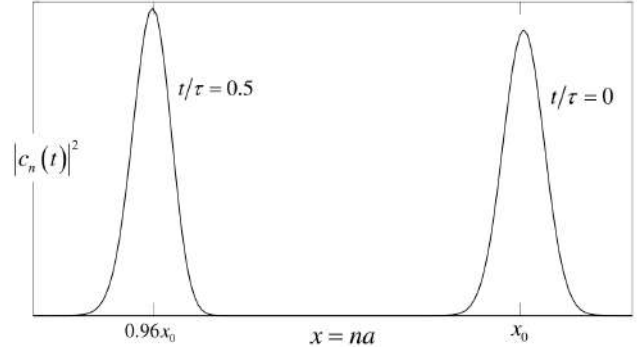
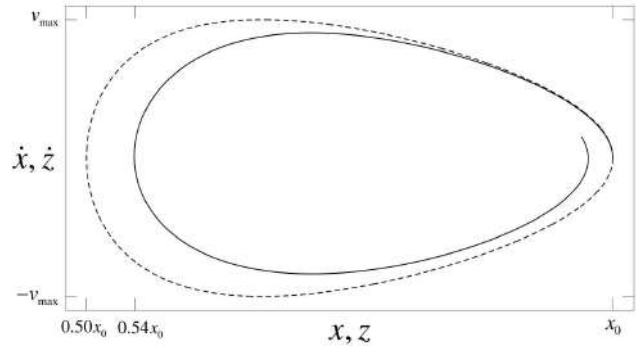
FIG. 2.—  $z$  vs.  $t/\tau$  para  $Q/q = 120000$  y  $x_0/a = 2500$ .FIG. 3.— Parámetros energéticos para  $Q/q = 120000$  y  $x_0/a = 2500$ .

$$\epsilon_x = \frac{(z - x)_{max}}{(x_r - x_0)}; \quad \epsilon_v = \frac{(\dot{z} - \dot{x})_{max}}{2v_{max}}. \quad (22)$$

Los valores que se obtiene son  $\epsilon_x = 0.40\%$  y  $\epsilon_v = 0.22\%$ , lo que confirma la buena coincidencia de los resultados cuántico y semiclásico.

Para estudiar los parámetros energéticos desde el modelo cuántico, se realiza la gráfica de la evolución temporal de  $\langle \hat{T} \rangle$ ,  $-V_0/z$  y  $E_m$ . En la Fig. 3 puede verse que el valor de  $E_m$  es muy pequeño y por lo tanto no tiene efecto sobre la dinámica de la partícula; los términos de energía  $\langle \hat{T} \rangle$  y  $-V_0/z$  tienen un comportamiento análogo al predicho mediante el modelo semiclásico. Dado que el aporte de  $E_m$  es casi nulo, se puede decir que durante el movimiento la energía total se distribuye entre los términos  $\langle \hat{T} \rangle$  y  $-V_0/z$ . La Fig. 4 muestra la evolución del paquete de ondas a través de  $|c_n(t)|^2$ . Puede verse que el paquete mantiene su forma gaussiana y se va deformando muy poco. Así, el valor del sesgo a lo largo del tiempo es muy pequeño mientras el valor cuadrático medio y la curtosis varían muy poco, como debe ser si el valor de  $E_m$  es muy pequeño. Este caso corresponde al fenómeno conocido de la oscilación de Bloch (Hartmann *et al.* 2004) y es el resultado de la evolución de un paquete de ondas en presencia de un campo externo homogéneo, lo que se cumple aproximadamente para el campo Coulombiano de la impureza en la región “lejana”.

### 3.2. Caso de la dinámica “cercana”

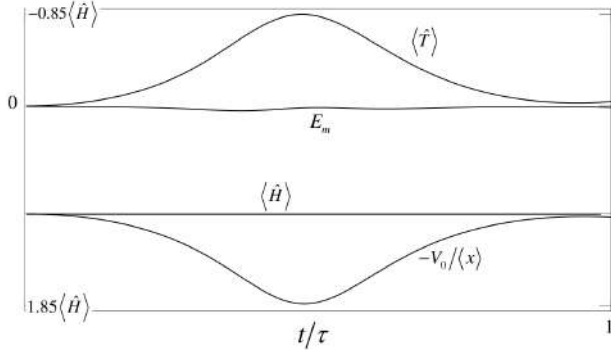
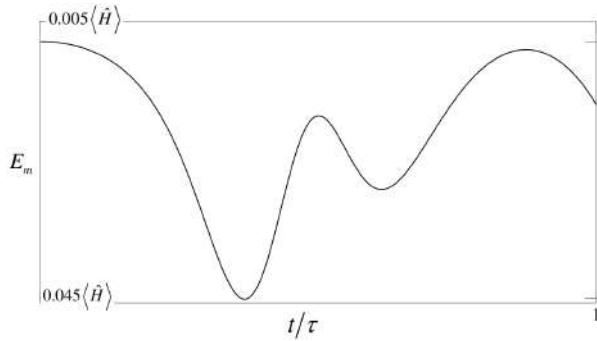
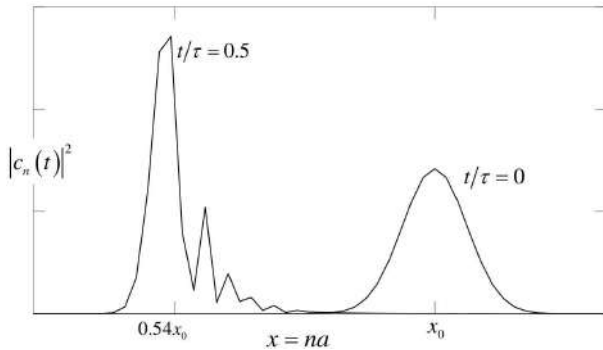
FIG. 4.— Densidad de probabilidad para  $Q/q = 120000$  y  $x_0/a = 2500$ .FIG. 5.— Trayectorias cuántica y semiclásica para  $Q/q = 100$  y  $x_0/a = 50$ .

En la Fig. 5 se muestra una comparación entre la trayectoria cuántica (línea sólida) en el espacio  $(z, \dot{z})$  y la trayectoria semiclásica (línea segmentada) en el espacio  $(x, \dot{x})$ . Los valores  $\epsilon_x = 9.20\%$  y  $\epsilon_{vel} = 8.20\%$  indican la discrepancia entre ambas trayectorias lo que se aprecia en el hecho de que la trayectoria cuántica no se cierre.

El origen de esta discrepancia numérica se halla en las ecs. (9) y (10) para  $\langle \hat{H} \rangle$  y  $E_m$ , respectivamente. Durante el ciclo de la Fig. 5 los valores de  $z$  se encuentran cerca del sitio  $x = 0$  de la impureza, donde el valor de  $E_m$  se vuelve relevante (Fig. 7) y la energía total se distribuye entre los términos  $\langle \hat{T} \rangle$ ,  $-V_0/z$  y  $E_m$ . Como consecuencia de la relevancia del término  $E_m$ , el valor de la energía total se mantiene constante en cualquier instante pues los otros dos términos adoptan valores menores a sus correspondientes semiclásicos (Fig. 6), lo cual explica que los valores de  $z$  y  $\dot{z}$  sean menores que  $x$  y  $\dot{x}$ .

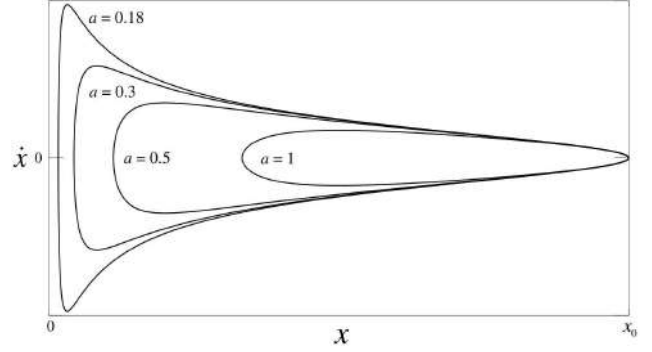
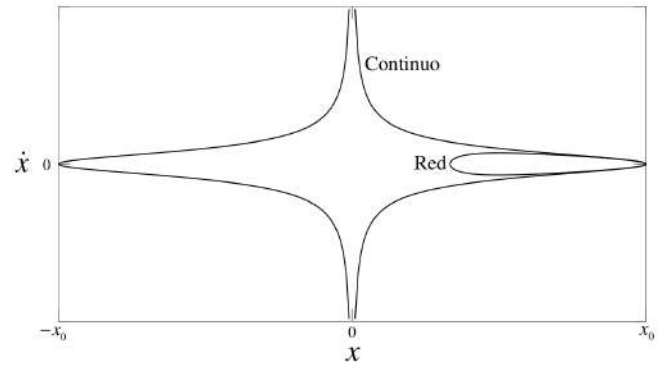
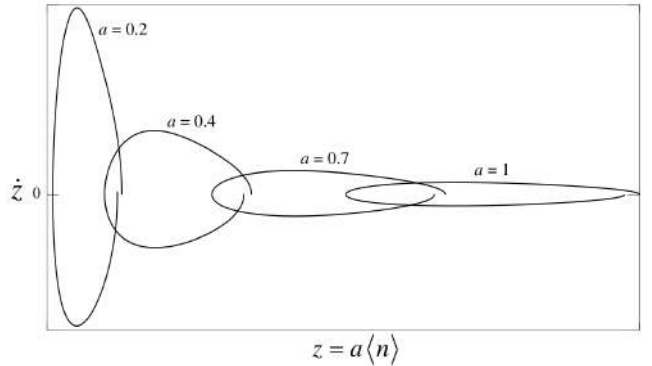
Así, cuando el paquete de ondas se mueve cerca de la impureza, los términos de la energía asociados a los momentos estadísticos son significativos y se ven “revelados” debido a la extensión del paquete en presencia del campo coulombiano inhomogéneo. En la Fig. 8 se muestra la evolución de la densidad de probabilidad del paquete de ondas para  $t = 0$  y  $t = \tau/2$ . De nuevo, la deformación del paquete está asociada al aumento del valor de los momentos estadísticos con energía  $E_m$ .

### 4. TRANSICIÓN AL RÉGIMEN DEL CONTINUO


 FIG. 6.— Parámetros energéticos para  $Q/q = 100$  y  $x_0/a = 50$ .

 FIG. 7.— Evolución de  $E_m$  para  $Q/q = 100$  y  $x_0/a = 50$ .

 FIG. 8.— Densidad de probabilidad para  $Q/q = 100$  y  $x_0/a = 50$ 

La transición al régimen del continuo se realiza mediante los límites  $a \rightarrow 0$  y  $A \rightarrow \infty$  considerados en la ec. (16) donde se definió la masa efectiva. En la Tabla 1 se muestran las variables relevantes en dicho régimen.

En la Fig. 9 se muestra las trayectorias en el espacio  $(x, \dot{x})$  correspondientes a diferentes valores de  $a/x_0$  de tal forma que en todos los casos el sitio inicial de la red es el mismo. Puede verse que a medida que  $a \rightarrow 0$ , el valor de la velocidad máxima es cada vez mayor mientras el punto de retorno se aproxima cada vez más al origen. En la Fig. 10 se muestran las trayectorias semiclásicas para el caso de la red ( $a > 0$ ) y del continuo ( $a = 0$ ). Ya que la velocidad semiclásica  $\dot{x}(x)$  en (18) diverge en  $x = 0$ , y dado que las ecs. de Hamilton (11) son compatibles con la ec. de Schrödinger no-relativista, invocaremos un mecanismo cuántico para justificar el “salto” de


 FIG. 9.— Trayectorias semiclásicas en el espacio  $(x, \dot{x})$  en la red para diferentes valores de  $a/x_0$  con valores unitarios de  $x_0$  y  $Q/q$ .

 FIG. 10.— Trayectorias semiclásicas en el espacio  $(x, \dot{x})$  en la red ( $a > 0$ ) y en el continuo ( $a = 0$ ) para valores unitarios de  $x_0$  y  $Q/q$ .

 FIG. 11.— Trayectorias cuánticas en el espacio  $(z, \dot{z})$  para diferentes valores de  $a$  con  $Q/q = 100$  y  $n_0 = 50$ .

la partícula a través de la discontinuidad de  $\dot{x}(x)$  en  $x = 0$ , de tal forma que la velocidad se mantenga constante y dentro del límite no-relativista durante dicho “salto”, esto es,  $\dot{x}(0^-) = \dot{x}(0^+) \ll c$ . Así, por dicho mecanismo, la posición de la partícula oscilaría periódicamente en el intervalo  $(-|x_0|, |x_0|)$  transmitiéndose a través de la impureza localizada en  $x = 0$ .

La Fig. 11 muestra las trayectorias cuánticas en el espacio  $(z, \dot{z})$  correspondientes a las de la Fig. 9 para diferentes valores de  $a$ ; en todos los casos la partícula es liberada desde el mismo sitio  $n_0 = 50$ . A medida que  $a \rightarrow 0$ , el valor de la velocidad máxima aumenta mientras la partícula se acerca a la impureza. En la

TABLA 1

LÍMITE EN EL CONTÍNUO DE LAS VARIABLES SEMICLÁSICAS.

$V_{ef}(x) \rightarrow -V_0/ x $
$v_{max} \rightarrow \infty$
$x_r \rightarrow 0$
$\tau \rightarrow \pi x_0 \sqrt{m x_0 / (2V_0)}$

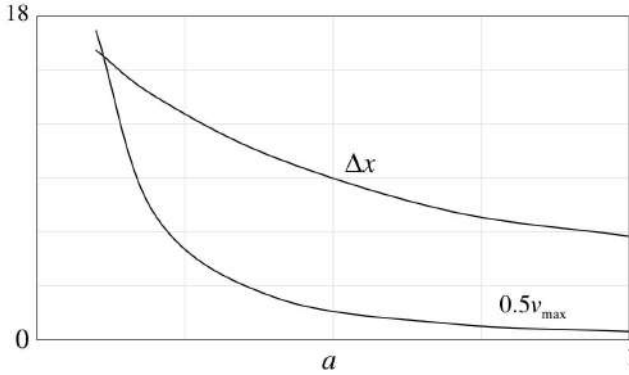


FIG. 12.— Valores adimensionales de la (semi)velocidad máxima  $v_m$  y de la incertidumbre de la posición  $\Delta x$  en función de  $a$  para  $Q/q = 100$  y  $n_0 = 50$ .

Fig. 12 se muestran los valores adimensionales de la (semi)velocidad máxima y la incertidumbre en la posición  $\Delta x \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$  en el sitio donde ocurre esa velocidad máxima.

Estos resultados sugieren invocar un *principio de incertidumbre en la red* expresado por  $\Delta x \Delta k \gtrsim 1$  (con  $\dot{z} \cong \dot{x} = \hbar k/m$ ), como el referido mecanismo de “salto” de la partícula. Esto es, a medida que  $a \rightarrow 0$ , el valor de  $\Delta x$  aumenta, así que necesariamente el valor de  $\Delta k$  debe disminuir. Luego, el paquete de ondas se transmite a través de la impureza en  $x = 0$ , manteniendo aproximadamente el mismo valor de la velocidad ( $\Delta k \gtrsim 0$ ). Este salto no ocurre entre las posiciones  $x$  y  $-x$  lejos de la impureza ya que el valor de  $\Delta x$  no es suficientemente grande como para satisfacer la condición  $\Delta x \Delta k \gtrsim 1$  de manera consistente con el mecanismo de salto sugerido por la trayectoria en el continuo en la Fig. 10. El “rebote” de la partícula descrito por la transición  $v_m \rightarrow -v_m$  en el sitio  $x = 0^+$  (Figs. 9 y 11) correspondería a la expresión  $\Delta x \Delta k \gg 1$  dada la gran aceleración que experimentarían la partícula en comparación a la de su transmisión a través de la impureza. Este caso no se puede describir con el modelo físico supuesto en este trabajo dado por el hamiltoniano conservativo  $\hat{H}$  en la ec. (1).

Así, y dentro de los límites de validez de dicho modelo físico, el referido *principio de incertidumbre en la red* que justifica la transmisión de la partícula a través de la impureza ( $\Delta x \gg a$  y  $\Delta x \cong a$  cuando la partícula está cerca y lejos de la impureza, respectivamente), no supone una transición abrupta entre las probabilidades de transmisión a medida que la

partícula se acerca a la impureza.

## 5. CONCLUSIONES, INTERPRETACIÓN Y PERSPECTIVAS

En este trabajo se estudió el problema de Coulomb en una red (unidimensional) referido a la dinámica de una partícula cargada en presencia del campo eléctrico provocado por otra partícula (impureza) que se encuentra fija en la red. Invocamos el modelo de enlace fuerte (*tight-binding*) para describir el movimiento de la primera partícula por el mecanismo de *hopping*. La integración temporal de la ecuación de Schrödinger se realizó por el método pseudo-espectral adaptado al caso del hamiltoniano de enlace fuerte con una energía potencial coulombiana y un paquete de ondas inicial gaussiano. Por otra parte, se aplicó asimismo la aproximación semiclassical por medio de las ecuaciones de movimiento de Hamilton a una función hamiltoniana construida a partir del espectro cuántico de la partícula libre para estados de Bloch y la energía potencial coulombiana; se invocó la definición de la masa efectiva en términos de la 2da ley de Newton para deducir parámetros de las trayectorias semiclassicals a partir de un potencial efectivo. En el problema considerado en este trabajo la coincidencia entre los resultados cuánticos y semiclassicals es razonablemente buena y permite dilucidar aspectos relevantes de la dinámica del paquete de ondas.

Esos resultados referidos corresponden a dos casos: la dinámica “lejana” y la dinámica “cercana”, especificadas así dependiendo de la separación entre la posición de la impureza y la posición inicial de la partícula. En el primer caso se verificó que la partícula efectúa aproximadamente oscilaciones de Bloch, como era de esperar en vista de la cuasihomogeneidad del campo coulombiano en esa región “lejana” (Figs. 1–4). En el segundo caso los términos de la energía total correspondientes a los momentos estadísticos son relevantes y la deformación del paquete de ondas es significativa cerca de la impureza, lo que está asociado a la inhomogeneidad del campo coulombiano en esa región (Figs. 5–8).

A fin de contrastar aún los resultados cuánticos y semiclassicals, se invocó el límite del continuo de manera consistente con la aproximación de masa efectiva definida en la ec. (16). La solución semiclassical no es continua en dicho límite dada la divergencia de  $\lim_{|x| \rightarrow 0} (1/|x|)$  lo que supone la transición abrupta de la velocidad  $v_m \rightarrow -v_m$  en un intervalo espacial muy pequeño, es decir, la partícula “rebota” en la impureza. Pero este escenario físico es improbable bajo el modelo físico dado por el hamiltoniano conservativo  $\hat{H}$  en la ec. (1) pues la aceleración de la partícula es muy grande como para ignorar la energía del pulso electromagnético generado en tal “rebote”. Así, la otra posible solución continua de la ec. (18) para  $(x, \dot{x})$  en la región  $x < 0$  se puede entender como una consecuencia semiclassical del principio de incertidumbre en la red, esto es,  $v_m$  se mantiene aproximadamente constante ( $\Delta k \gtrsim 0$ ) cuando el paquete está muy deformado cerca de la impureza, de tal forma que  $\Delta x \Delta k \gtrsim 1$ . Luego, la transmisión de

la partícula a través de la impureza y su posterior movimiento en la región  $x < 0$  no involucra grandes valores de la aceleración, pero ya que el movimiento es periódico entre los extremos  $\pm x_0$  entonces habrá una radiación de dipolo de baja energía que podría detectarse por las técnicas convencionales que se usan para observar la oscilación de Bloch.

Los casos estudiados en este trabajo pueden ser relevantes, por ejemplo, para estudiar la dinámica de un electrón en un sistema electrón-hueco (excitón) en una red, donde el hueco (impureza) se encuentra aproximadamente fijo debido a su mayor masa efectiva. El periodo de la oscilación para el caso del “rebote” del electrón (región  $0 < x < x_0$ ) calculado en la ec. (20) es del orden del periodo de la oscilación

de Bloch,  $\tau \cong 10^{-13}$  s, mientras que el periodo en el caso de la transmisión a través del hueco es  $2\tau$ . Por otra parte, el tiempo de recombinación típico de un excitón en cristales moleculares es del orden de  $10^{-9}$  s, por lo que se producen unas  $10^4$  oscilaciones del electrón durante un régimen transitorio antes de la recombinación, lo que podría permitir hacer observaciones (a través de la radiación de dipolo) para dilucidar si el electrón rebota, o se transmite, o acaso rebota y se transmite, lo que seguramente arrojará resultados interesantes sobre la física de este tipo de fenómenos.

### Conflicto de intereses

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

### REFERENCIAS

- Ashcroft N. & Mermin N. D. (1976) *Solid State Physics* (Saunders College, Philadelphia).
- Burgess C. (2016) Coulomb potential on a lattice using graph theory, Tesis de Maestría en Física, Universidad de California, Santa Bárbara, USA.
- Gallinar J.-P. (1979) “Quasi one dimensional conductors II”, p. 105, Springer Lecture Notes in Physics, vol. 96, Springer, Berlin.
- Gallinar J.-P. (1984) *Phys. Lett. A*, **103**, 72.
- Hartmann T., Keck F., Korsch H. J. & Mossmann S. (2004) *New J. Phys.* **6**, 2.
- Hubbard J. (1978) *Phys. Rev. B* **47**, 494.
- Kvitsinsky A. (1992) *J. of Phys. A* **25**, 65.
- Martínez L. A., Sanjinés D. & Gallinar J.-P. (2014) *Int. J. Mod. Phys. B* **28**, 1450173.
- Merrifield R. (1961) *J. of Chem. Phys.* **34**: 1835-1839.
- Nakajima S., Toyozawa Y. & Abe R. (1980) “The Physics of Elementary Excitations”, Springer Series in Solid State Sciences, vol. 12, Springer, Berlin.
- Petrova O. & Moesner R. (2016) *Phys. Rev. E* **93**, 012115.
- Sanjines D. & Gallinar J.-P. (1999) *J. Phys. Cond. Matter* **11**, 3729-3742.
- – (2001) *Phys. Rev. B* **64**, 054301.
- Wang J., Van Pottelberge R., Zhao W. & Peeters F. (2021) arXiv e-prints, 2021, p. arXiv: 2105.05065.

## LA OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA Y LA OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA COMO PROGRAMA DE INCENTIVO AL ESTUDIO DE LA FÍSICA EN BOLIVIA (\*)

## THE BOLIVIAN PHYSICS OLYMPIAD AND THE BOLIVIAN ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS OLYMPIAD AS AN INCENTIVE PROGRAM FOR THE STUDY OF PHYSICS IN BOLIVIA

BUSTOS E. R. O. E.<sup>1, 2, 3, 16</sup> [1], MAMANI C. E.<sup>1, 2, 3</sup> [2], SANJINÉS C. D.<sup>1, 2, 3</sup> [3], RALJEVIC E. M.<sup>1, 2, 3</sup>, SUBIETA F. V.<sup>3</sup>, BURGOA M. A.<sup>2, 3</sup>, RODRÍGUEZ B. G. M.<sup>3</sup>, ROJAS F. L. T.<sup>3</sup>, CARVAJAL T. W. E.<sup>3</sup>, GUAYGUA F. T.<sup>2, 5</sup>, VELAZCO V. J.<sup>5</sup>, ANDRADE U. M.<sup>2, 6</sup>, GUZMÁN S. R.<sup>2, 6</sup>, TERRAZAS J. C.<sup>2, 6</sup>, JAIMES G.<sup>2, 21</sup>, MAMANI R.<sup>2, 7</sup>, BARAÑADO E.<sup>2, 7</sup>, VALDÉZ S.<sup>2, 8</sup>, TAQUICHIRI M.<sup>2, 17</sup>, JAILLITA J.<sup>2, 9</sup>, COPA B. O.<sup>2, 10</sup>, CABRERA J.<sup>11</sup>, VARGAS C.<sup>12</sup>, CORAITE O.<sup>2, 13</sup>, QUIROZ Z.<sup>2, 14</sup>, ORTEGA L.<sup>2, 15</sup>, CORDERO C. M. R.<sup>16</sup>, SANCHEZ V. A.<sup>16</sup>, MARTÍNEZ J. L.<sup>2, 18</sup>, ORTEGA V. T. M.<sup>2, 19</sup>, SAIRE J.<sup>20</sup>, ZALLES B. R.<sup>22</sup>

<sup>1</sup> Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI); <sup>2</sup> Comités Olímpicos Bolivianos de Física – Astronomía y Astrofísica; <sup>3</sup> Universidad Mayor de San Andrés (UMSA), Carrera de Física, La Paz; <sup>4</sup> Universidad Mayor, Real y Pontificia San Francisco Xavier de Chuquisaca (UMRPSFXCH); <sup>5</sup> Universidad Técnica de Oruro (UTO), Facultad Nacional de Ingeniería (FNI), Oruro; <sup>6</sup> Universidad Mayor de San Simón (UMSS), Facultad de Ciencia y Tecnología, Cochabamba; <sup>7</sup> Universidad Autónoma Tomas Frías (UATF), Carrera de Física, Potosí; <sup>8</sup> Unidad Educativa Cardenal Cushing, Santa Cruz de la Sierra; <sup>9</sup> Unidad Educativa María Auxiliadora, Cobija, Pando; <sup>10</sup> Unidad Educativa Domingo Savio, Sucre; <sup>11</sup> Unidad Educativa Amor de Dios, La Paz; <sup>12</sup> Unidad Educativa Buenas Nuevas, Sucre; <sup>13</sup> Unidad Educativa La Salle, Oruro; <sup>14</sup> Instituto Americano, La Paz; <sup>15</sup> Unidad Educativa Felipe Palazón, Tarija; <sup>16</sup> Asociación Boliviana para el Avance de la Ciencia (ABAC); <sup>17</sup> Departamento de Física, Universidad Autónoma Juan Misael Saracho (UAJMS), Tarija; <sup>18</sup> Facultad de Tecnología – Carrera de Ingeniería de Sistemas, Sucre; <sup>19</sup> Asociación para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias (AMEC), Beni; <sup>20</sup> Instituto Americano (past), La Paz; <sup>21</sup> Fundación Educacional San Agustín (F.E.S.A.), Cochabamba; <sup>22</sup> Observatorio Astronómico Nacional, Universidad Juan Misael Saracho (UAJMS), Tarija.

<https://doi.org/10.53287/nysn2914xg25y>

### OBITUARIO

La Olimpiada Boliviana de Física y la Olimpiada Boliviana de Astronomía y Astrofísica rinden su homenaje póstumo al Ing. Tomas Guaygua Fulguera y al Ing. Edgar Ricaldi Yarvi, destacados profesionales quienes siempre estuvieron comprometidos con la educación de las futuras generaciones bolivianas.

### RESUMEN

Los programas de la Olimpiada Boliviana de Física (OBF) y la Olimpiada Boliviana de Astronomía y Astrofísica (OBAA) nacieron de la necesidad de dar una urgente respuesta al desafío sobre cómo incentivar el estudio en la juventud boliviana de las ciencias y dentro de ellas, la Física, la Astronomía y la Astrofísica. Como respuesta se espera generar mayores capacidades científicas y tecnológicas como aporte al desarrollo del país, tanto en lo cultural como en lo económico y social.

La OBF comenzó de manera continua en 1997 mientras que la OBAA comenzó en 2006. A lo largo del tiempo se ha ido motivando el estudio de distintas generaciones de jóvenes de unidades educativas fiscales, privadas y de convenio de todo Bolivia. Inicialmente se empezó invitando a estudiantes bachilleres para que pongan a prueba sus conocimientos pero, entendiendo la importancia de que la motivación debía empezar en categorías más jóvenes, se procedió a invitar a estudiantes desde 6to de primaria y toda secundaria, es decir, siete categorías a nivel nacional. La mayoría de las universidades estatales y privadas bolivianas se han ido nutriendo del talento de los jóvenes ex-olímpicos así como también varias universidades del exterior.

Distintas delegaciones bolivianas participaron en olimpiadas latinoamericanas, iberoamericanas e internacionales demostrando que la juventud boliviana tiene toda la capacidad de ser altamente competitiva fuera de nuestras fronteras. Además, debe resaltarse que el desafío planteado se está cumpliendo, no sólo para el país, sino que también se está contribuyendo con el progreso de la humanidad en general.

Así, el programa de las olimpiadas es, en principio, *ad aeternum*.

**Descriptor:** Ciencia en la escuela — Planes de estudio; métodos de enseñanza, estrategias, teoría de las pruebas y evaluación — Formación de profesores.

Código(s) PACS: 01.40.E- — 01.40.Gm — 01.40.Jp

(\*) Este artículo obtuvo el primer lugar en la categoría de Interacción Social en la 1ra

Feria Virtual de Investigación, Innovación e Interacción Social (INVESTIGA UMSA 2020), organizada por el Departamento de Investigación, Postgrado e Interacción Social – DIPGIS, UMSA.

### ABSTRACT

The Bolivian Physics Olympiad (OBF) and the Bolivian Astronomy and Astrophysics Olympiad (OBAA) programs were created to address the urgent challenge of how to encourage the study of the sciences among Bolivian youth and in particular the study of physics, astronomy and astrophysics. The idea behind the programs has been to generate greater scientific and technological capacities that enhance the cultural, as well as the economic and social aspects for the country's development.

The OBF and OBAA programs started in 1997 and 2006, respectively. Since then, many generations of students have been motivated in public and private educational units in Bolivia. At the start only senior students were invited to participate, but later younger students were targeted and the invitation was extended to 6th grade primary school children and onwards, involving a total of seven categories at a national level. The majority of public and private universities have started nourishing themselves with the talent of those ex-olympic students, as well as, several foreign universities.

Also, many Bolivian delegations have participated in Latinamerican, Iberoamerican and International Olympiads. Participation in these international events has highlighted the competitiveness of Bolivian youth. In addition we stress that the goal put forward is being achieved, not only for our country but also for the benefit of humankind.

Thus, we could say that the olympiads program is, in principle, *ad aeternum*.

*Subject headings:* Science in school — Curricula; teaching methods, strategies, theory of testing and evaluation — Teacher training.

## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1. HISTORIA

En 1997, varios docentes de la Carrera de Física (Facultad de Ciencias Puras y Naturales de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA)) decidieron llevar a cabo las Olimpiadas de Física para estudiantes de colegio. Poco tiempo después, la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y la Carrera de Física de la UMSA recibieron una invitación para participar en la II Olimpiada Iberoamericana de Física (OIbF) que se llevó a cabo en México (la I OIbF se llevó a cabo en Colombia en 1991, Bolivia no participó). Así, se consolidó la Olimpiada Boliviana de Física (OBF), de donde se seleccionan las delegaciones bolivianas que participan en olimpiadas internacionales.

En 2006 el Comité Olímpico de la OBF creó el proyecto de la Olimpiada Boliviana de Astronomía y Astrofísica (OBAA). Como anécdota, la OBF nació antes de la realización de la 1ra Olimpiada Internacional de Astronomía y Astrofísica que se llevó a cabo en Tailandia en 2007. Desde 1997, la OBF, y desde 2006, la OBAA, tienen carácter permanente y las sedes van rotando por distintas regiones del país con la finalidad de integrar y compartir experiencias culturales.

En 1997 la Federación Latinoamericana de Sociedades de Física (FeLaSoFi) (Rodríguez 2004) re-

tomó una idea planteada en 1991 por la UNESCO y organizó de forma continua la Olimpiada Iberoamericana de Física (OIbF), evento al que las delegaciones bolivianas han asistido regularmente.

Desde 1967 el Comité Olímpico Internacional, formado en primera instancia por países europeos (actualmente participan alrededor de 87 países de todo el mundo), organiza anualmente la Olimpiada Internacional de Física (IPhO). Bolivia ha logrado asistir desde la gestión 2003, aunque de manera discontinua (Gorzowski 2006). Desde 2006 el Comité Olímpico Internacional de Astronomía y Astrofísica organizó anualmente la Olimpiada Internacional de Astronomía y Astrofísica (IOAA). Bolivia ha logrado asistir desde la 1ra IOAA en 2007, aunque también de manera discontinua (IOAA 2007).

En 2009 el Comité Olímpico Boliviano de Astronomía y Astrofísica tuvo la iniciativa de organizar la primera Olimpiada Andina de Astronomía y Astrofísica (OAAA) (Bustos Espinoza 2009), evento que se llevó a cabo a orillas del Lago Titicaca (junio de 2009). Entre los asistentes estaban representantes de instituciones que ese mismo año organizaron la primera Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica (OLAA), evento que se llevó a cabo en Brasil (octubre de 2009). Con el fin de no dispersar esfuerzos regionales, el Comité Olímpico Boliviano de Astronomía y Astrofísica decidió no organizar otras versiones de la OAAA y fomentar la participación de delegaciones bolivianas en las OLAA (wiki 2021).

En las OBF y OBAA, desde un principio y como

<sup>[1]</sup><https://orcid.org/0000-0002-6208-3337>

<sup>[2]</sup><https://orcid.org/0000-0002-3484-8582>

<sup>[3]</sup><https://orcid.org/0000-0001-6832-9513>

es natural en una olimpiada, se introdujeron temas que no estaban contemplados en la malla curricular oficial, como por ejemplo: conceptos básicos de física moderna, física nuclear, astronomía observacional, electromagnetismo, astrofísica, análisis de datos, entre otros. Esto fue un reto para ambos comités olímpicos que desde entonces elaboraron estrategias (que se describen más adelante) para afrontar tal desafío.

## 1.2. LA OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA, LA OLIMPIADA BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA

La Olimpiada Boliviana de Física (OBF) y Olimpiada Boliviana de Astronomía y Astrofísica (OBAA) son programas que nacieron de la necesidad de dar una urgente respuesta a la cuestión sobre cómo incentivar en la juventud boliviana el estudio de las ciencias, específicamente, la física y la astronomía y astrofísica, de tal forma de generar mayores capacidades científicas y tecnológicas como aportes al desarrollo cultural, económico y social del país.

Ambas olimpiadas se llevan a cabo anualmente en 7 categorías que corresponden a los últimos 7 años de colegio. Como en la mayoría de los países, el sistema educativo boliviano contempla 12 años de estudios divididos en 6 años de primaria y 6 años de secundaria; generalmente las edades de ingreso al primer año de primaria oscilan entre los 5 y 6 años según la región, el tipo de unidad educativa, etc. Existen 3 tipos de unidades educativas: fiscales (del estado, particulares (o privadas) y de convenio. Un estudiante de 6º de primaria tiene entre 10 a 11 años de edad y los bachilleres tienen una edad que oscila entre los 17 y 18 años en general. Así, en la OBF y la OBAA se invita a que participen las 7 categorías, desde el último año de primaria hasta el último año de secundaria. Sin embargo, si bien se apoyó desde el gobierno nacional la continuidad de ambos programas, se disminuyó el número de categorías a 4, lo que alteró una estrategia que ya había demostrado excelentes resultados, especialmente en las competencias internacionales en las que Bolivia participa.

A continuación mencionemos los objetivos general y específicos de la OBF y la OBAA referidos en esta sección:

### OBJETIVO GENERAL

Dar una urgente respuesta al desafío sobre cómo incentivar en la juventud boliviana el estudio de la Física y la Astronomía y la Astrofísica, para generar mayores capacidades científicas y tecnológicas como aporte al desarrollo cultural, económico y social del país.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Contribuir al mejoramiento del aprendizaje y la enseñanza de la Física, la Astronomía y la Astrofísica.
2. Estimular la creatividad y el interés de los estudiantes por la Física, la Astronomía y la Astrofísica.

3. Despertar vocaciones científicas y tecnológicas.
4. Buscar e identificar a jóvenes talentos.
5. Contribuir a la permanente capacitación y actualización de conocimientos de los docentes de niveles de primaria y secundario.
6. Realizar exámenes simultáneos en todos los departamentos bolivianos.
7. Elaborar textos y publicaciones especializadas sobre la enseñanza de la Física, la Astronomía y la Astrofísica.
8. Fomentar e incentivar la Física, la Astronomía y la Astrofísica en los colegios de las áreas rurales y urbanas de cada departamento.
9. Mejorar continuamente el nivel de enseñanza de la Física y fomentar al estudio de la Astronomía y la Astrofísica.
10. Trabajar en forma conjunta con el Ministerio de Educación, el Ministerio de Planificación para el Desarrollo – Viceministerio de Ciencia y Tecnología, la Academia Nacional de Ciencias, la Asociación Boliviana para el Avance de la Ciencia, la Sociedad Boliviana de Física, etc., en la solución de problemas referentes a la educación y la organización de los eventos nacionales e internacionales.
11. Conformar una "Fundación Olímpica Boliviana de Física, Astronomía y Astrofísica" cuyos miembros sean: los delegados olímpicos departamentales, las instituciones científicas, los profesionales dependientes e independientes, los miembros de la empresa privada, el Gobierno a través de sus responsables directos, las Universidades, las ONGs, etc., y cuya participación garantice la cobertura económica que demanda la organización de todas las olimpiadas, garantizando así que éstas se realicen anualmente con la participación de las distintas delegaciones nacionales y regionales en eventos nacionales e internacionales.
12. Participar continuamente en los siguientes eventos:
  - (a) Olimpiada Internacional de Astronomía y Astrofísica (IOAA)
  - (b) Olimpiada Internacional de Física (IPhO)
  - (c) Olimpiada Iberoamericana de Física (OIbF)
  - (d) Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica (OLAA)
13. Impartir seminarios, talleres y diplomados a los profesores de las áreas de física, matemática, química y ciencias en general, acerca de temas tales como: Nuevas metodologías de enseñanza, *Astronomía y Astrofísica*, *Experimentos de Física*, *Astronomía de bajo costo*, etc.

### 1.3. LA OLIMPIADA BOLIVIANA DE FÍSICA, ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA (OBFAA) Y LA OLIMPIADA CIENTÍFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA (OCEPB)

En 2001 el Ministerio de Educación convocó a una reunión de organización para crear las primeras Olimpiadas Científicas Estudiantiles Plurinacionales Bolivianas (OCEPB) (Ministerio de Educación 2013). Los comités olímpicos de la OBF y la OBAA aceptaron acoplarse a la iniciativa con el fin de aunar esfuerzos y dejar de ser un poco administradores del programa para pasar a encarar un papel más académico, es decir, preparación de material educativo, evaluación de exámenes, entrenamiento de las delegaciones, coordinación con el magisterio para reorientar la malla curricular, etc. Entre los aspectos positivos y negativos de esa iniciativa se puede mencionar:

#### Aspectos positivos

1. El gobierno cubriría los costos de la organización de los eventos departamentales, nacionales y el apoyo a las delegaciones bolivianas para viajar al exterior y representar al país en olimpiadas internacionales.

#### Aspectos negativos

1. En ambos programas olímpicos, OBF y OBAA, si bien se apoyó la continuidad de ambos programas, se bajó el número de categorías de 7 (que ya estaban establecidas a nivel nacional) a 3 en la etapa nacional.
2. Se disminuyó el contenido mínimo obedeciendo a sugerencias que buscaban coincidir con la malla curricular establecida, pero alejándose del concepto *per se* de una olimpiada.
3. Se decidió apoyar con la asistencia a un solo evento internacional por gestión. La OBF y la OBAA participan en 2 eventos anuales: la IPhO - OIbF y la OLAA - IOAA respectivamente.

Por otra parte, mencionemos que recientemente se ha tratado de incorporar en cada una de las 7 categorías de la OBF – OBAA temas referentes a la física nuclear dada la estrecha relación entre el contenido mínimo de las olimpiadas y los temas que son la base para el estudio de la física nuclear, de tal forma de poder extender premios especiales a los estudiantes que se destaquen en ese campo. El objetivo es el fomentar el estudio de una o varias ramas adicionales de la física asignando certificados de reconocimiento en los eventos nacionales correspondientes.

### 1.4. OLIMPIADAS INTERNACIONALES

La Olimpiada Iberoamericana de Física (OIbF), la Olimpiada Internacional de Física (IPhO), la Olimpiada Internacional de Astronomía y Astrofísica (IOAA) y la Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica (OLAA) son iniciativas internacionales cuyo objetivo principal es consistente

con el de la OBA y la OBAA. Esos programas internacionales, al igual que los programas en Bolivia, confrontan desafíos económicos para su organización y en muchos casos recurren a cobrar cuotas (*fees*). Tal es el caso de la IPhO y últimamente de la IOAA. Para algunas delegaciones el cobro de una cuota es un problema; por ejemplo, en el caso de Bolivia hay años en los que no se logra conseguir el 100% del costo de los pasajes aéreos y aún menos financiar la cuota de inscripción. Esto ha impedido que las delegaciones bolivianas puedan asistir regularmente a dichos eventos internacionales. Sin embargo, es importante resaltar que, cuando ha sido posible asistir, Bolivia ha demostrado ser un país competitivo, habiendo obtenido importantes premios, no solo en las IPhO y IOAA, sino también en las OIbF y OLAA.

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

Entre los materiales utilizados para las pruebas experimentales se ha dado énfasis a la elaboración de modelos y experimentos de bajo costo, que permitan a *todos* los estudiantes de las distintas regiones del país realizar los experimentos, tomar datos y analizarlos, en cada etapa y categoría de los concursos. De igual modo, a raíz de la cuarentena debida al Covid-19, se ha dado énfasis al diseño de experimentos y modelos virtuales, actividad que tiene un gran impacto entre los jóvenes y sus profesores.

Entre las estrategias y métodos utilizados podemos mencionar:

1. Ofrecer a los participantes y ganadores certificaciones de participación o aprobación.
2. Organizar el Diplomado en Física para Profesores de Colegio (DFIS) (Bustos Espinoza *et al.* 2006) a fin de actualizar los conocimientos de los profesores de distintas unidades educativas.
3. Organizar olimpiadas internacionales en el país, buscando incrementar de manera transversal la motivación de los estudiantes
4. Aprovechar al máximo la tecnología de fácil acceso por un buen porcentaje de los estudiantes, no sólo en las áreas urbanas sino también en las zonas rurales, a fin de optimizar el proceso de enseñanza – aprendizaje a distancia ya sea a través de exámenes, experimentos virtuales, textos, diálogos con especialistas, grupos de estudio, entrenamientos virtuales, etc.
5. Dar énfasis en escribir la mayor cantidad de artículos, guías, cartillas, etc., por ejemplo, en la Revista Boliviana de Física (fiumsa-rbf 2021), con explicaciones rápidas y útiles para los estudiantes (y el público en general).
6. Participar en nuevas iniciativas olímpicas, como la Olimpiada Científica Estudiantil (OCE) (FCPN 2021), organizada por la Facultad de Ciencias Puras y Naturales de la UMSA.

7. Participar en el evento Física a Puertas Abiertas (FAPA) organizada anualmente por la Carrera de Física de la UMSA (fiumsa 2021).

A continuación explicamos con mayor detalle algunos de los métodos o estrategias referidos en el párrafo anterior.

### 2.1. CERTIFICADOS Y PREMIOS ESPECIALES

Tradicionalmente se entregan distintos tipos de certificados para reconocer el tiempo y esfuerzo que los estudiantes dedicaron a su preparación; las categorías de dichos certificados son: participación, aprobación, mejor participación femenina, mejor participación del área rural, mejor examen experimental, mejor examen teórico, mejor examen en alguna disciplina específica (física nuclear, electromagnetismo, etc.) De igual modo, dependiendo de la cantidad de auspicios que se logren conseguir en cada evento, se han entregado premios especiales como ser: libros, telescopios o binoculares, etc.

### 2.2. DIPLOMADO EN FÍSICA PARA PROFESORES DE COLEGIO (DFIS)

Durante los primeros años de la OBF y la OBAA se pudo evidenciar un rendimiento no muy óptimo en los estudiantes participantes, por lo que el Comité Olímpico de ambos eventos, en conjunto con la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y la Carrera de Física (UMSA), decidieron ofrecer a los profesores de todas las Unidades Educativas del país un curso de actualización docente que se realizó con éxito durante dos semanas en 2006. Ahí nació la idea de llevar adelante el primer Diplomado en Física para Profesores de Colegio (DFIS) para dar la oportunidad de actualizar y ofrecer nuevos conocimientos a los profesores normalistas; así, los graduados del DFIS podrían transmitir esos conocimientos a sus estudiantes, buscando de este modo incrementar su rendimiento en general. Para que el DFIS tenga mayor alcance se decidió en ese momento utilizar internet y así poder llegar a las zonas urbanas y rurales del país (Bustos Espinoza *et al.* 2006).

El DFIS tiene como objetivo final el de otorgar al graduado las condiciones para desarrollar estudios que demuestren el dominio de los instrumentos conceptuales y metodológicos esenciales en su área, calificándolo como profesor y docente habilitado del nivel de Unidades Educativas en la rama de las ciencias puras y naturales, especializado en física con mención en los módulos aprobados.

El DFIS cuenta con una duración de 800 horas académicas de duración, según está estipulado en normas universitarias, de las cuales 80% son actividades virtuales y 20% actividades presenciales. El DFIS en todas sus versiones (6) contó con el respaldo institucional de la UMSA. El título otorgado es el de DIPLOMADO EN FÍSICA especificando el nombre de los módulos vencidos en el mismo. De igual modo el DFIS se amplía para que los mejores estudiantes de colegio, en el área de Física, Astronomía

y Astrofísica ganadores de la OBF y de la OBAA puedan cursar los módulos como un mecanismo de entrenamiento para optimizar su aprendizaje en futuras competencias internacionales<sup>1</sup>.

En las 6 versiones que ya se llevaron a cabo del DFIS se dictaron los siguientes módulos (de los cuales el diplomante debía aprobar solo 4 a excepción de los estudiantes olímpicos que debían aprobar 12): MECÁNICA - MECÁNICA DE LOS FLUIDOS - ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO - TEORÍA DE ERRORES Y EXPERIMENTOS - ONDAS MECÁNICAS - RELATIVIDAD - FÍSICA CUÁNTICA - TERMODINÁMICA - ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA - CAMBIO CLIMÁTICO - DIDÁCTICA DE LA FÍSICA - INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NUCLEAR - INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA DE PARTÍCULAS - GESTIÓN DEL CONOCIMIENTO NUCLEAR.

### 2.3. OLIMPIADAS INTERNACIONALES ORGANIZADAS EN BOLIVIA

En el transcurso de las distintas gestiones, el Comité Olímpico de la OBF y de la OBAA, en conjunto con las instituciones gubernamentales, asociaciones, sociedades, empresas privadas, fundaciones, etc., han organizado los siguientes eventos internacionales en el país:

1. VI Olimpiada Iberoamericana de Física (VI OIBF), Sorata, La Paz, Bolivia, (2001) (Palenque 2001)
2. 1<sup>ra</sup> Olimpiada Andina de Astronomía y Astrofísica (1<sup>ra</sup> OAAA<sup>2</sup>), Lago Titikaka, La Paz, Bolivia, (2009) (Bustos Espinoza 2009)
3. V Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica (V OLAA), Cochabamba, Bolivia, (2013)
4. XX OIBF, Cochabamba, Bolivia, (2015) (FCYT-UMSS 2015)

Mediante la organización de los mencionados eventos, de una manera transversal, se ha motivado al estudio constante en las distintas generaciones de estudiantes Bolivianos vinculados con los programas olímpicos, contribuyendo de este modo a la profundización de sus conocimientos en el campo de la física, la astronomía y la astrofísica.

<sup>1</sup> Los estudiantes de las olimpiadas que cursan el DFIS no reciben ningún título universitario ni certificado. Los docentes los evalúan como si fueran alumnos oficiales del módulo respectivo y su nota lo habilita para que sean parte de la selección boliviana respectiva.

<sup>2</sup> La 1<sup>ra</sup> OAAA se llevó a cabo en Junio de 2009, posteriormente Brasil creó la 1ra Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica (OLAA) en Octubre de ese mismo año. Bolivia participa continuamente en la OLAA y se dejó de organizar la OAAA para no dispersar esfuerzos en la región.

Evento	Año	Sede	Departamentos Participantes
1 <sup>a</sup> OBF	1991	La Paz	2
2 <sup>a</sup> OBF	1997	La Paz	6
3 <sup>a</sup> OBF	1998	La Paz	7
4 <sup>a</sup> OBF	1999	La Paz	7
5 <sup>a</sup> OBF	2000	Tarija	7
6 <sup>a</sup> OBF	2001	Potosí	7
7 <sup>a</sup> OBF	2002	La Paz	7
8 <sup>a</sup> OBF	2003	Santa Cruz	9
9 <sup>a</sup> OBF	2004	Huanuni	9
10 <sup>a</sup> OBF	2005	Sucre	9
11 <sup>a</sup> OBF		Oruro	8
1 <sup>a</sup> OBAA	2006	La Paz	7
12 <sup>a</sup> OBF		Santa Cruz	8
2 <sup>a</sup> OBAA	2007	Tarija	7
13 <sup>a</sup> OBF			
3 <sup>a</sup> OBAA	2008	Pando	8
14 <sup>a</sup> OBF			
4 <sup>a</sup> OBAA	2009	Yacuiba	9
15 <sup>a</sup> OBF			
5 <sup>a</sup> OBAA	2010	Cochabamba	10
16 <sup>a</sup> OBF			
6 <sup>a</sup> OBAA	2011	Beni	10
17 <sup>a</sup> OBF			
7 <sup>a</sup> OBAA	2012	Cochabamba	9
18 <sup>a</sup> OBF			
8 <sup>a</sup> OBAA	2013	Tarija	9
19 <sup>a</sup> OBF			
9 <sup>a</sup> OBAA	2014	Potosí	9
20 <sup>a</sup> OBF			
10 <sup>a</sup> OBAA	2015	Cochabamba	9
21 <sup>a</sup> OBF			
11 <sup>a</sup> OBAA	2016	Santa Cruz	9
22 <sup>a</sup> OBF			
12 <sup>a</sup> OBAA	2017	Sucre	9
23 <sup>a</sup> OBF			
13 <sup>a</sup> OBAA	2018	Potosí	9
24 <sup>a</sup> OBF			
14 <sup>a</sup> OBAA	2019	Sucre	9

TABLA 1  
SEDES Y DEPARTAMENTOS PARTICIPANTES

#### 2.4. ENTRENAMIENTO A DISTANCIA

Durante la presente cuarentena, debida al Covid-19 (WHO 2019), se ha optimizado el sistema de entrenamiento/educación a distancia para ofrecer herramientas accesibles para que los jóvenes olímpicos puedan utilizarlas en su aprendizaje. Las mismas consisten en exámenes on-line donde el sistema informático le dá su nota inmediatamente. Acceso a las clases del DFIS, donde además el usuario puede hacer consultas no-simultáneas con el profesor de cada módulo. Es decir, los jóvenes y usuarios en general pueden estar en contacto con un especialista vía correo electrónico, Whatsapp, Classroom, etc.

### 3. RESULTADOS

#### 3.1. PREMIOS INTERNACIONALES OIBF - IPHO - OAAA - OLAA - IOAA - OBF - OBAA

##### 3.1.1. Olimpiada Iberoamericana de Física (OIBF)

1. Medallas de Plata (3)

Eventos	Año	Horas Académicas Impartidas en el entrenamiento de las delegaciones (Hrs.)	Número de Docentes
1 <sup>a</sup> OBF	1991	-	
2 <sup>a</sup> OBF → II OIBF	1997	80	3
3 <sup>a</sup> OBF → III OIBF	1998	100	3
4 <sup>a</sup> OBF → IV OIBF	1999	120	3
5 <sup>a</sup> OBF → V OIBF	2000	120	3
6 <sup>a</sup> OBF → VI OIBF	2001	160	4
7 <sup>a</sup> OBF → VII OIBF	2002	180	4
...	...	...	...
OBF - OBAA	2020	900	21

TABLA 2  
HORAS ACADÉMICAS Y NÚMERO DE PROFESORES VINCULADOS CON EL PROGRAMA (FUENTES PROPIAS)

Actividad	Evento	Horas Académicas Impartidas en el entrenamiento de las delegaciones (antes del evento)*	Numero de Docentes
Teoría	IPhO - OIBF - IOAA - OLAA	13 horas semanales durante 2 meses	3
Laboratorio	IPhO - OIBF - IOAA - OLAA	5 horas semanales durante 1 mes y medio	2
EXAMENES DIAGNÓSTICOS ORIGINALES	IPhO - OIBF - IOAA - OLAA	1 semanal	1
EXAMENES DIAGNÓSTICOS DE OLIMPIADAS PASADAS	IPhO - OIBF - IOAA - OLAA	1 semanal	1
CUESTIONARIOS CONCEPTUALES ROBUSTOS	IPhO - OIBF - IOAA - OLAA	1 semanal	1

\* Caso F.E.S.A. (Cochabamba)

TABLA 3  
HORAS ACADÉMICAS, NÚMERO DE PROFESORES VINCULADOS CON EL PROGRAMA PARA OBTENER MEDALLAS DE ORO, PLATA O BRONCE EN LAS IPHO - OIBF - IOAA - OLAA

2. Medallas de Bronce (10)

3. Menciones de Honor (12)

3.1.2. *International Physics Olympiad (IPhO)*

1. Mención de Honor (4º lugar a nivel mundial) en la 37<sup>ma</sup> IPhO, 2005
2. Mención de Honor (4º lugar a nivel mundial) en la 38<sup>va</sup> IPhO, 2006

3.1.3. *Olimpiada Andina de Astronomía y Astrofísica (OAAA)*

1. Medalla de Oro (1er lugar a nivel Andino)
2. Medalla de Plata (2do lugar a nivel Andino)
3. Medalla de Bronce (3er lugar a nivel Andino)
4. Menciones de Honor (4to lugar a nivel Andino) (2)

3.1.4. *Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica (OLAA)*

1. Medalla de Oro
2. Medallas de Plata (7)
3. Medallas de Bronce (4)
4. Menciones de Honor (3)

3.1.5. *International Olympiad on Astronomy and Astrophysics (IOAA)*

1. Mención de Honor (4º lugar a nivel mundial) en la 1<sup>ra</sup> IOAA, 2007
2. Mención de Honor (4º lugar a nivel mundial) en la 3<sup>ra</sup> IOAA, 2009
3. Medalla de Bronce (3er lugar a nivel mundial) en la 7<sup>ma</sup> IOAA, 2013

3.1.6. *European (Virtual) Physics Olympiad (EuPhO) July 2020*

1. Participación

3.2. **EDUCACIÓN A DISTANCIA**

Se han implementado distintas plataformas para poder interactuar con los estudiantes, profesores, profesionales y público interesado en general. Las páginas mostradas se han desarrollado en códigos y plataformas adecuados: HTML, MOODLE, Wikifísica, DFIS-MOODLE, etc. A continuación se muestran las direcciones web de los siguientes proyectos:

1. Página de la Olimpiada Boliviana de Física y de la Olimpiada Boliviana de Astronomía y Astrofísica: <http://fiumsa.edu.bo/olimpiada/index.html>
2. Página WEB del 6to Diplomado en Física para Profesores de Colegio (DFÍS): <http://www.fiumsa.edu.bo/dfis/index.html>
3. Página MOODLE del 6to Diplomado en Física para Profesores de Colegio (DFÍS): <http://200.7.170.252/moodle/>

4. Página MOODLE de la Olimpiada Boliviana de Física y de la Olimpiada Boliviana de Astronomía y Astrofísica: <https://obfobaa.fcfn.edu.bo/>

5. Página WEB con un ejemplo de problema que debe ser resuelto escogiendo una de las opciones mostradas. El sistema le calificará inmediatamente después de finalizar la evaluación virtual: <https://obfobaa.fcfn.edu.bo/mod/quiz/attempt.php?attempt=12&cmid=15&page=3>

## 4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

A pesar de que el Índice de Desarrollo Humano (IDH) (wikipedia 2021) se ha incrementado continuamente en Bolivia desde 1990 (según reporte de las Naciones Unidas (Naciones Unidas 2021)), siempre estuvimos por debajo de la media de la región Latinoamericana y el Caribe (ourworldindata 2017). Los mismos reportes indican que hemos llegado a estar clasificados como una nación en desarrollo con un IDH en constante aumento, pero quizás las políticas referidas a los porcentajes destinados a los salarios de los profesores, la formación constante de los mismos y al mejoramiento de la infraestructura física y tecnológica de las unidades educativas, deberían haberse incrementado significativamente.

De igual modo, los currícula actuales están estancados en una física del siglo XVII cuando los desafíos para afrontar el presente milenio deben re-orientarse radicalmente, de no ser así estaremos condenados a un estancamiento en el proceso enseñanza – aprendizaje de las generaciones actuales y venideras. ¿Cuánta física existe en un celular?, ¿cómo se detectan planetas nuevos cada día?, ¿por qué no enseñar física contemporánea en el colegio?

Además, la enseñanza de la física en las unidades educativas, en especial en las unidades educativas estatales, ha sufrido una disminución de las horas académicas, y –como si fuera poco– se decidió asignar la enseñanza de la materia a profesionales de otras ramas. Los gobiernos de turno suelen comprometerse a gestionar soluciones factibles, sin embargo, en la realidad, las decisiones referidas a la educación no son las más acertadas. Debemos crear programas o impulsar los ya existentes para continuar el fomento al estudio de las ciencias en general y de la física, la astronomía y la astrofísica en particular, en las etapas de formación más importantes del crecimiento, como son la niñez y la juventud. El programa, OBF - OBAA, si bien pretende contribuir con un granito de arena a los problemas inherentes de la educación en nuestro país, se muestra como un salvavidas que estará siempre ahí para los jóvenes talentos bolivianos.

El programa OBF - OBAA ya forma una alianza con otras iniciativas, como ser las Olimpiadas de Química, Matemática, Geografía, Informática, etc.; esta alianza se debe fortalecer para ofrecer a la sociedad una sólida estructura que garantice, desde las Universidades, un compromiso: coadyuvar en el

proceso de enseñanza - aprendizaje en las unidades educativas fiscales, privadas y de convenio en todo el país, y así ayudar –no sólo en la optimización de la parte científica y tecnológica– sino también al desa-

rrollo social, económico y cultural de Bolivia.

#### **Conflicto de intereses**

Los autores declaran que no hay conflicto de intereses con respecto a la publicación de éste documento.

#### REFERENCIAS

- Bustos Espinoza R., et al (2006) *Revista Boliviana de Física* **14**, pp.150-153.
- Bustos Espinoza R. O. E. (2009) *Revista Boliviana de Física* **15**, pp.67-72.
- Física U.M.S.A. (2021) <https://www.fiumsa.edu.bo>.
- FCPN (2021) <https://oce.fcpn.edu.bo/index.jsp>.
- Gorzowski W. (2006) International Physics Olympiads (IPhO): History, Structure and Future. Poland: Instytut Fizyki PAN.
- IOAA (2007) <https://www.ioaastrophysics.org/about-ioaa/>.
- Ministerio de Educación E.P.B. (2013), *Revista 3ra OCEPB* Bolivia.
- OIF (2015) <http://oibf2015.fcyt.umss.edu.bo>.
- OWD (2017) [https://ourworldindata.org/grapher/human-development-index?country=~\\_BOL](https://ourworldindata.org/grapher/human-development-index?country=~_BOL).
- Palenque V. E. (2001) *Revista Boliviana de Física* **7**, pp.179-200.
- RBF (2021) <http://fiumsa.edu.bo/rbf/index.html>.
- Rodriguez C. A. (2004) *Fundación de la Federación Latinoamericana de Sociedades de Física (FeLaSoFi)*. México: Boletín de la Sociedad Mexicana de Física.
- UNDATA (2021) <http://data.un.org/en/iso/bo.html>.
- WHO (2019) <https://www.who.int/es/emergencias/diseases/novel-coronavirus-2019>.
- WIKIPEDIA OLAA (2021) [https://es.wikipedia.org/wiki/Olimpiada Latinoamericana de Astronomía y Astronáutica](https://es.wikipedia.org/wiki/Olimpiada_Latinoamericana_de_Astronomía_y_Astronáutica).
- WIKIPEDIA EB (2021) [https://en.wikipedia.org/wiki/Economy of Bolivia](https://en.wikipedia.org/wiki/Economy_of_Bolivia), cite note-UNDP-30.

---

## REVISTA BOLIVIANA DE FÍSICA

### COMITÉ EDITORIAL

#### Sociedad Boliviana de Física

**Lic. Alfonso Velarde Chávez**  
Email: alfonso.velarde@gmail.com

#### Instituto de Investigaciones Físicas

**Dr. Flavio Ghezzi Moris**  
Email: fghezzi@fiumsa.edu.bo  
**Dr. Wilfredo Tavera Llanos**  
Email: witavera@fiumsa.edu.bo

#### Carrera de Física

**Dr. Armando R. Ticona Bustillos**  
Email: aticona@fiumsa.edu.bo

Casilla 8635, La Paz – Bolivia. Tel.: (591-2) 2792999, Fax: (591-2) 2792622

---

#### Misión

La Revista Boliviana de Física (RBF) es el órgano oficial de la Sociedad Boliviana de Física (SOBOFI) y se publica semestralmente en forma conjunta con el Instituto de Investigaciones Físicas y la Carrera de Física de la Universidad Mayor de San Andrés (IIF-UMSA).

La RBF busca difundir la producción científica de la comunidad de físicos y profesionales de ciencias afines, especialmente dentro de Iberoamérica.

#### Secciones

Los artículos, revisiones y colaboraciones se distribuyen en las siguientes secciones:

- A. **Artículos:** Son trabajos que presentan material nuevo y original. Para su publicación, deben ser revisados y aprobados por árbitros del Consejo Editorial. Los artículos deberán tener un resumen no mayor a 200 palabras y secciones de Introducción, Métodos y Procedimientos, Resultados y/o Discusión de datos, Conclusiones y Referencias.
- B. **Contribuciones y Revisiones:** Estos trabajos no presentan, necesariamente, material original sino que definen la posición del (de los) autor(es) sobre un determinado tópico de debate (en el caso de Contribuciones) o bien, son una revisión de temas conocidos en algún área de la física (en el caso de Revisiones). Las contribuciones deberán estar orientadas hacia la difusión de algún problema o debate interpretativo. Las revisiones estarán orientadas a exponer temas de trascendencia para el desarrollo de las ciencias relacionadas con la física, o exponer en forma didáctica algún tema que los autores encuentren que no ha sido tratado en forma adecuada en la literatura asequible en lengua castellana.
- C. **Memorias de la Reunión Anual de la SOBOFI u otras reuniones de física:** Esta sección reúne los resúmenes de los trabajos presentados durante la última Reunión Nacional Anual de la SOBOFI o de otras reuniones científicas importantes sobre física.
- D. **Enseñanza de la Física:** Esta sección está dedicada a artículos que tratan sobre problemas relacionados a la enseñanza de la física o a la promoción del estudio de la física entre los jóvenes estudiantes. Se incorporan regularmente en esta sección los exámenes de las Olimpiadas de Física y las Olimpiadas de Astronomía y Astrofísica. Las contribuciones a esta sección son seleccionadas exclusivamente por el Comité Editorial.
- E. **Historia:** Esta sección se dedica a la conmemoración de hechos importantes en la historia de la Física Boliviana e Iberoamericana. De igual manera, se orienta a la recopilación de publicaciones relacionadas a la física que, por su importancia histórica, merecen ser nuevamente publicadas.

#### Instrucciones para los autores

La Revista Boliviana de Física recibe trabajos escritos en castellano, inglés o portugués y deben contar con un resumen en castellano y su correspondiente traducción en inglés.

Los autores deberán enviar sus trabajos preferentemente en los formatos  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ , *MS Word*, o *sólo texto* (con extensiones *.tex*, *.doc* y *.txt*, respectivamente), ya sea mediante una copia en dispositivo magnético o bien por correo electrónico. En este caso, deberán incluir una carátula donde se especifique el título del trabajo, los nombres de los autores, las direcciones (postal y/o electrónica) y el resumen del trabajo. Además, las figuras, tablas y notas de pie de página contenidas deberán estar indicadas en el texto, debidamente numeradas y referenciadas. Las figuras deberán tener una resolución razonable a fin de que puedan ser vistas con suficiente claridad por el lector.

Los artículos científicos serán revisados por el Comité Editorial y posteriormente por un par de árbitros anónimos quienes dan el veredicto sobre si el artículo es aceptado o no.

La comunicación de los autores con los árbitros se realiza únicamente a través del editor encargado del área.

Los trabajos y consultas sobre la RBF deberán enviarse a las direcciones del Comité Editorial indicadas arriba.

Conflicto de interés: Los autores que envíen artículos para su publicación en la RBF admiten que no tienen conflicto de interés en relación a los trabajos realizados y presentados.

## CONTENIDO

EDITORIAL

*Editor*

### A. ARTÍCULOS

ESTUDIO TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE LA RIQUEZA  
DINÁMICA DEL CIRCUITO DE HARTLEY

*Abdias Sergio Callejas-Icuña, Aurelio Alejandro Suxo-Coro & Gonzalo  
Marcelo Ramírez-Ávila*

ACOPLAMIENTO DE LA ELECTRODINÁMICA DE MAXWELL-  
CHERN-SIMONS A UN CAMPO GRAVITACIONAL EN PRESENCIA  
DE UN MEDIO ÓPTICO NO DISPERSIVO EN 2+1 DIMENSIONES

*Mirko Landivar*

DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA EN UNA RED DE ENLACE  
FUERTE BAJO UN POTENCIAL COULOMBIANO

*Javier Alejandro Velasco Villarroel & Diego Sanjinés Castedo*

### D. ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

LA OLIMPIADA BOLVIANA DE FÍSICA Y LA OLIMPIADA  
BOLIVIANA DE ASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA COMO  
PROGRAMA DE INCENTIVO AL ESTUDIO DE LA FÍSICA EN  
BOLIVIA

*Roy Bustos et al.*